Cours n° 1 : introduction à l'algorithmique

Christophe Gonzales

POLYTECH MARSEILLE Aix-Marseille Université

HUGO3 — Algorithmique

But du module

2 questions :

- Êtes-vous prêt à attendre 5 minutes que votre GPS calcule votre itinéraire ?

But du module

2 questions :

- Êtes-vous prêt à attendre 5 minutes que votre GPS calcule votre itinéraire ?
- Êtes-vous prêt à attendre 10 minutes pour obtenir une réponse de google ?

But du module

2 questions :

- Êtes-vous prêt à attendre 5 minutes que votre GPS calcule votre itinéraire ?
- Êtes-vous prêt à attendre 10 minutes pour obtenir une réponse de google ?

$\Longrightarrow$ Besoin de logiciels « efficaces »

But du module

2 questions :

- Êtes-vous prêt à attendre 5 minutes que votre GPS calcule votre itinéraire ?
- Êtes-vous prêt à attendre 10 minutes pour obtenir une réponse de google ?

$\Longrightarrow$ Besoin de logiciels « efficaces »

But du cours d'algorithmique

Donner quelques clefs pour réaliser de tels logiciels.

Plan du module

2 points clefs pour des logiciels efficaces :

- Méthodes de « résolution » rapides : 1ère partie du cours
- Accéder rapidement à l'information : 2ème partie du cours

Évaluation du module

- Note finale = 30% contrôle continu + 70% examen
- Contrôle continu : 2 examens en cours de semestre

Plan du cours n° 1

1. En route vers l'algorithmique
2. En route vers un critère d'efficacité
3. Complexité et notations de Landau

1. En route vers l'algorithmique

Exemple récréatif : la reproduction des lapins

Problème (Leonardo da Pisa, dit Fibonacci, 1202) :

- Couple de lapins dans un lieu isolé.
- Commence à enfanter 2 mois après leur naissance.
- Engendre tous les mois un nouveau couple.

Question : Combien de couples après un an ?

Exemple récréatif : la reproduction des lapins

Problème (Leonardo da Pisa, dit Fibonacci, 1202) :

- Couple de lapins dans un lieu isolé.
- Commence à enfanter 2 mois après leur naissance.
- Engendre tous les mois un nouveau couple.

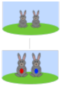
Question : Combien de couples après un an ?

Exemple récréatif : la reproduction des lapins

Problème (Leonardo da Pisa, dit Fibonacci, 1202) :

- Couple de lapins dans un lieu isolé.
- Commence à enfanter 2 mois après leur naissance.
- Engendre tous les mois un nouveau couple.

Question : Combien de couples après un an ?

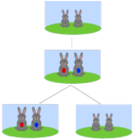


Exemple récréatif : la reproduction des lapins

Problème (Leonardo da Pisa, dit Fibonacci, 1202) :

- Couple de lapins dans un lieu isolé.
- Commence à enfanter 2 mois après leur naissance.
- Engendre tous les mois un nouveau couple.

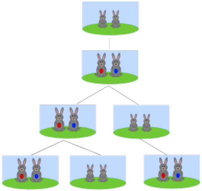
Question : Combien de couples après un an ?



Problème (Leonardo da Pisa, dit Fibonacci, 1202) :

- Couple de lapins dans un lieu isolé.
- Commence à enfanter 2 mois après leur naissance.
- Engendre tous les mois un nouveau couple.

Question : Combien de couples après un an ?

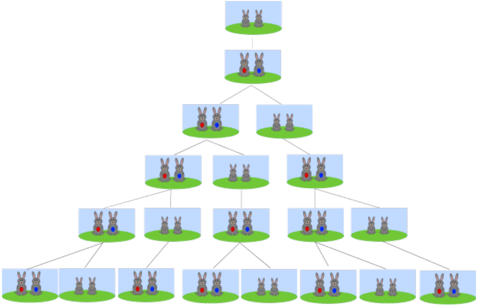


Exemple récréatif : la reproduction des lapins

Problème (Leonardo da Pisa, dit Fibonacci, 1202) :

- Couple de lapins dans un lieu isolé.
- Commence à enfanter 2 mois après leur naissance.
- Engendre tous les mois un nouveau couple.

Question : Combien de couples après un an ?



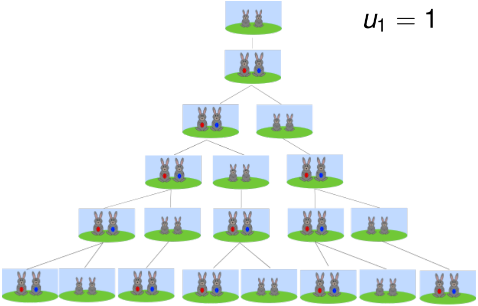
[wikipedia]

Exemple récréatif : la reproduction des lapins

Problème (Leonardo da Pisa, dit Fibonacci, 1202) :

- Couple de lapins dans un lieu isolé.
- Commence à enfanter 2 mois après leur naissance.
- Engendre tous les mois un nouveau couple.

Question : Combien de couples après un an ?



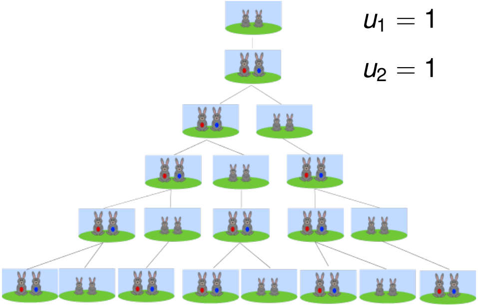
$u_1 = 1$

[wikipedia]

Problème (Leonardo da Pisa, dit Fibonacci, 1202) :

- Couple de lapins dans un lieu isolé.
- Commence à enfanter 2 mois après leur naissance.
- Engendre tous les mois un nouveau couple.

Question : Combien de couples après un an ?



[wikipedia]

$$u_1 = 1$$

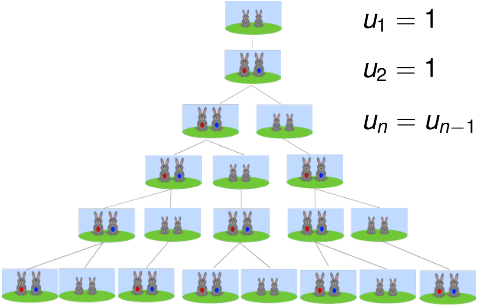
$$u_2 = 1$$

Exemple récréatif : la reproduction des lapins

Problème (Leonardo da Pisa, dit Fibonacci, 1202) :

- Couple de lapins dans un lieu isolé.
- Commence à enfanter 2 mois après leur naissance.
- Engendre tous les mois un nouveau couple.

Question : Combien de couples après un an ?



[wikipedia]

$$u_1 = 1$$

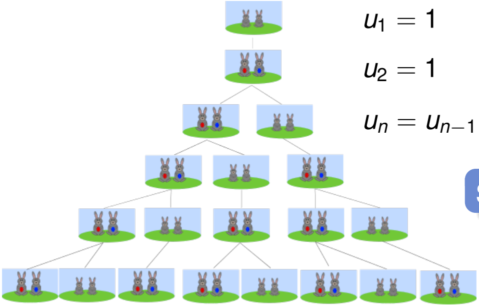
$$u_2 = 1$$

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \text{ pour tout } n \geq 3$$

Problème (Leonardo da Pisa, dit Fibonacci, 1202) :

- Couple de lapins dans un lieu isolé.
- Commence à enfanter 2 mois après leur naissance.
- Engendre tous les mois un nouveau couple.

Question : Combien de couples après un an ?



[wikipedia]

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = 1$$

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \text{ pour tout } n \geq 3$$

Suite de Fibonacci

Suite de Fibonacci : 1er programme C

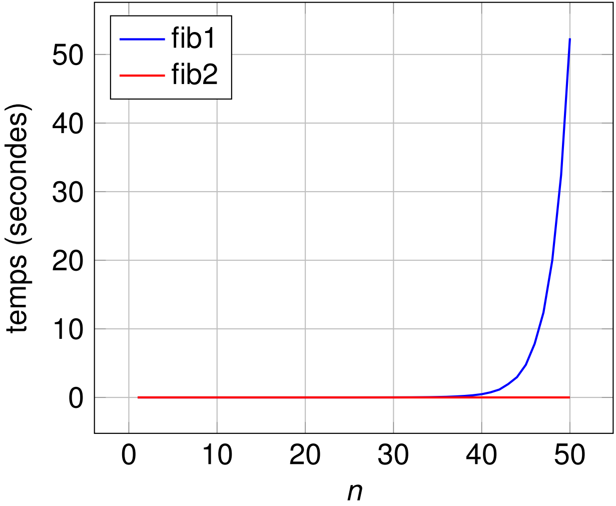
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \text{ pour tout } n \geq 3 \end{cases}$$

```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

// renvoie la valeur de u_n
int fib1 (int n) {
  if (n <= 2) return 1;
  return fib1(n-1) + fib1(n-2);
}

int main (int argc, char** argv) {
  int n = atoi (argv[1]);
  printf ("fibonacci(%d) = %d\n", n, fib1(n));
  return 0;
}
```

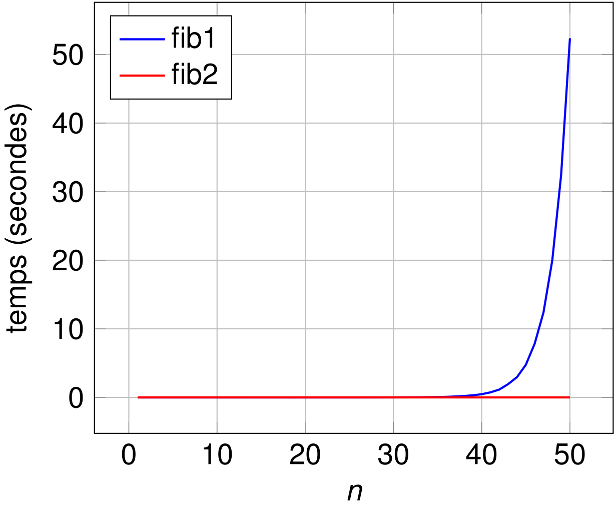
$$u_1 = 1 \qquad u_2 = 1 \qquad u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \text{ pour tout } n \geq 3$$

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

// renvoie la valeur de u_n
int fib2 (int n) {
  int u_n         = 1;
  int u_n_moins_1 = 1;
  int u_n_moins_2;

  for (int i = 3; i <= n; i++) {
    u_n_moins_2 = u_n_moins_1;
    u_n_moins_1 = u_n;
    u_n         = u_n_moins_1 + u_n_moins_2;
  }

  return u_n;
}

int main (int argc, char** argv) {
  int n = atoi (argv[1]);
  printf ("fibonacci(%d) = %d\n", n, fib2(n));
  return 0;
}
```

Comparaison de fib1 et fib2

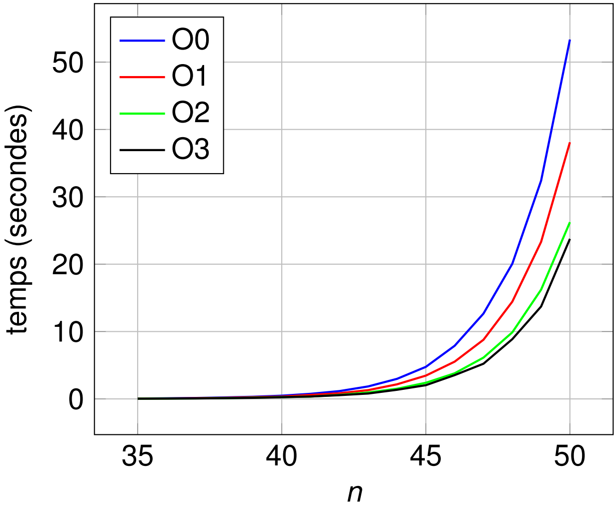


Comparaison de fib1 et fib2

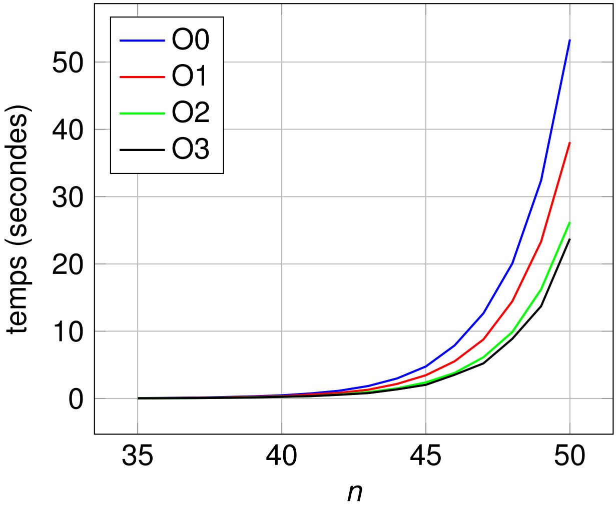


Temps d'exécution $\Longrightarrow$ fib2 « meilleur » que fib1

Autres programmes pour Fibonacci(n)



Autres programmes pour Fibonacci(n)



⚠ Compilation de fib1 avec `gcc -Ox -o fib1 fib1.c`!

En résumé

- Temps d'exécution = mauvais critère car :
  1. Prend en compte l'exécutable, pas le code source

En résumé

- Temps d'exécution = mauvais critère car :
  1. Prend en compte l'exécutable, pas le code source
  2. Dépend :
     - du compilateur (gcc, clang, mingw, mvsc, *etc.*)
     - des options de compilation
     - de l'architecture du processeur
     - du système d'exploitation
     - du langage de programmation
     - *etc.*

En résumé

- Temps d'exécution = mauvais critère car :
  1. Prend en compte l'exécutable, pas le code source
  2. Dépend :
     - du compilateur (gcc, clang, mingw, mvsc, *etc.*)
     - des options de compilation
     - de l'architecture du processeur
     - du système d'exploitation
     - du langage de programmation
     - *etc.*
- Se concentrer sur le code source
- Trouver un critère d'efficacité sur ce code

langage C

```c
int fib1 (int n) {
  if (n <= 2) return 1;
  return (fib1(n-1) + fib1(n-2));
}
```

langage Ocaml

```ocaml
let rec fib1 n =
  if n <= 2 then 1
  else fib1(n-1) + fib1(n-2)
```

langage Python

```python
def fib1 (n):
  return fib1(n-1) + fib1(n-2) if n>=2 else 1
```

Variations sur les langages de programmation

langage C

```
int fib1 (int n) {
  if (n <= 2) return 1;
  return (fib1(n-1) + fib1(n-2));
}
```

langage Ocaml

```
let rec fib1 n =
  if n <= 2 then 1
  else fib1(n-1) + fib1(n-2)
```

langage Python

```
def fib1 (n):
  return fib1(n-1) + fib1(n-2) if n>=2 else 1
```

- Se concentrer sur le raisonnement : langage algorithmique :

langage algorithmique

```
fonction fib1 (n) :
  si n <= 2 alors
    retourner 1
  sinon
    retourner fib1(n-1) + fib1(n-2)
  finsi
```

Algorithmique : késako ?

Définition : Algorithmique

Étude, science des algorithmes.

Algorithmique : késako ?

Définition : Algorithmique

Étude, science des algorithmes.

Définition : Algorithme *[Knuth (2011), page 1]*

Algorithmique : késako ?

Définition : Algorithmique

Étude, science des algorithmes.

Définition : Algorithme *[Knuth (2011), page 1]*

Suite de règles :

- définies de façon précise

Algorithmique : késako ?

Définition : Algorithmique

Étude, science des algorithmes.

Définition : Algorithme *[Knuth (2011), page 1]*

Suite de règles :

- définies de façon précise
- disant comment produire des informations de sortie

Algorithmique : késako ?

Définition : Algorithmique

Étude, science des algorithmes.

Définition : Algorithme *[Knuth (2011), page 1]*

Suite de règles :

- définies de façon précise
- disant comment produire des informations de sortie
- en fonction d'informations d'entrée

Algorithmique : késako ?

Définition : Algorithmique

Étude, science des algorithmes.

Définition : Algorithme *[Knuth (2011), page 1]*

Suite de règles :

- définies de façon précise
- disant comment produire des informations de sortie
- en fonction d'informations d'entrée

- Exemple GPS : Infos d'entrée : 2 points A et B sur une carte
  Infos de sortie : chemin rapide de A vers B

Algorithmique : késako ?

Définition : Algorithmique

Étude, science des algorithmes.

Définition : Algorithme *[Knuth (2011), page 1]*

Suite de règles :

- définies de façon précise
- disant comment produire des informations de sortie
- en fonction d'informations d'entrée

- Exemple GPS : Infos d'entrée : 2 points A et B sur une carte
  Infos de sortie : chemin rapide de A vers B

Règles $\neq$ programme informatique !

Algorithmique : késako ?

Définition : Algorithmique

Étude, science des algorithmes.

Définition : Algorithme *[Knuth (2011), page 1]*

Suite de règles :

- définies de façon précise
- disant comment produire des informations de sortie
- en fonction d'informations d'entrée

- Exemple GPS : Infos d'entrée : 2 points A et B sur une carte
  Infos de sortie : chemin rapide de A vers B

Règles $\neq$ programme informatique !
$\Longrightarrow$ indépendant du langage de programmation
$\Longrightarrow$ raisonnement/recette (en français)

Algorithmique : késako ?

Définition : Algorithmique

Étude, science des algorithmes.

Définition : Algorithme *[Knuth (2011), page 1]*

Suite de règles :

- définies de façon précise
- disant comment produire des informations de sortie
- en fonction d'informations d'entrée

- Exemple GPS : Infos d'entrée : 2 points A et B sur une carte
  Infos de sortie : chemin rapide de A vers B

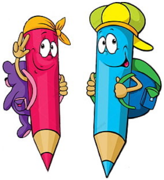
⚠ Règles $\neq$ programme informatique !

$\Longrightarrow$ indépendant du langage de programmation

$\Longrightarrow$ raisonnement/recette (en français)

Implanter l'algorithme = le programmer (en C par exemple)

« Ce qui se conçoit bien s'énonce clairement
et les mots pour le dire arrivent aisément. »
Nicolas Boileau



« Ce qui se conçoit bien s'énonce clairement
et les mots pour le dire arrivent aisément. »

Nicolas Boileau

1. **Spécification formelle du problème :**
   Entrées, sorties, lien entre elles.

Du problème à l'algorithme et à son implantation

1. **Spécification formelle du problème :**
   Entrées, sorties, lien entre elles.
2. **Séparation du problème en morceaux plus petits :**
   Spécifier chaque sous-problème et les regrouper à la fin.

Du problème à l'algorithme et à son implantation

1. **Spécification formelle du problème :**
   Entrées, sorties, lien entre elles.
2. **Séparation du problème en morceaux plus petits :**
   Spécifier chaque sous-problème et les regrouper à la fin.
3. **Construction d'algorithmes :**
   Contraintes d'efficacité, vérification, preuve.

1. **Spécification formelle du problème :**
   Entrées, sorties, lien entre elles.
2. **Séparation du problème en morceaux plus petits :**
   Spécifier chaque sous-problème et les regrouper à la fin.
3. **Construction d'algorithmes :**
   Contraintes d'efficacité, vérification, preuve.
4. **Construction de structures de données :**
   Lien entre algorithme et implantation.

Du problème à l'algorithme et à son implantation

1. **Spécification formelle du problème :**
   Entrées, sorties, lien entre elles.
2. **Séparation du problème en morceaux plus petits :**
   Spécifier chaque sous-problème et les regrouper à la fin.
3. **Construction d'algorithmes :**
   Contraintes d'efficacité, vérification, preuve.
4. **Construction de structures de données :**
   Lien entre algorithme et implantation.
5. **Implantation**

Culture : problèmes classiques en algorithmique

- Algèbre et arithmétique (racines carrées, polynômes, fonctions, calcul matriciel, PGCD, *etc.*)

- Algèbre et arithmétique (racines carrées, polynômes, fonctions, calcul matriciel, PGCD, *etc.*)
- Tri et recherche d'éléments

Culture : problèmes classiques en algorithmique

- Algèbre et arithmétique (racines carrées, polynômes, fonctions, calcul matriciel, PGCD, *etc.*)
- Tri et recherche d'éléments
- Parcours de graphe (plus court chemin, tri topologique, flot maximum, etc.)

Culture : problèmes classiques en algorithmique

- Algèbre et arithmétique (racines carrées, polynômes, fonctions, calcul matriciel, PGCD, *etc.*)
- Tri et recherche d'éléments
- Parcours de graphe (plus court chemin, tri topologique, flot maximum, etc.)
- Cryptographie

Culture : problèmes classiques en algorithmique

- Algèbre et arithmétique (racines carrées, polynômes, fonctions, calcul matriciel, PGCD, *etc.*)
- Tri et recherche d'éléments
- Parcours de graphe (plus court chemin, tri topologique, flot maximum, etc.)
- Cryptographie
- Chaînes de caractères (recherche de sous-séquence, plus longue sous-séquence commune, etc.)

Culture : problèmes classiques en algorithmique

- Algèbre et arithmétique (racines carrées, polynômes, fonctions, calcul matriciel, PGCD, *etc.*)
- Tri et recherche d'éléments
- Parcours de graphe (plus court chemin, tri topologique, flot maximum, etc.)
- Cryptographie
- Chaînes de caractères (recherche de sous-séquence, plus longue sous-séquence commune, etc.)
- Compression de données (Huffman, etc.)

Culture : problèmes classiques en algorithmique

- Algèbre et arithmétique (racines carrées, polynômes, fonctions, calcul matriciel, PGCD, *etc.*)
- Tri et recherche d'éléments
- Parcours de graphe (plus court chemin, tri topologique, flot maximum, etc.)
- Cryptographie
- Chaînes de caractères (recherche de sous-séquence, plus longue sous-séquence commune, etc.)
- Compression de données (Huffman, etc.)
- Géométrie algorithmique (enveloppe convexe, deux points les plus proches, etc.)

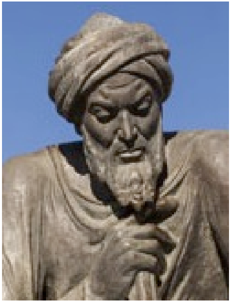
Culture : problèmes classiques en algorithmique

- Algèbre et arithmétique (racines carrées, polynômes, fonctions, calcul matriciel, PGCD, *etc.*)
- Tri et recherche d'éléments
- Parcours de graphe (plus court chemin, tri topologique, flot maximum, etc.)
- Cryptographie
- Chaînes de caractères (recherche de sous-séquence, plus longue sous-séquence commune, etc.)
- Compression de données (Huffman, etc.)
- Géométrie algorithmique (enveloppe convexe, deux points les plus proches, etc.)

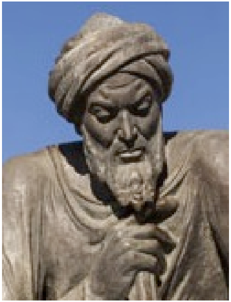
$\Longrightarrow$ facile de trouver de bons algorithmes pour ces problèmes.

Intermède culturel

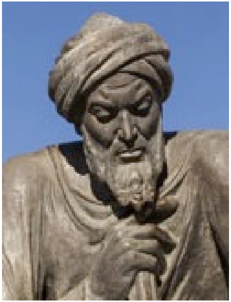
- Étymologie : mathématicien perse Muhammad Ibn Musa Al-Khwârizmî (IXe siècle).
- Né à Khiva, Ouzbékistan (cf. statue).
- Vit à Bagdad pendant la dynastie abbasside.



- Étymologie : mathématicien perse Muhammad Ibn Musa Al-Khwârizmî (IXe siècle).
- Né à Khiva, Ouzbékistan (cf. statue).
- Vit à Bagdad pendant la dynastie abbasside.
- Un des pères de l'algèbre : traité *Kitab al jabr w'al muqabalah* $\Longrightarrow$ méthodes d'extraction de racines carrées…



- Étymologie : mathématicien perse Muhammad Ibn Musa Al-Khwârizmî (IXe siècle).
- Né à Khiva, Ouzbékistan (cf. statue).
- Vit à Bagdad pendant la dynastie abbasside.
- Un des pères de l'algèbre : traité *Kitab al jabr w'al muqabalah* $\Longrightarrow$ méthodes d'extraction de racines carrées...
- Traité sur le système de numération décimale $\Longrightarrow$ méthodes de calcul d'additions...



2 En route vers un critère d'efficacité

```
fonction fib2 (n) :
  u_n     ← 1
  u_{n-1} ← 1
  pour i variant de 3 à n faire
    u_{n-2} ← u_{n-1}
    u_{n-1} ← u_n
    u_n     ← u_{n-1} + u_{n-2}
  fait

  retourner u_n
```

```
1  fonction fib2 (n) :
2    u_n     ← 1
3    u_{n-1} ← 1
4    pour i variant de 3 à n faire
5      u_{n-2} ← u_{n-1}
6      u_{n-1} ← u_n
7      u_n     ← u_{n-1} + u_{n-2}
8    fait
9
10   retourner u_n
```

Ligne	Opération	# exécutions
2	affectation	1
3	affectation	1

Retour sur Fibonacci : comptage d'opérations

```
1  fonction fib2 (n) :
2     u_n     ← 1
3     u_{n-1} ← 1
4     pour i variant de 3 à n faire
5        u_{n-2} ← u_{n-1}
6        u_{n-1} ← u_n
7        u_n     ← u_{n-1} + u_{n-2}
8     fait
9
10    retourner u_n
```

Ligne	Opération	# exécutions
2	affectation	1
3	affectation	1
4	affectation	n - 1
4	comparaison	n - 1

Retour sur Fibonacci : comptage d'opérations

```
1  fonction fib2 (n) :
2    u_n     ← 1
3    u_{n-1} ← 1
4    pour i variant de 3 à n faire
5      u_{n-2} ← u_{n-1}
6      u_{n-1} ← u_n
7      u_n     ← u_{n-1} + u_{n-2}
8    fait
9
10   retourner u_n
```

Ligne	Opération	# exécutions
2	affectation	1
3	affectation	1
4	affectation	n - 1
4	comparaison	n - 1
5	affectation	n - 2
6	affectation	n - 2

```
1  fonction fib2 (n) :
2     u_n     ← 1
3     u_{n-1} ← 1
4     pour i variant de 3 à n faire
5        u_{n-2} ← u_{n-1}
6        u_{n-1} ← u_n
7        u_n     ← u_{n-1} + u_{n-2}
8     fait
9
10    retourner u_n
```

Ligne	Opération	# exécutions
2	affectation	1
3	affectation	1
4	affectation	n - 1
4	comparaison	n - 1
5	affectation	n - 2
6	affectation	n - 2
7	addition	n - 2
7	affectation	n - 2

```
1  fonction fib2 (n) :
2     u_n     ← 1
3     u_{n-1} ← 1
4     pour i variant de 3 à n faire
5        u_{n-2} ← u_{n-1}
6        u_{n-1} ← u_n
7        u_n     ← u_{n-1} + u_{n-2}
8     fait
9
10    retourner u_n
```

Ligne	Opération	# exécutions
2	affectation	1
3	affectation	1
4	affectation	n - 1
4	comparaison	n - 1
5	affectation	n - 2
6	affectation	n - 2
7	addition	n - 2
7	affectation	n - 2

Total $= 6 \times n - 8$

Retour sur Fibonacci : comptage d'opérations

```
1  fonction fib2 (n) :
2     u_n     ← 1
3     u_{n-1} ← 1
4     pour i variant de 3 à n faire
5        u_{n-2} ← u_{n-1}
6        u_{n-1} ← u_n
7        u_n     ← u_{n-1} + u_{n-2}
8     fait
9
10    retourner u_n
```

Ligne	Opération	# exécutions
2	affectation	1
3	affectation	1
4	affectation	n - 1
4	comparaison	n - 1
5	affectation	n - 2
6	affectation	n - 2
7	addition	n - 2
7	affectation	n - 2

Total $= 6 \times n - 8$

Total $\rightarrow 6 \times n$ quand $n \rightarrow +\infty$

Retour sur Fibonacci : comptage d'opérations

```
1  fonction fib2 (n) :
2     u_n     ← 1
3     u_{n-1} ← 1
4     pour i variant de 3 à n faire
5        u_{n-2} ← u_{n-1}
6        u_{n-1} ← u_n
7        u_n     ← u_{n-1} + u_{n-2}
8     fait
9
10    retourner u_n
```

Ligne	Opération	# exécutions
2	affectation	1
3	affectation	1
4	affectation	n - 1
4	comparaison	n - 1
5	affectation	n - 2
6	affectation	n - 2
7	addition	n - 2
7	affectation	n - 2

Total $= 6 \times n - 8$

Total $\to 6 \times n$ quand $n \to +\infty$

Règle n° 1 : on ne garde que le terme dominant.

Règle n° 2

Code en C

```c
int func1 ( int n) {
  int u_n = 2;
  return u_n;
}

int func2 ( int n) {
  if (n == 2) return 0;
  else return 1;
}
```

Code assembleur

```
func1(int) :
   movl   $2, %eax
   ret

func2(int) :
   xorl   %eax, %eax
   cmpl   $2, %edi
   setne  %al
   ret
```

Règle n° 2

Code en C

```c
int func1 ( int n) {
  int u_n = 2;
  return u_n;
}

int func2 ( int n) {
  if (n == 2) return 0;
  else return 1;
}
```

Code assembleur

```
func1(int) :
   movl   $2, %eax
   ret

func2(int) :
   xorl   %eax, %eax
   cmpl   $2, %edi
   setne  %al
   ret
```

$\Longrightarrow$ 1 opération $\neq$ 1 instruction machine

$\Longrightarrow$ se contenter d'un ordre de grandeur sur le nombre d'opérations

Code en C

```c
int func1 ( int n) {
  int u_n = 2;
  return u_n;
}

int func2 ( int n) {
  if (n == 2) return 0;
  else return 1;
}
```

Code assembleur

```
func1(int) :
    movl   $2, %eax
    ret

func2(int) :
    xorl   %eax, %eax
    cmpl   $2, %edi
    setne  %al
    ret
```

$\Longrightarrow$ 1 opération $\neq$ 1 instruction machine

$\Longrightarrow$ se contenter d'un ordre de grandeur sur le nombre d'opérations

Règle n° 2 : on ne garde pas les constantes multiplicatives.

$\Longrightarrow$ # opérations de `fib2` ($\approx 6 \times n$) de l'ordre de n

Résumé des règles n° 1 et 2

```
fonction fib2 (n) :
  u_n     ← 1
  u_{n-1} ← 1
  pour i variant de 3 à n faire
    u_{n-2} ← u_{n-1}
    u_{n-1} ← u_n
    u_n     ← u_{n-1} + u_{n-2}
  fait

  retourner u_n
```

- boucle $\Longrightarrow$ grossièrement de l'ordre de n itérations

Résumé des règles n° 1 et 2

```
fonction fib2 (n) :
  u_n     ← 1
  u_{n-1} ← 1
  pour i variant de 3 à n faire
    u_{n-2} ← u_{n-1}
    u_{n-1} ← u_n
    u_n     ← u_{n-1} + u_{n-2}
  fait

  retourner u_n
```

- boucle $\Longrightarrow$ grossièrement de l'ordre de n itérations
- intérieur de la boucle $\Longrightarrow$ pas d'appel de fonctions
  $\Longrightarrow$ nombre constant d'opérations
  $\Longrightarrow$ compte pour 1

Résumé des règles n° 1 et 2

```
fonction fib2 (n) :
  u_n     ← 1
  u_{n-1} ← 1
  pour i variant de 3 à n faire
    u_{n-2} ← u_{n-1}
    u_{n-1} ← u_n
    u_n     ← u_{n-1} + u_{n-2}
  fait

  retourner u_n
```

- boucle $\Longrightarrow$ grossièrement de l'ordre de n itérations
- intérieur de la boucle $\Longrightarrow$ pas d'appel de fonctions
  $\Longrightarrow$ nombre constant d'opérations
  $\Longrightarrow$ compte pour 1
- boucle $\Longrightarrow$ globalement de l'ordre de n opérations

```
fonction fib2 (n) :
  u_n     ← 1
  u_{n-1} ← 1
  pour i variant de 3 à n faire
    u_{n-2} ← u_{n-1}
    u_{n-1} ← u_n
    u_n     ← u_{n-1} + u_{n-2}
  fait

  retourner u_n
```

- boucle $\Longrightarrow$ grossièrement de l'ordre de n itérations
- intérieur de la boucle $\Longrightarrow$ pas d'appel de fonctions
  $\Longrightarrow$ nombre constant d'opérations
  $\Longrightarrow$ compte pour 1
- boucle $\Longrightarrow$ globalement de l'ordre de n opérations
- avant la boucle $\Longrightarrow$ nombre constant d'opérations $\Longrightarrow$ 1

Résumé des règles n° 1 et 2

```
fonction fib2 (n) :
  uₙ   ← 1
  uₙ₋₁ ← 1
  pour i variant de 3 à n faire
    uₙ₋₂ ← uₙ₋₁
    uₙ₋₁ ← uₙ
    uₙ   ← uₙ₋₁ + uₙ₋₂
  fait

  retourner uₙ
```

- boucle $\Longrightarrow$ grossièrement de l'ordre de n itérations
- intérieur de la boucle $\Longrightarrow$ pas d'appel de fonctions
  $\Longrightarrow$ nombre constant d'opérations
  $\Longrightarrow$ compte pour 1
- boucle $\Longrightarrow$ globalement de l'ordre de n opérations
- avant la boucle $\Longrightarrow$ nombre constant d'opérations $\Longrightarrow$ 1
- n grand $\Longrightarrow$ $n \gg 1$ $\Longrightarrow$ ordre de grandeur de `fib2` $= n$

Retour vers fib1

```
fonction fib1 (n) :
  si n <= 2 alors
    retourner 1
  sinon
    retourner fib1(n-1) + fib1(n-2)
  finsi
```

Retour vers fib1

```
fonction fib1 (n) :
  si n <= 2 alors
    retourner 1
  sinon
    retourner fib1(n-1) + fib1(n-2)
  finsi
```

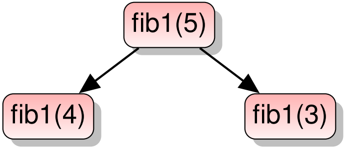
Exécution de fib1(5) :

fib1(5)

Retour vers fib1

```
fonction fib1 (n) :
  si n <= 2 alors
    retourner 1
  sinon
    retourner fib1(n-1) + fib1(n-2)
  finsi
```

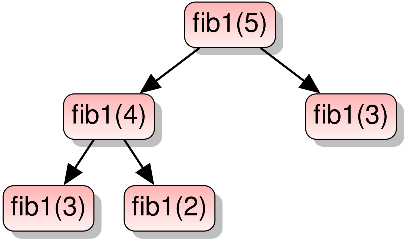
Exécution de fib1(5) :



Retour vers fib1

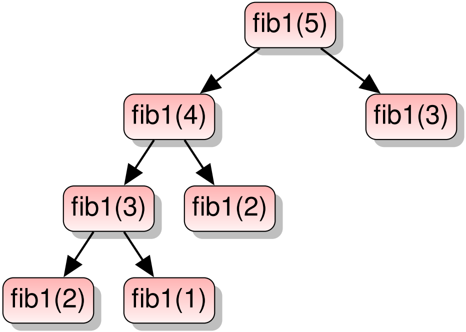
```
fonction fib1 (n) :
  si n <= 2 alors
    retourner 1
  sinon
    retourner fib1(n-1) + fib1(n-2)
  finsi
```

Exécution de fib1(5) :



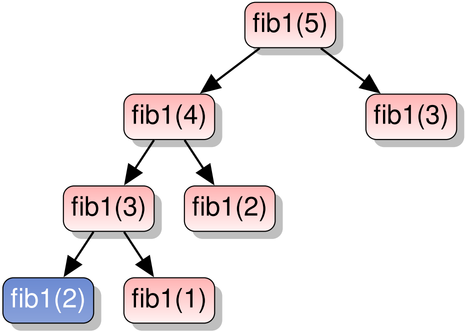
```
fonction fib1 (n) :
  si n <= 2 alors
    retourner 1
  sinon
    retourner fib1(n-1) + fib1(n-2)
  finsi
```

Exécution de fib1(5) :



```
fonction fib1 (n) :
  si n <= 2 alors
    retourner 1
  sinon
    retourner fib1(n-1) + fib1(n-2)
  finsi
```

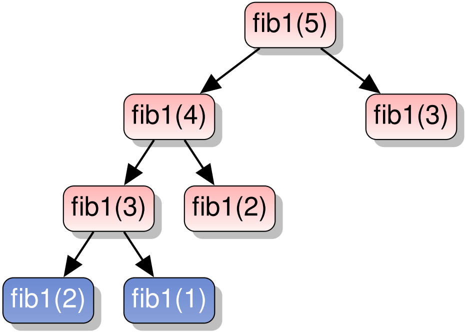
Exécution de fib1(5) :



Retour vers fib1

```
fonction fib1 (n) :
  si n <= 2 alors
    retourner 1
  sinon
    retourner fib1(n-1) + fib1(n-2)
  finsi
```

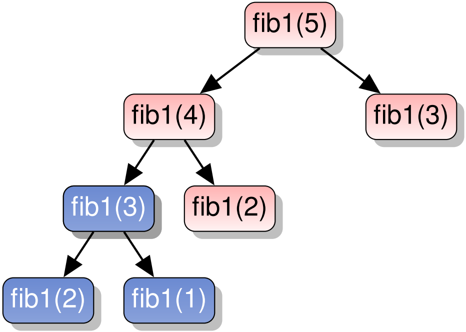
Exécution de fib1(5) :



Retour vers fib1

```
fonction fib1 (n) :
  si n <= 2 alors
    retourner 1
  sinon
    retourner fib1(n-1) + fib1(n-2)
  finsi
```

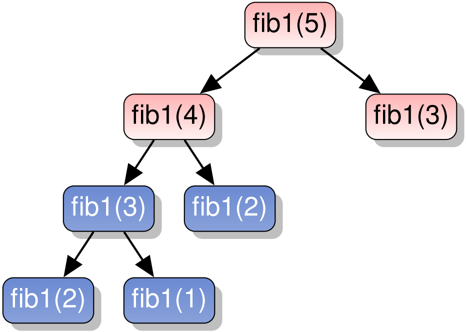
Exécution de fib1(5) :



Retour vers fib1

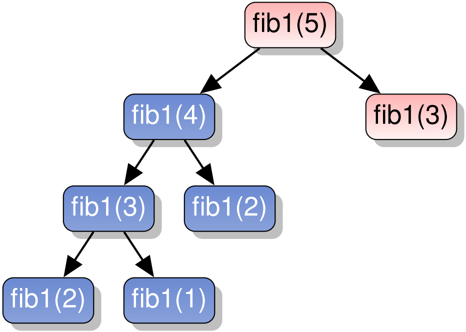
```
fonction fib1 (n) :
  si n <= 2 alors
    retourner 1
  sinon
    retourner fib1(n-1) + fib1(n-2)
  finsi
```

Exécution de fib1(5) :



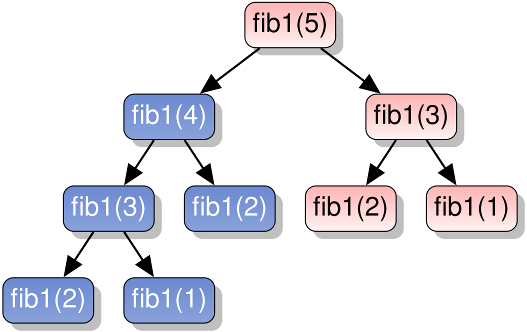
```
fonction fib1 (n) :
  si n <= 2 alors
    retourner 1
  sinon
    retourner fib1(n-1) + fib1(n-2)
  finsi
```

Exécution de fib1(5) :



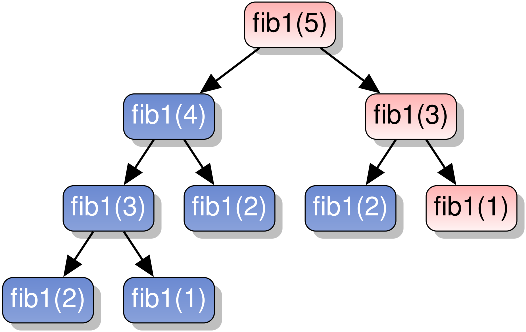
```
fonction fib1 (n) :
  si n <= 2 alors
    retourner 1
  sinon
    retourner fib1(n-1) + fib1(n-2)
  finsi
```

Exécution de fib1(5) :



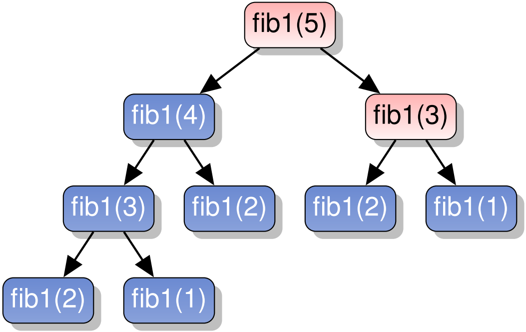
```
fonction fib1 (n) :
  si n <= 2 alors
    retourner 1
  sinon
    retourner fib1(n-1) + fib1(n-2)
  finsi
```

Exécution de fib1(5) :



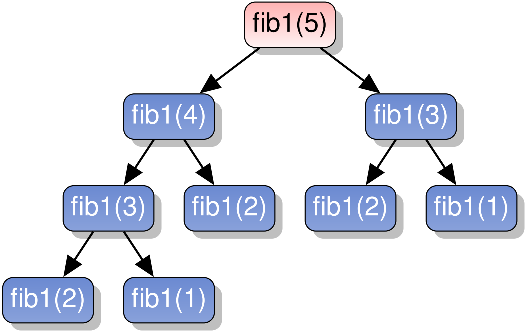
```
fonction fib1 (n) :
  si n <= 2 alors
    retourner 1
  sinon
    retourner fib1(n-1) + fib1(n-2)
  finsi
```

Exécution de fib1(5) :



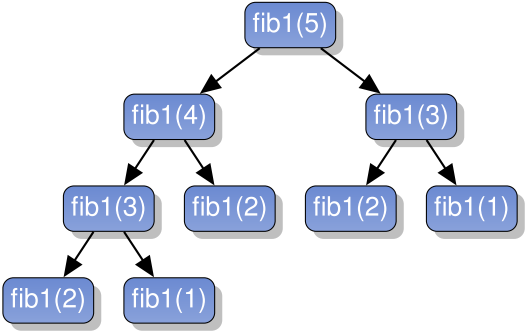
```
fonction fib1 (n) :
  si n <= 2 alors
    retourner 1
  sinon
    retourner fib1(n-1) + fib1(n-2)
  finsi
```

Exécution de fib1(5) :



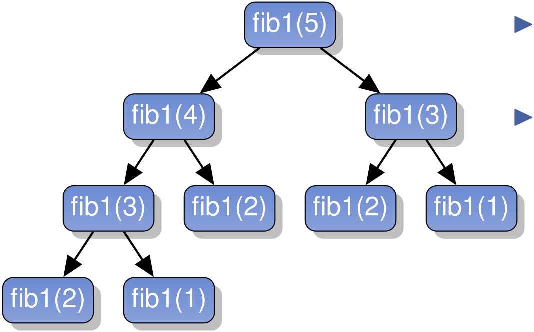
```
fonction fib1 (n) :
  si n <= 2 alors
    retourner 1
  sinon
    retourner fib1(n-1) + fib1(n-2)
  finsi
```

Exécution de fib1(5) :



```
fonction fib1 (n) :
  si n <= 2 alors
    retourner 1
  sinon
    retourner fib1(n-1) + fib1(n-2)
  finsi
```

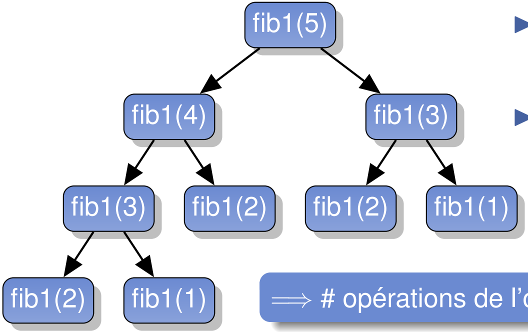
Exécution de fib1(5) :



- Boites fib1(1) et fib1(2) :
  1 test
- Autres boites :
  1 test + 2 appels + 1 addition

```
fonction fib1 (n) :
  si n <= 2 alors
    retourner 1
  sinon
    retourner fib1(n-1) + fib1(n-2)
  finsi
```

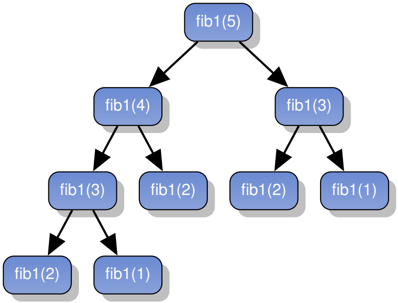
Exécution de fib1(5) :



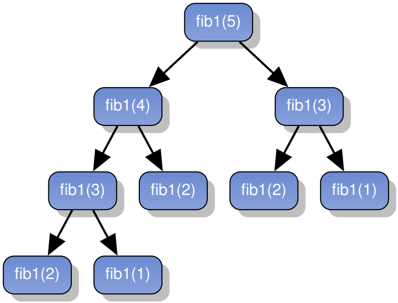
- Boites fib1(1) et fib1(2) :
  1 test
- Autres boites :
  1 test + 2 appels + 1 addition

$\Longrightarrow$ # opérations de l'ordre du nombre d'appels à fib1

Calcul du nombre de boites de fib1



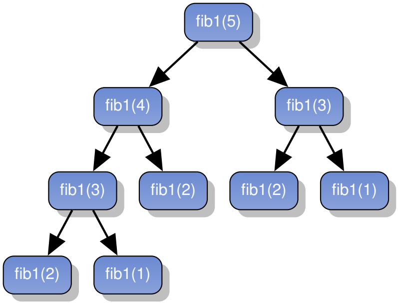
- $T(n) =$ # boites pour fib1(n)
- $T(1) = T(2) = 1$
- $T(n) = 1 + T(n-1) + T(n-2)$ pour $n \geq 3$



- $T(n)$ = # boites pour fib1(n)
- $T(1) = T(2) = 1$
- $T(n) = 1 + T(n-1) + T(n-2)$ pour $n \geq 3$
- $T(n) \approx \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - 1$

opérations $\approx \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \approx 2^{0{,}694n}$

Calcul du nombre de boites de fib1



- $T(n) = \#$ boites pour fib1(n)
- $T(1) = T(2) = 1$
- $T(n) = 1 + T(n-1) + T(n-2)$ pour $n \geq 3$
- $T(n) \approx \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - 1$

$\#$ opérations $\approx \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \approx 2^{0,694n}$

n	T(n)	# opérations fib1	# opérations fib2
5	9	11	5
10	109	123	10
20	13529	15127	20
30	1664079	1860498	30
40	204668309	228826127	40
50	25172538049	28143753123	50

Calcul des ordres de grandeur du nombre d'opérations :

- **Règle n° 1 :** on ne garde que le terme dominant.
- **Règle n° 2 :** on ne garde pas les constantes multiplicatives.

En résumé

Calcul des ordres de grandeur du nombre d'opérations :

- **Règle n° 1 :** on ne garde que le terme dominant.
- **Règle n° 2 :** on ne garde pas les constantes multiplicatives.
- **Règle n° 3 :** ensemble fini (constant) d'opérations (hors appel de fonction) : ordre = 1
- **Règle n° 4 :** ordre d'un appel de fonction = ordre de grandeur du # d'opérations de la fonction

En résumé

Calcul des ordres de grandeur du nombre d'opérations :

- **Règle n° 1 :** on ne garde que le terme dominant.
- **Règle n° 2 :** on ne garde pas les constantes multiplicatives.
- **Règle n° 3 :** ensemble fini (constant) d'opérations (hors appel de fonction) : ordre = 1
- **Règle n° 4 :** ordre d'un appel de fonction = ordre de grandeur du # d'opérations de la fonction
- **Règle n° 5 :** boucle : de l'ordre du nombre d'itérations $\times$ l'ordre du # d'opérations à l'intérieur de la boucle

Multiplication de 2 matrices

- 2 matrices : $A_{N \times M} = (a_{i,k}) \in \mathbb{R}^{N \times M}$, $B_{M \times P} = (b_{k,j}) \in \mathbb{R}^{M \times P}$
- $M_{N \times P} = (m_{i,j}) \in \mathbb{R}^{N \times P} = A_{N \times M} \otimes B_{M \times P}$
- $m_{(i,j)} = \sum_{k=1}^{M} a_{(i,k)} \times b_{(k,j)}$ pour tout i, j

Multiplication de 2 matrices

- 2 matrices : $A_{N\times M} = (a_{i,k}) \in \mathbb{R}^{N\times M}$, $B_{M\times P} = (b_{k,j}) \in \mathbb{R}^{M\times P}$
- $M_{N\times P} = (m_{i,j}) \in \mathbb{R}^{N\times P} = A_{N\times M} \otimes B_{M\times P}$
- $m_{(i,j)} = \sum_{k=1}^{M} a_{(i,k)} \times b_{(k,j)}$ pour tout i, j

```
fonction produit (A_{N×M}, B_{M×P}) :
  pour i variant de 1 à N faire
    pour j variant de 1 à P faire
      m_(i,j) ← 0
      pour k variant de 1 à M faire
        m_(i,j) ← m_(i,j) + a_(i,k) × a_(k,j)
      fait
    fait
  fait
```

Multiplication de 2 matrices

- 2 matrices : $A_{N\times M} = (a_{i,k}) \in \mathbb{R}^{N\times M}$, $B_{M\times P} = (b_{k,j}) \in \mathbb{R}^{M\times P}$
- $M_{N\times P} = (m_{i,j}) \in \mathbb{R}^{N\times P} = A_{N\times M} \otimes B_{M\times P}$
- $m_{(i,j)} = \sum_{k=1}^{M} a_{(i,k)} \times b_{(k,j)}$ pour tout i, j

```
fonction produit (A_{N×M}, B_{M×P}) :
  pour i variant de 1 à N faire
    pour j variant de 1 à P faire
      m_(i,j) ← 0
      pour k variant de 1 à M faire
        m_(i,j) ← m_(i,j) + a_(i,k) × a_(k,j)
      fait
    fait
  fait
```

- Ordre de grandeur du # d'opérations de `produit` = ?

Multiplication de 2 matrices

- 2 matrices : $A_{N\times M} = (a_{i,k}) \in \mathbb{R}^{N\times M}$, $B_{M\times P} = (b_{k,j}) \in \mathbb{R}^{M\times P}$
- $M_{N\times P} = (m_{i,j}) \in \mathbb{R}^{N\times P} = A_{N\times M} \otimes B_{M\times P}$
- $m_{(i,j)} = \sum_{k=1}^{M} a_{(i,k)} \times b_{(k,j)}$ pour tout i, j

```
fonction produit (A_{N×M}, B_{M×P}) :
  pour i variant de 1 à N faire
    pour j variant de 1 à P faire
      m_(i,j) ← 0
      pour k variant de 1 à M faire
        m_(i,j) ← m_(i,j) + a_(i,k) × a_(k,j)
      fait
    fait
  fait
```

- Ordre de grandeur du # d'opérations de `produit` = $N \times M \times P$

Puissance d'un nombre

- $x^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ x^{n/2} \times x^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ x \times x^{\lfloor n/2 \rfloor} \times x^{\lfloor n/2 \rfloor} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

Puissance d'un nombre

- $$x^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ x^{n/2} \times x^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ x \times x^{\lfloor n/2 \rfloor} \times x^{\lfloor n/2 \rfloor} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

```
fonction puissance (x, n) :
  si n = 0 alors
    retourner 1
  sinon
    x_n2 ← puissance (x, ⌊n/2⌋)
    si n est pair alors
      retourner x_n2 × x_n2
    sinon
      retourner x × x_n2 × x_n2
    finsi
  finsi
```

- $x^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ x^{n/2} \times x^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ x \times x^{\lfloor n/2 \rfloor} \times x^{\lfloor n/2 \rfloor} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

```
fonction puissance (x, n) :
  si n = 0 alors
    retourner 1
  sinon
    x_n2 ← puissance (x, ⌊n/2⌋)
    si n est pair alors
      retourner x_n2 × x_n2
    sinon
      retourner x × x_n2 × x_n2
    finsi
  finsi
```

- Ordre de grandeur du # d'opérations de `puissance` = ?

Puissance d'un nombre

- $x^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ x^{n/2} \times x^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ x \times x^{\lfloor n/2 \rfloor} \times x^{\lfloor n/2 \rfloor} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

```
fonction puissance (x, n) :
  si n = 0 alors
    retourner 1
  sinon
    x_n2 ← puissance (x, ⌊n/2⌋)
    si n est pair alors
      retourner x_n2 × x_n2
    sinon
      retourner x × x_n2 × x_n2
    finsi
  finsi
```

- Ordre de grandeur du # d'opérations de `puissance` = $\log(n)$

Vers une formalisation

Ordres de grandeur $\Longrightarrow$ « Complexité asymptotique »

- complexité de puissance = $O(\log(n))$
- complexité de produit = $O(N \times M \times P)$

Ordres de grandeur $\Longrightarrow$ « Complexité asymptotique »

- complexité de puissance = $O(\log(n))$
- complexité de produit = $O(N \times M \times P)$

2 types de complexité intéressantes :

- Complexité en temps : coût du temps d'exécution
- Complexité en espace : coût en consommation mémoire

⚠ Exprimées en fonction des paramètres d'entrée !

3. Complexité et notations de Landau

Différentes complexités

```
fonction bizarre (n) :
  si n est pair alors
    retourner fib1 (n)
  sinon
    retourner fib2 (n)
  finsi
```

1. Complexité au pire cas : borne supérieure du nombre d'instructions. Ex : $O(\text{bizarre}) = O(fib1) = O(2^{0,694n})$

Différentes complexités

```
fonction bizarre (n) :
  si n est pair alors
    retourner fib1 (n)
  sinon
    retourner fib2 (n)
  finsi
```

1. Complexité au pire cas : borne supérieure du nombre d'instructions. Ex : $O(\text{bizarre}) = O(fib1) = O(2^{0,694n})$
2. Complexité dans le meilleur cas : borne inférieure du nombre d'instructions. Ex : $O(\text{bizarre}) = O(fib2) = O(n)$

Différentes complexités

```
fonction bizarre (n) :
  si n est pair alors
    retourner fib1 (n)
  sinon
    retourner fib2 (n)
  finsi
```

1. Complexité au pire cas : borne supérieure du nombre d'instructions. Ex : $O(\text{bizarre}) = O(\mathit{fib}1) = O(2^{0{,}694n})$
2. Complexité dans le meilleur cas : borne inférieure du nombre d'instructions. Ex : $O(\text{bizarre}) = O(\mathit{fib}2) = O(n)$
3. Complexité en moyenne : moyenne du coût pour l'ensemble des valeurs possibles d'entrée

Différentes complexités

```
fonction bizarre (n) :
  si n est pair alors
    retourner fib1 (n)
  sinon
    retourner fib2 (n)
  finsi
```

1. Complexité au pire cas : borne supérieure du nombre d'instructions. Ex : $O(\text{bizarre}) = O(\mathit{fib}1) = O(2^{0,694n})$
2. Complexité dans le meilleur cas : borne inférieure du nombre d'instructions. Ex : $O(\text{bizarre}) = O(\mathit{fib}2) = O(n)$
3. Complexité en moyenne : moyenne du coût pour l'ensemble des valeurs possibles d'entrée

   ⚠ nécessite une distribution de probabilité des valeurs d'entrée.

   Ex : si 1 chance sur 3 que n soit pair :
   $O(\text{bizarre}) = O(\frac{1}{3}2^{0,694n} + \frac{2}{3}n) = O(2^{0,694n})$

Différentes complexités

```
fonction bizarre (n) :
  si n est pair alors
    retourner fib1 (n)
  sinon
    retourner fib2 (n)
  finsi
```

1. Complexité au pire cas : borne supérieure du nombre d'instructions. Ex : $O(\text{bizarre}) = O(\mathit{fib}1) = O(2^{0,694n})$
2. Complexité dans le meilleur cas : borne inférieure du nombre d'instructions. Ex : $O(\text{bizarre}) = O(\mathit{fib}2) = O(n)$
3. Complexité en moyenne : moyenne du coût pour l'ensemble des valeurs possibles d'entrée

   ⚠ nécessite une distribution de probabilité des valeurs d'entrée.

   Ex : si 1 chance sur 3 que n soit pair :
   $O(\text{bizarre}) = O(\frac{1}{3}2^{0,694n} + \frac{2}{3}n) = O(2^{0,694n})$

En pratique : souvent, complexité dans le pire cas.

Notations de landau

Idée : comparaison de 2 fonctions f et g

- fonction f = « vrai » temps d'exécution
- fonction g = « approximation » de f
  = ordre de grandeur vue précédemment

Notations de landau

Idée : comparaison de 2 fonctions f et g

- fonction f = « vrai » temps d'exécution
- fonction g = « approximation » de f
  = ordre de grandeur vue précédemment
- Notation de Landau $\Longrightarrow$ comparaison de f et g

Notations de landau

Idée : comparaison de 2 fonctions f et g

- fonction f = « vrai » temps d'exécution
- fonction g = « approximation » de f
  = ordre de grandeur vue précédemment
- Notation de Landau $\Longrightarrow$ comparaison de f et g

4 ordres de grandeurs / comparaisons :

- O (grand O) : borné supérieurement
- Ω : borné inférieurement
- Θ : borné supérieurement et inférieurement
- o (petit O) : dominé (négligeable)

Notations de landau

Idée : comparaison de 2 fonctions f et g

- fonction f = « vrai » temps d'exécution
- fonction g = « approximation » de f
  = ordre de grandeur vue précédemment
- Notation de Landau $\Longrightarrow$ comparaison de f et g

4 ordres de grandeurs / comparaisons :

- O (grand O) : borné supérieurement
- Ω : borné inférieurement
- Θ : borné supérieurement et inférieurement
- o (petit O) : dominé (négligeable)

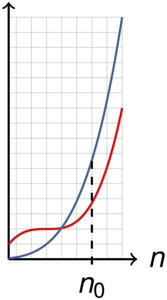
⚠ Complexités asymptotiques !

Grand O : borne asymptotique supérieure

Définition du grand O

- f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
- $f \in O(g)$: f est asymptotiquement bornée supérieurement par g ssi :

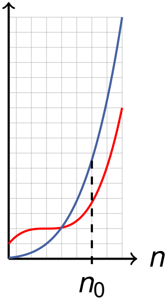
$$\exists c \in \mathbb{R}_*^+,\ \exists n_0 \in \mathbb{R}^+ \text{ tels que } \forall n > n_0,\ f(n) \leq c \times g(n).$$



Définition du grand O

- f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
- $f \in O(g)$: f est asymptotiquement bornée supérieurement par g ssi :

$$\exists c \in \mathbb{R}_*^+,\ \exists n_0 \in \mathbb{R}^+ \text{ tels que } \forall n > n_0,\ f(n) \leq c \times g(n).$$



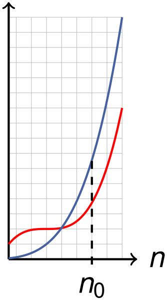
Exemples :

- $10n \in O(n^2)$: $c = 1$, $n_0 = 10$

Définition du grand O

- f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
- $f \in O(g)$: f est asymptotiquement bornée supérieurement par g ssi :

$$\exists c \in \mathbb{R}_*^+,\ \exists n_0 \in \mathbb{R}^+ \text{ tels que } \forall n > n_0,\ f(n) \le c \times g(n).$$



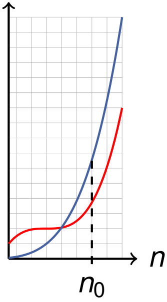
Exemples :

- $10n \in O(n^2)$: $c = 1$, $n_0 = 10$
- $n^2 + 10n \in O(n^2)$: $c = 11$, $n_0 = 0$

Définition du grand O

- f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
- $f \in O(g)$: f est asymptotiquement bornée supérieurement par g ssi :

$$\exists c \in \mathbb{R}_*^+,\ \exists n_0 \in \mathbb{R}^+ \text{ tels que } \forall n > n_0,\ f(n) \leq c \times g(n).$$



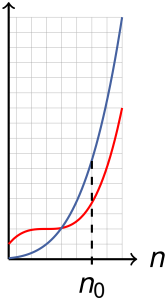
Exemples :

- $10n \in O(n^2)$: $c = 1$, $n_0 = 10$
- $n^2 + 10n \in O(n^2)$: $c = 11$, $n_0 = 0$
- $10n \in O(n)$: $c = 10$, $n_0 = 0$

Définition du grand O

- f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
- $f \in O(g)$: f est asymptotiquement bornée supérieurement par g ssi :

$$\exists c \in \mathbb{R}_*^+,\ \exists n_0 \in \mathbb{R}^+ \text{ tels que } \forall n > n_0,\ f(n) \leq c \times g(n).$$



Exemples :

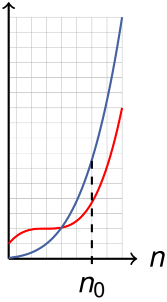
- $10n \in O(n^2)$: $c = 1$, $n_0 = 10$
- $n^2 + 10n \in O(n^2)$: $c = 11$, $n_0 = 0$
- $10n \in O(n)$: $c = 10$, $n_0 = 0$
- $n \notin O(\log(n))$

Grand O : borne asymptotique supérieure

Définition du grand O

- f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
- $f \in O(g)$: f est asymptotiquement bornée supérieurement par g ssi :

$$\exists c \in \mathbb{R}_*^+,\ \exists n_0 \in \mathbb{R}^+ \text{ tels que } \forall n > n_0,\ f(n) \leq c \times g(n).$$



Exemples :

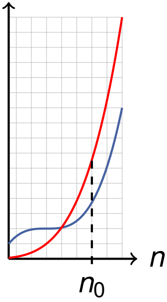
- $10n \in O(n^2)$: $c = 1$, $n_0 = 10$
- $n^2 + 10n \in O(n^2)$: $c = 11$, $n_0 = 0$
- $10n \in O(n)$: $c = 10$, $n_0 = 0$
- $n \notin O(\log(n))$

$\Longrightarrow$ Règles n° 1 et n° 2

Définition du Ω

- f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
- $f \in \Omega(g)$: f est asymptotiquement bornée inférieurement par g ssi

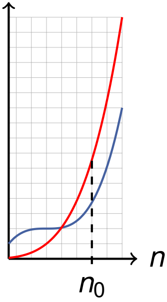
$$\exists c \in \mathbb{R}_*^+,\ \exists n_0 \in \mathbb{R}^+ \text{ tels que } \forall n > n_0,\ f(n) \geq c \times g(n).$$



Définition du Ω

- f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
- $f \in \Omega(g)$: f est asymptotiquement bornée inférieurement par g ssi

$$\exists c \in \mathbb{R}_*^+,\ \exists n_0 \in \mathbb{R}^+ \text{ tels que } \forall n > n_0,\ f(n) \geq c \times g(n).$$



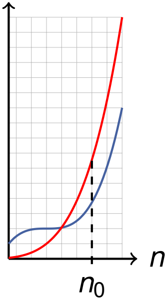
- Exemple : $n^2 \in \Omega(10n)$
- Remarque n° 1 : $f \in \Omega(g) \Longleftrightarrow g \in O(f)$

Ω : borne asymptotique inférieure

Définition du Ω

- f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
- $f \in \Omega(g)$: f est asymptotiquement bornée inférieurement par g ssi

$$\exists c \in \mathbb{R}_*^+,\ \exists n_0 \in \mathbb{R}^+ \text{ tels que } \forall n > n_0,\ f(n) \geq c \times g(n).$$

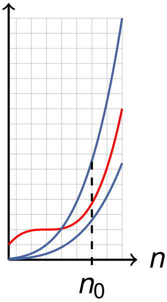


- Exemple : $n^2 \in \Omega(10n)$
- Remarque n° 1 : $f \in \Omega(g) \iff g \in O(f)$
- Remarque n° 2 : ici, définition de Knuth $\neq$ définition de Hardy-Littlewood

Définition du Θ

- f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
- $f \in \Theta(g)$: f est asymptotiquement bornée supérieurement et inférieurement par g ssi $f \in O(g)$ et $f \in \Omega(g)$:

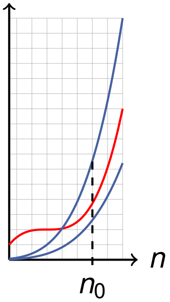
$$\exists c, d \in \mathbb{R}^+_*,\ \exists n_0 \in \mathbb{R}^+ \text{ t.q. } \forall n > n_0,\ d \times g(n) \leq f(n) \leq c \times g(n)$$



Définition du Θ

- f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
- $f \in \Theta(g)$: f est asymptotiquement bornée supérieurement et inférieurement par g ssi $f \in O(g)$ et $f \in \Omega(g)$:

$$\exists c, d \in \mathbb{R}_*^+,\ \exists n_0 \in \mathbb{R}^+ \text{ t.q. } \forall n > n_0,\ d \times g(n) \leq f(n) \leq c \times g(n)$$

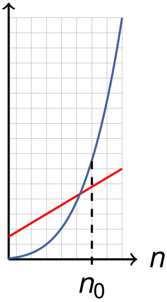


- Exemple : $3n^2 + 5n \in \Theta(n^2)$:
  $d = 1,\ c = 10,\ n_0 = 1$

Définition du petit o

- f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
- $f \in o(g)$: f est négligeable asymptotiquement devant g ssi :

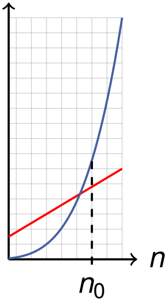
$$\forall c \in \mathbb{R}_*^+,\ \exists n_0 \in \mathbb{R}^+ \text{ t.q. } \forall n > n_0,\ f(n) \leq c \times g(n)$$



Définition du petit o

- f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
- $f \in o(g)$: f est négligeable asymptotiquement devant g ssi :

$$\forall c \in \mathbb{R}^+_*,\ \exists n_0 \in \mathbb{R}^+ \text{ t.q. } \forall n > n_0,\ f(n) \leq c \times g(n)$$



- Exemple : $n \in o(n^2)$: $n_0 = 1/c$

Propriétés et interprétations

Interprétations

- $f \in O(g) \Longrightarrow f/g$ bornée supérieurement : $lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < +\infty$

Propriétés et interprétations

Interprétations

- $f \in O(g) \Longrightarrow f/g$ bornée supérieurement : $lim_{n\rightarrow+\infty}\frac{f(n)}{g(n)} < +\infty$
- $f \in \Omega(g) \Longrightarrow f/g$ bornée inférieurement : $lim_{n\rightarrow+\infty}\frac{f(n)}{g(n)} > 0$

Interprétations

- $f \in O(g) \Longrightarrow f/g$ bornée supérieurement : $lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < +\infty$
- $f \in \Omega(g) \Longrightarrow f/g$ bornée inférieurement : $lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0$
- $f \in \Theta(g) \Longrightarrow f/g$ bornée : $0 < lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < +\infty$

Interprétations

- $f \in O(g) \Longrightarrow f/g$ bornée supérieurement : $lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < +\infty$
- $f \in \Omega(g) \Longrightarrow f/g$ bornée inférieurement : $lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0$
- $f \in \Theta(g) \Longrightarrow f/g$ bornée : $0 < lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < +\infty$
- $f \in o(g) \Longrightarrow f/g$ tend vers 0 : $lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

Interprétations

- $f \in O(g) \implies f/g$ bornée supérieurement : $lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < +\infty$
- $f \in \Omega(g) \implies f/g$ bornée inférieurement : $lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0$
- $f \in \Theta(g) \implies f/g$ bornée : $0 < lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < +\infty$
- $f \in o(g) \implies f/g$ tend vers 0 : $lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

Propriétés

- $f_1 \in O(g_1)$ et $f_2 \in O(g_2)$ alors :
- $f_1 + f_2 \in O(\max(g_1, g_2))$: Règle n° 1

Propriétés et interprétations

Interprétations

- $f \in O(g) \Longrightarrow f/g$ bornée supérieurement : $lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < +\infty$
- $f \in \Omega(g) \Longrightarrow f/g$ bornée inférieurement : $lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0$
- $f \in \Theta(g) \Longrightarrow f/g$ bornée : $0 < lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < +\infty$
- $f \in o(g) \Longrightarrow f/g$ tend vers 0 : $lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

Propriétés

- $f_1 \in O(g_1)$ et $f_2 \in O(g_2)$ alors :
- $f_1 + f_2 \in O(\max(g_1, g_2))$: Règle n° 1
- $f_1 \times f_2 \in O(g_1 \times g_2)$

Propriétés et interprétations

Interprétations

- $f \in O(g) \Longrightarrow f/g$ bornée supérieurement : $lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < +\infty$
- $f \in \Omega(g) \Longrightarrow f/g$ bornée inférieurement : $lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0$
- $f \in \Theta(g) \Longrightarrow f/g$ bornée : $0 < lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < +\infty$
- $f \in o(g) \Longrightarrow f/g$ tend vers 0 : $lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

Propriétés

- $f_1 \in O(g_1)$ et $f_2 \in O(g_2)$ alors :
- $f_1 + f_2 \in O(\max(g_1, g_2))$: Règle n° 1
- $f_1 \times f_2 \in O(g_1 \times g_2)$
- $cst \times f_1 \in O(cst \times g_1) = O(g_1)$: Règle n° 2

Rappel : calcul pratique de la complexité

Calcul du O (ou Θ) d'une fonction :

- **Règle n° 1 :** on ne garde que le terme dominant.
- **Règle n° 2 :** on ne garde pas les constantes multiplicatives.
- **Règle n° 3 :** ensemble fini (constant) d'opérations (hors appel de fonction) : O(1)
- **Règle n° 4 :** appel de fonction : O(fonction)
- **Règle n° 5 :** O(boucle) = nombre d'itérations $\times$ O(instructions à l'intérieur de la boucle)

Complexité de fib1

```
fonction fib1 (n) :
  si n <= 2 alors
    retourner 1
  sinon
    retourner fib1(n-1) + fib1(n-2)
  finsi
```

- $T(n) = \#$ boites pour fib1(n)
- $\begin{cases} T(1) = T(2) = 1 \\ T(n) = 1 + T(n-1) + T(n-2) \text{ pour } n \geq 3 \end{cases}$
- $T(n) \approx \dfrac{2}{\sqrt{5}} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - 1 \propto 2^{0,694n}$

Complexité de fib1

```
fonction fib1 (n) :
  si n <= 2 alors
    retourner 1
  sinon
    retourner fib1(n-1) + fib1(n-2)
  finsi
```

- $T(n) = \#$ boites pour fib1(n)
- $\begin{cases} T(1) = T(2) = 1 \\ T(n) = 1 + T(n-1) + T(n-2) \text{ pour } n \geq 3 \end{cases}$
- $T(n) \approx \dfrac{2}{\sqrt{5}} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - 1 \propto 2^{0,694n}$

ici : complexité pire cas = meilleur cas = moyenne

Complexité de fib1

```
fonction fib1 (n) :
  si n <= 2 alors
    retourner 1
  sinon
    retourner fib1(n-1) + fib1(n-2)
  finsi
```

- $T(n) = \#$ boites pour fib1(n)
- $\begin{cases} T(1) = T(2) = 1 \\ T(n) = 1 + T(n-1) + T(n-2) \text{ pour } n \geq 3 \end{cases}$
- $T(n) \approx \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - 1 \propto 2^{0{,}694n}$

ici : complexité pire cas = meilleur cas = moyenne

fib1 $O(2^{0{,}694n})$, fib1 $\Omega(2^{0{,}694n})$, fib1 $\Theta(2^{0{,}694n})$

```
fonction fib1 (n) :
  si n <= 2 alors
    retourner 1
  sinon
    retourner fib1(n-1) + fib1(n-2)
  finsi
```

- $T(n) = $ # boites pour fib1(n)
- $\begin{cases} T(1) = T(2) = 1 \\ T(n) = 1 + T(n-1) + T(n-2) \text{ pour } n \geq 3 \end{cases}$
- $T(n) \approx \dfrac{2}{\sqrt{5}} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - 1 \propto 2^{0,694n}$

ici : complexité pire cas = meilleur cas = moyenne

fib1 $\in O(2^{0,694n})$, fib1 $\Omega(2^{0,694n})$, fib1 $\Theta(2^{0,694n})$

Complexité de fib1

```
fonction fib1 (n) :
  si n <= 2 alors
    retourner 1
  sinon
    retourner fib1(n-1) + fib1(n-2)
  finsi
```

- $T(n) =$ # boites pour fib1(n)
- $\begin{cases} T(1) = T(2) = 1 \\ T(n) = 1 + T(n-1) + T(n-2) \text{ pour } n \geq 3 \end{cases}$
- $T(n) \approx \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - 1 \propto 2^{0{,}694n}$

ici : complexité pire cas = meilleur cas = moyenne

fib1 $\in O(2^{0{,}694n})$, fib1 $\in \Omega(2^{0{,}694n})$, fib1 $\Theta(2^{0{,}694n})$

Complexité de fib1

```
fonction fib1 (n) :
  si n <= 2 alors
    retourner 1
  sinon
    retourner fib1(n-1) + fib1(n-2)
  finsi
```

- $T(n) =$ # boites pour fib1(n)
- $\begin{cases} T(1) = T(2) = 1 \\ T(n) = 1 + T(n-1) + T(n-2) \text{ pour } n \geq 3 \end{cases}$
- $T(n) \approx \dfrac{2}{\sqrt{5}} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - 1 \propto 2^{0{,}694n}$

ici : complexité pire cas = meilleur cas = moyenne

$\text{fib1} \in O(2^{0{,}694n}), \quad \text{fib1} \in \Omega(2^{0{,}694n}), \quad \text{fib1} \in \Theta(2^{0{,}694n})$

Complexité de fib2

```
fonction fib2 (n) :
  u_n     ← 1
  u_{n-1} ← 1
  pour i variant de 3 à n faire
    u_{n-2} ← u_{n-1}
    u_{n-1} ← u_n
    u_n     ← u_{n-1} + u_{n-2}
  fait

  retourner u_n
```

- Nombre d'opérations $= 6 \times n - 8$

```
fonction fib2 (n) :
  u_n     ← 1
  u_{n-1} ← 1
  pour i variant de 3 à n faire
    u_{n-2} ← u_{n-1}
    u_{n-1} ← u_n
    u_n     ← u_{n-1} + u_{n-2}
  fait

  retourner u_n
```

- Nombre d'opérations $= 6 \times n - 8$

ici : complexité pire cas = meilleur cas = moyenne

Complexité de fib2

```
fonction fib2 (n) :
  u_n     ← 1
  u_{n-1} ← 1
  pour i variant de 3 à n faire
    u_{n-2} ← u_{n-1}
    u_{n-1} ← u_n
    u_n     ← u_{n-1} + u_{n-2}
  fait

  retourner u_n
```

- Nombre d'opérations $= 6 \times n - 8$

ici : complexité pire cas = meilleur cas = moyenne

fib2 $O(n)$, fib2 $\Omega(n)$, fib2 $\Theta(n)$

```
fonction fib2 (n) :
   u_n     ← 1
   u_{n-1} ← 1
   pour i variant de 3 à n faire
      u_{n-2} ← u_{n-1}
      u_{n-1} ← u_n
      u_n     ← u_{n-1} + u_{n-2}
   fait

   retourner u_n
```

- Nombre d'opérations $= 6 \times n - 8$

ici : complexité pire cas = meilleur cas = moyenne

fib2 $\in O(n)$, fib2 $\Omega(n)$, fib2 $\Theta(n)$

Complexité de fib2

```
fonction fib2 (n) :
   u_n     ← 1
   u_{n-1} ← 1
   pour i variant de 3 à n faire
      u_{n-2} ← u_{n-1}
      u_{n-1} ← u_n
      u_n     ← u_{n-1} + u_{n-2}
   fait

   retourner u_n
```

- Nombre d'opérations $= 6 \times n - 8$

ici : complexité pire cas = meilleur cas = moyenne

fib2 $\in O(n)$, fib2 $\in \Omega(n)$, fib2 $\Theta(n)$

Complexité de fib2

```
fonction fib2 (n) :
   u_n     ← 1
   u_{n-1} ← 1
   pour i variant de 3 à n faire
      u_{n-2} ← u_{n-1}
      u_{n-1} ← u_n
      u_n     ← u_{n-1} + u_{n-2}
   fait

   retourner u_n
```

- Nombre d'opérations $= 6 \times n - 8$

ici : complexité pire cas = meilleur cas = moyenne

$$\text{fib2} \in O(n), \quad \text{fib2} \in \Omega(n), \quad \text{fib2} \in \Theta(n)$$

Exécutions raisonnables ou non (1/2)

Fonctions induisant des temps de réponse « raisonnables » :

- Complexité constante (indépendante de n) : $O(1)$
- Complexité sous-linéaire (e.g., logarithmique) : $O(\log(n))$
- Complexité linéaire : $O(n)$
- Complexité quasi linéaire : $O(n \log(n))$
- Complexité quadratique : $O(n^2)$
- Complexité polynomiale : $O(n^k)$

Exécutions raisonnables ou non (1/2)

Fonctions induisant des temps de réponse « raisonnables » :

- Complexité constante (indépendante de n) : $O(1)$
- Complexité sous-linéaire (e.g., logarithmique) : $O(\log(n))$
- Complexité linéaire : $O(n)$
- Complexité quasi linéaire : $O(n \log(n))$
- Complexité quadratique : $O(n^2)$
- Complexité polynomiale : $O(n^k)$

Fonctions induisant des temps de réponse « prohibitifs » :

- Complexité exponentielle : $O(2^n)$, $O(\exp(n))$
- Complexité factorielle : $O(n!)$, asymptotiquement équivalente à $O(n^n)$

Exécutions raisonnables ou non (2/2)

Temps d'exécutions possibles pour $n = 100$:

- Complexité constante : $O(1)$ = 1ms
- Complexité sous-linéaire $O(\log(n))$ = 6,6 secondes
- Complexité linéaire : $O(n)$ = 100 secondes
- Complexité quasi linéaire : $O(n\log(n))$ = 11 minutes
- Complexité quadratique : $O(n^2)$ = 7 heures
- Complexité polynomiale : $O(n^k)$ = 11 jours
- Complexité exponentielle : $O(2^n)$ = 4×10^{22} années
- Complexité factorielle : $O(n!)$ = 10^{148} années

Culture : problèmes vs algorithmes

Complexité de problème

- Difficulté intrinsèque du problème, indépendamment des algorithmes qui existent pour le résoudre.

Culture : problèmes vs algorithmes

Complexité de problème

- Difficulté intrinsèque du problème, indépendamment des algorithmes qui existent pour le résoudre.
- Hiérarchie (polynomiale) : hiérarchie de difficulté.
- Complexité polynomiale : problèmes « faciles ».

Culture : problèmes vs algorithmes

Complexité de problème

- Difficulté intrinsèque du problème, indépendamment des algorithmes qui existent pour le résoudre.
- Hiérarchie (polynomiale) : hiérarchie de difficulté.
- Complexité polynomiale : problèmes « faciles ».

- Exemple : Recherche d'un élément dans un tableau = complexité polynomiale.

Culture : problèmes vs algorithmes

Complexité de problème

- Difficulté intrinsèque du problème, indépendamment des algorithmes qui existent pour le résoudre.
- Hiérarchie (polynomiale) : hiérarchie de difficulté.
- Complexité polynomiale : problèmes « faciles ».

- Exemple : Recherche d'un élément dans un tableau = complexité polynomiale.

⚠ Complexité de problème $\neq$ complexité d'algorithme :

- Programmation linéaire : complexité polynomiale.
- Algo du simplexe : complexité pire cas exponentielle.

Culture : problèmes vs algorithmes

Complexité de problème

- Difficulté intrinsèque du problème, indépendamment des algorithmes qui existent pour le résoudre.
- Hiérarchie (polynomiale) : hiérarchie de difficulté.
- Complexité polynomiale : problèmes « faciles ».

- Exemple : Recherche d'un élément dans un tableau = complexité polynomiale.

⚠ Complexité de problème $\neq$ complexité d'algorithme :

- Programmation linéaire : complexité polynomiale.
- Algo du simplexe : complexité pire cas exponentielle.

- Complexité de problème : pas le but du cours d'algorithmique.

Analyse d'algorithme : les questions qui se posent :

- Complexité : combien opérations élémentaires ?

Analyse d'algorithmes

Analyse d'algorithme : les questions qui se posent :

- Complexité : combien opérations élémentaires ?
- Terminaison : est-ce que l'algorithme se termine ?

Analyse d'algorithme : les questions qui se posent :

- Complexité : combien opérations élémentaires ?
- Terminaison : est-ce que l'algorithme se termine ?
- Validité : est-ce que l'algorithme retourne le résultat attendu ?