Cours n° 2 : Preprocessing

Christophe Gonzales

POLYTECH MARSEILLE Aix-Marseille Université

HUGO3 — Algorithmique

But du cours n° 2

Preprocessing

- Problème P à résoudre
- Idée : commencer par résoudre un problème Q
- Utiliser Q pour résoudre plus rapidement/facilement P

Illustrations du principe :

- Recherche de motifs (chaînes de caractères)
- Tris linéaires de tableaux
- Compression de données (Huffman)

Recherche de chaîne de caractères

Problème

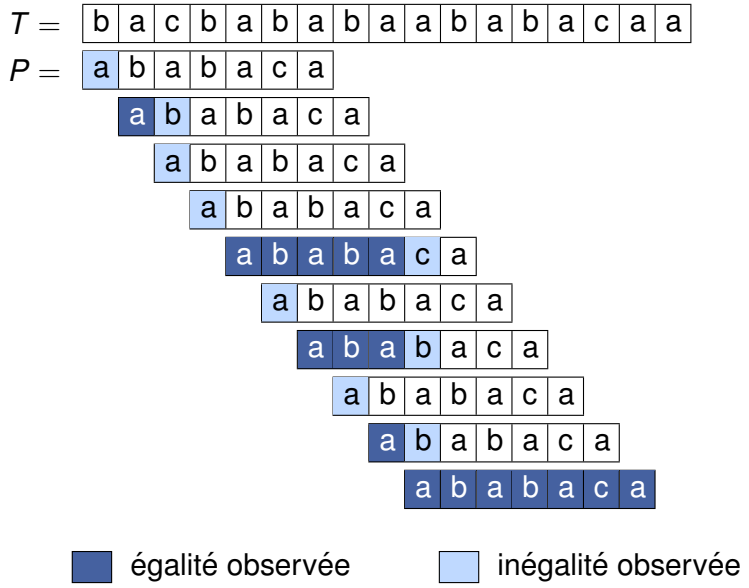
- Chaîne $T =$ b a c b a b a b a a b a b a c a a
- Chaîne $P =$ a b a b a c a
- Problème : Rechercher la 1ère occurrence de P dans T.

- **Exemple :**

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
b	a	c	b	a	b	a	b	a	a	b	a	b	a	c	a	a
									a	b	a	b	a	c	a	

Réponse : index 9

Algorithme naïf (1/2)

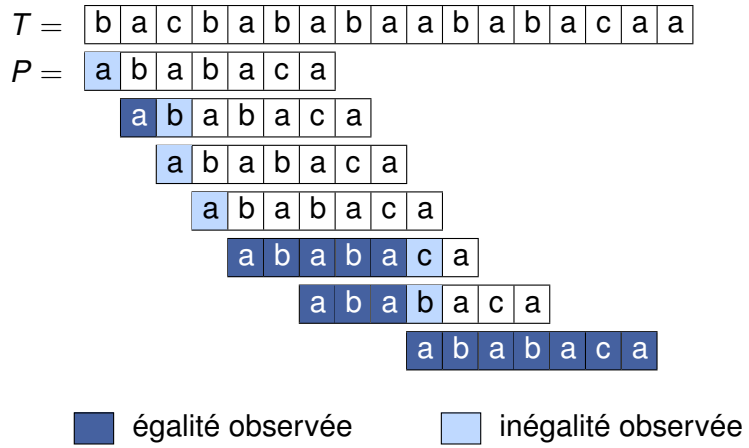


Algorithme naïf (2/2)

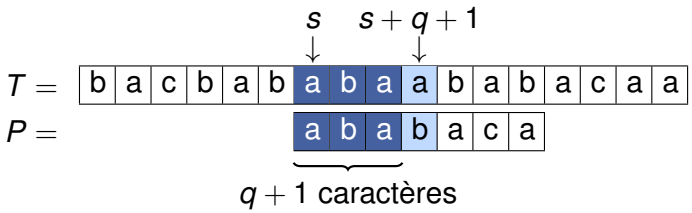
```
1  fonction recherche(chaîne T, chaîne P) :
2    taille_T ← longueur(T)
3    taille_P ← longueur(P)
4    i ← 0
5    tant que i + taille_P < taille_T faire
6      j ← 0
7      tant que j < taille_P et T[i+j] = P[j] faire
8        j ← j + 1
9      fait
10     si j = taille_P alors
11       retourner i
12     finsi
13     i ← i + 1
14   fait
15   retourner -1
```

Complexité :

Exécution de l'algorithme de Knuth-Morris-Pratt



Idée de l'algorithme de Knuth-Morris-Pratt



- **Notation :** $T[s..s+q]$ = caractères d'indices s à $s+q$ (inclus) de T

Meilleur prochain décalage

- Supposons que $P[0..q] = T[s..s+q]$ mais $P[q+1] \neq T[s+q+1]$
- Meilleur prochain décalage = le plus petit $s' > s$ tel que :
  - $s' + k' = s + q$
  - $P[0..k'] = T[s'..s'+k']$

- ici : $s' = s + 2$ et $k' = 0$

Validité du prochain décalage

Meilleur prochain décalage

- Supposons que $P[0..q] = T[s..s+q]$ mais $P[q+1] \neq T[s+q+1]$
- Meilleur prochain décalage = le plus petit $s' > s$ tel que :
  1. $s' + k' = s + q$
  2. $P[0..k'] = T[s'..s'+k']$

- Décalage de s'' tel que $s < s'' < s'$:

  Soit k'' t.q. $s'' + k'' = s + q$

  Si $P[0..k''] = T[s''..s''+k'']$ alors s' n'est pas le plus petit

  $\Longrightarrow$ il existe $k < k''$ t.q. $P[k] \neq T[s''+k]$

  $\Longrightarrow$ s' ne peut pas être une solution
- Décalage de s'' tel que $s' < s''$:

  Facile de trouver des exemples où on manque la solution recherchée

Propriétés du prochain décalage (1/3)

- $P[0..q] = T[s..s+q]$ (1)
- s' : le plus petit index t.q. $s' > s$,
  $s' + k' = s + q$ (2) et $P[0..k'] = T[s'..s' + k']$ (3)

- Passer de s à s' : décalage = $r = s' - s$ caractères
  (équivalent à $s' = s + r$) (4)

$$\Longrightarrow P[0..k'] = T[s'..s' + k'] = T[s + r..s + r + k'] = P[r..r + k']$$
(3) (4) (1)

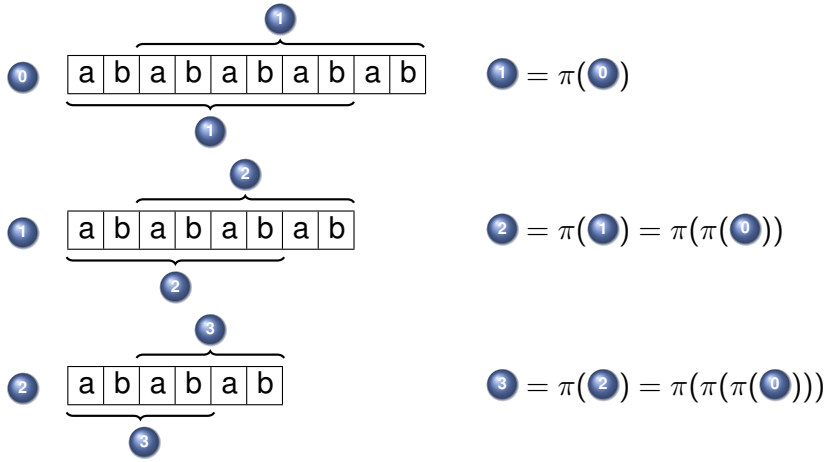
$\Longrightarrow$ On peut calculer s' en utilisant uniquement P !

- $s + q$ fixé, ((2) et s' = le plus petit index)
  $\Longrightarrow$ k' la plus grande longueur
- ((4) et (2)) : $s' + k' = s + r + k' = s + q \Longrightarrow r + k' = q$

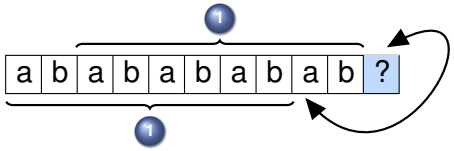
$\Longrightarrow$ On cherche le plus grand suffixe $P[r..q]$ = préfixe de P

Propriétés du prochain décalage (2/3)

- S : chaîne de caractères
- $\pi(S)$: plus grand suffixe de S, différent de S,
  qui est aussi préfixe de S



Propriétés du prochain décalage (3/3)



Calcul itératif de π

- S = chaîne de caractères
- (1) = $\pi(S)$ = plus grand suffixe qui est préfixe
- S' = $S \cup$ nouveau caractère ?
- Si ? = le caractère suivant de (1) alors $\pi(S') = \pi(S) \cup ?$
- Sinon (2) = π(1)
- Si ? = le caractère suivant de (2) alors $\pi(S') = \pi(1) \cup ?$
- Sinon (3) = π(2), *etc.*

Détermination du plus grand suffixe $P[r..q]$

- P : chaîne de caractères, $P_k = P[0..k]$
- $L[k]$ = longueur de $\pi(P_k)$

```
1  fonction longueur_prefixe_KMP (chaîne P) :
2    m ← longueur(P)
3    L ← tableau de m entiers
4    L[0] ← -1 # 1er caractère : pas de π
5    i ← -1    # la longueur du π de P[0..j-1]
6
7    # ici, on calcule le π de P[0..j]
8    pour j variant de 1 à m faire
9      tant que i ≥ 0 et P[j] ≠ P[i+1] faire
10       i ← L[i]
11     fait
12     si P[j] = P[i+1] alors
13       i ← i + 1 # on rajoute le caractère j à π
14     finsi
15     L[j] ← i
16   fait
17
18   retourner L
```

Complexité =

Algorithme de Knuth-Morris-Pratt

```
1  fonction recherche_KMP (chaîne T, chaîne P) :
2    n ← longueur(T)
3    m ← longueur(P)
4    L ← longueur_prefixe_KMP(P)
5    q ← -1
6
7    pour i variant de 0 à n-1 faire
8      tant que q ≥ 0 et P[q+1] ≠ T[i] faire
9        q ← L[q]
10     fait
11     si P[q+1] = T[i] alors
12       q ← q+1
13     finsi
14     si q = m alors
15       retourner "chaîne trouvée à l'indice i - m"
16     finsi
17   fait
18
19   retourner "chaîne non trouvée"
```

Complexité =

En résumé

- Algorithme naïf : $O(m \times n)$
- Algorithme de Knuth-Morris-Pratt : $O(m + n)$

$\Longrightarrow$ Préprocessing accélère significativement les calculs

Tri linéaire de tableaux

- But : trier les éléments d'un tableau
- Très souvent utile en programmation
- Algorithme efficace dans le cas général : cours 3

Cas particulier :

- Tableau T contenant n entiers entre 0 et k
- k très inférieur à n

Preprocess :

- Créer un tableau C de $(k + 1)$ cellules
- Placer dans $C[i]$, $0 \leq i \leq k$ le nombre d'occurrences de i dans T

Exploitation du preprocess :

- Parcourir C pour remplir le tableau T trié

Algorithme de tri linéaire de tableaux

```
1  fonction counting_sort (tableau T, k):
2    créer tableau C de taille (k+1)
3    pour i variant de 0 à k faire
4      C[i] ← 0    # initialisation des comptages
5    fait
6
7    # calcul des nombres d'occurrence
8    n ← longueur(T)
9    pour i variant de 0 à n-1 faire
10     C[T[i]] ← C[T[i]] + 1 # occurrence de T[i]
11   fait
12
13   # remplissage du tableau T trié
14   j ← 0
15   r ← 0
16   pour i variant de 0 à k faire
17     r ← r + C[i]
18     tant que j < r faire
19       T[j] ← i
20       j ← j+1
21     fait
22   fait
```

Complexité : $O(n)$