Cours n°3 : diviser pour régner

Christophe Gonzales

POLYTECH MARSEILLE
Aix*Marseille Université

HUGO3 — Algorithmique

But du cours n°3

Diviser pour régner

Schéma de résolution d'un problème qui utilise 3 étapes :

1. **Diviser** le problème en plusieurs sous-pbs plus petits

But du cours n°3

Diviser pour régner

Schéma de résolution d'un problème qui utilise 3 étapes :

1. **Diviser** le problème en plusieurs sous-pbs plus petits
2. **Résoudre** les sous-problèmes récursivement et séparément

But du cours n°3

Diviser pour régner

Schéma de résolution d'un problème qui utilise 3 étapes :

1. **Diviser** le problème en plusieurs sous-pbs plus petits
2. **Résoudre** les sous-problèmes récursivement et séparément
3. **Fusionner** les résultats pour obtenir la solution du pb d'origine

But du cours n°3

Diviser pour régner

Schéma de résolution d'un problème qui utilise 3 étapes :

1. **Diviser** le problème en plusieurs sous-pbs plus petits
2. **Résoudre** les sous-problèmes récursivement et séparément
3. **Fusionner** les résultats pour obtenir la solution du pb d'origine

Illustrations du principe :

- Multiplication de matrices (Strassen)
- Tri rapide de tableaux
- Transformée de Fourier rapide (Cooley-Tukey)
- Géométrie algorithmique : recherche du couple de points les plus proches

Illustration graphique

Illustration graphique

Diviser

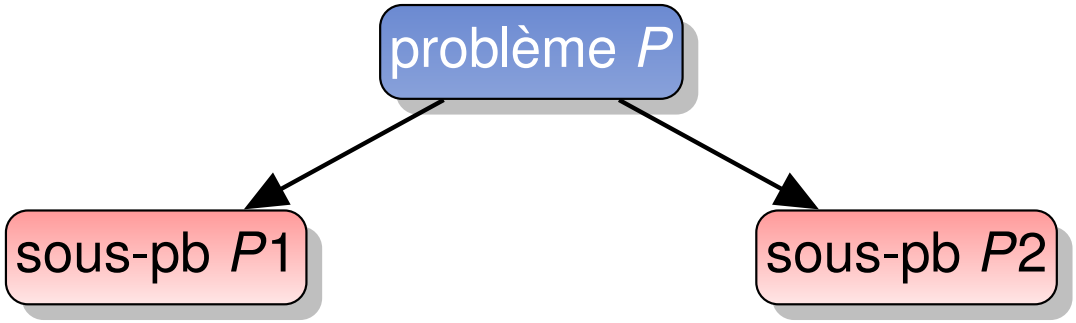


Illustration graphique

Diviser

Diviser

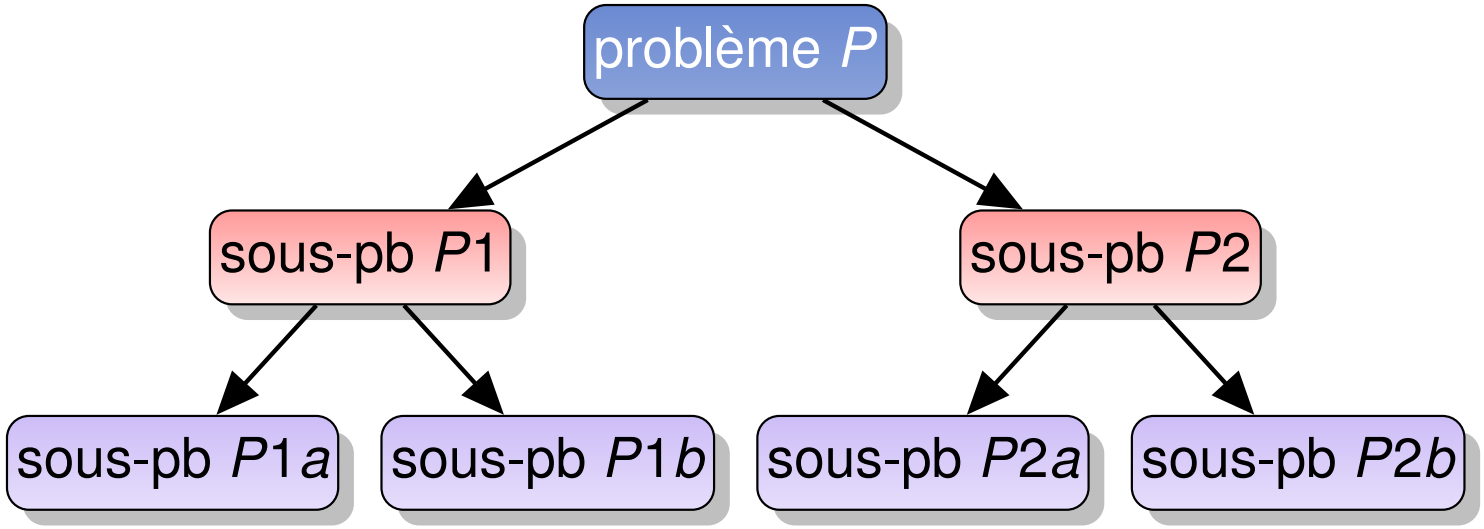


Illustration graphique

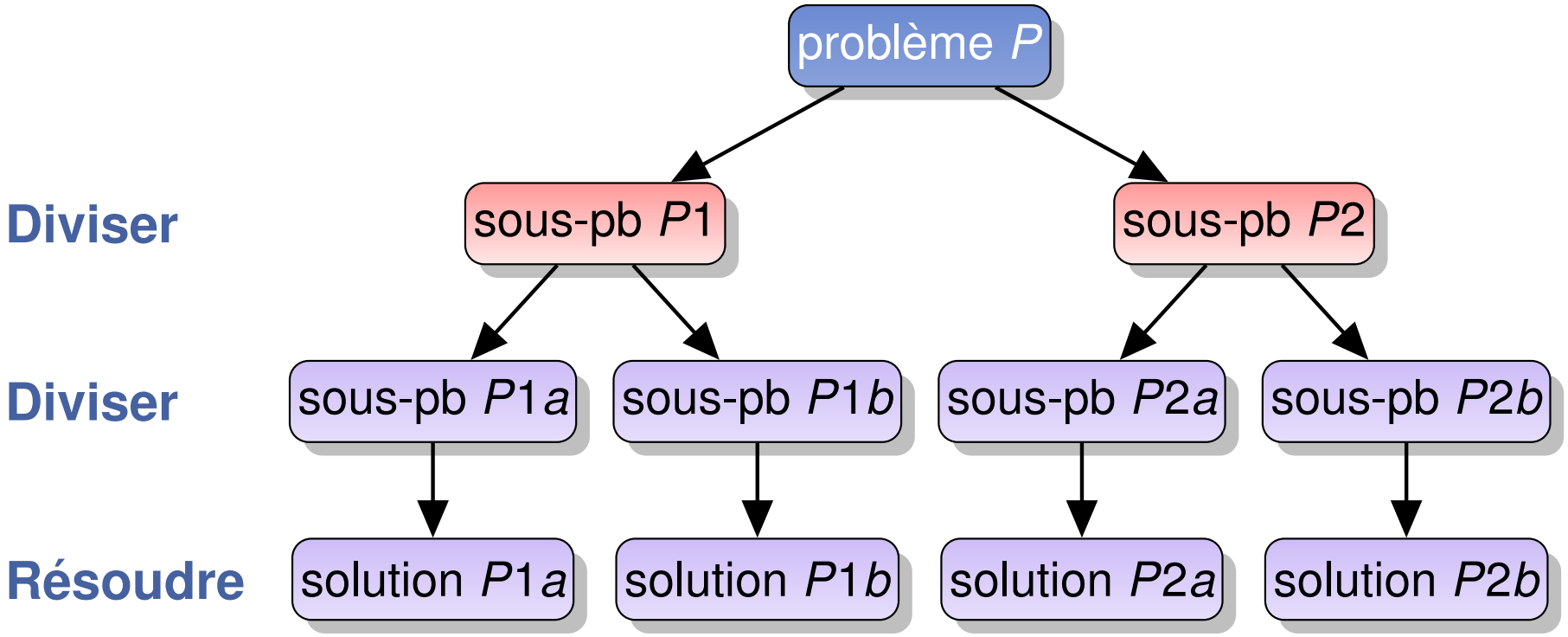


Illustration graphique

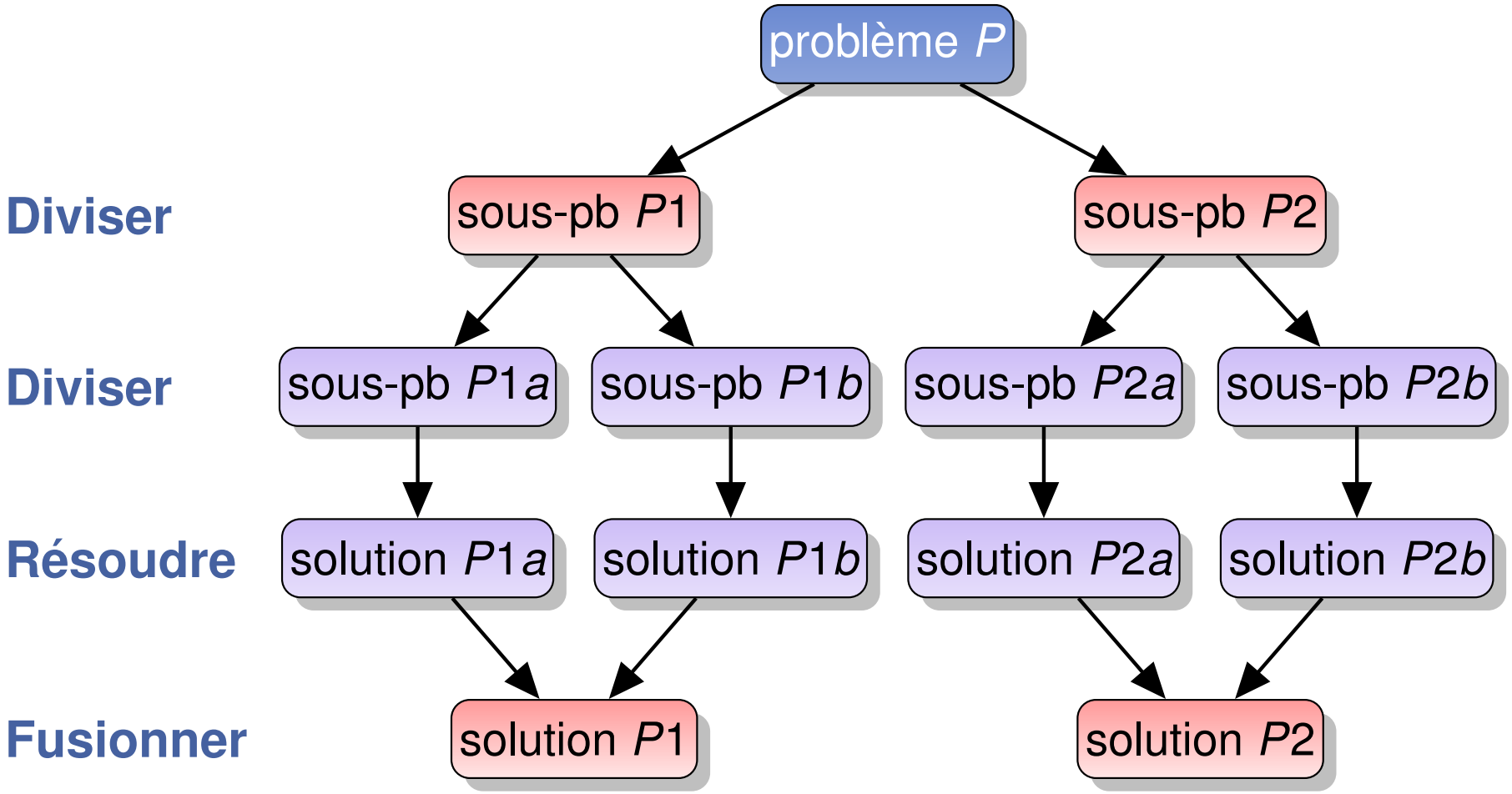
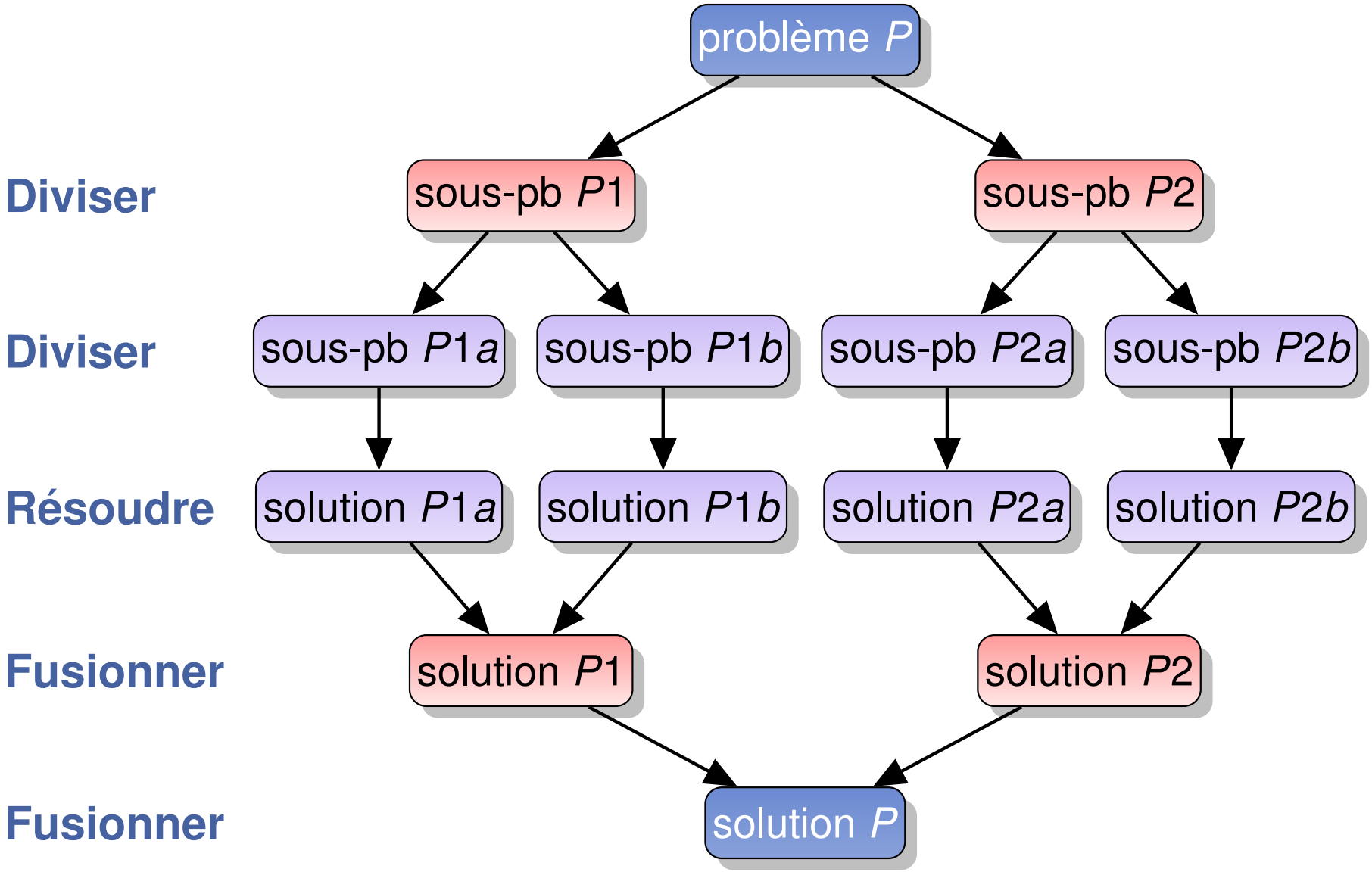


Illustration graphique



Qu'est-ce qu'un bon « diviser pour régner » ?

Quelques conditions pour un « diviser pour régner » rapide :

- Séparations en sous-problèmes $\approx$ de mêmes tailles
- Fonctions « terminales » (sans divisions) : rapides
- Fusion pas trop coûteuse

Théorème Maître

Complexité : théorème maître

- f fonction qui résout un problème de taille n en :
  - Divisant en $a > 0$ sous-problèmes de tailles n/b
  - Résolvant ces a sous-problèmes séparément
  - Fusionnant les résultats
  - Complexité de division + fusion en $O(n^d)$, $d \geq 0$
- Alors # d'opérations de $f = T(n) = a \times T(\lfloor n/b \rfloor) + O(n^d)$
- De plus, $T(n) \in \begin{cases} O(n^d) & \text{si } d > \log_b(a) \\ O(n^d \log n) & \text{si } d = \log_b(a) \\ O(n^{\log_b(a)}) & \text{si } d < \log_b(a) \end{cases}$

Théorème Maître

Complexité : théorème maître

- f fonction qui résout un problème de taille n en :
  - Divisant en $a > 0$ sous-problèmes de tailles n/b
  - Résolvant ces a sous-problèmes séparément
  - Fusionnant les résultats
  - Complexité de division + fusion en $O(n^d)$, $d \geq 0$
- Alors # d'opérations de $f = T(n) = a \times T(\lfloor n/b \rfloor) + O(n^d)$
- De plus, $T(n) \in \begin{cases} O(n^d) & \text{si } d > \log_b(a) \\ O(n^d \log n) & \text{si } d = \log_b(a) \\ O(n^{\log_b(a)}) & \text{si } d < \log_b(a) \end{cases}$

Exemple :

- Multiplication de 2 matrices carrées de taille n :
  - Algo naïf : $O(n^3)$ (cf. cours 1)
  - Strassen : $a = 7, b = 2, d = 2$

Théorème Maître

Complexité : théorème maître

- f fonction qui résout un problème de taille n en :
  - Divisant en $a > 0$ sous-problèmes de tailles n/b
  - Résolvant ces a sous-problèmes séparément
  - Fusionnant les résultats
  - Complexité de division + fusion en $O(n^d)$, $d \geq 0$
- Alors # d'opérations de $f = T(n) = a \times T(\lfloor n/b \rfloor) + O(n^d)$
- De plus, $T(n) \in \begin{cases} O(n^d) & \text{si } d > \log_b(a) \\ O(n^d \log n) & \text{si } d = \log_b(a) \\ O(n^{\log_b(a)}) & \text{si } d < \log_b(a) \end{cases}$

Exemple :

- Multiplication de 2 matrices carrées de taille n :
  - Algo naïf : $O(n^3)$ (cf. cours 1)
  - Strassen : $a = 7, b = 2, d = 2, \log_2(7) \approx 2,8 > d$

    $\Longrightarrow$ Complexité = $O(n^{\log_2(7)}) = O(n^{2,8})$

Multiplication de matrices de Strassen (1969)

Principe de Strassen

- Entrée : deux matrices A et B de tailles $n \times n$
- Sortie : la matrice produit $C = A \times B$

Multiplication de matrices de Strassen (1969)

Principe de Strassen

- Entrée : deux matrices A et B de tailles $n \times n$
- Sortie : la matrice produit $C = A \times B$
- Idée : scinder les matrices en 4 sous-blocs :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right) \quad \text{et} \quad B = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right)$$

$\Longrightarrow$ Sous-blocs A_{ij} et B_{ij} de tailles environ $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$

Multiplication de matrices de Strassen (1969)

Principe de Strassen

- Entrée : deux matrices A et B de tailles $n \times n$
- Sortie : la matrice produit $C = A \times B$
- Idée : scinder les matrices en 4 sous-blocs :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right) \quad \text{et} \quad B = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right)$$

$\Longrightarrow$ Sous-blocs A_{ij} et B_{ij} de tailles environ $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$

- **Diviser :** Créer 7 matrices produits de certains de ces blocs
- **Résoudre :** Calculer ces 7 matrices M_i
- **Fusionner :** 6 additions et 2 soustractions des $M_i \Longrightarrow C$

Multiplication de matrices de Strassen (1969)

Principe de Strassen

- Entrée : deux matrices A et B de tailles $n \times n$
- Sortie : la matrice produit $C = A \times B$
- Idée : scinder les matrices en 4 sous-blocs :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right) \quad \text{et} \quad B = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right)$$

$\Longrightarrow$ Sous-blocs A_{ij} et B_{ij} de tailles environ $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$

- **Diviser :** Créer 7 matrices produits de certains de ces blocs
- **Résoudre :** Calculer ces 7 matrices M_i
- **Fusionner :** 6 additions et 2 soustractions des $M_i \Longrightarrow C$

Rappel : Complexité en $O(n^{2,8})$ au lieu de $O(n^3)$

- $n = 1000 \Longrightarrow n^3 \approx 4 \times n^{2,8}$

Les matrices M_i de Strassen et la matrice C

Les matrices M_i :

- $M_1 = (A_{11} + A_{22}) \times (B_{11} + B_{22})$
- $M_2 = (A_{21} + A_{22}) \times B_{11}$
- $M_3 = A_{11} \times (B_{12} - B_{22})$
- $M_4 = A_{22} \times (B_{21} - B_{11})$
- $M_5 = (A_{11} + A_{12}) \times B_{22}$
- $M_6 = (A_{21} - A_{11}) \times (B_{11} + B_{12})$
- $M_7 = (A_{12} - A_{22}) \times (B_{21} + B_{22})$

Les matrices M_i de Strassen et la matrice C

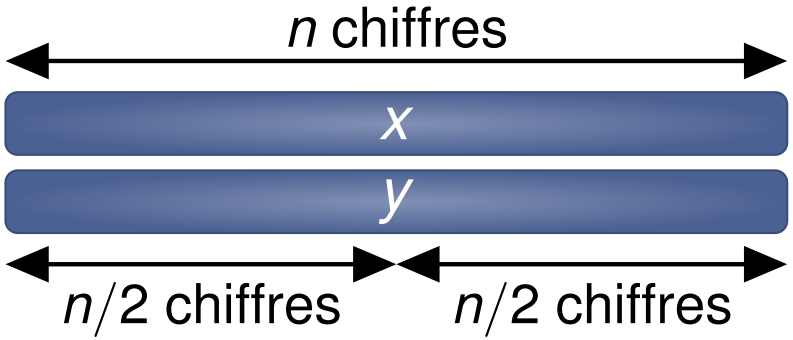
Les matrices M_i :

- $M_1 = (A_{11} + A_{22}) \times (B_{11} + B_{22})$
- $M_2 = (A_{21} + A_{22}) \times B_{11}$
- $M_3 = A_{11} \times (B_{12} - B_{22})$
- $M_4 = A_{22} \times (B_{21} - B_{11})$
- $M_5 = (A_{11} + A_{12}) \times B_{22}$
- $M_6 = (A_{21} - A_{11}) \times (B_{11} + B_{12})$
- $M_7 = (A_{12} - A_{22}) \times (B_{21} + B_{22})$

$$C = \begin{pmatrix} M_1 + M_4 - M_5 + M_7 & M_3 + M_5 \\ M_2 + M_4 & M_1 - M_2 + M_3 + M_6 \end{pmatrix}$$

Multiplication de nombres sur n chiffres en base B

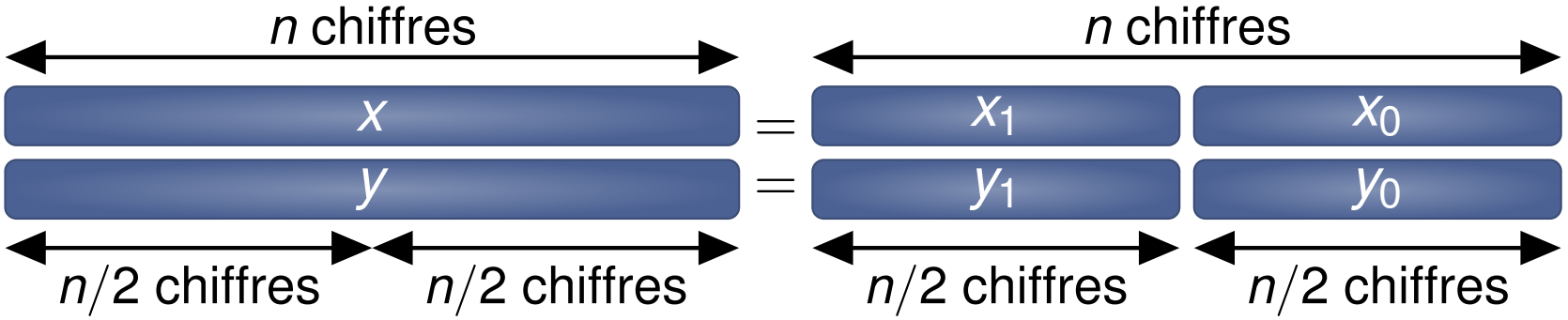
Principe de division :



Multiplication de nombres sur n chiffres en base B

Principe de division :

$B{=}10, x{=}1234 \implies x_1{=}12, x_0{=}34$

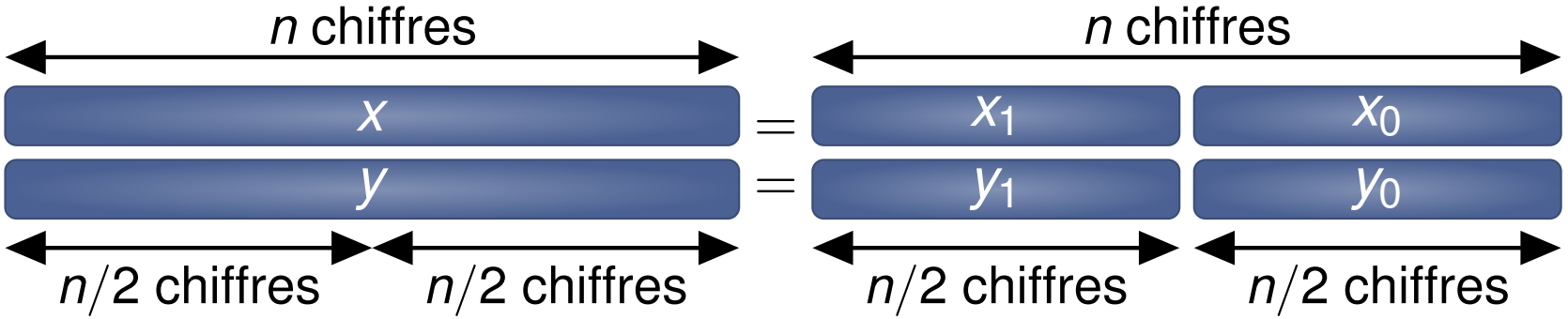


- $x = x_1 B^{n/2} + x_0 \quad y = y_1 B^{n/2} + y_0$

Multiplication de nombres sur n chiffres en base B

Principe de division :

$B{=}10, x{=}1234 \implies x_1{=}12, x_0{=}34$

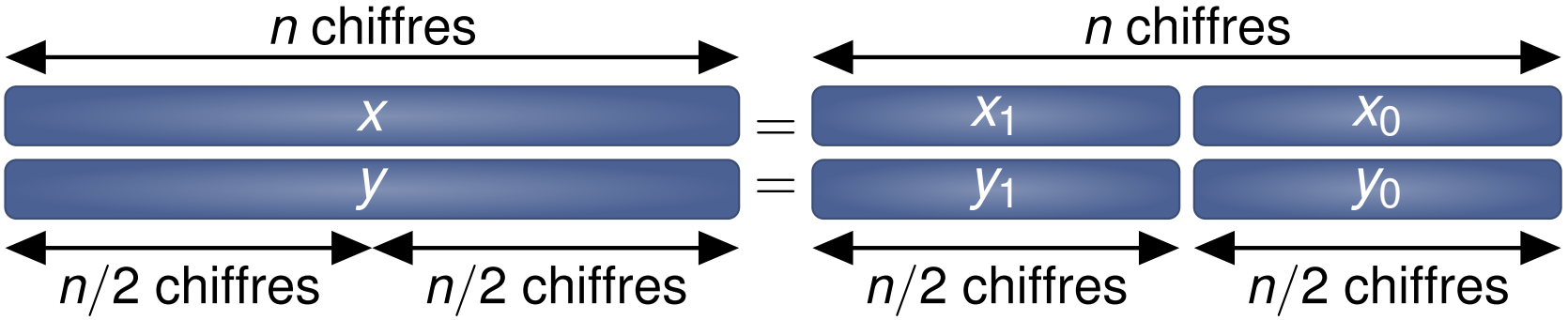


- $x = x_1 B^{n/2} + x_0 \quad y = y_1 B^{n/2} + y_0$
- $xy = (x_1 B^{n/2} + x_0) \times (y_1 B^{n/2} + y_0)$

Multiplication de nombres sur n chiffres en base B

Principe de division :

$B{=}10, x{=}1234 \implies x_1{=}12, x_0{=}34$

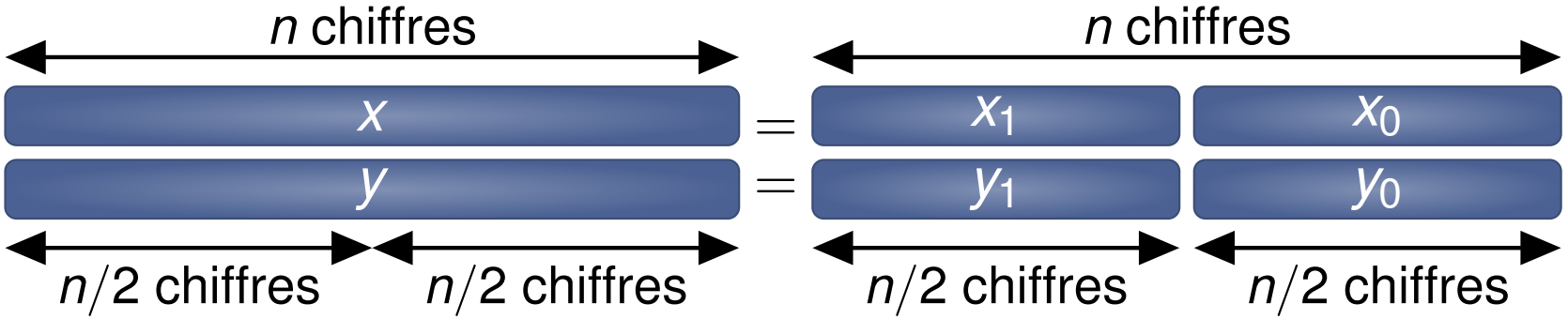


- $x = x_1 B^{n/2} + x_0 \quad y = y_1 B^{n/2} + y_0$
- $xy = (x_1 B^{n/2} + x_0) \times (y_1 B^{n/2} + y_0) = z_2 B^n + z_1 B^{n/2} + z_0$
  - $z_2 = x_1 y_1$
  - $z_1 = x_1 y_0 + x_0 y_1$
  - $z_0 = x_0 y_0$

Multiplication de nombres sur n chiffres en base B

Principe de division :

$B{=}10, x{=}1234 \Longrightarrow x_1{=}12, x_0{=}34$



- $x = x_1 B^{n/2} + x_0 \quad y = y_1 B^{n/2} + y_0$
- $xy = (x_1 B^{n/2} + x_0) \times (y_1 B^{n/2} + y_0) = z_2 B^n + z_1 B^{n/2} + z_0$
  - $z_2 = x_1 y_1$
  - $z_1 = x_1 y_0 + x_0 y_1$
  - $z_0 = x_0 y_0$
  - 4 multiplications de tailles $n/2 \Longrightarrow$ pas intéressant :

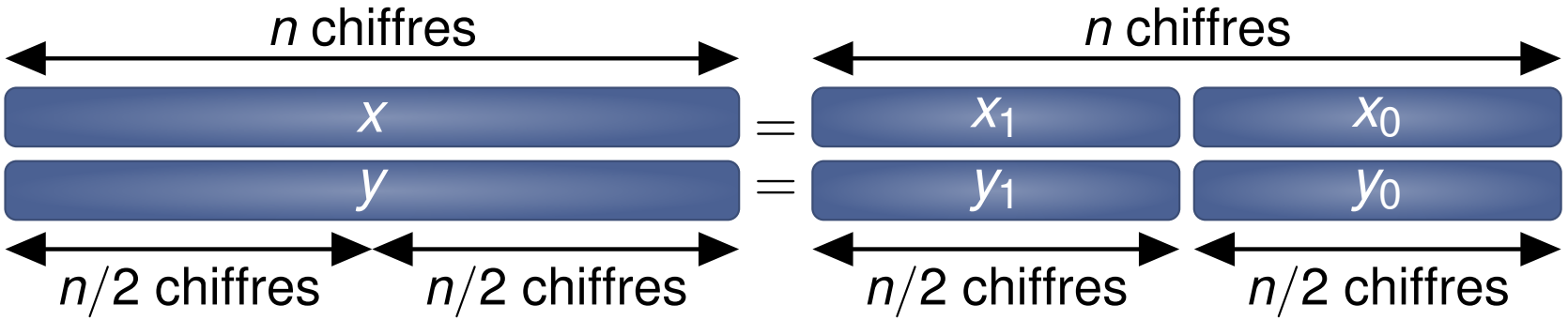
    Théorème maître : #mult(n) = 4 #mult(n/2) + $\Theta(n)$

    $\Longrightarrow$ complexité en $O(n^2)$

    = complexité de la multiplication « classique »

Algorithme de multiplication de Karatsuba (1962)

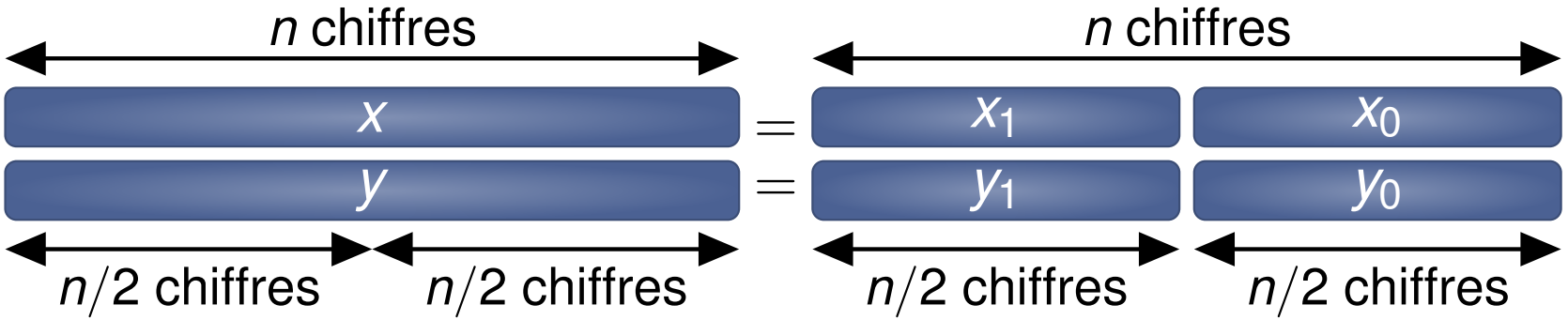
Principe de division :



- $x = x_1 B^{n/2} + x_0 \quad y = y_1 B^{n/2} + y_0$

Algorithme de multiplication de Karatsuba (1962)

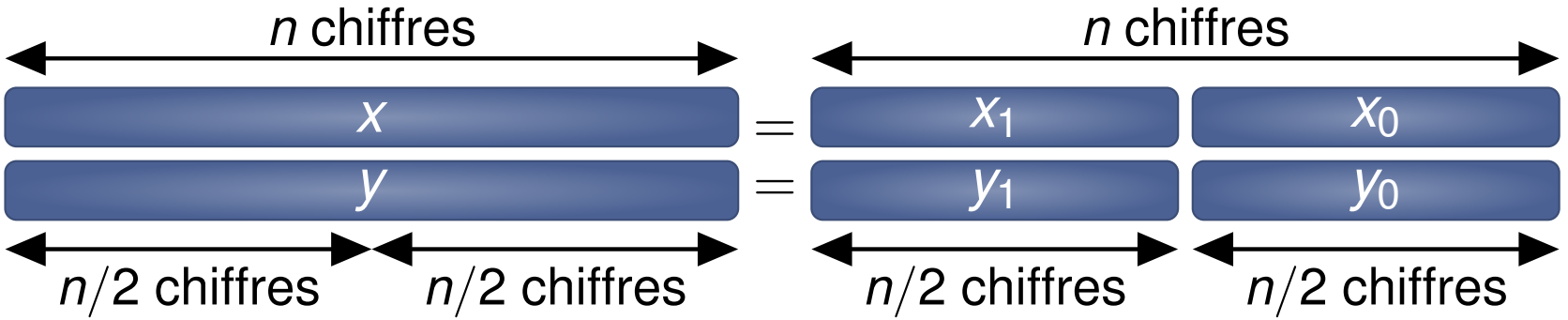
Principe de division :



- $x = x_1 B^{n/2} + x_0 \quad y = y_1 B^{n/2} + y_0$
- $xy = (x_1 B^{n/2} + x_0) \times (y_1 B^{n/2} + y_0) = z_2 B^n + z_1 B^{n/2} + z_0$

Algorithme de multiplication de Karatsuba (1962)

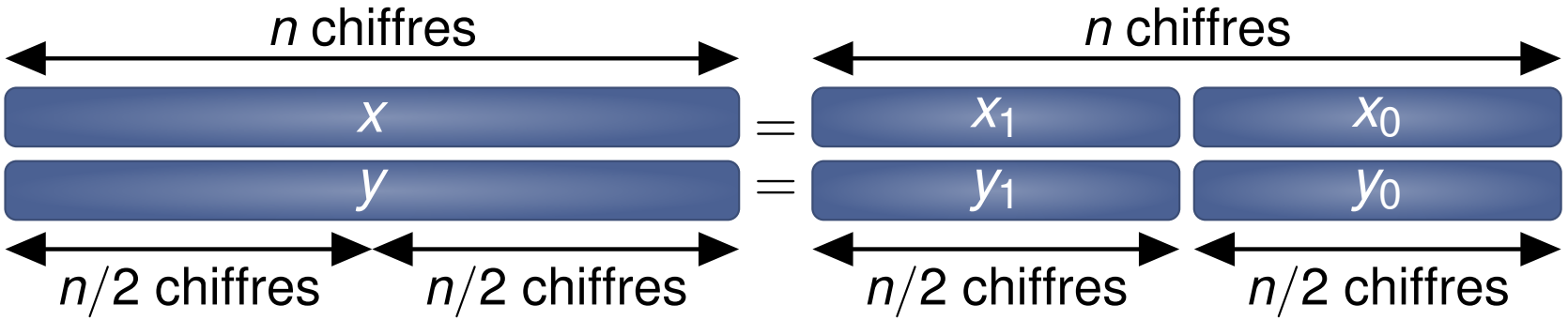
Principe de division :



- $x = x_1 B^{n/2} + x_0 \quad y = y_1 B^{n/2} + y_0$
- $xy = (x_1 B^{n/2} + x_0) \times (y_1 B^{n/2} + y_0) = z_2 B^n + z_1 B^{n/2} + z_0$
  - $z_2 = x_1 y_1$
  - $z_1 = (x_1 + x_0) \times (y_1 + y_0) - z_2 - z_0$
  - $z_0 = x_0 y_0$

Algorithme de multiplication de Karatsuba (1962)

Principe de division :



- $x = x_1 B^{n/2} + x_0 \quad y = y_1 B^{n/2} + y_0$
- $xy = (x_1 B^{n/2} + x_0) \times (y_1 B^{n/2} + y_0) = z_2 B^n + z_1 B^{n/2} + z_0$
  - $z_2 = x_1 y_1$
  - $z_1 = (x_1 + x_0) \times (y_1 + y_0) - z_2 - z_0$
  - $z_0 = x_0 y_0$
  - Théorème maître : #mult(n) = 3 #mult(n/2) + $\Theta(n)$

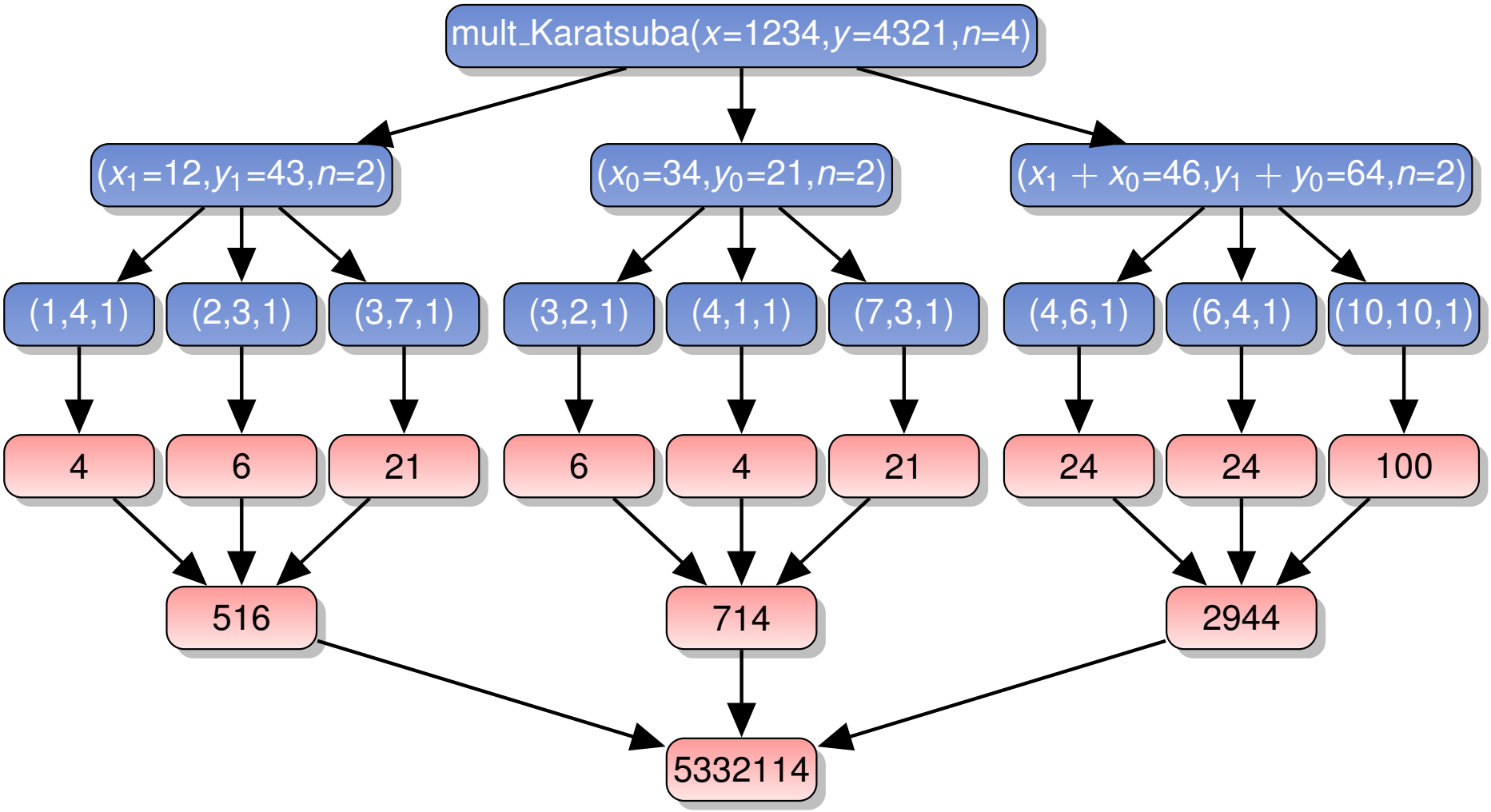
    $\Longrightarrow$ complexité en $O(n^{\log_2(3)}) \approx 2^{1,58}$

Algorithme de Karatsuba

Karatsuba en base $B = 10$:

```
1  fonction mult_Karatsuba (x, y, n):
2    si n = 1 alors
3      retourner x × y
4    sinon
5      m ← n/2
6      x_1 ← x / 10^m  # décalages de bits
7      x_0 ← x % 10^m  # masquage de bits
8      y_1 ← y / 10^m
9      y_0 ← y % 10^m
10
11     z_2 ← mult_Karatsuba(x_1, y_1, m)
12     z_0 ← mult_Karatsuba(x_0, y_0, m)
13     t_1 ← mult_Karatsuba(x_1 + x_0, y_1 + y_0, m)
14     z_1 ← t_1 - z_2 - z_0
15
16     retourner z_2 × 10^n + z_1 × 10^m + z_0  # × : décalages de bits
17   finsi
```

Application de l'algorithme de Karatsuba



- $516 = 4 \times 10^2 + (21 - 6 - 4) \times 10^1 + 6$
- $714 = 6 \times 10^2 + (21 - 4 - 6) \times 10^1 + 4$
- $2944 = 24 \times 10^2 + (100 - 24 - 24) \times 10^1 + 24$
- $5332114 = 516 \times 10^4 + (2944 - 516 - 714) \times 10^2 + 714$

Recherche de l'élément maximal d'un tableau

algorithme itératif

```
1  fonction recherche_max (tableau T):
2    n ← longueur(T)
3    elt_max = T[0]
4    pour i variant de 1 à n-1 faire
5      si T[i] > elt_max alors
6        elt_max = T[i]
7      finsi
8    fait
9    retourner elt_max
```

Recherche de l'élément maximal d'un tableau

algorithme itératif

```
1  fonction recherche_max (tableau T):
2    n ← longueur(T)
3    elt_max = T[0]
4    pour i variant de 1 à n-1 faire
5      si T[i] > elt_max alors
6        elt_max = T[i]
7      finsi
8    fait
9    retourner elt_max
```

Complexité pire cas = ?

Recherche de l'élément maximal d'un tableau

algorithme itératif

```
1  fonction recherche_max (tableau T):
2    n ← longueur(T)
3    elt_max = T[0]
4    pour i variant de 1 à n-1 faire
5      si T[i] > elt_max alors
6        elt_max = T[i]
7      finsi
8    fait
9    retourner elt_max
```

Complexité pire cas = $O(n)$

Recherche de l'élément maximal d'un tableau

algorithme itératif

```
1  fonction recherche_max (tableau T):
2    n ← longueur(T)
3    elt_max = T[0]
4    pour i variant de 1 à n-1 faire
5      si T[i] > elt_max alors
6        elt_max = T[i]
7      finsi
8    fait
9    retourner elt_max
```

Complexité pire cas = $O(n)$

diviser pour régner

```
1  fonction recherche_max_DPR (tableau T):
2    n ← longueur(T)
3    si n = 1 alors
4      retourner T[0]
5    sinon
6      m ← ⌊n/2⌋
7      elt1 ← recherche_max_DPR (sous-tableau T[0..m])
8      elt2 ← recherche_max_DPR (sous-tableau T[m+1..n-1])
9      retourner max (elt1,elt2)
10   finsi
```

Recherche de l'élément maximal d'un tableau

algorithme itératif

```
1  fonction recherche_max (tableau T):
2    n ← longueur(T)
3    elt_max = T[0]
4    pour i variant de 1 à n-1 faire
5      si T[i] > elt_max alors
6        elt_max = T[i]
7      finsi
8    fait
9    retourner elt_max
```

Complexité pire cas = $O(n)$

diviser pour régner

```
1  fonction recherche_max_DPR (tableau T):
2    n ← longueur(T)
3    si n = 1 alors
4      retourner T[0]
5    sinon
6      m ← ⌊n/2⌋
7      elt1 ← recherche_max_DPR (sous-tableau T[0..m])
8      elt2 ← recherche_max_DPR (sous-tableau T[m+1..n-1])
9      retourner max (elt1,elt2)
10   finsi
```

Complexité pire cas = ?

Recherche de l'élément maximal d'un tableau

algorithme itératif

```
1  fonction recherche_max (tableau T):
2    n ← longueur(T)
3    elt_max = T[0]
4    pour i variant de 1 à n-1 faire
5      si T[i] > elt_max alors
6        elt_max = T[i]
7      finsi
8    fait
9    retourner elt_max
```

Complexité pire cas = $O(n)$

diviser pour régner

```
1  fonction recherche_max_DPR (tableau T):
2    n ← longueur(T)
3    si n = 1 alors
4      retourner T[0]
5    sinon
6      m ← ⌊n/2⌋
7      elt1 ← recherche_max_DPR (sous-tableau T[0..m])
8      elt2 ← recherche_max_DPR (sous-tableau T[m+1..n-1])
9      retourner max (elt1,elt2)
10   finsi
```

Complexité pire cas = $O(n)$

Recherche de l'élément maximal d'un tableau

algorithme itératif

```
1  fonction recherche_max (tableau T):
2    n ← longueur(T)
3    elt_max = T[0]
4    pour i variant de 1 à n-1 faire
5      si T[i] > elt_max alors
6        elt_max = T[i]
7      finsi
8    fait
9    retourner elt_max
```

Complexité pire cas = $O(n)$

diviser pour régner

```
1  fonction recherche_max_DPR (tableau T):
2    n ← longueur(T)
3    si n = 1 alors
4      retourner T[0]
5    sinon
6      m ← ⌊n/2⌋
7      elt1 ← recherche_max_DPR (sous-tableau T[0..m])
8      elt2 ← recherche_max_DPR (sous-tableau T[m+1..n-1])
9      retourner max (elt1,elt2)
10   finsi
```

Complexité pire cas = $O(n)$

$\Longrightarrow$ Diviser pour régner n'est pas toujours intéressant !

Tri de tableaux

- Idée générale des algorithmes de tri : permuter des éléments

Ne pas utiliser de tableau temporaire !
Trop coûteux en mémoire

Tri de tableaux

- Idée générale des algorithmes de tri : permuter des éléments

Ne pas utiliser de tableau temporaire !
Trop coûteux en mémoire

$\Longrightarrow$ Algorithmes par comparaisons des cellules du tableau

Tri de tableaux

- Idée générale des algorithmes de tri : permuter des éléments

Ne pas utiliser de tableau temporaire !
Trop coûteux en mémoire

$\Longrightarrow$ Algorithmes par comparaisons des cellules du tableau

Algorithme naïf : tri par sélection

```
1  fonction tri_selection(tableau T) :
2    n ← longueur(T)
3    pour i variant de 0 à n-2 faire
4      min ← i # recherche du min des éléments de T[i..n-1]
5      pour j variant de i+1 à n-1 faire
6        si t[j] < t[min] alors
7          min ← j
8        finsi
9      fait
10     échanger t[i] et t[min] # placer le min dans T[i]
11   fait
```

Tri de tableaux

- Idée générale des algorithmes de tri : permuter des éléments

Ne pas utiliser de tableau temporaire !
Trop coûteux en mémoire

$\Longrightarrow$ Algorithmes par comparaisons des cellules du tableau

Algorithme naïf : tri par sélection

```
1  fonction tri_selection(tableau T) :
2    n ← longueur(T)
3    pour i variant de 0 à n-2 faire
4      min ← i # recherche du min des éléments de T[i..n-1]
5      pour j variant de i+1 à n-1 faire
6        si t[j] < t[min] alors
7          min ← j
8        finsi
9      fait
10     échanger t[i] et t[min] # placer le min dans T[i]
11   fait
```

Complexité pire cas : $O(n^2)$

Tri de tableaux

- Idée générale des algorithmes de tri : permuter des éléments

Ne pas utiliser de tableau temporaire !
Trop coûteux en mémoire

$\Longrightarrow$ Algorithmes par comparaisons des cellules du tableau

Algorithme naïf : tri par sélection

```
1  fonction tri_selection(tableau T) :
2    n ← longueur(T)
3    pour i variant de 0 à n-2 faire
4      min ← i # recherche du min des éléments de T[i..n-1]
5      pour j variant de i+1 à n-1 faire
6        si t[j] < t[min] alors
7          min ← j
8        finsi
9      fait
10     échanger t[i] et t[min] # placer le min dans T[i]
11   fait
```

Complexité pire cas : $O(n^2)$

Théorème : Tout algo de tri par comparaisons est en $\Omega(n \log(n))$

Tri rapide de tableaux (quicksort)

Principe du tri rapide – Hoare 1961

- Partitionnement par comparaisons/permutations
- **Diviser :** placer par permutations un élément du tableau (*pivot*) à sa place définitive :
  - les éléments inférieurs sont à sa gauche
  - les éléments supérieurs sont à sa droite

  $\Longrightarrow$ diviser en 2 sous-tableaux
- **Résoudre :** trier les 2 sous-tableaux
- **Fusionner :** plus rien à faire

Tri rapide de tableaux (quicksort)

Principe du tri rapide – Hoare 1961

- Partitionnement par comparaisons/permutations
- **Diviser :** placer par permutations un élément du tableau (*pivot*) à sa place définitive :
  - les éléments inférieurs sont à sa gauche
  - les éléments supérieurs sont à sa droite

  $\Longrightarrow$ diviser en 2 sous-tableaux
- **Résoudre :** trier les 2 sous-tableaux
- **Fusionner :** plus rien à faire

Plein de variations sur le choix du pivot !

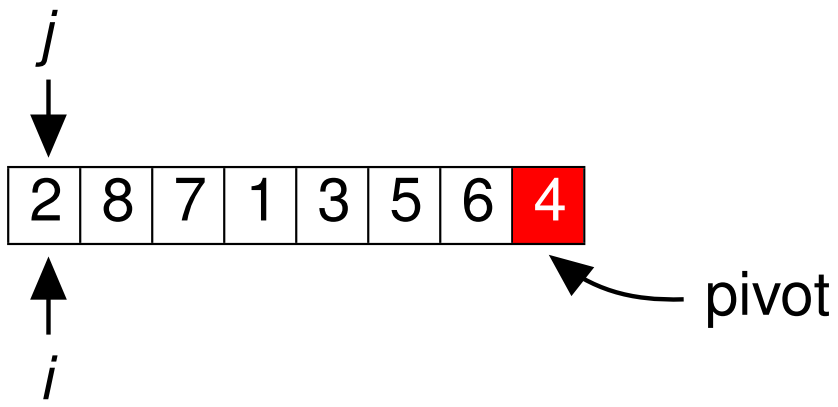
```
1  fonction tri_rapide (tableau T,
2                       index_min,   # 1er elt du tableau
3                       index_max): # dernier elt du tableau
4    si index_min < index_max alors
5      pivot ← partition (T, index_min, index_max)
6      tri_rapide (T, index_min, pivot-1)
7      tri_rapide (T, pivot+1, index_max)
8    finsi
```

Partitionnement : algorithme de Lomuto

```
1  fonction partition(tableau T,
2                     index_min,    # 1er élément du tableau
3                     index_max) :  # dernier elt du tableau
4    pivot ← T[index_max]
5    i ← index_min
6    pour j variant de index_min à index_max faire
7      si T[j] < pivot alors
8        échanger T[i] et T[j]
9        i ← i + 1
10     finsi
11   fait
12   échanger T[i] et T[index_max]
13   retourner i
```

Partitionnement : algorithme de Lomuto

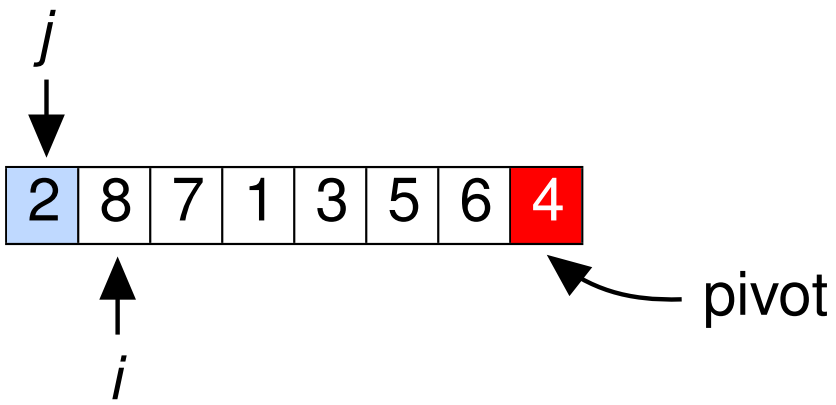
```
1  fonction partition(tableau T,
2                     index_min,    # 1er élément du tableau
3                     index_max) :  # dernier elt du tableau
4    pivot ← T[index_max]
5    i ← index_min
6    pour j variant de index_min à index_max faire
7      si T[j] < pivot alors
8        échanger T[i] et T[j]
9        i ← i + 1
10     finsi
11   fait
12   échanger T[i] et T[index_max]
13   retourner i
```



- **Invariant de boucle :**
  - À gauche de i : elts $<$ pivot
  - Entre i et j : elts $\geq$ pivot

Partitionnement : algorithme de Lomuto

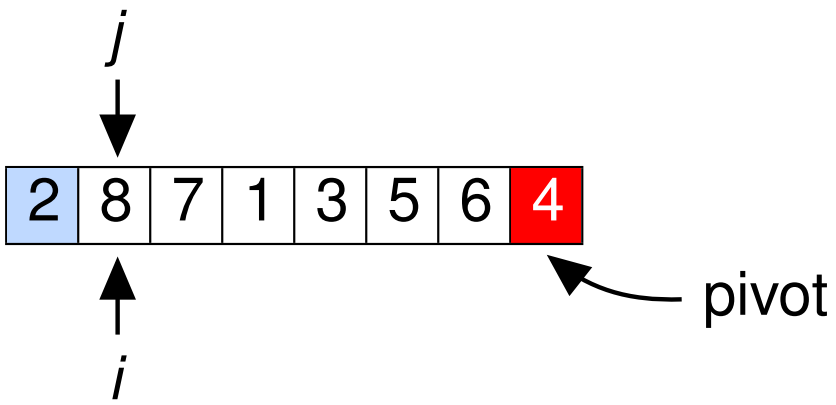
```
1  fonction partition(tableau T,
2                     index_min,    # 1er élément du tableau
3                     index_max) :  # dernier elt du tableau
4    pivot ← T[index_max]
5    i ← index_min
6    pour j variant de index_min à index_max faire
7      si T[j] < pivot alors
8        échanger T[i] et T[j]
9        i ← i + 1
10     finsi
11   fait
12   échanger T[i] et T[index_max]
13   retourner i
```



- **Invariant de boucle :**
  - À gauche de i : elts $<$ pivot
  - Entre i et j : elts $\geq$ pivot

Partitionnement : algorithme de Lomuto

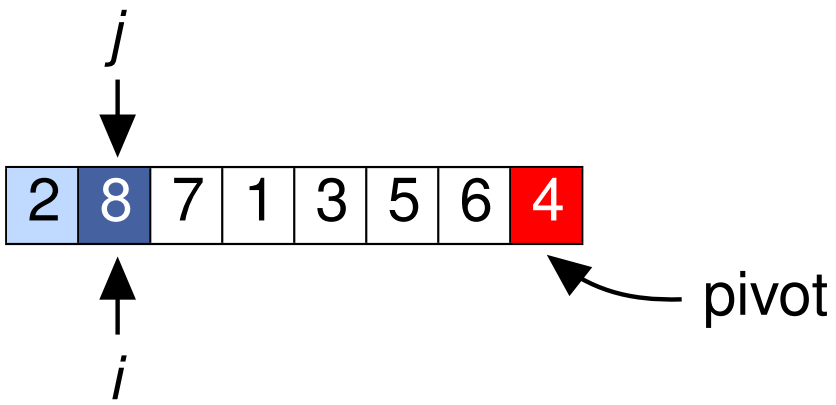
```
1  fonction partition(tableau T,
2                     index_min,    # 1er élément du tableau
3                     index_max) :  # dernier elt du tableau
4    pivot ← T[index_max]
5    i ← index_min
6    pour j variant de index_min à index_max faire
7      si T[j] < pivot alors
8        échanger T[i] et T[j]
9        i ← i + 1
10     finsi
11   fait
12   échanger T[i] et T[index_max]
13   retourner i
```



- **Invariant de boucle :**
  - À gauche de i : elts $<$ pivot
  - Entre i et j : elts $\geq$ pivot

Partitionnement : algorithme de Lomuto

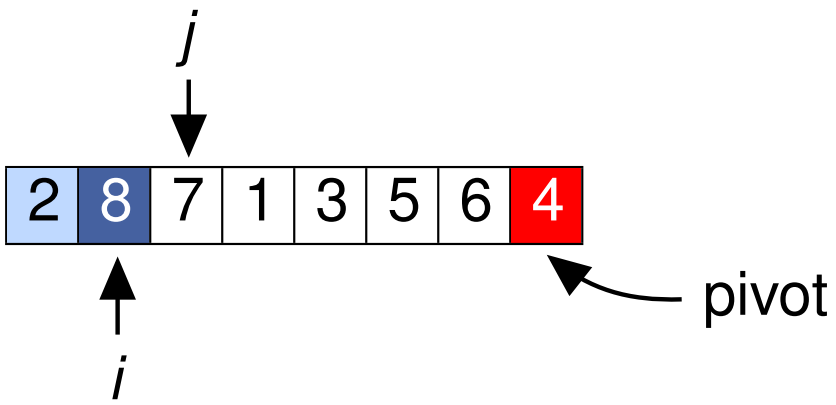
```
1  fonction partition(tableau T,
2                     index_min,    # 1er élément du tableau
3                     index_max) :  # dernier elt du tableau
4    pivot ← T[index_max]
5    i ← index_min
6    pour j variant de index_min à index_max faire
7      si T[j] < pivot alors
8        échanger T[i] et T[j]
9        i ← i + 1
10     finsi
11   fait
12   échanger T[i] et T[index_max]
13   retourner i
```



- **Invariant de boucle :**
  - À gauche de i : elts $<$ pivot
  - Entre i et j : elts $\geq$ pivot

Partitionnement : algorithme de Lomuto

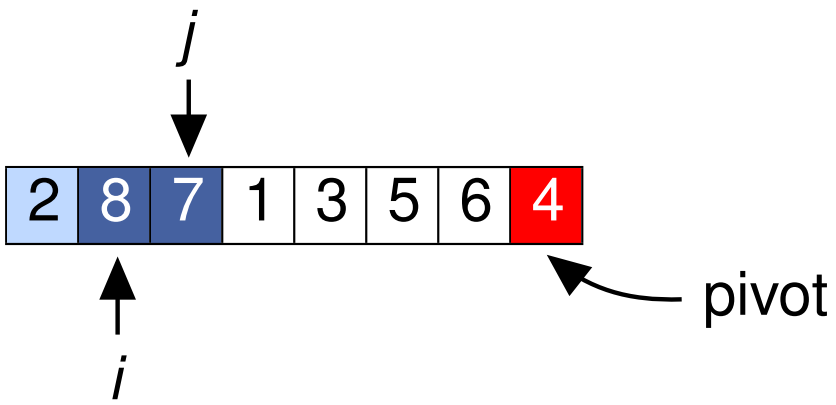
```
1  fonction partition(tableau T,
2                     index_min,    # 1er élément du tableau
3                     index_max) :  # dernier elt du tableau
4    pivot ← T[index_max]
5    i ← index_min
6    pour j variant de index_min à index_max faire
7      si T[j] < pivot alors
8        échanger T[i] et T[j]
9        i ← i + 1
10     finsi
11   fait
12   échanger T[i] et T[index_max]
13   retourner i
```



- **Invariant de boucle :**
  - À gauche de i : elts $<$ pivot
  - Entre i et j : elts $\geq$ pivot

Partitionnement : algorithme de Lomuto

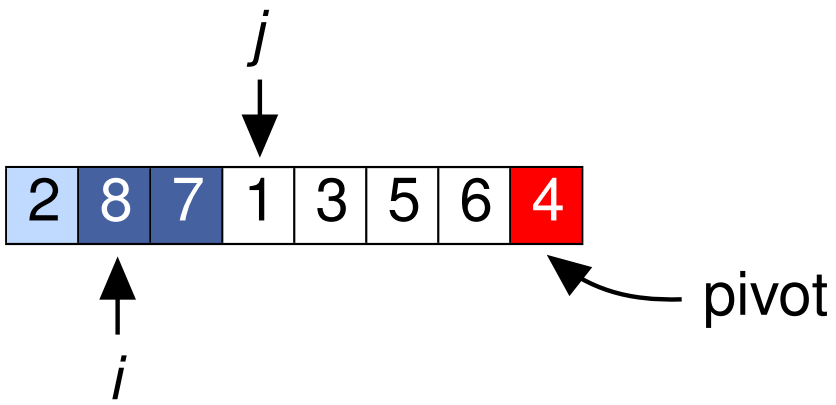
```
1  fonction partition(tableau T,
2                     index_min,    # 1er élément du tableau
3                     index_max) :  # dernier elt du tableau
4    pivot ← T[index_max]
5    i ← index_min
6    pour j variant de index_min à index_max faire
7      si T[j] < pivot alors
8        échanger T[i] et T[j]
9        i ← i + 1
10     finsi
11   fait
12   échanger T[i] et T[index_max]
13   retourner i
```



- **Invariant de boucle :**
  - À gauche de i : elts $<$ pivot
  - Entre i et j : elts $\geq$ pivot

Partitionnement : algorithme de Lomuto

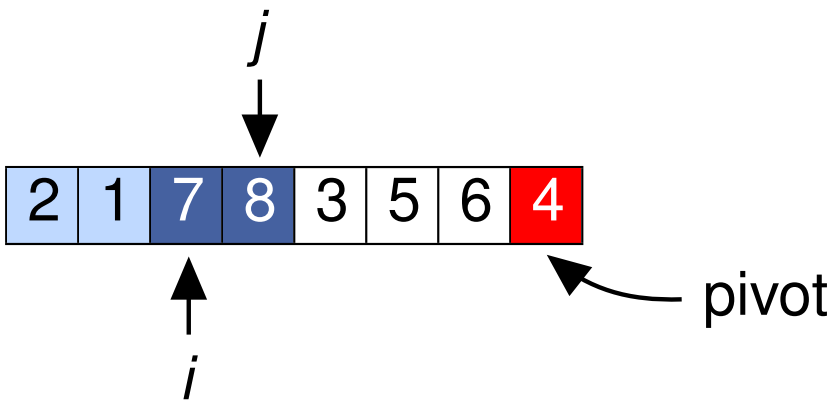
```
1  fonction partition(tableau T,
2                     index_min,    # 1er élément du tableau
3                     index_max) :  # dernier elt du tableau
4    pivot ← T[index_max]
5    i ← index_min
6    pour j variant de index_min à index_max faire
7      si T[j] < pivot alors
8        échanger T[i] et T[j]
9        i ← i + 1
10     finsi
11   fait
12   échanger T[i] et T[index_max]
13   retourner i
```



- **Invariant de boucle :**
  - À gauche de i : elts $<$ pivot
  - Entre i et j : elts $\geq$ pivot

Partitionnement : algorithme de Lomuto

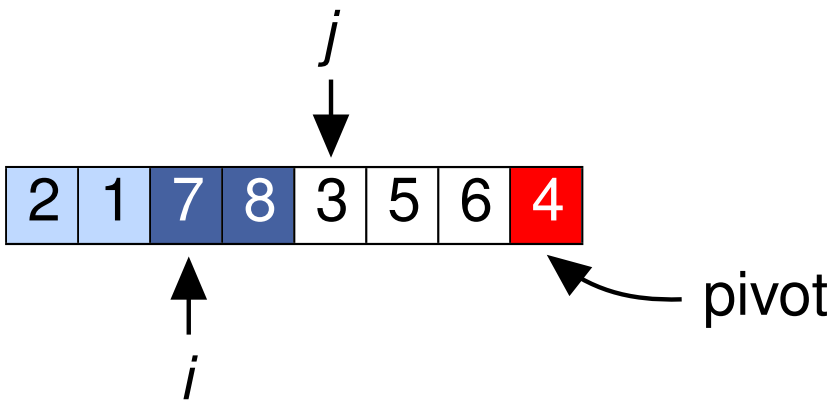
```
1  fonction partition(tableau T,
2                     index_min,    # 1er élément du tableau
3                     index_max) :  # dernier elt du tableau
4    pivot ← T[index_max]
5    i ← index_min
6    pour j variant de index_min à index_max faire
7      si T[j] < pivot alors
8        échanger T[i] et T[j]
9        i ← i + 1
10     finsi
11   fait
12   échanger T[i] et T[index_max]
13   retourner i
```



- **Invariant de boucle :**
  - À gauche de i : elts $<$ pivot
  - Entre i et j : elts $\geq$ pivot

Partitionnement : algorithme de Lomuto

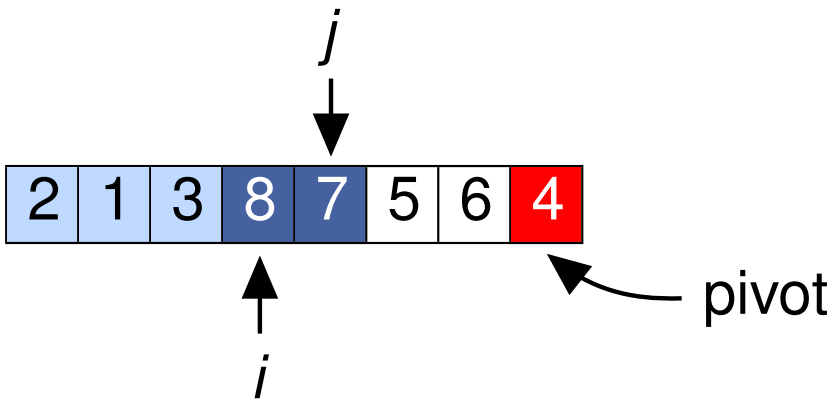
```
1  fonction partition(tableau T,
2                     index_min,    # 1er élément du tableau
3                     index_max) :  # dernier elt du tableau
4    pivot ← T[index_max]
5    i ← index_min
6    pour j variant de index_min à index_max faire
7      si T[j] < pivot alors
8        échanger T[i] et T[j]
9        i ← i + 1
10     finsi
11   fait
12   échanger T[i] et T[index_max]
13   retourner i
```



- **Invariant de boucle :**
  - À gauche de i : elts $<$ pivot
  - Entre i et j : elts $\geq$ pivot

Partitionnement : algorithme de Lomuto

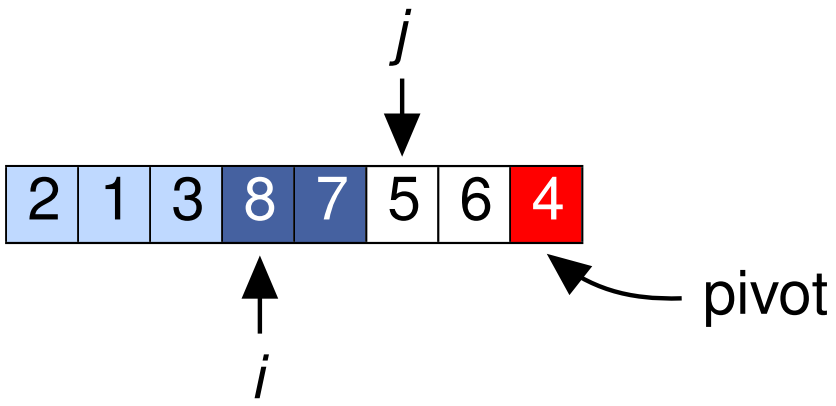
```
1  fonction partition(tableau T,
2                     index_min,    # 1er élément du tableau
3                     index_max) :  # dernier elt du tableau
4    pivot ← T[index_max]
5    i ← index_min
6    pour j variant de index_min à index_max faire
7      si T[j] < pivot alors
8        échanger T[i] et T[j]
9        i ← i + 1
10     finsi
11   fait
12   échanger T[i] et T[index_max]
13   retourner i
```



- **Invariant de boucle :**
  - À gauche de i : elts $<$ pivot
  - Entre i et j : elts $\geq$ pivot

Partitionnement : algorithme de Lomuto

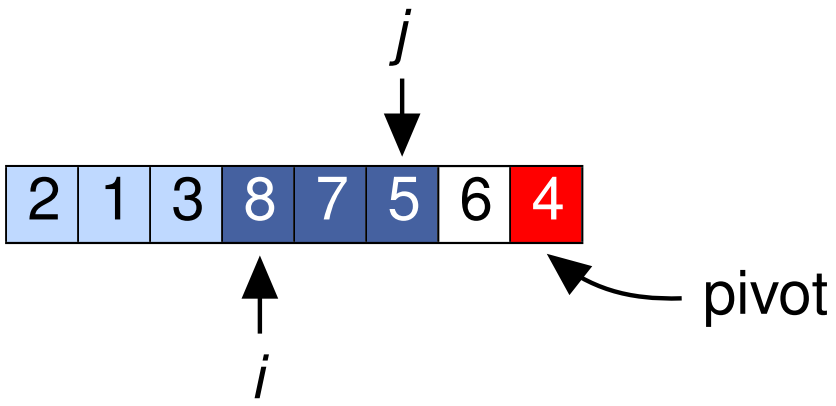
```
1  fonction partition(tableau T,
2                     index_min,    # 1er élément du tableau
3                     index_max) :  # dernier elt du tableau
4    pivot ← T[index_max]
5    i ← index_min
6    pour j variant de index_min à index_max faire
7      si T[j] < pivot alors
8        échanger T[i] et T[j]
9        i ← i + 1
10     finsi
11   fait
12   échanger T[i] et T[index_max]
13   retourner i
```



- **Invariant de boucle :**
  - À gauche de i : elts $<$ pivot
  - Entre i et j : elts $\geq$ pivot

Partitionnement : algorithme de Lomuto

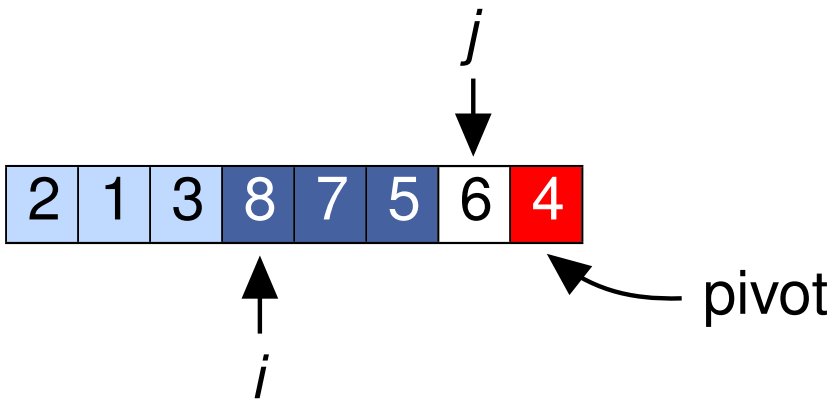
```
1  fonction partition(tableau T,
2                     index_min,    # 1er élément du tableau
3                     index_max) :  # dernier elt du tableau
4    pivot ← T[index_max]
5    i ← index_min
6    pour j variant de index_min à index_max faire
7      si T[j] < pivot alors
8        échanger T[i] et T[j]
9        i ← i + 1
10     finsi
11   fait
12   échanger T[i] et T[index_max]
13   retourner i
```



- **Invariant de boucle :**
  - À gauche de i : elts $<$ pivot
  - Entre i et j : elts $\geq$ pivot

Partitionnement : algorithme de Lomuto

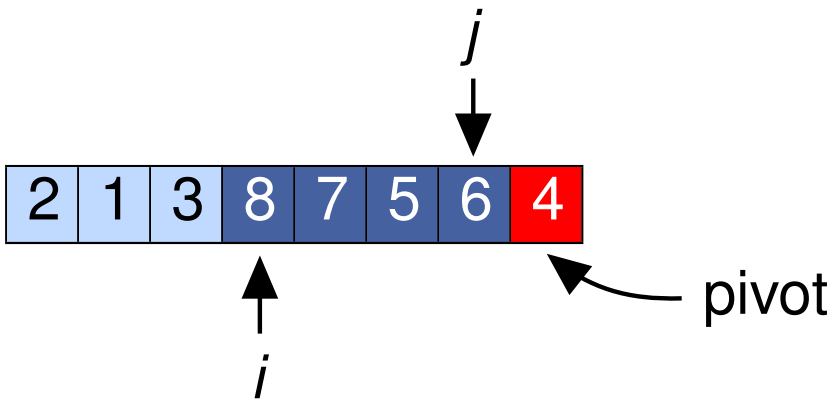
```
1  fonction partition(tableau T,
2                     index_min,    # 1er élément du tableau
3                     index_max) :  # dernier elt du tableau
4    pivot ← T[index_max]
5    i ← index_min
6    pour j variant de index_min à index_max faire
7      si T[j] < pivot alors
8        échanger T[i] et T[j]
9        i ← i + 1
10     finsi
11   fait
12   échanger T[i] et T[index_max]
13   retourner i
```



- **Invariant de boucle :**
  - À gauche de i : elts $<$ pivot
  - Entre i et j : elts $\geq$ pivot

Partitionnement : algorithme de Lomuto

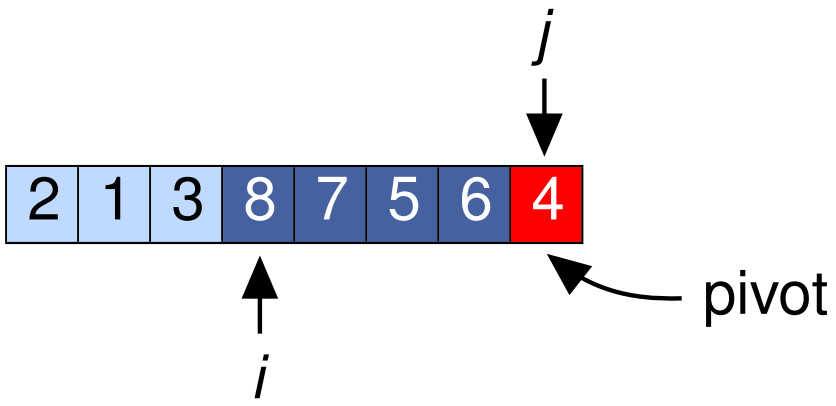
```
1  fonction partition(tableau T,
2                     index_min,    # 1er élément du tableau
3                     index_max) :  # dernier elt du tableau
4    pivot ← T[index_max]
5    i ← index_min
6    pour j variant de index_min à index_max faire
7      si T[j] < pivot alors
8        échanger T[i] et T[j]
9        i ← i + 1
10     finsi
11   fait
12   échanger T[i] et T[index_max]
13   retourner i
```



- **Invariant de boucle :**
  - À gauche de i : elts $<$ pivot
  - Entre i et j : elts $\geq$ pivot

Partitionnement : algorithme de Lomuto

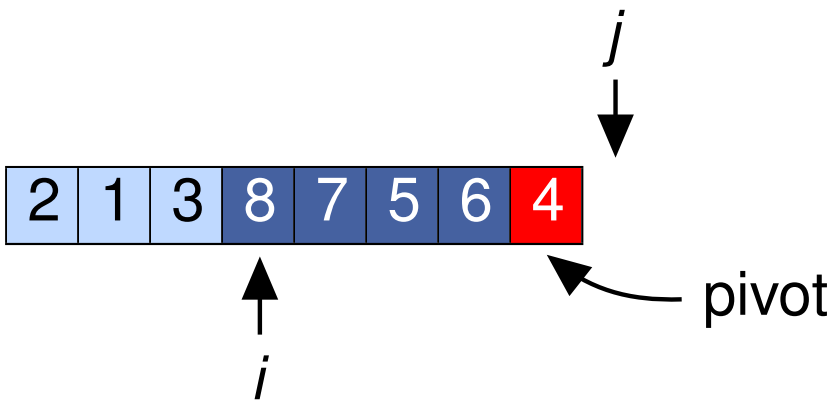
```
1  fonction partition(tableau T,
2                     index_min,    # 1er élément du tableau
3                     index_max) :  # dernier elt du tableau
4    pivot ← T[index_max]
5    i ← index_min
6    pour j variant de index_min à index_max faire
7      si T[j] < pivot alors
8        échanger T[i] et T[j]
9        i ← i + 1
10     finsi
11   fait
12   échanger T[i] et T[index_max]
13   retourner i
```



- **Invariant de boucle :**
  - À gauche de i : elts $<$ pivot
  - Entre i et j : elts $\geq$ pivot

Partitionnement : algorithme de Lomuto

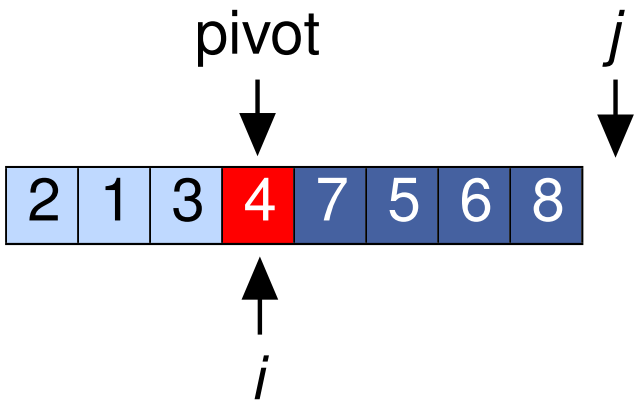
```
1  fonction partition(tableau T,
2                     index_min,    # 1er élément du tableau
3                     index_max) :  # dernier elt du tableau
4    pivot ← T[index_max]
5    i ← index_min
6    pour j variant de index_min à index_max faire
7      si T[j] < pivot alors
8        échanger T[i] et T[j]
9        i ← i + 1
10     finsi
11   fait
12   échanger T[i] et T[index_max]
13   retourner i
```



- **Invariant de boucle :**
  - À gauche de i : elts $<$ pivot
  - Entre i et j : elts $\geq$ pivot

Partitionnement : algorithme de Lomuto

```
1  fonction partition(tableau T,
2                     index_min,    # 1er élément du tableau
3                     index_max) :  # dernier elt du tableau
4    pivot ← T[index_max]
5    i ← index_min
6    pour j variant de index_min à index_max faire
7      si T[j] < pivot alors
8        échanger T[i] et T[j]
9        i ← i + 1
10     finsi
11   fait
12   échanger T[i] et T[index_max]
13   retourner i
```



- **Invariant de boucle :**
  - À gauche de i : elts $<$ pivot
  - Entre i et j : elts $\geq$ pivot

Complexité du tri rapide

Complexité : pire cas

- Tableau déjà trié

  $\Longrightarrow$ partition génère :

  - 1 sous-tableau de $n - 1$ cellules
  - 1 sous-tableau de 1 cellule

Complexité du tri rapide

Complexité : pire cas

- Tableau déjà trié

  $\Longrightarrow$ partition génère :

  - 1 sous-tableau de $n-1$ cellules
  - 1 sous-tableau de 1 cellule

$$T_{max}(n) = T(n-1) + \underbrace{\Theta(n)}_{\text{partition}} = \sum_{k=1}^{n} \Theta(k) = \Theta(n^2).$$

Complexité du tri rapide

Complexité : pire cas

- Tableau déjà trié

  $\Longrightarrow$ partition génère :

  - 1 sous-tableau de $n-1$ cellules
  - 1 sous-tableau de 1 cellule

$$T_{max}(n) = T(n-1) + \underbrace{\Theta(n)}_{\text{partition}} = \sum_{k=1}^{n} \Theta(k) = \Theta(n^2).$$

- Complexité pire cas $= \Theta(n^2)$

Complexité du tri rapide

Complexité : pire cas

- Tableau déjà trié

  $\Longrightarrow$ partition génère :

  - 1 sous-tableau de $n-1$ cellules
  - 1 sous-tableau de 1 cellule

$$T_{max}(n) = T(n-1) + \underbrace{\Theta(n)}_{\text{partition}} = \sum_{k=1}^{n} \Theta(k) = \Theta(n^2).$$

- Complexité pire cas $= \Theta(n^2)$

Complexité : cas moyen

$$T_{moy}(n) = \Theta(nlog(n)).$$

Algorithmes de tri par diviser pour régner

- **Quicksort :**
  - Complexités : pire cas : $O(n^2)$, moyenne : $O(n \log(n))$
  - Utilisations : `qsort` du langage C

    `Array.sort` de Java 6

Algorithmes de tri par diviser pour régner

- **Quicksort :**
  - Complexités : pire cas : $O(n^2)$, moyenne : $O(n \log(n))$
  - Utilisations : `qsort` du langage C
    `Array.sort` de Java 6
- **Merge sort :**
  - Complexités : pire cas : $O(n \log(n))$, moyenne : $O(n \log(n))$
  - Utilisations : `sort` de Python et Java 7 (Timsort)
    `stable_sort` du C++

Algorithmes de tri par diviser pour régner

- **Quicksort :**
  - Complexités : pire cas : $O(n^2)$, moyenne : $O(n\log(n))$
  - Utilisations : `qsort` du langage C
    `Array.sort` de Java 6
- **Merge sort :**
  - Complexités : pire cas : $O(n\log(n))$, moyenne : $O(n\log(n))$
  - Utilisations : `sort` de Python et Java 7 (Timsort)
    `stable_sort` du C++
- **Heap sort :**
  - Complexités : pire cas : $O(n\log(n))$, moyenne : $O(n\log(n))$

Algorithmes de tri par diviser pour régner

- **Quicksort :**
  - Complexités : pire cas : $O(n^2)$, moyenne : $O(n \log(n))$
  - Utilisations : `qsort` du langage C
    `Array.sort` de Java 6
- **Merge sort :**
  - Complexités : pire cas : $O(n \log(n))$, moyenne : $O(n \log(n))$
  - Utilisations : `sort` de Python et Java 7 (Timsort)
    `stable_sort` du C++
- **Heap sort :**
  - Complexités : pire cas : $O(n \log(n))$, moyenne : $O(n \log(n))$
- **Intro sort :**
  - Quicksort, se rabattant sur un heap sort si complexité augmente
  - Complexités : pire cas : $O(n \log(n))$, moyenne : $O(n \log(n))$
  - Utilisations : `sort` du C++

Conclusion

Diviser pour régner

- Technique très utilisée qui consiste à :
  - diviser un problème de taille n en sous-problèmes similaires plus petits
  - résoudre ces sous-problèmes
  - fusionner les solutions pour résoudre le problème initial

Conclusion

Diviser pour régner

- Technique très utilisée qui consiste à :
  - diviser un problème de taille n en sous-problèmes similaires plus petits
  - résoudre ces sous-problèmes
  - fusionner les solutions pour résoudre le problème initial
- Choix de division important
  $\Longrightarrow$ conditionne la performance de l'algorithme
  $\Longrightarrow$ découpage en sous-problèmes de tailles quasi-identiques

Conclusion

Diviser pour régner

- Technique très utilisée qui consiste à :
  - diviser un problème de taille n en sous-problèmes similaires plus petits
  - résoudre ces sous-problèmes
  - fusionner les solutions pour résoudre le problème initial
- Choix de division important
  $\Longrightarrow$ conditionne la performance de l'algorithme
  $\Longrightarrow$ découpage en sous-problèmes de tailles quasi-identiques
- Complexité : théorème maître

Conclusion

Diviser pour régner

- Technique très utilisée qui consiste à :
  - diviser un problème de taille n en sous-problèmes similaires plus petits
  - résoudre ces sous-problèmes
  - fusionner les solutions pour résoudre le problème initial
- Choix de division important
  $\Longrightarrow$ conditionne la performance de l'algorithme
  $\Longrightarrow$ découpage en sous-problèmes de tailles quasi-identiques
- Complexité : théorème maître
- Souvent plus simple à écrire en récursif

Conclusion

Diviser pour régner

- Technique très utilisée qui consiste à :
  - diviser un problème de taille n en sous-problèmes similaires plus petits
  - résoudre ces sous-problèmes
  - fusionner les solutions pour résoudre le problème initial
- Choix de division important
  $\Longrightarrow$ conditionne la performance de l'algorithme
  $\Longrightarrow$ découpage en sous-problèmes de tailles quasi-identiques
- Complexité : théorème maître
- Souvent plus simple à écrire en récursif
- Se prête bien à la parallélisation