Cours n° 4 : programmation dynamique

Christophe Gonzales

POLYTECH MARSEILLE Aix-Marseille Université

HUGO3 — Algorithmique

But du cours n° 4

Programmation dynamique

- Idée : **diviser** un problème en sous-problèmes *non* indépendants
- **Stocker** les solutions de ces sous-problèmes
  $\Longrightarrow$ on ne calcule pas 2 fois la même chose
- Se servir des solutions stockées pour résoudre le problème d'origine

Illustrations du principe :

- Séquence commune la plus longue à 2 chaînes de caractères
- Distance de Levenshtein (entre 2 chaînes)
- Multiplications d'une séquence de matrices
- Stockage : sac à dos 0-1, rendu de monnaie
- Plus court chemin
- Apprentissage de paramètres (Baum-Welch)

Intermède culturel

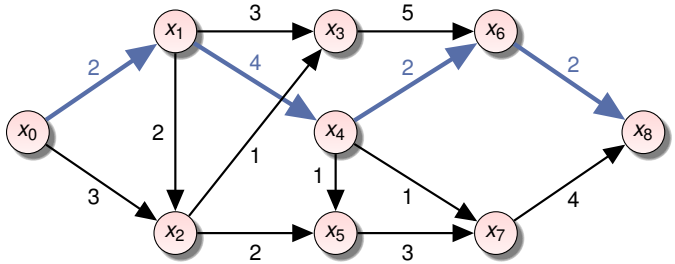
- **Historique :** paradigme développé par Richard Bellman dans les années 50 :

Dynamic Programming (1957)
Princeton University Press

- **Préface du livre :**
  - « Théorie mathématique de processus de décision séquentiels »
  - Systèmes qui évoluent dans le temps
  - Décision : choix de la transformation du système
    $\Longrightarrow$ on recherche la « meilleure » transformation
    $\Longrightarrow$ optimisation
  - Séquentiels : plusieurs décisions à prendre dans le temps
  - Temps $\Longrightarrow$ « dynamique »
  - « Le temps joue un rôle important et l'ordre des opérations est cruciale »
  - Programmation dynamique $\Longrightarrow$ utiliser cet ordre pour construire *progressivement* la solution

Retour sur le GPS : plus court chemin

Problème : aller le plus rapidement de x_0 à x_8 :



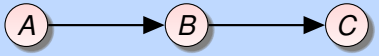
- Nœud (x_i) : ville
- Arc $x_i \to x_j$: « chemin » permettant de se rendre de x_i à x_j
- Nombre à côté d'un arc $x_i \to x_j$: temps pour aller de x_i à x_j

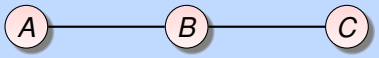
Chemin le plus rapide $\Longrightarrow$ minimum somme des temps

- **Exemple :** temps $(x_0 \to x_1 \to x_4 \to x_6 \to x_8) = 2 + 4 + 2 + 2 = 10$

Terminologie : théorie des graphes

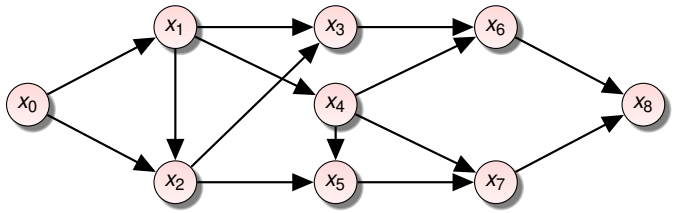
Graphe, orienté, non orienté, DAG...

- Graphe : couple $G = (V, E)$
- V : ensemble de nœuds (ou *sommets*) = $\{x_0, \ldots, x_8\}$
- $E \subseteq V \times V$: extrémités des arcs ou arêtes
- Graphe orienté : $G_1 =$ 

  $V = \{A, B, C\}$, $E = \{(A, B), (B, C)\} = \{\text{arcs}\}$
- Graphe non orienté : $G_2 =$ 

  $V = \{A, B, C\}$, $E = \{(A, B), (B, A), (B, C), (C, B)\} = \{\text{arêtes}\}$
- Dans un graphe orienté, pour tout nœud $v \in V$:
  - v' : parent$(v) \iff (v', v) \in E$: dans G_1, $B =$ parent(C)
  - v' : enfant$(v) \iff (v, v') \in E$: dans G_1, $C =$ enfant(B)
- Dans un graphe non orienté, pour tout nœud $v \in V$:
  - v' : voisin$(v) \iff (v', v) \in E$: dans G_2, $B =$ voisin(C)

Terminologie : théorie des graphes (suite)



Propriétés des graphes orientés

- Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté
- **Chemin :** suite de nœuds $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq V$ tel que :
  pour tout $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, $(v_i, v_{i+1}) \in E$
  On suit le sens des arcs. Exemple : $\{x_1, x_4, x_5, x_7\}$
- **Chaîne :** suite de nœuds $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq V$ tel que :
  pour tout $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, $(v_i, v_{i+1}) \in E$ **ou** $(v_{i+1}, v_i) \in E$
  On peut ne pas suivre le sens des arcs. Exemple : $\{x_1, x_4, x_7, x_5\}$
- **Circuit :** chemin $\{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1\}$
  $\Longrightarrow$ chemin où on revient au point de départ
- **Cycle :** chaîne $\{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1\}$. Exemple : $\{x_4, x_5, x_7, x_4\}$

Terminologie : théorie des graphes (fin)

Directed Acyclic Graph (DAG)

DAG = graphe orienté sans circuit.

Ordre topologique

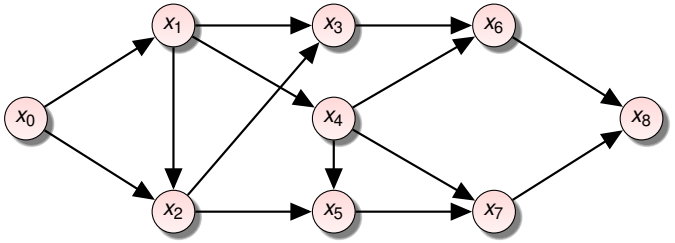
- Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté
- Ordre $\prec$ sur les nœuds tel que :
  pour tout arc $(x_i, x_j) \in E$, on a $x_i \prec x_j$

Théorème : dans tout DAG, il existe un ordre topologique.

Démonstration : par récurrence.

Plus court chemin : examiner les nœuds dans cet ordre !

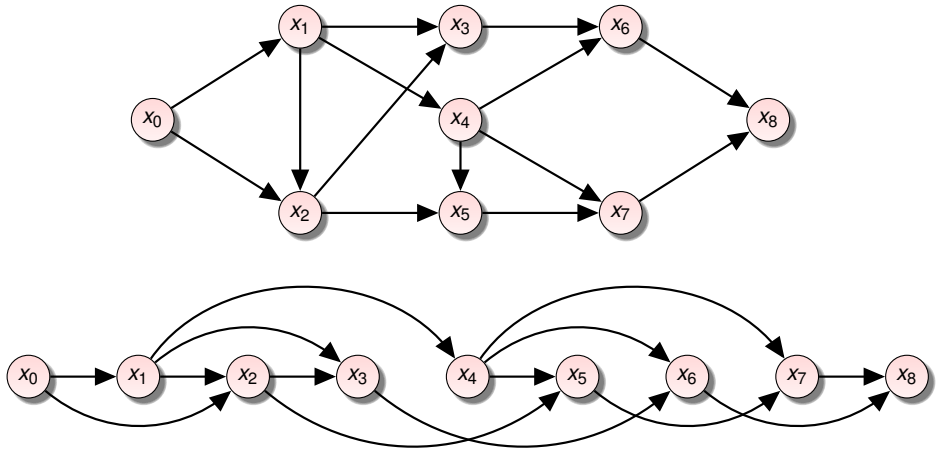
Ordre topologique



$x_0 \prec x_1 \prec x_2 \prec x_3 \prec x_4 \prec x_5 \prec x_6 \prec x_7 \prec x_8$

- DAG $\Longrightarrow$ il existe au moins un nœud sans parent !
- Rajouter ce nœud sans parent dans l'ordre topologique
- Supprimer ce nœud du graphe et réitérer

Ordre topologique (suite et fin)



Par construction : arcs uniquement de la gauche vers la droite !

Intermède culturel

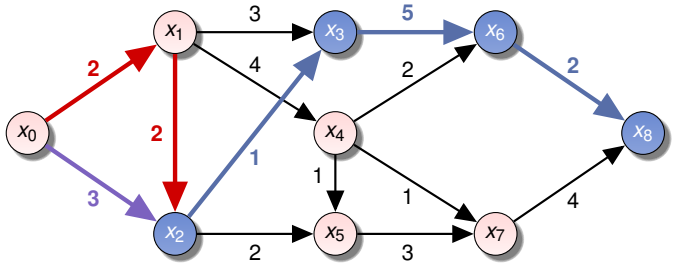
- Théorie des graphes $\Longrightarrow$ Claude Berge

Théorie des graphes et ses applications (1958)
Dunod, Paris

- Introduction des « graphes parfaits »
- Prix Euler en 1993
- Membre fondateur de l'Oulipo en 1960
  (Georges Perec, Raymond Queneau, Italo Calvino, *etc.*)
- Romans policiers et poèmes
  Qui a tué le Duc de Densmore ?
  La reine aztèque ou contraintes pour un sonnet à longueur variable

GPS : idée pour calculer le plus court chemin

Problème : aller le plus rapidement de x_0 à x_8 :

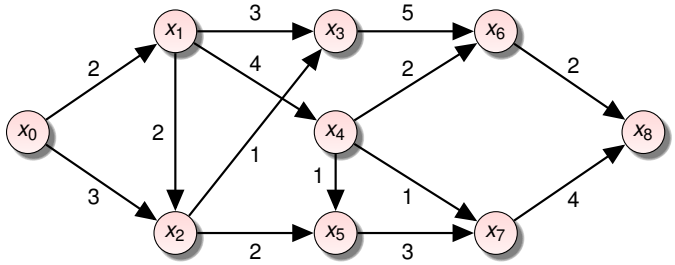


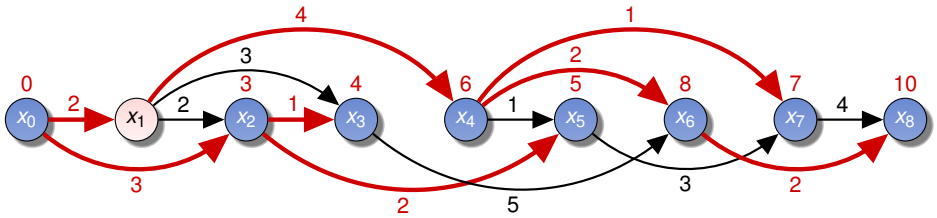
- **Idée :** Si chemin passe par x_2 suivant le chemin bleu
  Chemin optimal = Chemin rouge puis bleu ou violet puis bleu ?

Chemin optimal passant par x_2 =
chemin optimal de x_0 à x_2 + chemin optimal de x_2 à x_8

$\Longrightarrow$ Plus rapide que de calculer tous les chemins passant par x_2 !

Calcul rapide du plus court chemin





Chemin optimal : $x_8 \leftarrow x_6 \leftarrow x_4 \leftarrow x_1 \leftarrow x_0$

Algorithme rapide du plus court chemin (1/2)

- `V` : ensemble des nœuds, `E` : ensemble des arcs
- `Poids` : tableau contenant le temps de trajet de chaque arc

```
1  fonction init (V, Temps, Parent) :
2    n ← nombre de nœuds de V
3    pour i variant de 0 à n-1 faire  # i ⟺ noeud x_i
4      Temps[i]  ← +∞  # temps pour aller de x_0 à x_i
5      Parent[i] ← -1   # -1 = parent de x_i non affecté
6    fait
7    Temps[0] ← 0
```

```
1  fonction calc_parent (V, E, Poids, Temps, Parent) :
2    init (V, Temps, Parent)
3    n ← nombre de nœuds de V
4    pour i variant de 1 à n-1 faire
5      pour tout j tel que (x_j, x_i) ∈ E faire # arc (x_j, x_i) existe
6        si Temps[j] + Poids[j,i] < Temps[i] alors
7          Temps[i]  ← Temps[j] + Poids[j,i]
8          Parent[i] ← j
9        finsi
10     fait
11   fait
12   # ici, Temps[i] = temps optimal pour aller de x_0 à x_i
13   # Parent[i] = noeud précédant x_i sur le chemin optimal
```


Algorithme rapide du plus court chemin (2/2)

```
1  fonction plus_court_chemin (V, E, Poids) :
2    n ← nombre de nœuds de V
3    créer deux tableaux Temps et Parent de longueur n
4
5    # phase 1 : on calcule les arcs rouges de la
6    # gauche vers la droite
7    calc_parent (V, E, Poids, Temps, Parent)
8
9    # phase 2 : on parcourt ces arcs de la droite
10   # vers la gauche
11   Chemin ← {n-1} # noeud arrivée
12   i = n-1
13   tant que i ≠ 0 faire
14     Chemin ← {Parent[i]} ∪ Chemin
15     i ← Parent[i]
16   fait
17
18   retourner Chemin
```

- Parcours optimal de x_0 à x_k, $k \neq n-1$:
  remplacer `n-1` sur les lignes 11 et 12 par k.

En résumé

Programmation dynamique : 2 phases

Phase 1

- On calcule itérativement les informations utiles pour la solution optimale
- Pour cela : formule mathématique
  Exemple du plus court chemin : En chaque noeud x_i :

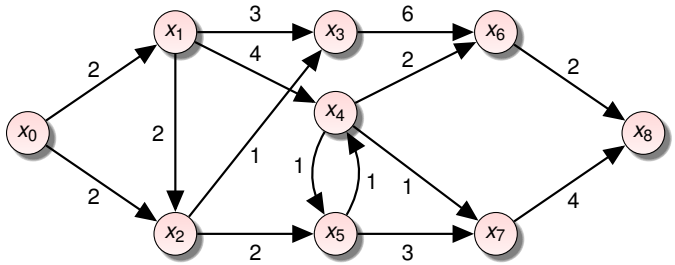
$$\begin{cases} \text{Temps}(x_i) = \min\{\text{Temps}(x_j) + \text{Poids}(\text{arc } (x_j, x_i)) : (x_j, x_i) \in E\} \\ \text{Parent}(x_i) = \text{Argmin}\{\text{Temps}(x_j) + \text{Poids}((x_j, x_i)) : (x_j, x_i) \in E\} \end{cases}$$

- Formule mathématique simple
- Calculs effectués dans un ordre précis :
  Exemple du plus court chemin : de la gauche vers la droite

Phase 2

- On utilise les infos de la phase 1 pour calculer la solution optimale
- Calculs itératifs dans l'ordre inverse de la phase 1

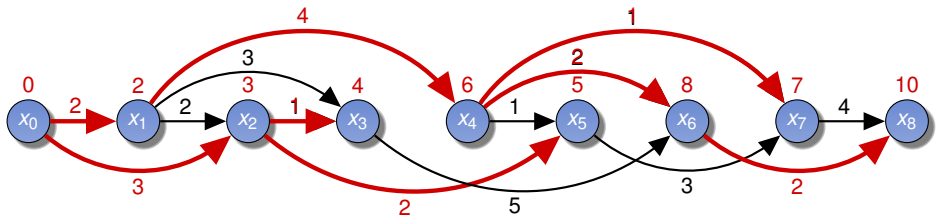
Plus court chemin : 2 sens de circulation



$\Longrightarrow$ Il n'existe plus d'ordre topologique !

$\Longrightarrow$ Notre algo de plus court chemin ne fonctionne plus.

Retour sur les sens uniques (1/2)



- Algorithme : en chaque noeud x_i, on calcule :

  $\text{Temps}(x_i) = \min\{\text{Temps}(x_j) + \text{Poids}(\text{arc } (x_j, x_i)) : (x_j, x_i) \in E\}$

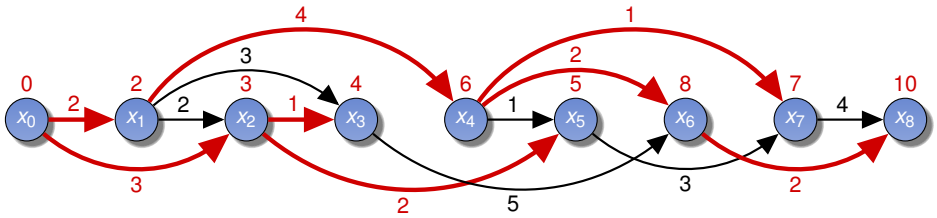
  $\text{Parent}(x_i) = \text{Argmin}\{\text{Temps}(x_j) + \text{Poids}((x_j, x_i)) : (x_j, x_i) \in E\}$
- Calcul correct car les $\text{Temps}(x_j)$ précédents sont corrects
- L'ordre topologique garantit qu'en chaque x_i ce calcul est juste.

Ordre topologique : utiliser les temps précédents pour mettre à jour $\text{Temps}(x_i)$

Retour sur les sens uniques (2/2)

Autre méthode pour calculer $\text{Temps}(x_i)$

1. Appliquer la fonction `init` pour initialiser les Temps
2. Choisir le nœud x_i rose dont $\text{Temps}(x_i)$ est minimum
3. Mettre à jour les nœud x_k enfants de x_i :
   $\text{Temps}(x_i) \leftarrow \min\{\text{Temps}(x_i), \text{Temps}(x_k) + \text{Poids}(x_k, x_i)\}$
4. Revenir en 2



Chemin optimal : $x_8 \leftarrow x_6 \leftarrow x_4 \leftarrow x_1 \leftarrow x_0$

Pourquoi cela fonctionne ?

Règle : choisir le nœud x_i rose dont $\text{Temps}(x_i)$ est minimum

Invariant de boucle

- À chaque étape :
  - si x_i = nœud rose dont $\text{Temps}(x_i)$ minimum
  - alors remonter de x_i à x_0 en passant par les arcs rouges = chemin optimal de x_0 à x_i
    $\Longrightarrow$ $\text{Temps}(x_i)$ = temps du trajet optimal de x_0 à x_i

Démonstration

- Démonstration par récurrence que $\text{Temps}(x_i)$ = temps du chemin optimal de x_0 à x_i *passant uniquement* par des nœuds bleus
- Si $\text{Temps}(x_i) \neq$ temps du chemin optimal de x_0 à x_i

  $\Longrightarrow$ il existe au moins un nœud rose sur ce chemin optimal C

  Soit x_k le premier nœud rose de C

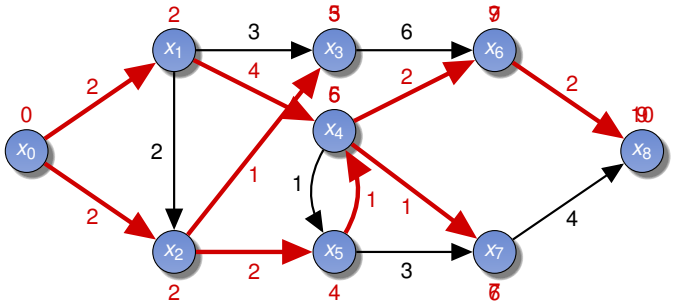
  $\Longrightarrow$ x_k a un parent bleu $\Longrightarrow$ $\text{Temps}(x_k) \neq +\infty$

  Mais $\text{Temps}(x_k) < \text{Temps}(x_i)$ car les poids des arcs sur le chemin de x_k à x_i sont > 0

  $\Longrightarrow$ contradiction : on aurait dû choisir x_k et non x_i

Retour sur les 2 sens de circulation

On peut appliquer l'algorithme que l'on vient de voir !



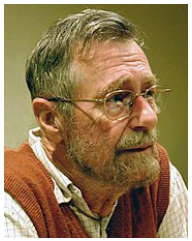
Chemin optimal : $x_8 \leftarrow x_6 \leftarrow x_4 \leftarrow x_5 \leftarrow x_2 \leftarrow x_0$

Algorithme de Dijkstra (1959)

```
1  fonction calc_parent_Dijsktra (V, E, Poids,
2                                 Temps, Parent) :
3    init (V, Temps, Parent)
4    S ← ∅  # les noeuds en bleu
5    Q ← V  # les noeuds en rose
6
7    tant que Q ≠ ∅ faire
8      # choisir un noeud rose i que l'on va
9      # transformer en bleu
10     soit i ∈{ noeuds v de Q t.q. Temps[v] minimal }
11     S ← S ∪ {i}
12     Q ← Q \ {i}
13
14     # mettre à jour les enfants de i
15     pour tout noeud j tel que (i,j)∈E faire
16       si Temps[j] > Temps[i] + Poids(i,j) alors
17         Temps[j]  ← Temps[i] + Poids(i,j)
18         Parent[j] ← i
19       finsi
20     fait
21   fait
```

Complexité pire cas : $\Theta((|E|+|V|)\log(|V|))$ si Q bien implanté

Intermède culturel



- **Historique :** Edsger Wybe Dijkstra (1930–2002) :
  Chercheur hollandais en informatique
  Une des personnes les plus influentes en info

Structured Programming (1972)
Academic Press

- Programmation structurée : if/then/else, boucles mais pas de GOTO !
- Algorithmes de graphes (plus court chemin. . .)
- Programmation concurrente : introduction des sémaphores en 1962
- Algorithmique distribuée, compilateurs, vérification de programmes, *etc.*
- **Petites phrases :**
  - Tester un programme démontre la présence de bugs, pas leur absence.
  - La question de savoir si les machines peuvent penser. . . est à peu près aussi pertinente que celle de savoir si les sous-marins peuvent nager.