THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS 6

Spécialité : **Informatique**

Présentée pour obtenir le titre de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 6

par

Christophe GONZALES

Sujet de la thèse :

Utilités additives : existence et construction

devant le jury composé de :

M. Denis BOUYSSOU	Rapporteur
M. Jean-Yves JAFFRAY	Directeur
M. Jean-Charles POMEROL	Examinateur
M. Glenn SHAFER	Examinateur
M. Peter WAKKER	Rapporteur

Remerciements

En premier lieu, je tiens à exprimer ma plus profonde gratitude au Professeur Jean-Yves Jaffray qui a encadré mes recherches pendant ces trois dernières années. Je le remercie vivement pour ses encouragements, sa disponibilité, pour les discussions enrichissantes que nous avons eues, ainsi que pour la rigueur et la clairvoyance de ses jugements.

Je tiens également à remercier très chaleureusement le Professeur Peter Wakker pour avoir accepté d'être rapporteur de ma thèse, pour toute l'aide qu'il m'a apportée, pour ses encouragements constants et ses conseils d'une grande perspicacité. Je lui suis aussi reconnaissant pour les nombreuses discussions que nous avons eues et qui m'ont beaucoup apporté.

Mes sincères remerciements vont au Professeur Denis Bouyssou, pour avoir accepté d'assurer la lourde tâche de rapporteur. Je lui sais gré de toute la patience qu'il a eue à mon égard, et de l'intérêt qu'il a porté à mes travaux.

Je suis très reconnaissant au Professeur Jean-Charles Pomerol pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant la présidence du jury. Je tiens également à remercier le Professeur Glenn Shafer d'avoir accepté de participer à mon jury.

Merci à Philippe Delquié pour la discussion très enrichissante que nous avons eue sur la manière de poser les questions pour construire des fonctions d'utilités additives, et à Michèle Cohen et Alain Chateauneuf pour leur soutien et leurs conseils.

Ce mémoire ne serait pas ce qu'il est sans les relectures successives d'Armelle Faÿ, de Laurent Mynard et de Pierre-Henri Wuillemin. Je les remercie également, ainsi que Yacine Boufkhad et Olivier Dubois, pour l'ambiance et le cadre de travail agréable qu'ils ont su créer.

Ce cadre et ces conditions de travail se retrouvent plus généralement au LAFORIA. Outre les enseignants et chercheurs, je tiens à remercier Jacqueline Le Baquer, Anne Bancel, Ghislaine Mary, Andrée Musial et Valérie Mangin. Je remercie également l'ensemble du laboratoire de m'avoir accueilli en tant qu'ATER.

Mes remerciements vont aussi aux thésards du LAFORIA, en particulier à Maria, Christophe, et Isabelle, gourou LaTeX local, et spécialiste ès fléchettes et babas au rhum, ainsi qu'à Stéphane, Cyril, Damien et Agnès.

Je tiens enfin à remercier le personnel de la reprographie pour leur professionalisme et leur gentillesse.

Résumé

Les fonctions d'utilité additives sont l'un des moyens les plus efficaces de représenter des préférences multi-attributs. C'est pourquoi la recherche de conditions assurant l'existence de telles fonctions a donné lieu à de nombreux travaux.

Malheureusement, les conditions d'élimination, nécessaires à leur existence, sont très difficilement testables en pratique, ce qui a amené les Chercheurs du domaine à faire appel à des hypothèses structurelles très restrictives sur toutes les dimensions de l'espace des préférences (solvabilité et connexité), réduisant ainsi leur champ d'application. L'objectif de ce mémoire est de proposer de nouvelles conditions, tout autant testables mais moins restrictives.

Une étude des axiomes d'élimination nous a permis de conclure qu'en l'absence d'hypothèses structurelles sur au moins deux dimensions de l'espace des préférences, il ne peut y avoir de conditions testables. Nous avons montré qu'en revanche, celles-ci existent dès lors qu'au moins deux de ces dimensions possèdent des propriétés structurelles. Pour parvenir à ce résultat, nous avons dû nous éloigner des deux approches classiques (algébrique et topologique), et en définir une nouvelle, dite approche analytique.

Nous avons illustré ces résultats théoriques par deux exemples où les résultats classiques ne peuvent être appliqués : (i) une prise de décision collective dans laquelle certains attributs sont solvables et d'autres non ; (ii) un modèle de décision à base de données fréquentistes imprécises.

Enfin, nous avons implémenté une application graphique permettant de construire des fonctions d'utilités additives. Le modèle conversationnel développé à cet effet permet de réduire les problèmes d'imprécision et de biais dans les réponses des utilisateurs.

Abstract

Additive utility functions are one of the most efficient tools for representing multi-attribute preferences. This explains why conditions ensuring the existence of such functions have been thoroughly studied.

In practice, however, cancellation axioms, which are necessary conditions for additive representability, are very difficult to handle. This led researchers in the field to replace them by very restrictive, but easy to use, structural hypotheses on all the dimensions of the preference spaces, hence limiting the range of application of additive utilities. These so-called hypotheses are solvability in the algebraic approach and connexity in the topological approach. The aim of this thesis is to present new conditions, as testable as the former, but less restrictive.

On one hand, our study of cancellation axioms led to the following result : testable conditions do not exist without structural hypotheses with respect to at least two dimensions of the preference space. On the other hand, we managed to show that such testable conditions exist when at least two of these dimensions have some structural properties. Since the classical approaches (i.e., the algebraic and the topological approaches) did not seem well adapted for reaching this result, we defined a new approach, called the analytic approach.

We illustrate these theoretical results using two examples on which the classical results fail to apply : (i) a group decision making, where some of the attributes are solvable and others are not ; (ii) a decision model based on imprecise sampled data.

Finally, we designed a graphical application for constructing additive utility functions. For this purpose, we developed a model based on a question/answer process, which reduces problems of imprecision and of bias in the answers of the users.

Table des matières

Remerciements **i**

Résumé/Abstract **iii**

Introduction **5**
1.1 Expression du Problème 5
1.2 Plan du mémoire 7
1.3 Présentation des chapitres 8
1.4 Conventions de notation 9
1.5 Comment lire le présent document 9
1.6 Résumé 10
1.7 Bibliographie 10

I Une présentation de l'état de l'art **13**

2 Introduction aux utilités additives **15**
2.1 La notion de préférence 15
2.2 La notion d'utilité 17
2.2.1 Définition 17
2.2.2 Intérêt des fonctions d'utilité 18
2.3 Conditions nécessaires d'existence 18
2.3.1 La complétude 18
2.3.2 La transitivité 19
2.3.3 Préordre large total 20
2.4 La notion d'utilité additive 21
2.4.1 Définition 21
2.4.2 Intérêt 21
2.5 Conditions nécessaires d'existence 22
2.5.1 L'indépendance 23
2.5.2 Condition de Thomsen 24
2.5.3 Les axiomes d'élimination 25
2.6 Résumé 27
2.7 Bibliographie 27

3 L'approche algébrique **29**
3.1 Quelques notions d'algèbre 31
3.2 Le théorème de Hölder 32
3.2.1 Définition 33

3.2.2 Interprétation 34
3.3 L'approche avec solvabilité non restreinte 34
3.3.1 La notion de solvabilité non restreinte 34
3.3.2 La condition archimédienne 36
3.3.3 Théorie pour deux variables 39
3.3.4 Théorie pour n composants 40
3.4 L'approche avec solvabilité restreinte 40
3.4.1 La notion de solvabilité restreinte 41
3.4.2 Théorie pour deux composants 43
3.4.3 Théorie pour n composants 45
3.5 Démonstrations 45
3.6 Résumé 58
3.7 Bibliographie 60

4 L'approche topologique 61
4.1 Quelques notions topologiques 62
4.2 Représentations additives 63
4.2.1 La condition de l'hexagone 63
4.2.2 Le théorème topologique central 63
4.2.3 Idées intuitives du théorème 64
4.2.4 Correspondance avec l'algèbre 67
4.3 Résumé 67
4.4 Bibliographie 68

II Affaiblissement des hypothèses de solvabilité 69

5 Introduction à l'approche analytique 71
5.1 Dynamique du problème 72
5.1.1 Préférences sur des continuums 72
5.1.2 Unicité des représentations 73
5.1.3 Démonstration des théorèmes 74
5.2 L'approche analytique 75
5.2.1 Cadre de l'étude 75
5.2.2 Description de l'approche 75
5.3 Résumé 77
5.4 Bibliographie 78

6 Etude des conditions d'élimination 79
6.1 Absence totale de solvabilité 80
6.1.1 Indépendance, condition de Thomsen et (C_2) 80
6.1.2 L'axiome (C_2) sur des espaces de dimension n 81
6.2 Solvabilité non restreinte sur un composant 82
6.2.1 Nécessité de la condition de Thomsen 82
6.2.2 Interactions entre (C_m), (S_{m+1}) et (C_{m+1}) 85

6.2.3 Difficulté du test de (C) 86
6.3 Solvabilité non restreinte sur au moins deux composants 90
6.3.1 Produits cartésiens de dimension 3 90
6.3.2 Produits cartésiens de dimension n 98
6.4 Démonstrations 99
6.5 Résumé 116
6.6 Bibliographie 117

7 Préférences en dimension 2 119
7.1 Solvabilité restreinte sur un seul composant 120
7.1.1 Espaces dont le second composant est binaire 120
7.1.2 Espaces dont le second composant est équi-espacé 125
7.2 Solvabilité sur deux composants 128
7.2.1 1ère étape : la représentabilité de $\succsim$ 129
7.2.2 2ème étape : la représentabilité additive de $\succsim$ 135
7.3 Solvabilité restreinte "locale" sur deux composants 141
7.4 Démonstrations 142
7.5 Résumé 155
7.6 Bibliographie 156

8 Préférences en dimensions supérieures ou égales à 3 157
8.1 Solvabilité non restreinte 158
8.2 Solvabilité restreinte 161
8.2.1 Axiomatique 161
8.2.2 Théorèmes d'existence 175
8.2.3 Propriétés d'unicité 181
8.3 Démonstrations 183
8.4 Résumé 225
8.5 Bibliographie 227

III Applications 229

9 Une prise de décision collective 231
9.1 Le modèle 232
9.2 Démonstrations 236
9.3 Résumé 242
9.4 Bibliographie 243

10 Un modèle de décision à base de données fréquentistes 245
10.1 Introduction 246
10.2 Echantillons imprécis et décisions 247
10.2.1 Echantillons imprécis 247
10.2.2 Prise de décision avec des échantillons imprécis 248
10.3 Situations d'incertitude et leur modèle de décision 251

10.3.1 Définitions et notations 251
10.3.2 Risque et utilité espérée 252
10.3.3 Risque imprécis et utilité espérée généralisée (GEU) 252
10.3.4 Echantillons et prise de Décision Directe (modèle DDM) : 253
10.4 Echantillons imprécis et prise de décision directe 254
10.4.1 Echantillons imprécis et incertitude sur le résultat des décisions . 254
10.4.2 Les axiomes 255
10.4.3 Théorèmes de representation 257
10.5 Discussion et conclusion sur le modèle 263
10.5.1 Questions ouvertes sur le modèle 263
10.5.2 Comparaison avec d'autres approches 264
10.6 Démonstrations 265
10.7 Bibliographie 277

11 MADMAX : un programme de construction d'utilités 279
11.1 Les mécanismes de construction classiques 280
11.1.1 Un mécanisme de construction conversationnel 281
11.1.2 Classification des algorithmes de construction classiques 284
11.1.3 Problèmes soulevés par les méthodes de construction 289
11.2 Un nouveau modèle de construction 291
11.2.1 Présentation générale de la méthode 291
11.2.2 Précisions sur la première étape 294
11.2.3 Précisions sur la deuxième étape 301
11.2.4 Réduction du bruit 304
11.3 Approximation des courbes par B-Splines 305
11.3.1 Introduction aux B-Splines 305
11.3.2 Utilisation des B-Splines dans MADMAX 310
11.4 L'application MADMAX 315
11.5 Résumé 318
11.6 Bibliographie 320

12 Conclusion 323
12.1 La contribution de ce mémoire 324
12.1.1 Les résultats théoriques 324
12.1.2 L'extension de modèles de décision 324
12.1.3 La construction d'utilités 325
12.2 Quelques perspectives 325

Bibliographie 327

Index 334

Introduction

Si nous analysons très profondément les données de l'existence, avec un esprit honnête et sans parti pris, nous les comprendrons.

Sa Sainteté Tenzin Gyatso,
quatorzième Dalaï-Lama

1.1 Expression du Problème

La Théorie de la Décision est une discipline visant à aider les décideurs confrontés à des problèmes complexes à effectuer des choix parmi un ensemble d'alternatives possibles, en tenant compte de leurs conséquences, et de manière à respecter les préférences du décideur (voir Principia Cybernetica (1995)).

Dans les problèmes pratiques, la complexité provient essentiellement de deux facteurs : tout d'abord le décideur doit se prononcer alors même que certaines données du problème sont encore incertaines ; par exemple, dans Lauritzen et Spiegelhalter (1988), un médecin généraliste doit déterminer si son patient est atteint de dyspnée — une maladie respiratoire — afin de lui administrer un traitement approprié. Faute de matériel adapté pour faire des tests, le médecin doit se prononcer uniquement en fonction des symptômes de la maladie. Or ceux-ci semblent être proches des symptômes de la tuberculose, du cancer du poumon et de la bronchite. Une connaissance approfondie des activités de son patient pourrait aider le docteur à formuler son diagnostic ; en effet, les voyages dans des pays asiatiques augmentent statistiquement les risques de tuberculose, le fait de fumer accroît les risques de cancer du poumon, etc... Pour de simples raisons matérielles, le médecin devra effectuer son diagnostic sans que toutes les données du problème lui soient acquises. Il se peut même que certaines des données disponibles soient incomplètes, comme dans Pearl (1988, chapitre 9).

Le deuxième facteur est intrinsèquement lié à la complexité et à la multiplicité même des critères — on parle aussi d'attributs, de caractéristiques de performance ou de facteurs — sur lesquels sont fondées les préférences. Par exemple, dans Keeney et Raiffa (1993), le Secrétaire Bracamontes, du Ministère des Travaux Publics, doit conseiller le Président Echeverria sur l'éventuelle construction d'un nouvel aéroport pour la ville de Mexico City, en particulier sur l'emplacement adéquat en cas de construction. Afin de prendre la bonne décision, il doit tenir compte d'un certain nombre de critères tels que les

nuisances sonores, les méthodes d'insonorisation des avions, le confort des populations avoisinantes, l'évolution du trafic aérien, les méthodes nouvelles de construction des pistes, les règles de sécurité, le temps d'accès à l'aéroport, etc... La complexité provient ici non seulement du nombre élevé d'attributs, mais aussi de leurs interactions ; par exemple, le confort des populations locales est évidemment lié aux nuisances sonores. Notons que dans Andersen, Andreassen, et Woldbye (1986), on dénombre jusqu'à 25 critères pertinents, qui, évidemment, interagissent, ce qui montre la complexité des problèmes réels.

On sent bien intuitivement que le cœur du problème réside, d'une part, dans une bonne modélisation des préférences du décideur — afin de proposer des solutions conformes à ses desiderata — et, d'autre part, dans une gestion adaptée des incertitudes. Dans ce mémoire, nous nous préoccupons principalement du premier aspect.

Mais qu'entend-on exactement par modéliser les préférences du décideur ? Un certain nombre de possibilités s'offrent à ce dernier ; chacune d'entre elles va avoir des conséquences distinctes. Il est évident que celles-ci n'apparaissent pas, aux yeux du décideur, aussi séduisantes les unes que les autres. En procédant à une introspection, ce dernier peut donc "ordonner" les différentes conséquences selon qu'il les préfère plus ou moins. Modéliser les préférences du décideur, c'est donc tout simplement trouver un modèle — informatique et/ou mathématique — représentant la relation "d'ordre" ainsi créée. Pour des problèmes de "petite taille", on peut par exemple créer un tableau à deux dimensions, dont les lignes et les colonnes représentent les différentes conséquences possibles et dont chaque case peut prendre trois valeurs : "-1" si la conséquence correspondant à la ligne est strictement non préférée à celle en colonne, "0" si elles sont indifférentes et "1" si la conséquence en ligne est préférée à celle en colonne. L'extraction des préférences est alors relativement aisée. Ce type de représentation (comparaison par paires) correspond à des matrices similaires à celle de la figure 2 de Eckenrode (1965).

Lorsque les conséquences possibles sont nombreuses, la modélisation en tableaux n'est pas efficace car la taille de ces derniers est prohibitive; il s'agit donc de trouver des solutions de remplacement. La plus couramment utilisée est la modélisation grâce à des fonctions d'utilité. Le principe est d'associer un nombre réel à chaque conséquence, de telle sorte que plus celui-ci est élevé, plus la conséquence semble séduisante aux yeux du décideur. La comparaison des conséquences se réduit alors à une comparaison de nombres réels.

Lorsque le décideur exprime ses préférences, c'est par le biais, comme nous l'avons vu, d'un ensemble d'attributs. Chaque attribut peut prendre un certain nombre de valeurs, ou niveaux de satisfaction. Les conséquences peuvent donc être assimilées à un n-uplet de valeurs, chaque valeur correspondant au niveau de satisfaction d'un attribut. Modéliser les préférences du décideur revient donc à évaluer une fonction de plusieurs variables — une variable par attribut. Dans ce mémoire, c'est cette modélisation que nous employons.

Plus spécifiquement, nous nous intéressons à une classe particulière de fonctions d'utilité, à savoir les fonctions d'utilité additives, ou additivement séparables. Celles-ci sont assez attractives car elles se décomposent sous la forme d'une somme de fonctions d'un attribut chacune. Autrement dit, chaque attribut est évalué indépendamment des

autres, et les préférences sont révélées grâce à la somme de ces évaluations.

Le but de cette thèse consiste à donner, d'une part, des conditions assurant l'existence de telles fonctions, ou, du moins, à généraliser les conditions déjà existantes, qui incluent toutes des hypothèses particulièrement restrictives, et, d'autre part, à montrer l'intérêt et l'utilisation de ces fonctions dans la résolution de problèmes pratiques ainsi que dans la généralisation de certains modèles.

1.2 Plan du mémoire

Ce mémoire est composé de trois parties. La première est consacrée à l'étude des résultats classiques en matière de fonctions d'utilités additives. La deuxième est dédiée à leur généralisation. Enfin la troisième partie présente quelques résultats montrant l'intérêt d'étudier ces fonctions en vue de généraliser des modèles existants ou d'en développer de nouveaux.

La première partie est elle-même divisée en trois chapitres. Dans le chapitre 2, les fonctions d'utilité additives sont introduites en termes mathématiques, ce qui nous conduit à énoncer quelques conditions requises au niveau des préférences pour que celles-ci soient représentables par de telles fonctions.

Forts de ces considérations, nous pouvons nous lancer dans les chapitres 3 et 4 dans l'exploration de telles préférences. Lorsque le nombre de conséquences possibles est fini, l'existence de ces fonctions est liée à l'existence de solutions pour un certain système linéaire, et n'est donc pas difficile à déterminer. Aussi nous intéressons-nous plutôt aux problèmes dans lesquels le nombre de conséquences est infini. Dans ce cas, les conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'utilités additives ne sont pas testables en pratique car elles se résument à une suite infinie de comparaisons de conséquences ; c'est ce que l'on appelle les conditions d'élimination (cancellation axioms en anglais). C'est pourquoi l'obtention de théorèmes d'existence d'utilités additives aisément testables requiert l'introduction de conditions **non nécessaires** mais dont on peut facilement vérifier la validité, et apportant une certaine structure à l'ensemble des conséquences.

Deux approches spécifiques, à savoir l'approche algébrique et l'approche topologique, ont été développées dans les dernières décennies, qui ont donné naissance à deux types de conditions structurelles. Dans la première approche, dont l'étude fait l'objet du chapitre 3, ces conditions s'appellent solvabilité non restreinte et solvabilité restreinte. La seconde approche utilise, quant à elle, une hypothèse de connexité sur l'ensemble des conséquences. Ces deux approches, bien que totalement différentes, aboutissent à des résultats similaires : montrer en n'employant que des axiomes aisément testables que les préférences sont représentables par des fonctions d'utilité additives.

Cette première partie est plus qu'un simple état de l'art. En effet, si les théorèmes d'existence sont classiques, la plupart de leurs démonstrations ont été fortement remaniées (tout en conservant évidemment l'esprit des démonstrations d'origine). De plus, sauf mention explicite, tous les exemples sont des "originaux".

Les hypothèses structurelles des chapitres 3 et 4 sont très restrictives et réduisent considérablement le champ d'application des utilités additives. C'est pourquoi la

deuxième partie du mémoire est consacrée à une généralisation des théorèmes existants. Pour cela, nous allons développer dans les chapitres 5 à 8 une nouvelle approche, appelée approche analytique. Le chapitre 5 explique les fondements de cette approche. En particulier, l'approche analytique présente l'avantage sur les approches algébrique et topologique d'être très intuitive et de ne pas requérir des connaissances mathématiques très approfondies.

L'idée de toutes les approches est d'introduire des hypothèses structurelles sur l'ensemble des conséquences, permettant d'induire les conditions d'élimination à partir d'axiomes aisément testables. Afin d'obtenir les hypothèses structurelles les moins restrictives possible, il paraît relativement logique d'étudier de manière approfondie les conditions d'élimination ; c'est l'objet du chapitre 6.

Les résultats ainsi obtenus permettent d'énoncer dans les chapitres 7 et 8 des théorèmes d'existence d'utilités additives. Plus précisément, le chapitre 7 ne concerne que des ensembles de conséquences ayant deux attributs, et le chapitre 8 des ensembles de conséquences ayant au moins trois attributs.

A ce stade du mémoire, nous connaissons des théorèmes d'existence suffisamment généraux pour envisager des applications pratiques. La troisième partie y est consacrée. Elle est organisée en trois volets. Le chapitre 9 montre comment les résultats de la partie 2 peuvent être exploités afin de bâtir de nouveaux modèles. L'utilisation des utilités additives pour dériver de nouveaux résultats n'est pas réellement une innovation puisque c'était déjà un des fondements de Harvey (1981) et Harvey (1991).

Le chapitre 10 montre comment les résultats de la partie 2 peuvent s'intégrer, tout naturellement, dans des théories déjà existantes afin de les améliorer. Pour cela, on montre que le modèle de décisions à base de données fréquentistes de Yves Coignard et Jean-Yves Jaffray (Coignard (1993) et Coignard et Jaffray (1994)) peut être étendu facilement au cas de fréquences observées à la place de fonctions de croyance.

Le chapitre 11, dernier volet de cette troisième partie, montre comment construire efficacement des fonctions d'utilité additives. Le processus décrit dans ce chapitre évite les chaînages d'erreurs (que l'on ne peut prévenir dans les processus classiques) et est relativement robuste aux erreurs d'approximation. En contrepartie, il requiert une puissance de calcul élevée.

Enfin, le douzième et dernier chapitre de ce mémoire présente une conclusion sur cette thèse. On y découvrira une synthèse des avantages et inconvénients des différents théorèmes présentés tout au long du présent ouvrage, ainsi que des perspectives de recherche dans le domaine.

1.3 Présentation des chapitres

Le présent document est constitué, pour une grande part, d'éléments mathématiques. Afin de ne pas diminuer la lisibilité du texte, les démonstrations sont regroupées vers la fin de chaque chapitre. Néanmoins, afin d'aider le lecteur à mieux appréhender les concepts développés dans ce mémoire, après chaque énoncé de lemme ou de théorème sont décrites les idées “intuitives” de ces derniers.

Afin de rester objectifs quant aux restrictions imposées par les modèles présentés, nous montrons, après la plupart des axiomes, un ou plusieurs exemples pour lesquels ces axiomes ne sont pas vérifiés.

Enfin, le lecteur trouvera à la fin de chaque chapitre un bref résumé des concepts et résultats élaborés dans celui-ci, ainsi qu'une bibliographie du chapitre.

1.4 Conventions de notation

En vue d'aider le lecteur à retrouver facilement les concepts significatifs, tous les théorèmes, lemmes, définitions, axiomes et autres remarques sont indexés par numéro de chapitre et par ordre croissant à l'intérieur d'un même chapitre. Ainsi le théorème 3.4 représente le quatrième théorème du troisième chapitre.

Dans tout le mémoire, l'ensemble des conséquences est désigné par X. Comme on l'a vu, chaque conséquence est un n-uplet. Ainsi, si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$, alors x_1 correspond au niveau du premier attribut, x_2 au niveau du deuxième attribut, et ainsi de suite. D'une manière générale, les indices désignent toujours un attribut ; ainsi x_i se rapporte toujours au $i^{\text{ème}}$ attribut. X_i désigne dans tout le mémoire l'ensemble des valeurs que peut prendre le $i^{\text{ème}}$ attribut. De même, une fonction définie sur le $i^{\text{ème}}$ attribut est désignée par f_i.

Le rôle des exposants dépend, quant à lui, du contexte. Lorsqu'ils s'appliquent à des conséquences ou des attributs, ils désignent des éléments d'une suite ; par exemple, $x^3 \in X$ représente le troisième élément de la suite de conséquences (x^i) ; de même, x_4^5 désigne la valeur du quatrième attribut du cinquième élément de cette suite. Lorsqu'ils s'appliquent à des fonctions, ils désignent une opération de composition ; par exemple, $f^2(x) = f(f(x))$. L'opérateur de composition est noté "$\circ$" ; on a ainsi $f^2 = f \circ f$. La fonction réciproque de f est notée f^{-1} ; ainsi $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$.

Lorsque l'on a besoin d'indicer des fonctions, comme dans les chapitres 5 et 7, on place l'indice entre crochets, comme dans $f_{[2]}$, pour ne pas confondre avec une fonction définie sur le $2^{\text{ème}}$ attribut.

Les relations de préférence larges sont toujours désignées par les symboles $\succsim$, $\precsim$; les préférences strictes par $\succ$ et $\prec$; et enfin les indifférences par $\sim$.

Pour un ensemble X donné, $X/\sim$ désigne l'espace quotient de X par $\sim$, c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence de $\succsim$ sur X. Pour deux ensembles X et Y, $X \backslash Y$ représente l'ensemble des éléments appartenant à X mais pas à Y. Enfin, lorsque cela ne prêtera pas à confusion, pour deux conséquences $x, y \in X$ données, $[x, y]$ désignera l'ensemble $\{z \in X : x \precsim z \precsim y\}$.

1.5 Comment lire le présent document

Il me semble que ce mémoire peut être lu de 5 manières différentes :

- Au lecteur novice dans le domaine, je conseille évidemment de lire ce document en entier ; en particulier les exemples, et, si possible, les intuitions des théorèmes d'existence.

- Le lecteur ayant déjà des connaissances sur le sujet et ayant du temps à consacrer à ce mémoire évitera seulement les exemples (ceux-ci sont aisément identifiables car leur marge gauche est décalée d'environ un centimètre vers la droite par rapport au reste du texte) et, peut-être, les démonstrations.

- Le lecteur pressé ne lira que les définitions, conditions, axiomes, lemmes et autres théorèmes. Leur identification est rapide car ils sont tous encadrés.

- Le lecteur extrêmement pressé ne lira que les résumés à la fin de chacun des chapitres.

- Enfin, l'index à la fin du mémoire permet d'utiliser cette thèse comme un document de travail.

1.6 Résumé

Nous abordons dans cette thèse le problème de la représentation des préférences d'un décideur. Nous supposons que celles-ci s'expriment comme l'agrégation d'un certain nombre d'attributs. Nous examinons les conditions sous lesquelles il est possible de représenter ces préférences par une somme de fonctions ne dépendant que d'un attribut, c'est-à-dire de les exprimer grâce à une utilité additive.

Les théorèmes d'existence de telles fonctions testables d'un point de vue informatique nécessitent des hypothèses particulièrement restrictives. Aussi, nous avons consacré une grande partie du présent document à affaiblir ces hypothèses. Dans ce but, nous avons créé une nouvelle approche caractérisée par l'apport de nouvelles méthodes de démonstration.

Enfin, nous montrons comment les représentations additives issues de nos théorèmes d'existence s'intègrent dans certains modèles, comment elles permettent de dériver de nouveaux résultats, et comment il est possible de les implémenter d'un point de vue informatique.

1.7 Bibliographie

Andersen, S. K., S. Andreassen, et M. Woldbye (1986) : "Knowledge Representation For Diagnosis And Test Planning in The Domain of Electromyography," in *Proceedings of the 7th European Conference on Artificial Intelligence*, pp. 357–368, Brighton.

Coignard, Y. (1993) : "Modèle de Décision sur la Base de Données Fréquentistes," Ph.D. thesis, Université Paris 6, Paris.

Coignard, Y., et J.-Y. Jaffray (1994) : "Direct Decision Making," in *Decision Theory and Decision Analysis : Trends and Challenges*, ed. by S. Ríos, pp. 81–90. Kluwers Academic Publishers, Dordrecht, the Netherlands.

ECKENRODE, R. T. (1965) : "Weighting Multiple Criteria," *Management Science*, 12(3), 180–192.

HARVEY, C. M. (1981) : "Conditions on Risk Attitude for a Single Attribute," *Management Science*, 27(2), 190–203.

——— (1991) : "Models of Tradeoffs in a Hierarchical Structure of Objectives," *Management Science*, 37(8), 1030–1042.

KEENEY, R. L., ET H. RAIFFA (1993) : *Decisions with Multiple Objectives - Preferences and Value Tradeoffs*. Cambridge university Press.

LAURITZEN, S. L., ET D. J. SPIEGELHALTER (1988) : "Local Computations with Probabilities on Graphical Structures and Their Application to Expert Systems," *The Journal of The Royal Statistical Society - Series B (Methodological)*, 50(2), 157–224.

PEARL, J. (1988) : *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems : Networks of Plausible Inference*. Morgan Kaufman Publishers, inc, San Mateo, California.

PRINCIPIA CYBERNETICA (1995) : "Glossary of Cybernetics," *Internet Server : http ://pespmc1.vub.ac.be/ASC/INDEXASC.html*.

Première partie

Une présentation de l'état de l'art

Chapitre 2

Introduction aux utilités additives

Ne perdons pas notre temps, après tant d'autres, à retourner abstraitement de telles questions et à leur apporter, comme tant d'autres, des solutions qui ne seraient encore que des préférences personnelles.

Georges Dumézil

Dans ce chapitre, nous abordons, du point de vue mathématique, le problème de la représentation des préférences par des fonctions d'utilité, et, en particulier, par des fonctions d'utilité additives. Nous montrons que cette représentation nécessite de la part du décideur un certain comportement rationnel (transitivité et complétude des préférences par exemple), et est donc à certains égards restrictive. En particulier, nous découvrirons dans la section 2.5.3 les axiomes d'élimination (cancellation axioms en anglais), qui font partie des conditions nécessaires à l'existence de toute fonction d'utilité additive. Malheureusement, ces conditions se révèlent particulièrement difficiles à tester, ce qui nous amènera, tout au long de la thèse, à formuler des axiomes plus restrictifs mais aisément testables et garantissant que les axiomes d'élimination sont vérifiés.

Ce chapitre est divisé en 7 sections. Nous étudierons tout d'abord ce qu'est une relation de préférence. Ensuite, nous expliciterons la notion de fonction d'utilité — ou, plus simplement, la notion d'utilité — et nous examinerons des conditions nécessaires à leur existence. Puis nous aborderons la notion d'utilité additive et nous montrerons là encore des conditions nécessaires d'existence. Enfin, un rapide résumé et une bibliographie permettront de clore ce chapitre.

2.1 La notion de préférence

Une prise de décision consiste à choisir parmi un ensemble Y d'alternatives possibles celle qui paraît la meilleure.

Exemple 2.1 Monsieur Nipigue, Guy de son prénom, a décidé de jouer au jeu suivant : dans une urne sont placées 10 boules rouges, 10 boules bleues et 10 boules noires, et une des boules va être tirée au hasard. Monsieur Nipigue doit parier sur la couleur de la boule sortante. Trois paris sont possibles, qui sont décrits dans le tableau ci-dessous :

	Rouge	Bleue	Noire
p^1	\$100	\$0	$-$\$100
p^2	\$10	\$20	\$30
p^3	\$200	\$100	$-$\$10

Si monsieur Nipigue choisit l'alternative — le pari — p^1, il recevra 100 dollars si une boule rouge est tirée, il ne recevra rien si une boule bleue sort, et il perdra 100 dollars si une boule noire est tirée. Dans cet exemple, $Y = \{p^1, p^2, p^3\}$; c'est l'ensemble des choix qui s'offrent au décideur. ♦

Mais comment caractériser le fait qu'une alternative soit meilleure qu'une autre ? Dans l'exemple ci-dessus, qu'est-ce qui permet d'affirmer que le pari p^3 est meilleur que le pari p^1 ? Assurément, choisir p^3 permet d'obtenir des gains plus élevés que p^1. Ceci suggère donc que l'on compare les différentes alternatives en fonction des conséquences qu'elles entraînent. Notons X l'ensemble des conséquences pouvant résulter des différentes alternatives offertes au décideur.

Exemple 2.1 (suite) L'ensemble des conséquences, X, occasionnées par les paris, p^1, p^2 et p^3, correspond à l'ensemble des gains — ou pertes — possibles qui vont revenir à monsieur Nipigue. Ainsi,

$$X = \{(\$100, \$0, -\$100), (\$10, \$20, \$30), (\$200, \$100, -\$10)\}.$$

♦

Ainsi, à chaque alternative est associé un ensemble de conséquences, comme indiqué figure 2.1. La prise de décision revient à sélectionner parmi ces ensembles celui qui paraît le plus intéressant.

Notons que X peut être un ensemble à plusieurs dimensions, comme le suggère l'exemple 1 — qui est un ensemble tridimensionnel puisque ses éléments sont des triplets. Soit X_i l'espace correspondant à chacune des dimensions. X n'est pas nécessairement un produit cartésien, c'est-à-dire $X \subseteq \prod_{i=1}^{n} X_i$. Ainsi, chaque conséquence est un n-uplet $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. On appelle les X_i des **attributs** ou encore **composants**.

Exemple 2.1 (suite) Puisque les X_i sont les espaces correspondant à chacune des dimensions, $X_1 = \{\$10, \$100, \$200\}$, $X_2 = \{\$0, \$20, \$100\}$ et $X_3 = \{-\$100, \$30, -\$10\}$. Et l'on a bien $X \neq X_1 \times X_2 \times X_3$. ♦

Nous savons maintenant que, lors de la prise de décision, le décideur compare les éléments de X, et sélectionne l'élément qui lui paraît le meilleur, c'est-à-dire l'élément

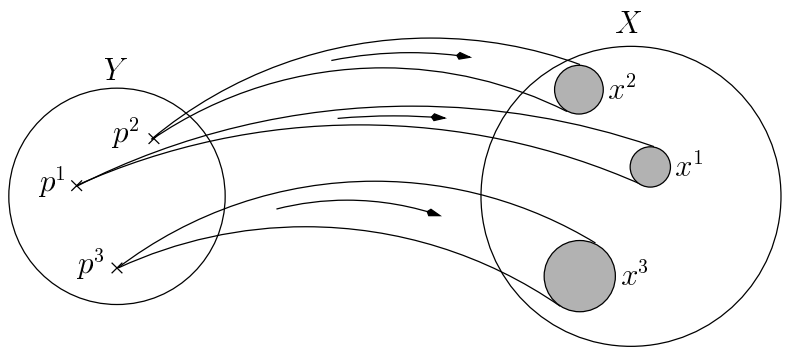


FIG. 2.1: Des alternatives aux conséquences

qui est "préféré" à tous les autres. Pour exprimer cela, nous munissons X d'une **relation de préférence**, notée $\succsim$, c'est-à-dire d'une relation binaire sur X. Ainsi, pour $x, y \in X$, $x \succsim y$ signifie que le décideur préfère x à y ou bien qu'il est indifférent entre les deux éléments. Nous pouvons de plus définir un certain nombre d'opérateurs associés à cette relation :

$$\begin{array}{ll}
x \sim y \Leftrightarrow [x \succsim y \text{ et } y \succsim x] \ldots\ldots\ldots & x \text{ est indifférent à } y, \\
x \succ y \Leftrightarrow [x \succsim y \text{ et } \mathrm{Non}(y \succsim x)] \ldots & x \text{ est strictement préféré à } y, \\
x \precsim y \Leftrightarrow y \succsim x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & x \text{ est non préféré ou indifférent à } y, \\
x \prec y \Leftrightarrow y \succ x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & x \text{ est strictement non préféré à } y.
\end{array}$$

2.2 La notion d'utilité

2.2.1 Définition

Comme nous l'avons précisé dans le chapitre d'introduction, une utilité est une fonction permettant de représenter une relation de préférence. On dit aussi que c'est une fonction préservant l'ordre des préférences. Du point de vue mathématique, cela correspond à la définition suivante.

Définition 2.1 (Fonction d'utilité) *$f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction d'utilité représentant $\succsim$ si et seulement si $x \succsim y \Leftrightarrow f(x) \geq f(y)$, $\forall x, y \in X$.*

D'après cette définition, f vérifie les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
x \succ y &\Leftrightarrow f(x) > f(y), \\
x \succsim y &\Leftrightarrow f(x) \geq f(y), \\
x \sim y &\Leftrightarrow f(x) = f(y), \\
x \prec y &\Leftrightarrow f(x) < f(y), \\
x \precsim y &\Leftrightarrow f(x) \leq f(y), \\
\mathrm{Non}(x \sim y) &\Leftrightarrow f(x) \neq f(y).
\end{aligned}$$

Comparer x et y revient donc à comparer $f(x)$ et $f(y)$, et réciproquement.

2.2.2 Intérêt des fonctions d'utilité

L'intérêt de telles représentations tient en deux points principaux. D'abord, elles permettent une extraction facile et rapide des informations ; en effet, dès lors que l'on connaît une fonction d'utilité représentant la relation de préférence, comparer deux éléments est évident puisque cela revient juste à calculer le résultat d'une fonction en deux points différents de l'espace X, et à comparer les deux nombres réels ainsi déterminés. La technologie informatique rend ce calcul relativement aisé et rapide.

Outre la rapidité de calcul, le deuxième aspect à ne pas négliger est le stockage des informations nécessaires à la représentation des préférences. En ce qui concerne les ordinateurs, le point critique est surtout la place mémoire allouée à la représentation. Dans le chapitre d'introduction, nous avons évoqué l'idée d'utiliser comme représentation un tableau explicitant pour chaque couple d'alternatives celle qui est préférée ou bien exprimant l'indifférence entre les deux alternatives. On voit clairement que dès que le nombre d'alternatives croît, le tableau nécessaire à une telle opération devient trop gigantesque pour être utilisable en pratique. Il en serait de même si l'on remplaçait le tableau de comparaison des alternatives par un tableau de comparaison des conséquences. Au contraire, une représentation par fonction d'utilité est tout à fait adaptée lorsque le nombre de conséquences possibles croît, puisqu'elle ne nécessite que le codage de la fonction en mémoire, et ce, indépendamment de la taille de l'espace X.

L'utilisation de fonctions d'utilité paraît donc être un moyen à la fois économique (en place mémoire) et efficace (en temps de calcul), de représenter des relations de préférence.

2.3 Conditions nécessaires d'existence

Malheureusement, toutes les relations de préférence ne sont pas représentables par des fonctions d'utilité ; en effet, le fait qu'une telle représentation existe implique l'existence d'une bijection entre l'ensemble des classes d'équivalence de $\succsim$ sur X et l'ensemble des classes d'équivalence de $\geq$ sur $\mathbb{R}$ — ou, tout du moins, une partie de $\mathbb{R}$. Or $\geq$ possède une structure assez forte, que l'on doit donc retrouver dans l'ensemble des préférences.

2.3.1 La complétude

Ainsi, supposons que $\succsim$ est représentable sur X par une fonction d'utilité f. Prenons deux éléments quelconques x et y de X. A ces éléments, on peut associer par f les nombres réels $f(x)$ et $f(y)$. Mais la relation $\geq$ est une relation complète sur $\mathbb{R}$ — on dit aussi totale — ce qui signifie que l'une des deux alternatives suivantes est forcément vérifiée :

$$\text{soit } f(x) \geq f(y), \text{ soit } f(y) \geq f(x).$$

Or, puisque d'après la définition 2.1, il y a équivalence entre la relation $\succsim$ sur X et $\geq$ sur $\mathbb{R}$, on a forcément

$$\text{soit } x \succsim y, \text{ soit } y \succsim x.$$

Par conséquent, si $\succsim$ est représentable par une fonction d'utilité, $\succsim$ est une relation complète. Précisons que toutes les relations de préférence ne vérifient pas cette propriété, comme l'exemple suivant le montre.

Exemple 2.2 Monsieur Guy Nipigue est passionné de physique. Il y a quelques semaines, il a décidé d'ordonner toutes les théories qu'il connaissait en fonction de leur degré de généralité ou d'approximation. Il a ainsi créé une relation de préférence $\succsim$ telle que théorie $x \succsim$ théorie y lorsque y est une approximation de x ou en est une sous-partie ; ainsi, théorie de la relativité d'Einstein $\succsim$ théorie de Newton car cette dernière n'en est qu'une approximation ; de même, mécanique $\succsim$ mécanique des fluides car cette dernière n'en est qu'un sous-ensemble. Cependant, la relation $\succsim$ n'est pas complète ; en effet, comment comparer la théorie des quantas (qui ne s'applique que sur le microcosme) à la théorie de Newton (qui, elle, ne s'applique qu'au macrocosme) ? Ces deux théories ne s'appliquant pas aux mêmes situations, elles sont donc incomparables. ♦

2.3.2 La transitivité

Mais revenons aux conditions que $\succsim$ doit vérifier pour être représentable par une fonction d'utilité. Supposons que f représente $\succsim$, et que $x \succsim y$ et $y \succsim z$. Alors, d'après la définition 2.1, on a

$$f(x) \geq f(y) \text{ et } f(y) \geq f(z).$$

Donc, par transitivité de $\geq$, on a aussi

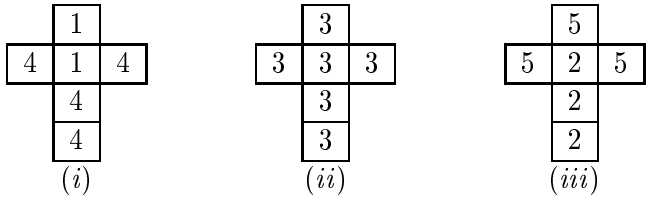
$$f(x) \geq f(z),$$

ce qui implique que $x \succsim z$. Autrement dit, $\succsim$ doit être aussi une relation transitive. Bien entendu, là encore, il existe des relations de préférence qui ne vérifient pas cette propriété.

Exemple 2.3 Un exemple classique (voir Duncan Luce (1956), Duncan Luce et Raiffa (1957, page 346) ou Krantz, Luce, Suppes, et Tversky (1989, page 301)) consiste à considérer les préférences d'un décideur pour du café contenant diverses concentrations de sucre. Supposons donc que monsieur Guy Nipigue aime boire son café sans sucre. Manifestement, en se fiant à ses papilles gustatives, il ne peut différencier une tasse contenant n grains de sucre d'une tasse en contenant $n+1$; ainsi, si l'on dénote par n la tasse contenant n grains de sucre, $n \sim n+1$. Si $\sim$ était une relation transitive, 0 devrait donc être indifférent à n, quel que soit n. Or ceci n'est pas vrai puisque monsieur Nipigue fait une différence entre un café sans sucre et un café contenant un morceau de sucre. ♦

Exemple 2.4 Paul Anand cite un exemple encore plus troublant (cf. Anand (1987)), emprunté à Packard (1982), lui-même issu de Gardner (1974) et Gardner (1976). On propose à monsieur Nipigue le jeu suivant, qui consiste à essayer d'obtenir le nombre le plus élevé en lançant une seule fois l'un des dés à 6 faces non pipés

décrits ci-dessous. Afin d'aider monsieur Nipigue à choisir le dé qu'il lancera, on lui demande de désigner celui qu'il préfère parmi chaque paire possible.



Monsieur Nipigue, qui est assez versé dans la théorie des probabilités, tient le raisonnement suivant : le premier dé a deux chances sur trois de donner un 4, et une chance sur trois de donner 1. Par conséquent, le premier dé a deux chances sur trois de donner un meilleur résultat que le deuxième, je dois donc le préférer au deuxième dé. De la même manière, le deuxième dé est préférable au troisième car il y a deux chances sur trois que ce dernier donne un 2. Comparons maintenant le premier et le troisième dé : le troisième est meilleur que le premier lorsqu'il donne un 5, ou lorsqu'il donne un 2 et que le premier donne un 1. Le premier cas a 1 chance sur 3 de se produire et le deuxième $2/3 \times 1/3 = 2/9$, ce qui nous donne au total 5 chances sur 9. Donc le troisième dé est préférable au premier.

Ainsi, en comparant les dés par paires, dé (i) $\succ$ dé (ii), dé (ii) $\succ$ dé (iii), et dé (iii) $\succ$ dé (i). Les préférences de monsieur Nipigue ne sont donc pas transitives.

♦

2.3.3 Préordre large total

Définition 2.2 (préordre large total) *Un préordre large total est une relation binaire transitive et complète.*

En résumé, une relation de préférence représentable par une fonction d'utilité est nécessairement un préordre large total. La réciproque est fausse, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 2.5 Considérons l'ensemble $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Soit $\succsim$ l'ordre lexicographique sur X, c'est-à-dire l'ordre tel que

$$(x_1, x_2) \precsim (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 < y_1 \text{ ou } (x_1 = y_1 \text{ et } x_2 \leq y_2).$$

Alors $\succsim$ est un préordre large total ; cependant, il n'est pas représentable par une fonction d'utilité. En effet, s'il existait une fonction d'utilité f représentant $\succsim$, pour x_2, y_2 fixés tels que $x_2 < y_2$, et pour tout réel x_1, on aurait $f(x_1, x_2) < f(x_1, y_2)$ puisque $(x_1, x_2) \prec (x_1, y_2)$; et puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existerait un rationnel q_{x_1} tel que $f(x_1, x_2) < q_{x_1} < f(x_1, y_2)$. Or, pour tous $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 < y_1$, on aurait aussi $f(x_1, x_2) < f(x_1, y_2) < f(y_1, x_2) < f(y_1, y_2)$ car $(x_1, x_2) \prec (x_1, y_2) \prec (y_1, x_2) \prec (y_1, y_2)$, ce qui impliquerait que $q_{x_1} \neq q_{y_1}$; ainsi, on aurait trouvé une injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Q}$, ce qui est évidemment absurde. Par conséquent $\succsim$ ne peut être représentable par une fonction d'utilité. ♦

Jusqu'ici nous n'avons montré que des relations de préférence ne vérifiant pas cette propriété ; mais il existe aussi un grand nombre de problèmes entrant dans le cadre de préordres larges totaux. Dans Wakker (1989, page 28), Peter Wakker cite, entre autres, les domaines d'application suivants :

- Dans la théorie du consommateur, les X_i représentent des biens de consommation, et, pour $x, y \in X$, $x \succsim y$ signifie que le consommateur pense que le panier de biens x est au moins aussi bon que le panier y.

- Dans la théorie du producteur, $x \in X$ est un vecteur d'inputs et $x \succsim y$ signifie que x fournit au moins autant d'outputs que y. La fonction d'utilité est alors appelée "fonction de production".

- Dans les théories sociales, x est une allocation, ou situation sociale, chaque X_i représente la richesse d'un agent, ou d'un joueur, et $x \succsim y$ signifie que la richesse du groupe x est supérieure à celle du groupe y.

2.4 La notion d'utilité additive

2.4.1 Définition

On a vu que X, l'ensemble des conséquences, peut être un ensemble de dimension n. Par conséquent, une fonction d'utilité est une fonction de n variables : si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est un élément de X, $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$. Comme indiqué dans le chapitre d'introduction, la particularité d'une fonction d'utilité additive est d'être décomposable sous la forme d'une somme de fonctions ne dépendant que d'un attribut (ou composant) x_i chacune. D'où la définition suivante :

Définition 2.3 (Fonction d'utilité additive) *f est une fonction d'utilité additive lorsque c'est une fonction d'utilité et qu'il existe des fonctions $f_1, \ldots, f_n$ telles que $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$. Autrement dit,*

$$(x_1, \ldots, x_n) \succsim (y_1, \ldots, y_n) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} f_i(y_i). \tag{2.1}$$

2.4.2 Intérêt

L'intérêt de ces fonctions se situe à deux niveaux. Tout d'abord, la construction même de la fonction se révèle particulièrement simple car l'existence de telles fonctions n'est assurée que s'il y a indépendance entre les différents composants — rappelons que les composants sont les x_i. Cette indépendance permet de traiter les composants séparément les uns des autres (tout du moins dans une certaine limite), ce qui n'est pas le cas pour des fonctions d'utilité non additives. L'exemple suivant devrait clarifier cette affirmation :

Exemple 2.6 Soit $\succsim$ une relation de préférence sur un ensemble $X = X_1 \times X_2$. Supposons que $\succsim$ soit représentable par une fonction d'utilité additive $f_1 + f_2$, et que $(x_1, x_2) \succsim (y_1, x_2)$. D'après la définition de la fonction d'utilité, $f_1(x_1) + f_2(x_2) \geq f_1(y_1) + f_2(x_2)$, ce qui équivaut à $f_1(x_1) \geq f_1(y_1)$. Si, pour $y_2 \neq x_2$, (x_1, y_2) et (y_1, y_2) sont aussi des éléments de X, leurs images respectives par la fonction d'utilité $f_1 + f_2$ sont : $f_1(x_1) + f_2(y_2)$ et $f_1(y_1) + f_2(y_2)$; et puisque $f_1(x_1) \geq f_1(y_1)$, on obtient forcément $f_1(x_1) + f_2(y_2) \geq f_1(y_1) + f_2(y_2)$, ce qui implique que $(x_1, y_2) \succsim (y_1, y_2)$. Autrement dit, l'existence même d'une fonction d'utilité additive nous a permis de montrer que la préférence $(x_1, x_2) \succsim (y_1, x_2)$ ne dépendait pas du deuxième composant, c'est-à-dire de x_2. Cette remarque permet de simplifier considérablement l'algorithme de construction des fonctions d'utilité additives.

A l'inverse, comme le montre Fishburn (1970) page 42, si monsieur Nipigue doit choisir, parmi steak et poulet, ce qu'il va consommer au dîner deux jours de suite — c'est-à-dire $X = \{$poulet ce soir,steak ce soir$\} \times \{$poulet demain, steak demain$\}$ — il est probable que l'on obtienne une relation de préférence du type :

$$\begin{gathered}(\text{poulet ce soir}, \text{poulet demain}) \prec (\text{steak ce soir}, \text{steak demain}) \prec \\ (\text{poulet ce soir}, \text{steak demain}) \prec (\text{steak ce soir}, \text{poulet demain})\ ;\end{gathered}$$

en effet, monsieur Nipigue ne voudra certainement pas manger tous les soirs la même nourriture. Dans ce cas, il n'y a pas indépendance entre les composants (manger ce soir, manger demain), et la construction de la fonction d'utilité nécessite la comparaison d'un grand nombre d'éléments de X. ♦

Le deuxième intérêt des fonctions d'utilité additives réside dans leur utilisation : la décomposition en sommes de fonctions ne dépendant que d'un seul paramètre leur confère en effet une grande rapidité de calcul (surtout lorsqu'elles sont calculées sur des machines parallèles).

2.5 Conditions nécessaires d'existence

Jusqu'à maintenant, aucune hypothèse n'a été faite sur l'ensemble X, et pourtant deux cas peuvent se présenter : les préférences peuvent porter soit sur un sous-ensemble d'un produit cartésien, c'est-à-dire lorsque $X \subset \prod_{i=1}^{n} X_i$, soit sur un produit cartésien, c'est-à-dire lorsque $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$. Dans les conditions que nous mentionnons ici, nous ne considérons que le deuxième cas. En effet, le premier peut poser des problèmes au niveau de l'existence de certains éléments. De plus, lorsque X est un sous-ensemble d'un produit cartésien, les résultats classiques considèrent que X est constitué par une réunion de produits cartésiens ; on construit alors des fonctions d'utilité additives sur chacun des produits cartésiens, en essayant de faire en sorte, et surtout en espérant, que la réunion de ces représentations locales forme une représentation globale, ce qui n'est pas toujours le cas (cf. Chateauneuf et Wakker (1993)).

Hypothèse sur X : *Dans toute la thèse, sauf mention explicite, X est un produit cartésien, c'est-à-dire $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$.*

2.5.1 L'indépendance

Supposons qu'il existe des fonctions $f_1, \ldots, f_n$ telles que l'équation (2.1) soit vérifiée. Supposons de plus qu'il existe deux n-uplets $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in X$ tels que :

$$(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \succsim (y_1, \ldots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \ldots, y_n).$$

Traduisons cette relation de préférence sous forme fonctionnelle. On a alors :

$$f_i(x_i) + \sum_{j \neq i} f_j(x_j) \geq f_i(x_i) + \sum_{j \neq i} f_j(y_j).$$

Puisque le terme $f_i(x_i)$ se rencontre de part et d'autre de l'inégalité, on peut le remplacer par $f_i(y_i)$. On a alors :

$$f_i(y_i) + \sum_{j \neq i} f_j(x_j) \geq f_i(y_i) + \sum_{j \neq i} f_j(y_j),$$

ce qui se traduit en termes de préférences par :

$$(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \succsim (y_1, \ldots, y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)$$

Par conséquent, l'axiome suivant est nécessaire à l'existence de n'importe quelle fonction d'utilité additive.

Axiome 2.1 (indépendance par rapport au $i^{\text{ème}}$ composant) $\forall x, y \in X$,

$$(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \succsim (y_1, \ldots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)$$
$$\Downarrow$$
$$(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \succsim (y_1, \ldots, y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, \ldots, y_n).$$

Cet axiome exprime bien une forme d'indépendance entre les différents composants du produit cartésien X puisque la relation ci-dessus est vraie pour n'importe quel y_i. Evidemment, ce qui a été montré pour le $i^{\text{ème}}$ composant — ou attribut — est vrai pour n'importe quel composant. D'où l'axiome suivant :

Axiome 2.2 (indépendance) *$(X, \succsim)$ vérifie l'axiome d'indépendance si et seulement si il vérifie l'indépendance par rapport à chacun de ses composants.*

L'axiome d'indépendance permet de définir une relation de préférence $\succsim_i$ sur chacun des composant comme indiqué ci-dessous :

Définition 2.4 (relation de préférence $\succsim_i$) *Quel que soit $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\succsim_i$, la relation de préférence sur X_i, est la relation binaire induite par $\succsim$ sur X_i, c'est-à-dire*

$$x_i \succsim_i y_i \Leftrightarrow (z_1, \ldots, z_{i-1}, x_i, z_{i+1}, \ldots, z_n) \succsim (z_1, \ldots, z_{i-1}, y_i, z_{i+1}, \ldots, z_n)$$

pour un certain $z \in X$.

Grâce à l'axiome d'indépendance, la relation $\succsim_i$ ne dépend pas de z. Ceci permet d'affirmer que le décideur a des préférences spécifiques sur chacun des composants (et

ce, indépendamment des autres composants). De par sa définition, et puisque $\succsim$ est un préordre large total, $\succsim_i$ est bien définie et est aussi un préordre large total.

En généralisant, pour tout ensemble $I \subset \{1, \ldots, n\}$, on peut définir $\succsim_I$ comme le préordre large total sur $\prod_{i \in I} X_i$ induit par $\succsim$, c'est-à-dire

$$(x_i, i \in I) \succsim_I (y_i, i \in I) \Leftrightarrow (x_i, i \in I, x_j, j \notin I) \succsim (y_i, i \in I, x_j, j \notin I).$$

Un raisonnement semblable au précédent montrerait l'existence de $\succsim_I$ dès qu'il existe une fonction d'utilité additive.

2.5.2 Condition de Thomsen

La condition de Thomsen n'est utilisée que pour des produits cartésiens à deux composants, car, comme nous le verrons par la suite, lorsqu'il y a plus de composants, elle peut être déduite de l'association de l'axiome d'indépendance avec certaines propriétés structurelles — solvabilité et connexité pour ne pas les nommer. Pour se persuader de sa nécessité, supposons que $X = X_1 \times X_2$ et que $\succsim$ soit représentable sur X par la fonction d'utilité additive $f_1 + f_2$. Supposons en outre que

$$(x_1, z_2) \sim (z_1, y_2) \quad \text{et} \quad (z_1, x_2) \sim (y_1, z_2).$$

En termes de fonctions d'utilité, ces relations sont équivalentes à :

$$\begin{aligned} f_1(x_1) + f_2(z_2) &= f_1(z_1) + f_2(y_2), \\ f_1(z_1) + f_2(x_2) &= f_1(y_1) + f_2(z_2). \end{aligned}$$

En additionnant ces deux égalités, et en soustrayant $f_1(z_1) + f_2(z_2)$ de part et d'autre du signe $=$, nous obtenons

$$f_1(x_1) + f_2(x_2) = f_1(y_1) + f_2(y_2),$$

ce qui entraîne d'après la définition de f

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \ ;$$

c'est la condition de Thomsen.

Axiome 2.3 (condition de Thomsen) *Quels que soient* $x_1, y_1, z_1 \in X_1$, $x_2, y_2, z_2 \in X_2$, $[(x_1, z_2) \sim (z_1, y_2)$ *et* $(z_1, x_2) \sim (y_1, z_2)] \Rightarrow (x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$.

Ainsi que le montre la figure 2.2, l'interprétation géométrique de cette condition est assez simple. En effet, la première indifférence est matérialisée sur le schéma par une courbe d'indifférence (de $\succsim$) passant par A et B, la deuxième par la courbe passant par C et D. La condition de Thomsen nous permet alors de déduire qu'une courbe d'indifférence passe par E et F. En fait, en changeant l'ordre des variables x_1, x_2, y_1, y_2, z_1 et z_2, les implications suivantes sont aussi vraies : ($A \sim B$ et $E \sim F$) $\Rightarrow C \sim D$ et ($C \sim D$ et $E \sim F$) $\Rightarrow A \sim B$. Quoi qu'il en soit, la condition de Thomsen est tout de même particulièrement simple à mémoriser puisque $(ABCEFD)$ prend la forme d'un hexagone dont les points extrêmes sont les sommets de 2 rectangles.

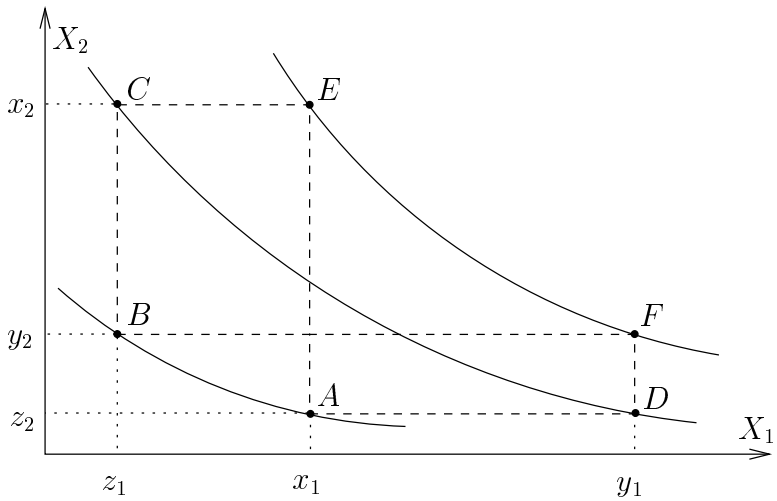


FIG. 2.2: La condition de Thomsen

2.5.3 Les axiomes d'élimination

Ces axiomes reposent sur un principe similaire à celui de l'indépendance et de la condition de Thomsen : lorsque l'on compare deux sommes de nombres (réels) afin de déterminer celle qui est la plus grande, les éléments communs aux deux sommes n'ont pas besoin d'être pris en compte, c'est-à-dire que les éléments communs n'ont aucune influence sur le fait qu'une des sommes est plus grande que l'autre.

Ainsi, soient m conséquences $(x_1^i, \ldots, x_n^i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, et m autres conséquences $(y_1^i, \ldots, y_n^i)$, $i = 1, \ldots, m$, telles que, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $(y_j^1, \ldots, y_j^m)$ soit une permutation de $(x_j^1, \ldots, x_j^m)$. Supposons que

$$(x_1^i, \ldots, x_n^i) \succsim (y_1^i, \ldots, y_n^i), \forall i \in \{1, \ldots, m-1\}.$$

En termes de fonctions d'utilité, cela revient donc à :

$$\forall i \in \{1, \ldots, m-1\}, \ \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j^i) \geq \sum_{j=1}^{n} f_j(y_j^i).$$

En sommant toutes ces inégalités, on obtient alors :

$$\sum_{i=1}^{m-1} \left(\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j^i) \right) \geq \sum_{i=1}^{m-1} \left(\sum_{j=1}^{n} f_j(y_j^i) \right).$$

Puisque les $(y_j^1, \ldots, y_j^m)$ sont des permutations de $(x_j^1, \ldots, x_j^m)$, on doit aussi avoir :

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j^i) \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} f_j(y_j^i) \right).$$

Cela implique que :

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j^m) \leq \sum_{j=1}^{n} f_j(y_j^m),$$

et, donc, en termes de relations de préférence :

$$(x_1^m, \ldots, x_n^m) \precsim (y_1^m, \ldots, y_n^m).$$

Par conséquent, l'axiome suivant, quel que soit son ordre, c'est-à-dire quel que soit le nombre de conséquences "sommées", est nécessaire à l'existence de toute représentation additivement séparable. Quant à l'ordre proprement dit, il semblerait que deux écoles coexistent. Selon Fishburn (1970) et Jaffray (1974a), ce qui précède serait désigné sous le nom d'axiome d'élimination d'ordre m car le résultat est obtenu grâce à la combinaison de m conséquences ; et selon Krantz, Luce, Suppes, et Tversky (1971) et Wakker (1989), ce serait l'axiome d'élimination d'ordre $m-1$ car ce sont les $m-1$ premières inégalités qui permettent d'en déduire la $m^{\text{ème}}$. Nous adoptons ici la numérotation de Krantz, Duncan Luce, Suppes et Tversky.

Axiome 2.4 (élimination d'ordre m : (C_m)) *Soient $m+1$ éléments de X, $(x_1^i, \ldots, x_n^i), (y_1^i, \ldots, y_n^i)$, $i = 1, \ldots, m+1$, tels que, quel que soit $j \in \{1, \ldots, n\}$, $(y_j^1, \ldots, y_j^{m+1})$ soit une permutation de $(x_j^1, \ldots, x_j^{m+1})$. Alors*

$$\underbrace{(x_1^i, \ldots, x_n^i) \succsim (y_1^i, \ldots, y_n^i), \text{ pour tout } i = 1, \ldots, m}$$
$$\Downarrow$$
$$(x_1^{m+1}, \ldots, x_n^{m+1}) \precsim (y_1^{m+1}, \ldots, y_n^{m+1}).$$

L'axiome d'indépendance est un cas particulier d'axiome d'élimination puisqu'il correspond, dans notre notation, à l'ordre 1. De même, la condition de Thomsen est un cas particulier de l'axiome d'élimination d'ordre 2. Notons que (C_{m+1}) implique (C_m) ; en effet, si (C_{m+1}) est vérifiée, alors, en particulier, c'est vrai lorsque $x_i^1 = y_i^1$, quel que soit i. Mais, dans ce cas, la première relation de préférence de la liste est trivialement vérifiée, et, en l'éliminant, on retrouve (C_m).

Puisque, quel que soit l'entier m, (C_m) est une condition nécessaire pour l'existence d'utilités additives, la condition suivante l'est aussi :

Axiome 2.5 (élimination globale : (C)) *$(X, \succsim)$ vérifie (C) si et seulement si il vérifie les conditions (C_m), pour tout $m > 0$.*

Nous avons vu que $\forall m$ (C_{m+1}) implique (C_m). Autrement dit,

$$(C) \Rightarrow \ldots \Rightarrow (C_{m+1}) \Rightarrow (C_m) \ldots \Rightarrow (C_2) \Rightarrow (C_1).$$

Par abus de notation, $\boxed{(C) \text{ devrait donc correspondre à } (C_\infty)}$, c'est-à-dire à une condition d'élimination impliquant des séquences infinies d'éléments de X.

Malheureusement, on voit bien qu'en pratique la condition (C) ne peut être testée puisque, pour ce faire, il faudrait constituer des listes infinies d'éléments (x^i et y^i). Aussi, tout au long de cette thèse, nous verrons comment remplacer la condition (C) par l'association de sous-parties de (C_2) avec des conditions structurelles très simples.

2.6 Résumé

Une relation de préférence $\succsim$ sur un ensemble X est une relation binaire sur X. Elle est représentable par une fonction d'utilité f si $x \succsim y \Leftrightarrow f(x) \geq f(y)$, c'est-à-dire que f préserve l'ordre de $\succsim$. Dans ce cas, $\succsim$ est une relation complète — c'est-à-dire que deux éléments quelconques de X sont toujours comparables entre eux — et transitive — si $x \succsim y$ et $y \succsim z$, alors $x \succsim z$. On dit alors que la relation de préférence est un préordre large total.

Lorsque $X \subseteq \prod_{i=1}^{n} X_i$, la fonction f est dite additive si elle se décompose en une somme de fonctions ne dépendant que d'un composant X_i. Lorsqu'une telle fonction existe, les composants sont indépendants entre eux, c'est-à-dire que si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est préféré ou indifférent à y, et si, pour un indice i, $x_i = y_i$, alors on peut substituer x_i et y_i par n'importe quel élément z_i sans modifier le sens de la préférence (c'est l'axiome d'indépendance).

Dans tout ce qui suit, et sauf mention explicite, X est un produit cartésien. Lorsque X est un produit cartésien à 2 dimensions, le fait que la relation de préférence $\succsim$ soit représentable par une fonction d'utilité additive implique que si $(x_1, z_2) \sim (z_1, y_2)$ et si $(z_1, x_2) \sim (y_1, z_2)$ alors $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$. Cette propriété s'appelle la condition de Thomsen. Elle correspond à la figure 2.2, dans laquelle on montre que, sur l'hexagone $(ABDFEC)$, si A est indifférent à B, et si C est indifférent à D, alors E est indifférent à F.

Lorsque X est un ensemble de dimension quelconque, si l'on a une liste de $m+1$ éléments x^i de X, et $m+1$ autres éléments y^i de X tels que, pour chaque composant X_j du produit cartésien X, $(x_j^1, \ldots, x_j^{m+1})$ est une permutation de $(y_j^1, \ldots, y_j^{m+1})$, alors, si chaque x^i est préféré ou indifférent à y^i lorsque i est inférieur ou égal à m, nécessairement, y^{m+1} est préféré ou indifférent à x^{m+1}. Cette condition, notée (C_m), s'appelle l'axiome d'élimination d'ordre m. Elle est nécessaire à l'existence de n'importe quelle fonction d'utilité additive.

La condition d'élimination (globale), notée (C), correspond à (C_∞), c'est-à-dire à (C_m) lorsque $m = +\infty$. C'est aussi une condition nécessaire pour l'existence d'utilités additives (on dit aussi additivement séparables). L'indépendance correspond à l'axiome (C_1) et la condition de Thomsen à une sous-partie de (C_2).

2.7 Bibliographie

Anand, P. (1987) : "Are the Preference Axioms Really Rational ?," *Theory and Decision*, 23, 189–214.

Chateauneuf, A., et P. P. Wakker (1993) : "From Local to Global Additive Representation," *Journal of Mathematical Economics*, 22, 523–545.

Fishburn, P. C. (1970) : *Utility Theory for Decision Making.* Wiley, NewYork.

Gardner, M. (1974) : "Mathematical Games," *Scientific American.*

——— (1976) : "Mathematical Games," *Scientific American.*

JAFFRAY, J.-Y. (1974) : "Existence, Propriétés de Continuité, Additivité de Fonctions d'Utilité sur un Espace Partiellement ou Totalement Ordonné," Thèse d'Etat, Université Paris VI.

KRANTZ, D. H., R. D. LUCE, P. SUPPES, ET A. TVERSKY (1971) : *Foundations of Measurement (Additive and Polynomial Representations)*, vol. 1. Academic Press, New York.

——— (1989) : *Foundations of Measurement (Geometrical, Threshold, and Probabilistic Representations)*, vol. 2. Academic Press, San Diego, California.

LUCE, R. D. (1956) : "Semiorders and a Theory of Utility Discrimination," *Econometrica*, 24, 178–191.

LUCE, R. D., AND H. RAIFFA (1957) : *Games and Decisions : Introduction and Critical Survey.* Wiley, New York.

PACKARD, D. J. (1982) : "Cyclical Preference Logic," *Decision and Theory*, 14, 415–426.

WAKKER, P. P. (1989) : *Additive Representations of Preferences, A New Foundation of Decision Analysis.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Chapitre 3

L'approche algébrique

Puisque la propriété n'est fondée que sur l'utilité, où il n'y a point d'utilité possible, il ne peut y avoir de propriété.

Jean-Jacques Rousseau

Dans le chapitre précédent, seules des conditions nécessaires pour l'existence de fonctions d'utilité additives ont été évoquées ; mais cela ne suffit pas pour établir qu'une fonction d'utilité additive existe : il conviendrait d'avoir des conditions suffisantes. L'obtention de telles conditions fait l'objet de ce chapitre ainsi que du suivant.

Le cas où l'ensemble des conséquences possibles, X, est fini a reçu de nombreuses contributions dans ce sens, et il semble peu probable de pouvoir généraliser les résultats actuels. Ceux-ci montrent — cf. Scott (1964) et Adams (1965) — que la condition d'élimination globale, (C), déjà nécessaire, est aussi suffisante lorsqu'elle est associée au fait que $\succsim$ est un préordre large total. Puisque $(C) = (C_\infty)$, cela revient à tester une infinité de conditions, ce qui se révèle peu applicable en pratique. Malheureusement, il a aussi été montré — cf. Scott et Suppes (1958) et un exemple dans Fishburn (1970) — qu'il n'existe pas d'entier m tel que, quel que soit l'ensemble X, (C_∞) soit équivalent à (C_m) ; on en est donc réduit à vérifier une infinité de conditions. Heureusement, l'existence d'une fonction d'utilité additive peut aussi se ramener à l'existence de solutions d'un certain système linéaire. En effet, si $\succsim$ est un préordre large total, toute fonction f vérifiant $\forall (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in X$,

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} f_i(y_i) \quad \text{lorsque} \quad (x_1, \ldots, x_n) \succsim (y_1, \ldots, y_n) \tag{3.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) > \sum_{i=1}^{n} f_i(y_i) \quad \text{lorsque} \quad (x_1, \ldots, x_n) \succ (y_1, \ldots, y_n) \tag{3.2}$$

est additive et représente $\succsim$. Lorsque X est de cardinal fini m, il existe m^2 couples $((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n))$ possibles. L'ensemble des contraintes (3.1) et (3.2), sur ces m^2 couples possibles forme donc un système linéaire fini d'inconnues $f_i(x_i)$, $f_i(y_i)$;

celui-ci possède une solution réalisable si et seulement s'il existe une fonction additive f représentant $\succsim$. Remarquons que l'on a réellement affaire à un simplexe car les inégalités strictes dues à (3.2) peuvent se ramener à des inégalités larges ; en effet puisque l'on a au plus m^2 inégalités strictes, la différence $\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) - \sum_{i=1}^{n} f_i(y_i)$ des équations (3.2) admet une borne inférieure strictement positive ϵ. En rajoutant cet ϵ au second membre de (3.2), on peut donc remplacer les inégalités strictes en inégalités larges. En remarquant en outre que toute transformée linéaire strictement positive d'une fonction d'utilité est encore une fonction d'utilité, on constate que l'on peut en fait remplacer ϵ par n'importe quel réel strictement positif.

Par conséquent, puisque le cas où X est fini est déjà soluble "pratiquement", nous nous consacrerons dans le reste de ce mémoire au cas où X est de cardinal infini. Le problème dans ce cas provient là encore des axiomes d'élimination. Si l'on veut obtenir une théorie de la mesure additive réaliste, c'est-à-dire applicable, il convient de trouver un moyen permettant d'affirmer que tous les axiomes d'élimination sont vérifiés, sans toutefois devoir les tester. A ma connaissance, il n'existe pas à ce jour de conditions, à la fois nécessaires et suffisantes, d'existence d'utilités additives, qui soient suffisamment faciles à tester pour être mises en œuvre sur ordinateur. Parmi les conditions à la fois nécessaires et suffisantes, citons Jaffray (1974a) et Jaffray (1974b), qui allient implicitement la condition (C) à une propriété archimédienne sous les traits d'une condition dénotée (H), Tversky (1967) pour une condition assez abstraite mais couvrant un problème plus général, et Narens (1974) pour des démonstrations utilisant la logique mathématique. Toutefois, le manque d'applicabilité de ces conditions a orienté la recherche dans le domaine vers l'obtention de conditions uniquement suffisantes mais relativement facilement testables.

Ces conditions ont emprunté principalement deux chemins mathématiques : l'algèbre et la topologie. Le premier fait l'objet du présent chapitre et le second sera développé dans le chapitre suivant. L'idée consiste à n'employer parmi les conditions d'élimination que l'axiome d'indépendance et, à la rigueur, la condition de Thomsen, et à compenser la perte des autres axiomes d'élimination par l'ajout de conditions structurelles — la solvabilité restreinte ou non restreinte dans l'approche algébrique, et la connexité dans l'approche topologique.

Ce chapitre est scindé en 7 sections. La première est consacrée à quelques rappels d'algèbre. Dans la seconde, nous découvrirons le théorème de Hölder, le coeur de l'approche algébrique. Après l'avoir formulé, nous verrons brièvement les intuitions qui se cachent derrière ce théorème. Dans les troisième et quatrième sections, nous découvrirons les résultats utilisant respectivement la solvabilité non restreinte et la solvabilité restreinte : nous distinguerons alors le cas où X est un ensemble bidimensionnel du cas où il est de dimension supérieure ou égale à 3, la différence se situant dans l'utilisation ou non de la condition de Thomsen. La section suivante regroupera toutes les démonstrations des théorèmes et autres lemmes. Enfin un résumé et une bibliographie clôtureront le présent chapitre.

3.1 Quelques notions d'algèbre

L'approche algébrique, que ce soit dans le cadre de la solvabilité restreinte ou de la solvabilité non restreinte, repose sur les propriétés des groupes archimédiens. Avant d'aller plus loin, il convient de rappeler quelques notions d'algèbre élémentaire, en particulier la définition d'un groupe.

Définition 3.1 (Groupe) *On appelle groupe tout couple $(G, \oplus)$ composé d'un ensemble G et d'une loi de composition interne $\oplus$ sur cet ensemble satisfaisant aux axiomes suivants :*

- (G_1) *la loi $\oplus$ est associative*
- (G_2) *la loi $\oplus$ possède un élément neutre e*
- (G_3) *tout élément de G admet un symétrique pour la loi $\oplus$.*

Un groupe $(G, \oplus)$ est dit **commutatif** si

$$\text{pour tous les éléments } x, y \in G,\ x \oplus y = y \oplus x.$$

Si m est un entier strictement positif, $mx = x \oplus x \oplus \cdots \oplus x$ (m fois). Notons $\ominus$ la loi de composition symétrique de $\oplus$, c'est-à-dire

$$x \oplus y = z \Leftrightarrow z \ominus y = x.$$

L'élément $\ominus x$ représente le symétrique de x ; c'est un abus de notation pour représenter $e \ominus x$. Lorsque m est négatif, $mx = \ominus x \ominus x \ominus \cdots \ominus x$ ($-m$ fois). $0x = e$.

L'intérêt de la structure de groupe réside bien entendu dans sa loi de composition interne. $\oplus$ est une application de $G \times G$ dans G ; elle permet donc de créer des relations entre les éléments de G. Mais, de par sa définition ($\oplus$ est à valeurs dans G et non dans $\mathbb{R}$), et sa propriété de commutativité, $\oplus$ ne peut représenter un préordre large total (à moins, bien entendu, que $G \subset \mathbb{R}$ et que le préordre n'ait qu'une seule classe d'équivalence). Donc, si l'on veut employer la notion de groupe pour prouver la représentabilité d'une relation de préférence par une fonction d'utilité additive, il convient de munir le groupe d'une relation d'ordre.

Définition 3.2 (Groupe strictement ordonné) *Un groupe strictement ordonné $(G, \oplus, \prec)$ est un groupe $(G, \oplus)$ muni d'un ordre strict $\prec$ sur G tel que, $\forall x, y, z \in G$,*

$$x \prec y \Rightarrow [x \oplus z \prec y \oplus z \text{ et } z \oplus x \prec z \oplus y]. \tag{3.3}$$

Nous avons maintenant un groupe bien structuré. Cependant, il reste encore un problème à régler. En effet, grâce à la loi de composition $\oplus$, deux éléments x et y de G en définissent un troisième, $x \oplus y$, et, grâce à $\prec$, on peut ordonner ces éléments. Mais rien n'indique qu'une utilité — fusse-t-elle même non additive — puisse représenter $\succ$. Par exemple, si $\succ$ est négativement transitive, il se pourrait que le nombre de classes d'équivalence de $\succ$ dans G soit infiniment supérieur au cardinal de $\mathbb{R}$, empêchant ainsi l'existence d'utilités. L'exemple suivant le montre bien :

Exemple 3.1 Soit $G = \{(j,k) : j,k \in \mathbb{R}\}$. Soit $\oplus$ une loi de composition quelconque et $\prec$ l'ordre lexicographique décrit dans l'exemple 2.5 (page 20). Alors $(G, \oplus, \prec)$ est un groupe strictement ordonné. Cependant, comme il a été montré dans l'exemple 2.5, on ne peut représenter $\succsim$ par une fonction d'utilité. ♦

Pour éviter de rencontrer ce genre d'exemple particulièrement déplaisant, nous introduisons la structure de groupe archimédien.

Définition 3.3 (Groupe archimédien) *Un groupe strictement ordonné est archimédien si et seulement si, pour tous $x, y \in G$, $(e \prec x, e \prec y) \Rightarrow y \prec mx$ pour un certain entier positif m.*

Notons que pour être représentable par une fonction d'utilité, un groupe strictement ordonné n'a pas besoin d'être archimédien (comme le montre l'exemple suivant) ; néanmoins le fait que le groupe soit archimédien est une garantie de représentabilité.

Exemple 3.2 Soit $G = \{(j,k) : j,k \in \mathbb{N}\}$. Soit $\oplus$ l'addition sur les nombres entiers — c'est-à-dire $(x,y) \oplus (z,t) = (x+z, y+t)$ — et $\prec$ l'ordre lexicographique. Alors $(G, \oplus, \prec)$ est un groupe strictement ordonné. Cependant, il n'est pas archimédien car $(0,0) \prec (1,0)$, $(0,0) \prec (0,1)$ et, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $m(0,1) = (0,m) \prec (1,0)$.

Ici, il existe tout de même des fonctions représentant $\prec$ car $\mathbb{N}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$, et, donc, $\mathbb{R}$ contient "plus" d'éléments que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$; par exemple, on montre facilement que $f(x,y) = x + \frac{1}{2\pi}\text{arctg}\, y$ est une fonction d'utilité, additive de surcroît, représentant $\prec$. ♦

3.2 Le théorème de Hölder

L'approche algébrique se ramène à concevoir des groupes archimédiens de manière à utiliser le théorème suivant, dû à Hölder (1901), ou tout du moins une variante de ce théorème. L'énoncé de cette variante étant beaucoup plus complexe que celui du théorème de base, et moins intuitif, j'ai préféré l'exposer dans la section relative aux démonstrations des théorèmes. Ici, je montrerai donc la version "simple" du théorème de Hölder, et tenterai d'en extraire les idées intuitives.

3.2.1 Définition

Théorème 3.1 (Hölder (1901)) *Supposons que $(G, \oplus, \prec)$ soit un groupe strictement ordonné. Alors, $(G, \oplus, \prec)$ est archimédien si et seulement s'il existe une fonction sur G et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tous $x, y \in G$,*

$$x \prec y \quad \Leftrightarrow \quad f(x) < f(y) \tag{3.4}$$

$$f(x \oplus y) \quad = \quad f(x) + f(y). \tag{3.5}$$

De plus, si (3.4) et (3.5) sont vérifiées, et si une fonction g sur G à valeurs dans $\mathbb{R}$ préserve aussi l'ordre $\prec$ (comme dans (3.4)) et est additive (comme dans (3.5)), alors il existe un nombre réel $c > 0$ tel que

$$g(x) = c \cdot f(x) \text{ pour tout } x \in G, \tag{3.6}$$

et c est unique si $e \prec x$ pour un x appartenant à G.

Avant d'aller plus loin, et de montrer pourquoi ce théorème est vrai, quelques remarques s'imposent.

A première vue, le théorème peut paraître en contradiction avec l'exemple précédemment cité puisque, dans ce dernier, on considère un groupe non archimédien dont le préordre est représentable par la fonction d'utilité additive $f(x, y) = x + \frac{1}{2\pi}\text{arctg}\, y$. En fait, il n'en est rien. En effet, dans cet exemple, le groupe est bien strictement ordonné, et $\prec$ est représentable par une fonction d'utilité additivement séparable. Mais, la séparabilité additive ne correspond pas à la condition (3.5) ; en effet, cette dernière ne peut être vérifiée. Dans le cas contraire, nous aurions $f(m(0, 1)) = m \cdot f(0, 1)$, qui divergerait vers $+\infty$ lorsque m tendrait vers $+\infty$, ce qui entraînerait que $f(1, 0) = +\infty$, et ne serait donc pas défini.

On voit tout de suite l'intérêt du théorème, puisqu'il permet à la fois de représenter l'ordre $\succ$ par une fonction d'utilité (3.4), et de séparer celle-ci de manière additive (3.5), séparation relative à l'opérateur $\oplus$, comme justifié dans le paragraphe précédent.

L'inconvénient de ce théorème provient de l'unicité de la fonction d'utilité ainsi créée (3.6). En effet, le principe de l'approche algébrique consiste à munir $X/\sim$, l'ensemble quotient de X par rapport à $\succsim$ (l'ensemble des classes d'équivalence), d'un opérateur $\oplus$, de manière à le transformer en groupe archimédien. On peut alors utiliser le théorème cité ci-dessus. Mais dans ce cas, les fonctions d'utilité additives représentant $\succsim$ sont uniques à une transformation affine près — la transformation est affine et non linéaire car le choix de l'élément neutre est souvent arbitraire. Cette propriété est particulièrement restrictive, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3.3 Soit $X = X_1 \times X_2$, où $X_1 = [0, 1] \cup [3, 4]$ et $X_2 = [0, 1]$. X est muni d'une relation de préférence $\succsim$ représentée par $f(x, y) = x + y$. Mais la fonction

$$g(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{si } x \in [0, 1] \\ 2(x + y) + 10 & \text{autrement} \end{cases}$$

représente aussi $\succsim$, et, pourtant, g ne peut se déduire de f par une transformation affine (ici seule une transformation affine par morceaux serait possible). ♦

3.2.2 Interprétation

Il est clair que (3.4) et (3.5) impliquent la propriété archimédienne du groupe. Nous n'insisterons donc pas sur cet aspect. Par contre, la réciproque est loin d'être évidente.

Le principe de démonstration est d'utiliser le fait que si f existe, elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$, et que l'ensemble des nombres rationnels est dense dans $\mathbb{R}$. On sélectionne un élément $x \succ e$ comme référence, et on lui affecte une valeur arbitraire, $f(x) = 1$ par exemple. La propriété archimédienne nous indique que

pour tout élément y, il existe un nombre entier m tel que $mx \preceq y \prec (m+1)x$.

On va alors essayer d'affecter une valeur comprise entre m et $m+1$ à $f(y)$. Mais laquelle ? Toute valeur entre ces deux bornes paraît aussi légitime que les autres. On utilise alors le fait que X est un groupe, ce qui signifie que $2y = y \oplus y$ appartient aussi à X. Toujours d'après l'hypothèse archimédienne,

$$\text{il existe } m' \text{ tel que } m'x \preceq 2y \prec (m'+1)x.$$

Or on a aussi $2mx \preceq 2y \prec (2m+2)x$. On voit donc qu'on a réduit de moitié la largeur de l'intervalle des valeurs admissibles pour $f(y)$. On continue ainsi avec $3y, 4y, \ldots, py$. On restreint alors les valeurs affectables à $f(y)$ à un intervalle du type $[m''/p, (m''+1)/p]$. Lorsque p tend vers $+\infty$, on se rapproche donc d'une seule et unique valeur : $f(y)$. On obtient ainsi une fonction représentant $\succ$, comme dans (3.4).

Cette fonction vérifie en outre (3.5) ; en effet, de par la construction adoptée, $f(py) = p \cdot f(y)$. Ainsi $f(p(y \oplus z)) = p \cdot f(y \oplus z)$. Or d'après la propriété archimédienne, il existe deux entiers m, m' tels que

$$mx \preceq py \prec (m+1)x \quad \text{et} \quad m'x \preceq pz \prec (m'+1)x \ ;$$

par conséquent,

$$(m+m')x \preceq p(y \oplus z) \prec (m+m'+2)x.$$

On peut donc encadrer $p \cdot f(y \oplus z)$ par $(m+m') \cdot f(x)$ et $(m+m'+2) \cdot f(x)$. Or, lorsque p tend vers $+\infty$, les ratios $(m+m')/p$ et $(m+m'+2)/p$ tendent vers la même limite ; et comme $f(x) = 1$, cette limite correspond bien à $p \cdot f(y) + p \cdot f(z)$.

3.3 L'approche avec solvabilité non restreinte

3.3.1 La notion de solvabilité non restreinte

La représentabilité additive requiert une structure des préférences assez forte ; par exemple, tous les axiomes d'élimination doivent être vérifiés. Si l'on veut une théorie ne faisant appel qu'à l'indépendance (cf. page 23) et, à la rigueur, à la condition de

Thomsen (cf. page 24), il va donc falloir compenser la perte des axiomes d'élimination d'ordre supérieur à 2 par l'ajout d'une (ou plusieurs) autre(s) hypothèse(s).

Dans cette section, l'hypothèse en question s'appelle solvabilité non restreinte. Son introduction dans l'étude des mesures additives a été développée par Luce et Tukey (1964) et Luce (1966). Le principe de solvabilité non restreinte repose sur l'idée que si l'on modifie la valeur de certains attributs (certains composants de X), alors, on peut toujours trouver une compensation en modifiant la valeur de n'importe quel autre attribut. En termes mathématiques, cela revient à l'axiome suivant.

Axiome 3.1 (Solvabilité non restreinte par rapport au $i^{\text{ème}}$ composant) *Quels que soient $x \in X$ et $y_j \in X_j$, pour tout $j \neq i$, il existe $z_i \in X_i$ tel que $x \sim (y_1, \ldots, y_{i-1}, z_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)$.*

L'interprétation géométrique nous est donnée, en dimension 2, par la figure 3.1. Connaissant (x_1, x_2) et la courbe d'indifférence passant par ce point (c'est-à-dire la

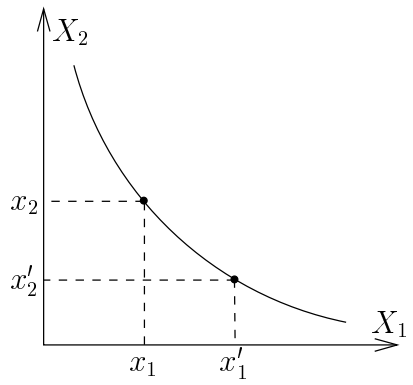


FIG. 3.1: La solvabilité non restreinte

classe d'équivalence de $\succsim$ contenant ce point), quel que soit x'_2, on peut trouver un x'_1 tel que (x'_1, x'_2) appartienne à cette courbe. x'_1 est donc déterminé par l'intersection de la courbe d'indifférence et de la droite horizontale d'ordonnée x'_2. On a donc compensé la différence de préférence entre x_2 et x'_2 par une différence de préférence entre x_1 et x'_1. Le terme "solvabilité" est particulièrement adéquat puisque x'_1 est bien la solution de l'équation, en y_1, $(y_1, x'_2) \sim (x_1, x_2)$. Evidemment, tout préordre large total ne vérifie pas forcément la solvabilité restreinte — c'est d'ailleurs ce qui en fait une condition suffisante, mais pas nécessaire — comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 3.4 Soient $X = \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, et $\succsim$ la relation de préférence représentable par $f(x, y) = x + y$. Même si $\succsim$ est représentable par une fonction d'utilité additive, elle ne vérifie pas la solvabilité non restreinte par rapport au deuxième composant ; en effet, si tel n'était pas le cas, $\mathbb{N}$ serait dense dans $\mathbb{R}$. ♦

Notons que la solvabilité non restreinte ne correspond pas à une notion de continuum comme pourraient le faire penser la figure 3.1 et l'exemple précédent :

Exemple 3.5 Soit $\succsim$ une relation de préférence sur $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ représentable par la fonction d'utilité additive $f : X \to \mathbb{N}$ telle que $f(x, y) = x + y$ pour tous $x, y \in \mathbb{N}$. La solvabilité non restreinte est bien entendue vérifiée ; pourtant, X n'est pas un continuum. ♦

3.3.2 La condition archimédienne

J'ai évoqué, dans la section 3.2, le fait que le principe de l'approche algébrique consiste à transformer l'ensemble des classes d'équivalence de X en un groupe archimédien. Encore faut-il que la relation $\succsim$, définie sur X, le permette. Nous allons découvrir dans cette sous-section une condition archimédienne fondée sur le principe de la représentabilité de $\succsim$ par des fonctions d'utilité additives.

Supposons donc que $\succsim$ est représentable par une fonction d'utilité additive f, et que, de surcroît, tous les attributs vérifient la solvabilité non restreinte. De plus, soient deux éléments de X, $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ et $(x_1^0, x_2^1, \ldots, x_n^1)$, tels que

$$(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \prec (x_1^0, x_2^1, \ldots, x_n^1).$$

Par solvabilité non restreinte, il existe donc $x_1^1 \in X_1$ tel que

$$(x_1^1, x_2^0, \ldots, x_n^0) \sim (x_1^0, x_2^1, \ldots, x_n^1).$$

En termes de fonctions d'utilité, cette préférence est équivalente à

$$f_1(x_1^1) = f_1(x_1^0) + \sum_{i=2}^{n} (f_i(x_i^1) - f_i(x_i^0)).$$

Posons $\alpha = \sum_{i=2}^{n} (f_i(x_i^1) - f_i(x_i^0))$. Puisque f représente $\succsim$, $\alpha > 0$. De plus, l'existence même d'une fonction d'utilité additive garantit que l'axiome d'indépendance (voir page 23) est vérifié. Donc

$$(x_1^1, x_2^0, \ldots, x_n^0) \prec (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1).$$

De même, par solvabilité non restreinte par rapport au premier composant, il existe $x_1^2 \in X_1$ tel que

$$(x_1^2, x_2^0, \ldots, x_n^0) \sim (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1),$$

et, bien entendu,

$$f_1(x_1^2) = f_1(x_1^1) + \alpha = f_1(x_1^0) + 2\alpha.$$

En itérant le procédé, on crée une séquence, dite standard, $\{x_1^0, x_1^1, \ldots, x_1^k\}$, telle que $f_1(x_1^k) = f_1(x_1^0) + k\alpha$. Par conséquent, lorsque k tend vers $+\infty$, $f_1(x_1^k)$ doit tendre aussi vers $+\infty$ puisque α est strictement supérieur à 0.

La figure 3.2 montre l'interprétation géométrique de cette propriété. On part de deux points (x_1^0, x_2^0), (x_1^0, x_2^1) quelconques. Pour trouver x_1^1, on suit la courbe d'indifférence passant par (x_1^0, x_2^1) jusqu'à l'intersection avec l'axe $\{x_2 = x_2^0\}$. On a donc compensé un déplacement vertical de x_2^1 jusqu'à x_2^0 par un déplacement horizontalement de x_1^0 vers

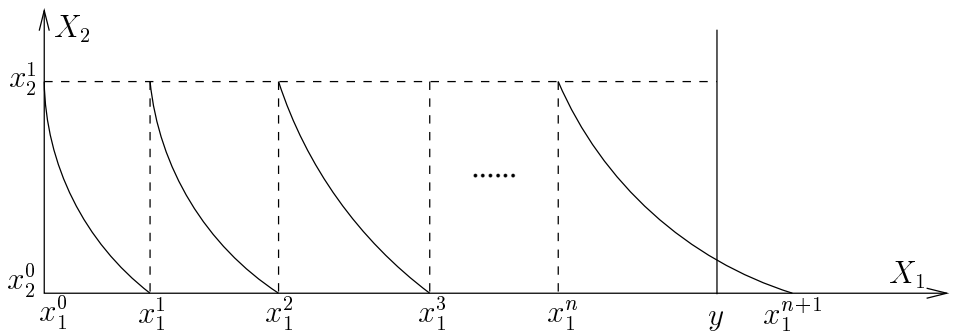


FIG. 3.2: La condition archimédienne

x_1^1. On recommence alors le processus : chaque déplacement vertical de x_2^1 vers x_2^0 est compensé par un déplacement horizontal de x_1^i vers x_1^{i+1}.

Mais cette propriété n'est-elle pas, tout simplement, une propriété archimédienne ? En effet, elle signifie que, pour un niveau de préférence donné, y, on peut toujours trouver un élément de la suite strictement préférable à y. Ceci nous amène donc à formuler un axiome archimédien, que nous utiliserons dans cette section ainsi que la suivante.

Définition 3.4 (séquence standard par rapport au 1er composant) *Pour tout ensemble d'entiers consécutifs (positifs ou négatif, fini ou infini), N, un ensemble $\{x_1^k : x_1^k \in X_1, k \in N\}$ est une séquence standard par rapport au premier composant ssi Non$((x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \sim (x_1^0, x_2^1, \ldots, x_n^1))$ et $(x_1^k, x_2^0, \ldots, x_n^0) \sim (x_1^{k+1}, x_2^1, \ldots, x_n^1)$ $\forall k, k+1 \in N$. On dit que la séquence admet pour base (ou encore, est relative à) $\{(x_2^0, \ldots, x_n^0), (x_2^1, \ldots, x_n^1)\}$.*

Evidemment, des définitions similaires existent pour les séquences standards par rapport aux autres composants de X. Suivant les écoles, l'axiome archimédien peut se présenter sous deux formes différentes. Dans Fishburn (1970), Peter Fishburn exprime le fait que, grâce à la solvabilité non restreinte, toute séquence standard diverge vers l'infini, c'est-à-dire que tout niveau de préférence peut être dépassé par un élément de la suite, pour peu que la suite soit infinie. Dans Krantz, Luce, Suppes, et Tversky (1971), la formulation s'inspire plutôt de la contraposée, c'est-à-dire que si un niveau de préférence ne peut être atteint par aucun élément d'une séquence standard, alors celle-ci n'a qu'un nombre fini d'éléments.

Nous adoptons, dans la suite de ce document, la deuxième formulation. En effet, la première présente l'inconvénient de nécessiter l'emploi de séquences standards (potentiellement) infinies. Dans le cadre de la solvabilité non restreinte, cela ne pose pas de problème ; en revanche, nous verrons dans la prochaine section, qu'en solvabilité restreinte, les fonctions d'utilité peuvent être bornées, empêchant ainsi l'existence de séquences standards infinies.

Axiome 3.2 (axiome archimédien) *(selon Fishburn) Soit une séquence standard de base* $\{(x_1^1, \ldots, x_{i-1}^1, x_{i+1}^1, \ldots, x_n^1), (x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0)\}$. *Alors,*

- $\forall y \in X$ *tel que* $y \succ (x_1^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_n^0)$,
  $\exists\, n \in \mathbb{Z}$ *tel que* $y \prec (x_1^1, \ldots, x_{i-1}^1, x_i^n, x_{i+1}^1, \ldots, x_n^1)$;
- $\forall y \in X$ *tel que* $y \prec (x_1^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_n^0)$,
  $\exists\, n \in \mathbb{Z}$ *tel que* $y \succ (x_1^1, \ldots, x_{i-1}^1, x_i^n, x_{i+1}^1, \ldots, x_n^1)$.

Axiome 3.3 (axiome archimédien) *(selon Krantz, Suppes, Luce et Tversky) Toute séquence standard bornée est finie, c'est-à-dire que si* (x_i^k) *est une séquence standard de base* $\{(x_1^1, \ldots, x_{i-1}^1, x_{i+1}^1, \ldots, x_n^1), (x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0)\}$ *telle qu'il existe* $y, z \in X$ *tels que* $y \precsim (x_1^1, \ldots, x_{i-1}^1, x_i^k, x_{i+1}^1, \ldots, x_n^1) \precsim z$ $\forall k \in \mathbb{Z}$, *alors la séquence* (x_i^k) *est de cardinal fini.*

Ces axiomes archimédiens sont nécessaires à l'existence de fonctions d'utilité additives. Ils sont en principe difficilement testables : pour les tester, on peut potentiellement être amené à constituer des séquences standards infinies — comme le montre l'exemple ci-dessous — ce qui paraît être un obstacle à une utilisation pratique ; cependant, dans la plupart des problèmes concrets, une analyse "logique" du problème permet de déterminer avant même d'essayer de construire une fonction d'utilité si ces axiomes sont vérifiés ou non.

Exemple 3.6 Soit $X = \mathbb{N} \times \{0, 1\}$. Supposons que la relation de préférence $\succsim$ sur X soit telle que :

- pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(p, 0) \prec (p, 1)$,
- pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $(p, 1) \sim (p + 1, 0)$,
- pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $(p, 0) \prec (0, 0)$.

Les séquences standards par rapport au deuxième composant, c'est-à-dire de base $\{x_1, y_1\} \in \mathbb{N}$, sont évidemment finies puisqu'elles ont au plus deux éléments : 0 et 1. Elles ne poseront donc aucun problème lorsque l'on tentera de construire une fonction d'utilité additive $f_1 + f_2$ représentant $\succsim$. Quant au premier composant, ses seules séquences standards sont celles de base $\{0, 1\}$. Construisons f : posons $f_1(1) = 0$, $f_2(0) = 0$ et $f_2(1) = 1$. La relation $(p, 1) \sim (p + 1, 0)$ impose, par récurrence, $f_1(p) = p$. Or la séquence $(p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est une séquence standard ; nous voyons donc que, tout en construisant $f_1 + f_2$, nous pouvons vérifier les axiomes archimédiens. Lors de la construction, les séquences bornées par des éléments de $\mathbb{N}^* \times \{0, 1\}$ vont être finies : là, les axiomes archimédiens vont être vérifiés. Par contre, lorsque l'on va vouloir trouver une valeur réelle pour $f_1(0)$, un problème va se poser car la séquence $(p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est infinie mais bornée par $(1, 0)$ et $(0, 0)$; les axiomes archimédiens ne sont donc pas vérifiés. Le problème est que l'on ne peut s'apercevoir de ce fait qu'en construisant une séquence standard infinie, c'est-à-dire après un temps de construction infini. ♦

3.3.3 Théorie pour deux variables

Nous avons maintenant à notre disposition tout le matériel mathématique nécessaire à l'élaboration de théorèmes d'existence de fonctions d'utilité additives. Bien entendu, comme nous faisons appel à la propriété de solvabilité non restreinte, nous ne pouvons obtenir que des conditions suffisantes d'existence. Mais celles-ci sont très facilement testables car nous n'utilisons pas d'autres axiomes d'élimination que l'indépendance et la condition de Thomsen.

Théorème d'existence

Le théorème ci-dessous provient de Fishburn (1970), bien qu'on le retrouve sous des formulations différentes dans Luce (1966) et Krantz (1964).

Théorème 3.2 *Soient $X = X_1 \times X_2$ et $\succsim$ un préordre large total sur X. Supposons que $(X, \succsim)$ vérifie l'axiome d'indépendance (axiome 2.2), la condition de Thomsen (axiome 2.3), l'axiome archimédien (axiome 3.3), ainsi que la solvabilité non restreinte par rapport aux deux composants (axiome 3.1). Alors, il existe des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, f_1 sur X_1 et f_2 sur X_2 telles que*

$$x \succsim y \Leftrightarrow f_1(x_1) + f_2(x_2) \geq f_1(y_1) + f_2(y_2) \ \forall x, y \in X. \tag{3.7}$$

De plus, si g_1 et g_2 sont des fonctions vérifiant (3.7), alors il existe des constantes $a > 0$ et $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ telles que

$$g_1(\cdot) = a \cdot f_1(\cdot) + b_1 \quad g_2(\cdot) = a \cdot f_2(\cdot) + b_2.$$

Notons que, comme mentionné au chapitre précédent, le théorème ci-dessus ne porte que sur des préférences exprimées sur des produits cartésiens, c'est-à-dire $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$. Notons aussi au passage que les fonctions d'utilité additives décrites par le théorème ci-dessus soit ne prennent qu'une seule valeur soit varient obligatoirement de $-\infty$ jusqu'à $+\infty$; en effet, l'axiome de solvabilité non restreinte (axiome 3.1 de la page 35) et le fait que X est un produit cartésien permettent de définir des séquences standards infinies ; la variation de la fonction d'utilité de $-\infty$ à $+\infty$ est alors assurée par l'axiome archimédien.

Intuitions du théorème

L'intuition du théorème est directement liée à celle du théorème de Hölder. En fait, le principe consiste à choisir arbitrairement un élément de référence (x_1^0, x_2^0), auquel on affecte la valeur de l'utilité $f_1(x_1^0) = f_2(x_2^0) = 0$; (x_1^0, x_2^0) correspond à l'élément neutre du groupe archimédien dans le théorème de Hölder. On se fixe un autre point de référence $x_1^1 \in X_1$ auquel on affecte la valeur $f_1(x_1^1) = 1$. Ceci nous détermine une échelle sur l'axe 1. Par solvabilité non restreinte, on en déduit un point $x_2^1 \in X_2$ tel que $(x_1^0, x_2^1) \sim (x_1^1, x_2^0)$, qui nous fournit une échelle sur l'axe 2.

On prend alors n'importe quel point $x_1 \in X_1$. Pour trouver son image par la fonction d'utilité f_1, on utilise la solvabilité non restreinte pour trouver l'élément x_2 tel que $(x_1^0, x_2) \sim (x_1, x_2^0)$; on crée alors deux séquences standards, une relative à la base

$\{x_2^0, x_2\}$, que nous noterons (y_1^k), et l'autre relative à $\{x_2^0, x_2^1\}$, que nous noterons (x_1^k). Chaque élément de la première séquence est encadré par deux éléments de la deuxième, c'est-à-dire que pour tout k, il existe k' tel que $x_1^{k'} \precsim y_1^k \prec x_1^{k'+1}$. Or les valeurs des $f_1(x_1^{k'})$ sont connues puisque, par construction, on a obligatoirement $f_1(x_1^{k'}) = k'$. Par conséquent, pour que f soit une fonction d'utilité représentant $\succsim$, il faut que $k' \leq f_1(y_1^k) < k' + 1$; or, là encore, par construction, on a forcément $f_1(y_1^k) = kf_1(x_1)$. Donc, $(k'/k) \leq f_1(x_1) < ((k'+1)/k)$. En faisant tendre k vers l'infini, c'est-à-dire en faisant tendre les deux séquences vers l'infini, on obtient une seule et unique valeur de la fonction f_1 au point x_1. On procède de la même manière pour déterminer $f_2(x_2)$ pour n'importe quel élément de X_2.

3.3.4 Théorie pour n composants

Nous supposons ici que $n \geq 3$. Comme l'a montré Luce (1966), le théorème précédent se généralise très facilement au cas de produits cartésiens de plus de deux composants. Mais, alors, la structure de l'espace engendrée par l'axiome d'indépendance et par la solvabilité non restreinte est telle que l'on n'a plus besoin de recourir à la condition de Thomsen ; en effet, celle-ci résulte directement de l'association de l'axiome d'indépendance avec la solvabilité non restreinte.

Théorème d'existence

A l'instar de la sous-section précédente, le théorème ci-dessous est "emprunté" à Fishburn (1970).

Théorème 3.3 *Soient $X = \prod_{i=1}^n X_i$ et $\succsim$ un préordre large total sur X. Supposons que $(X, \succsim)$ vérifie l'axiome d'indépendance (axiome 2.2) ainsi que l'axiome archimédien (axiome 3.3), et que la solvabilité non restreinte (axiome 3.1) soit vérifiée par tous les composants de X. Alors, il existe des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, f_i sur X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, telles que*

$$x \succsim y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \geq \sum_{i=1}^n f_i(y_i) \ \forall x, y \in X. \tag{3.8}$$

De plus, si g_i, $i = 1, \ldots, n$, vérifient (3.8), alors il existe des constantes $a > 0$ et $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, telles que

$$g_i(\cdot) = a \cdot f_i(\cdot) + b_i \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

3.4 L'approche avec solvabilité restreinte

Exemple 3.7 Dans le chapitre 2, nous avions cité, comme domaine d'application des préordres larges totaux, la théorie du consommateur. Prenons donc un consommateur au hasard : monsieur Nipigue. A la fin de chaque mois, son salaire, s'élevant à x francs, lui est versé sur son compte en banque. Le banquier autorise au plus un

découvert de y francs. Monsieur Nipigue répartit son budget dans quatre grands postes, à savoir l'alimentation, les dépenses courantes (loyer, impôts, etc...), les loisirs et l'épargne. Cette répartition reflète évidemment les préférences du décideur. Or le budget disponible à un instant t est compris entre y et $\alpha(t)x$, où $\alpha(t)$ représente le nombre de mois où monsieur Nipigue a travaillé et perçu son salaire. Le budget étant borné, l'allocation possible pour chaque secteur est, elle aussi, bornée. Imposer que la fonction d'utilité représentant les préférences de monsieur Nipigue varie de $-\infty$ à $+\infty$ paraît donc une restriction un peu forte. ♦

On rencontre ainsi de nombreux problèmes dans lesquels certains composants sont visiblement bornés, et dont au moins une des bornes est atteinte. Sur ce point, la fonction d'utilité additive doit alors prendre une valeur finie ; l'hypothèse de solvabilité non restreinte ne peut donc être satisfaite (puisque, rappelons le, elle oblige les fonctions d'utilité additives à varier de $-\infty$ à $+\infty$). Afin de pouvoir étudier la représentabilité de tels exemples, cette hypothèse doit donc être affaiblie, tout en préservant ses propriétés structurantes. La condition retenue à cet effet dans la littérature s'appelle la solvabilité restreinte. Historiquement, elle fut développée dans les années 60 par Luce et Tukey (cf. Luce et Tukey (1964), Luce (1966)), ainsi que Krantz (cf. Krantz (1964)).

Le but de cette section est de montrer les différents théorèmes d'existence en solvabilité restreinte. On verra que ceux-ci ressemblent fortement aux théorèmes de la section précédente.

3.4.1 La notion de solvabilité restreinte

Nous avons vu dans la section précédente que l'intérêt de la solvabilité non restreinte est de structurer l'espace X pour qu'une représentation additive existe. Cette structure s'obtient grâce aux relations d'indifférence qu'elle impose entre certains éléments de X — ou grâce aux égalités qu'elle impose sur les images de ces points par les fonctions d'utilité, suivant qu'on parle en termes de relations de préférence ou en termes de fonctions d'utilité. Si l'on veut affaiblir la solvabilité non restreinte, tout en conservant une propriété structurante, il faut garder des relations d'égalité, mais n'imposer celles-ci que sur une partie de X. D'où l'axiome suivant :

Axiome 3.4 (solvabilité restreinte par rapport au $i^{\text{ème}}$ composant)
$\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\forall x \in X$, $\forall y_j \in X_j$, $j \neq i$ et $\forall y_i^0, y_i^1 \in X_i$ tels que

$$(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_i^0, y_{i+1}, \ldots, y_n) \precsim x \precsim (y_1, \ldots, y_{i-1}, y_i^1, y_{i+1}, \ldots, y_n),$$

$\exists\, z_i \in X_i$ tel que $x \sim (y_1, \ldots, y_{i-1}, z_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)$.

Bien entendu, même si la solvabilité restreinte est plus générale que la solvabilité non restreinte, elle n'est qu'une condition suffisante d'existence et en aucun cas une condition nécessaire ; autrement dit, il existe des problèmes dans lesquels elle n'est pas vérifiée, et qui, pourtant, sont représentables par des fonctions d'utilité additives.

Exemple 3.8 Monsieur Nipigue décide d'acheter une voiture. Il se rend donc chez divers concessionnaires afin de s'enquérir des modèles proposés. Parmi ses critères

de choix, vont intervenir le modèle de voiture, sa marque, le prix, etc... Or, il est bien évident que l'argent est un attribut pouvant prendre bien plus de valeurs que la marque, ou même le modèle. Ces deux derniers attributs ne peuvent donc vérifier la solvabilité restreinte — en effet, si l'on fixe la marque d'un véhicule et son prix, on ne trouvera pas forcément un modèle correspondant. Par contre, connaissant un modèle et une marque, on peut toujours trouver le prix correspondant ; le prix est donc un attribut satisfaisant la solvabilité restreinte. ♦

La solvabilité restreinte peut s'interpréter graphiquement d'une manière très simple en dimension 2, comme le montre la figure 3.3 : si (y_1^0, y_2) et (y_1^1, y_2) sont de part et d'autre de la courbe d'indifférence sur laquelle se trouve x, alors, la droite passant par (y_1^0, y_2) et (y_1^1, y_2) intersecte la courbe d'indifférence.

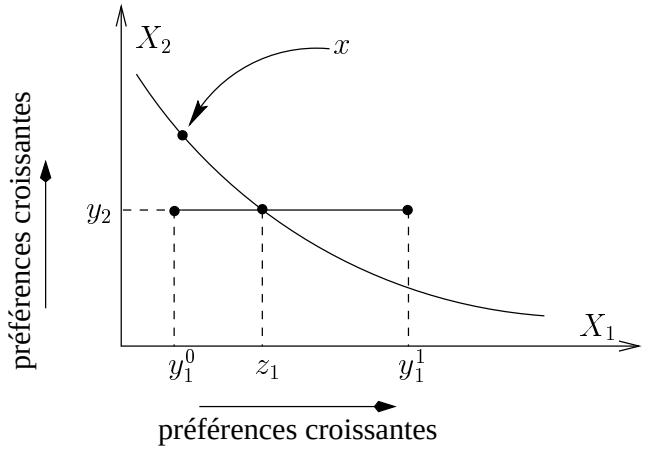


FIG. 3.3: La solvabilité restreinte

Avant de passer à la formulation des théorèmes d'existence, il reste un dernier axiome à introduire. La solvabilité restreinte est une condition très affaiblie par rapport à la solvabilité non restreinte ; ainsi, ce n'est pas parce que $(X, \succsim)$ vérifie la solvabilité restreinte par rapport à tous ses composants, l'indépendance, l'axiome archimédien et la condition de Thomsen (si X est de dimension 2) que $\succsim$ est forcément représentable par une fonction d'utilité additive.

Exemple 3.9 Soit $X = X_1 \times \mathbb{N}$, où $X_1 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Soit $\succsim$ la relation de préférence sur X telle que

1. $\forall (x_1, x_1') \in X_1$ et $\forall x_2, y_2 \in \mathbb{N}$, $((x_1, x_1'), x_2) \sim ((x_1, x_1'), y_2)$,

2. $\forall (x_1, x_1'), (y_1, y_1') \in X_1$ et $\forall x_2 \in \mathbb{N}$,
$((x_1, x_1'), x_2) \succsim ((y_1, y_1'), x_2) \Leftrightarrow x_1 > y_1$ ou $(x_1 = y_1$ et $x_1' \geq y_1')$.

On peut vérifier facilement que la solvabilité restreinte est satisfaite par X_1 et $\mathbb{N}$: si $((y_1^0, y_1^{0\prime}), y_2) \precsim ((x_1, x_1'), x_2) \precsim ((y_1^1, y_1^{1\prime}), y_2)$, alors $((x_1, x_1'), x_2) \sim ((x_1, x_1'), y_2)$ d'après la propriété 1 ; si $((y_1, y_1'), y_2^0) \precsim ((x_1, x_1'), x_2) \precsim ((y_1, y_1'), y_2^1)$, alors,

d'après la propriété 2, $(y_1, y_1') = (x_1, x_1')$ et donc, pour tout y_2, $((x_1, x_1'), x_2) \sim ((y_1, y_1')y_2)$. De même l'axiome d'indépendance est trivialement vérifié. Quant à la condition de Thomsen, si $((x_1, x_1'), z_2) \sim ((z_1, z_1'), y_2)$ et si $((z_1, z_1'), x_2) \sim ((y_1, y_1'), z_2)$, alors, d'après la propriété 2, $(x_1, x_1') = (z_1, z_1') = (y_1, y_1')$, et donc $((x_1, x_1'), x_2) \sim ((y_1, y_1'), y_2)$. L'axiome archimédien est aussi trivialement vérifié puisque toutes les séquences standards n'ont qu'un seul élément. Cependant, $\succsim$ n'est pas représentable par une fonction d'utilité car, si tel était le cas, l'ordre lexicographique sur $X_1 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ serait aussi représentable par une fonction d'utilité, ce qui est impossible (voir exemple 3.1). ♦

En fait, dans l'exemple ci-dessus le problème vient du fait que le second composant de X, bien que vérifiant la solvabilité restreinte, ne joue aucun rôle par rapport à $\succsim$ puisque, quels que soient x_1, x_1', x_2, y_2, $((x_1, x_1'), x_2) \sim ((x_1, x_1'), y_2)$. On dit dans ce cas que le second composant n'est pas essentiel. Donc, si l'on veut que la solvabilité restreinte apporte une structure à notre relation de préférence $\succsim$, il convient d'associer cette dernière avec l'axiome suivant :

Axiome 3.5 (essentialité) *X_i est essentiel si et seulement s'il existe $a_i, b_i \in X_i$, et $x_j \in X_j$, $j \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{i\}$ tels que*

$$(x_1, \ldots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \succ (x_1, \ldots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

3.4.2 Théorie pour deux composants

Théorème d'existence

Grâce aux axiomes cités précédemment, on peut maintenant donner un théorème de représentation pour des produits cartésiens de dimension 2. En fait, celui-ci correspond exactement au théorème de représentation en dimension 2 explicité à la section 3.3.3, mais en substituant la solvabilité non restreinte par le groupement (solvabilité restreinte + essentialité) ; ce théorème est explicité sous une forme très légèrement différente dans Krantz, Luce, Suppes, et Tversky (1971). On remarquera que l'unicité des fonctions additives est, là encore, une propriété cardinale (c'est-à-dire que ces fonctions sont uniques à une transformation affine strictement positive près).

Théorème 3.4 *Supposons que $X = X_1 \times X_2$, que $\succsim$ soit un préordre large total sur X, et que $(X, \succsim)$ vérifie l'axiome d'indépendance (axiome 2.2), la condition de Thomsen (axiome 2.3)ainsi que l'axiome archimédien (axiome 3.3), et que tous les composants vérifient la solvabilité restreinte (axiome 3.4) et l'essentialité (axiome 3.5). Alors, il existe deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, f_1 sur X_1 et f_2 sur X_2 telles que*

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X,\ (x_1, x_2) \succsim (y_1, y_2) \Leftrightarrow f_1(x_1) + f_2(x_2) \geq f_1(y_1) + f_2(y_2). \quad (3.9)$$

De plus, si g_1 et g_2 vérifient aussi (3.9), alors il existe $a > 0$ et $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$g_1(\cdot) = a \cdot f_1(\cdot) + b_1 \text{ et } g_2(\cdot) = a \cdot f_2(\cdot) + b_2. \quad (3.10)$$

Intuitions du théorème

L'idée sous-jacente du théorème ci-dessus est plus ou moins la même que celle du théorème 3.2 de la section 3.3.3, à savoir, pour n'importe quel $x \in X$, d'encadrer $f(x)$ par deux suites de rationnels convergeant vers la même limite. Prenons un point $(x_1^0, x_2^0) \in X$ comme élément de référence, auquel nous affectons l'utilité $f_1(x_1^0) = f_2(x_2^0) = 0$; soit $x_1^1 \in X_1$ tel que $\mathrm{Non}(x_1^1 \sim_1 x_1^0)$ (x_1^1 existe d'après l'axiome d'essentialité). Pour simplifier les notations, nous allons supposer que $x_1^1 \succ x_1^0$; nous allons alors affecter arbitrairement $f_1(x_1^1) = 1$.

Soit $x_1 \in X_1$. Si $x_1^0 \prec_1 x_1 \prec_1 x_1^1$, alors, il nous faut trouver une valeur pour $f_1(x_1)$ comprise entre 0 et 1. S'il existe $y_2 \in X_2$ tel que $(x_1, x_2^0) \sim (x_1^0, y_2)$, alors, rien ne nous interdit de construire une séquence standard croissante (y_1^k) de base $\{x_2^0, y_2\}$; cette séquence aura pour éléments $y_1^0 = x_1^0, y_1^1 = x_1, \ldots$ D'après l'axiome archimédien, il existe k tel que $y_1^k \precsim_1 x_1^1$ et tel que ou bien y_1^{k+1} n'existe pas, ou bien $y_1^{k+1} \succ_1 x_1^1$. Si $y_1^k \sim_1 x_1^1$, nous sommes certains que $f_1(x_1) = 1/k$; sinon, on peut déjà dire que $f_1(x_1)$ doit être compris entre $1/(k+1)$ et $1/k$. Considérons maintenant la séquence standard décroissante (z_1^i) qui a pour premiers éléments x_1^1 et y_1^k ; cette séquence est plus fine que la séquence précédente, et va donc permettre de réduire encore l'ensemble des valeurs admissibles pour $f_1(x_1)$. Ce processus est illustré dans la figure 3.4. On peut alors réduire à nouveau l'ensemble des valeurs admissibles en reconsidérant à nouveau une séquence standard croissante, mais ayant cette fois pour premiers éléments x_1^0 et z_1^i, où i était le dernier élément de la séquence standard précédente préféré à x_1^0 (sur la figure $i = 8$). En réitérant ce processus un certain nombre de fois (peut-être infini), on va finir par converger vers une seule et unique valeur. On peut d'ailleurs voir sur la

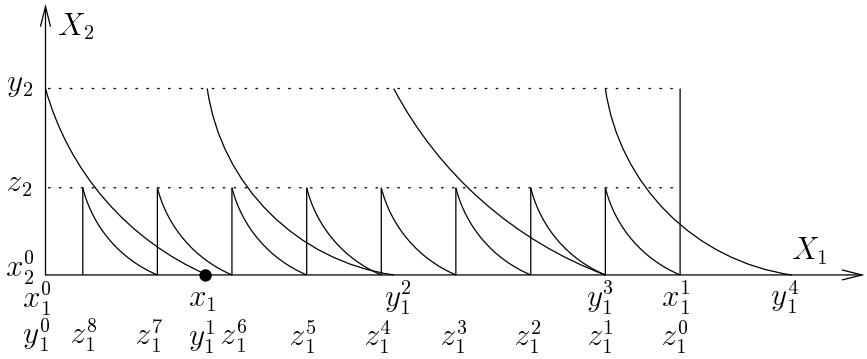


FIG. 3.4: Encadrement de $f_1(x_1)$ par des rationnels

figure 3.4 pourquoi l'algorithme converge : la base des séquences standards successives est de plus en plus petite (on passe de $\{x_2^0, y_2\}$ à $\{x_2^0, z_2\}$ par exemple), ce qui implique que les éléments consécutifs des séquences standards sont de plus en plus proches, et donc, encadrent de mieux en mieux x_1.

3.4.3 Théorie pour n composants

Théorème 3.5 *Supposons que $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$, $n \geq 3$, que $\succsim$ soit un préordre large total sur X, et que $(X, \succsim)$ vérifie l'axiome d'indépendance (axiome 2.2) ainsi que l'axiome archimédien (axiome 3.3), et que tous les composants soient essentiels (axiome 3.5) et vérifient la solvabilité restreinte (axiome 3.4). Alors, il existe des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, f_i sur X_i, $i = 1, \ldots, n$, telles que*

$$\forall x_i, y_i \in X_i,\ (x_1, \ldots, x_n) \succsim (y_1, \ldots, y_n) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} f_i(y_i). \tag{3.11}$$

De plus, si g_i, $i = 1, \ldots, n$, vérifient aussi (3.11), alors il existe $a > 0$ et $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, tels que

$$g_i(\cdot) = a \cdot f_i(\cdot) + b_i,\ \forall i = 1, \ldots, n. \tag{3.12}$$

Le théorème ci-dessus est décrit dans le chapitre 6 de Krantz, Luce, Suppes, et Tversky (1971), dont il constitue d'ailleurs l'un des résultats les plus importants.

3.5 Démonstrations

Démonstration du théorème 3.1 : J'ai adopté ici la démonstration décrite dans Fishburn (1970). Il est évident que (3.4) et (3.5) impliquent le fait que le groupe est archimédien. Deux cas sont envisagés pour montrer la réciproque.

Premier cas : G possède un plus petit élément x tel que $e \prec x$:

Ainsi il n'existe aucun $y \in G$ tel que $e \prec y \prec x$. D'après la propriété archimédienne du groupe, et le fait que $e \prec x \prec 2x \prec \cdots$, $e \prec y$ implique qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$mx \preceq y \prec (m+1)x, \text{ où } [z \preceq y \Leftrightarrow z \prec y \text{ ou bien } z = y].$$

C'est pourquoi, d'après (3.3) et les conditions (G_2) et (G_3) page 31, ainsi que le fait que $(m+1)x = x \oplus mx$, on a $e \preceq y \ominus mx \prec x$. Mais, par hypothèse, il n'existe aucun $z \in G$ tel que $e \prec z \prec x$. Donc $e = y \ominus mx$, ou encore $y = mx$. De même, si $y \prec e$, alors il existe un entier m tel que $y = \ominus mx$. Définissons f de telle manière que $f(y) = m$ lorsque $y = mx$. Si $y = m_1 x$ et $z = m_2 x$, alors $y \prec z \Leftrightarrow m_1 < m_2$. De plus, $f(y \oplus z) = f(m_1 x \oplus m_2 x) = f((m_1 + m_2)x) = m_1 + m_2 = f(y) + f(z)$. D'où (3.4) et (3.5).

Deuxième cas : $e \prec x \Rightarrow$ il existe $y \in G$ tel que $e \prec y \prec x$:

Nous allons commencer par montrer que le groupe est commutatif. Supposons que $e \prec y \prec x$. Alors, soit $2y \preceq x$, soit $x \prec 2y$. Dans le deuxième cas, $x \ominus y \prec y$, ce qui implique, d'après (3.3), que $(x \ominus y) \oplus (x \ominus y) \prec (x \ominus y) \oplus y$. Donc, d'après l'associativité de la loi $\oplus$, $2(x \ominus y) \prec x$. De plus, d'après (3.3) et le fait que $\oplus$ admet un élément neutre, $e \prec x \ominus y$, et $x \ominus y \prec x$ car $x \ominus y \prec y$ et $y \prec x$. Il s'ensuit alors que si $e \prec x$, il existe

$z \in G$ tel que $e \prec z \prec x$ et $2z \preceq x$. Maintenant, supposons que G ne soit pas un groupe commutatif; par exemple, supposons que $e \prec a$, $e \prec b$ et $a \oplus b \neq b \oplus a$. Puisque le groupe est strictement ordonné, soit $b \oplus a \prec a \oplus b$, soit $a \oplus b \prec b \oplus a$; supposons que la première alternative soit la bonne. Alors, posons $x = (a \oplus b) \ominus (b \oplus a)$; ainsi $e \prec x$. Soit z un élément de G tel que $e \prec z \prec x$ et $2z \preceq x$ (z existe d'après ce qui précède). D'après la propriété archimédienne, il existe des entiers positifs ou nuls m et n tels que $mz \preceq a \prec (m+1)z$ et $nz \preceq b \prec (n+1)z$. Par conséquent, $a \oplus b \prec (m+1)z \oplus b \prec (m+1)z \oplus (n+1)z = (m+n+2)z$ et $(n+m)z = nz \oplus mz \preceq b \oplus mz \preceq b \oplus a$, ou $\ominus(b \oplus a) \preceq \ominus(n+m)z$, de telle sorte que $x = (a \oplus b) \ominus (b \oplus a) \prec (m+n+2)z \ominus (n+m)z = 2z$, ou encore $x \prec 2z$. Mais ce résultat est en contradiction avec $2z \preceq x$, que nous avions établi précédemment. Par conséquent, l'hypothèse "$(G, \oplus, \prec)$ n'est pas commutatif" est inacceptable.

Nous supposerons maintenant qu'il existe $x \in G$ tel que $e \prec x$; sinon le groupe n'a qu'un seul élément, et le théorème est tout de suite prouvé. Soit a un élément quelconque tel que $e \prec a$; définissons f de la manière suivante : posons $f(a) = 1$, et, pour $x \in G$,

$$\begin{aligned} L_x &= \{m/n : ma \preceq nx,\ m, n \in \mathbb{N}^*\} \\ U_x &= \{m/n : nx \preceq ma,\ m, n \in \mathbb{N}^*\}. \end{aligned}$$

$\{L_x, U_x\}$ est une partition de l'ensemble des rationnels telle que $m/n < r/s$ dès que $m/n \in L_x$ et $r/s \in U_x$. Il s'ensuit qu'il existe un unique nombre réel $f(x)$ tel que

$$f(x) = \sup L_x = \inf U_x.$$

Afin de prouver que $f(x \oplus y) = f(x) + f(y)$, supposons d'abord que $m/n \in L_x$ et $r/s \in L_y$. Alors $ma \preceq nx$ et $ra \preceq sy$. Par conséquent, $sma \preceq snx$ et $nra \preceq nsy$, de telle sorte que $(ms + nr)a \preceq ns(x \oplus y)$. C'est pourquoi $(ms + nr)/ns = (m/n) + (r/s)$ appartient à $L_{x \oplus y}$. De la même manière, si $m/n \in U_x$ et $r/s \in U_y$, alors $m/n + r/s \in U_{x \oplus y}$. Il s'ensuit que :

$$\sup L_x + \sup L_y \leq sup L_{x \oplus y} = f(x \oplus y) = \inf U_{x \oplus y} \leq \inf U_x + \inf U_y$$

et, donc, que $f(x \oplus y) = f(x) + f(y)$. Ceci prouve que l'équation (3.5) est bien vérifiée.

Etablissons maintenant (3.4). Supposons que $e \prec x$. Alors il existe un entier positif m tel que $a \prec mx$. Par conséquent, $1/m \in L_x$, et, donc, $f(x) > 0$. De la même manière, si $x \prec e$, alors $f(\ominus x) > 0$ et $f(e) = 0$. Par conséquent, $e \prec x \Leftrightarrow 0 < f(x)$, ce qui implique clairement (3.4).

Il reste enfin à montrer l'unicité de la fonction f. Supposons que $G = \{e\}$. Alors, forcément $f(e) = g(e) = 0$, et donc tout c convient dans l'équation (3.6). Supposons maintenant qu'il existe $x \in G$ tel que $e \prec x$. Si l'on est dans le premier cas examiné ci-dessus, avec x tel que $e \prec x$ et tel qu'il n'existe aucun y tel que $e \prec y \prec x$, alors pour tout $z \in G$, il existe un entier m tel que $z = mx$. On sait alors que $f(z) = mf(x)$ et $g(z) = mg(x)$. Par conséquent, $g(z) = [g(x)/f(x)]f(z)$ pour tout z. $c = [g(x)/f(x)]$ est donc l'unique solution possible. Si l'on est dans le deuxième cas, $e \prec a$. On a alors $mf(a) \leq nf(x)$, $mg(a) \leq ng(x)$, $sf(x) \leq rf(a)$ et $sg(x) \leq rg(a)$ pour tous $m/n \in L_x$ et $r/s \in U_x$, ce qui entraîne que $f(x)/f(a) = g(x)/g(a)$, ou encore que $g(x) = [g(a)/f(a)]f(x)$ pour tout $x \in G$. ♦

Démonstration du théorème 3.2 : Je propose ici une démonstration donnée dans Fishburn (1970). Comme indiqué dans la section 3.2, nous allons exhiber un groupe archimédien afin de pouvoir utiliser le théorème de Hölder. Notons $X/\sim$ l'ensemble quotient de X par rapport à $\sim$, et $x^\sim$ la classe contenant $x \in X$, et sélectionnons un point arbitraire de X, que nous notons (x_1^0, x_2^0).

Par solvabilité non restreinte, tout élément de $X/\sim$ contient des éléments de la forme (x_1, x_2^0), (x_1^0, x_2). On définit alors l'opérateur $\oplus$ sur $X/\sim$ de la manière suivante :

$$\forall (x_1, x_2^0), (x_1^0, x_2) \in X,\ (x_1, x_2^0)^\sim \oplus (x_1^0, x_2)^\sim = (x_1, x_2)^\sim. \tag{3.13}$$

Nous introduisons une relation d'ordre $\prec'$ sur $X/\sim$ telle que $x^\sim \prec' y^\sim \Leftrightarrow x \prec y$. Considérons maintenant $(X/\sim, \oplus, \prec')$ et montrons que c'est un groupe archimédien.

Tout d'abord, $\oplus$ est bien défini car (3.13) ne dépend pas du couple (x_1, x_2) choisi. En effet, si $(x_1, x_2^0)^\sim = (y_1, x_2^0)^\sim$ et $(x_1^0, x_2)^\sim = (x_1^0, y_2)^\sim$, alors $(x_1, x_2^0) \sim (y_1, x_2^0)$ et, par indépendance, $(x_1, x_2) \sim (y_1, x_2)$, ou encore $(x_1, x_2)^\sim = (y_1, x_2)^\sim$. De la même manière, $(x_1^0, x_2)^\sim = (x_1^0, y_2)^\sim$ implique que $(y_1, x_2)^\sim = (y_1, y_2)^\sim$. Par transitivité, on a donc $(x_1, x_2)^\sim = (y_1, y_2)^\sim$.

$\oplus$ est commutatif car, d'après la condition de Thomsen,

$$\left.\begin{array}{l}(x_1, x_2^0)^\sim = (x_1^0, y_2)^\sim \\ (x_1^0, x_2)^\sim = (y_1, x_2^0)^\sim\end{array}\right\} \Rightarrow (x_1, x_2)^\sim = (y_1, y_2)^\sim,$$

et donc

$$\begin{aligned}(x_1, x_2^0)^\sim \oplus (x_1^0, x_2)^\sim &= (y_1, x_2^0)^\sim \oplus (x_1^0, y_2)^\sim \\ &= (x_1^0, x_2)^\sim \oplus (x_1, x_2^0)^\sim.\end{aligned}$$

Passons maintenant à l'associativité. Grâce à la commutativité,

$$\forall a, b, c \in X/\sim,\ (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) \Leftrightarrow c \oplus (a \oplus b) = a \oplus (c \oplus b).$$

Soient $(x_1, x_2^0) \in a$, $(x_1^0, x_2) \in b$, $(y_1, x_2^0) \in c$, $(x_1^0, y_2) \in a \oplus b$ et $(x_1^0, z_2) \in c \oplus b$. Alors, $(x_1^0, y_2) \sim (x_1, x_2)$ et $(y_1, x_2) \sim (x_1^0, z_2)$. Et donc, d'après la condition de Thomsen, $(y_1, y_2) \sim (x_1, z_2)$, ce qui entraîne $c \oplus (a \oplus b) = a \oplus (c \oplus b)$.

Notons $e = (x_1^0, x_2^0)^\sim$; alors, e est élément neutre de $\oplus$. En effet, $\forall a \in X/\sim$, $e \oplus a = a \oplus e$, et, par (3.13), $(x_1, x_2^0) \in a$ implique que $(x_1, x_2^0) \in a \oplus e$, et, donc, que $a \oplus e = a$. Soit $\ominus a$ l'élément de $X/\sim$ qui contient (x_1^0, x_2) quand $(x_1, x_2^0) \in a$ et $(x_1, x_2) \in e$. D'après (3.13), $\ominus a \oplus a = e$. Par conséquent, $(X/\sim, \oplus)$ est un groupe.

Par définition, $\prec'$ est un ordre strict sur $X/\sim$. Pour $a, b \in X/\sim$, supposons que $a \prec' b$. Soient $(x_1, x_2^0) \in a$, $(y_1, x_2^0), (z_1, x_2) \in b$ et $(x_1^0, x_2) \in c$. Donc $(x_1, x_2^0) \prec (z_1, x_2)$ puisque $a \prec' b$. De plus, d'après la condition de Thomsen et $(y_1, x_2^0) \sim (z_1, x_2)$, on a $\text{Non}((y_1, x_2) \prec (x_1, x_2))$, et même $(x_1, x_2) \prec (y_1, x_2)$ puisque $(x_1, x_2) \sim (y_1, x_2)$ serait en contradiction avec la condition de Thomsen. Par conséquent, $a \oplus c \prec' b \oplus c$, et donc, $(X/\sim, \oplus, \prec')$ est un groupe strictement ordonné.

Il faut maintenant prouver que c'est en outre un groupe archimédien. Pour ce faire, supposons que $(e \prec' a, e \prec' b)$. Avec $(x_1^0, x_2^1) \in a$, et $(x_1^0, x_2^0) \in e$, on a le début

d'une séquence standard. Donc, puisque $(x_1^0, x_2^1) \in a$, $(x_1^1, x_2^0) \in a$ et d'après (3.13), $(x_1^1, x_2^1) \in 2a$. Par conséquent, on a aussi $(x_1^2, x_2^0) \in 2a$, et donc $(x_1^3, x_2^0) \in 3a$. En itérant ainsi le processus, et en utilisant (3.13), il s'ensuit que $(x_1^k, x_2^0) \in ka$, $k = 1, 2, \ldots$ En prenant $y \in b$, et en utilisant la propriété archimédienne sur les séquences standards, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $y \prec (x_1^k, x_2^0)$, ce qui nous donne $b \prec' ka$. Par conséquent, $(X/\sim, \oplus, \prec')$ est un groupe archimédien.

Ainsi, on peut utiliser le théorème central de la section 3.2. Par conséquent, il existe une fonction u sur $X/\sim$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $u(a \oplus b) = u(a) + u(b)$ et $a \prec' b \Leftrightarrow u(a) < u(b)$. Définissons $f_1(x_1) = u(a)$ lorsque $(x_1, x_2^0) \in a$, et $f_2(x_2) = u(b)$ lorsque $(x_1^0, x_2) \in b$. (3.7) est alors visiblement vérifiée.

Passons maintenant à l'unicité. Supposons que g_1 sur X_1 et g_2 sur X_2 satisfont aussi (3.7). Définissons alors v sur $X/\sim$ de la manière suivante : $v(a) = [g_1(x_1) - g_1(x_1^0)] + [g_2(x_2) - g_2(x_2^0)]$ lorsque $(x_1, x_2) \in a$. Alors, en prenant $(x_1, x_2^0) \in a$ et $(x_1^0, x_2) \in b$, $(x_1, x_2) \in a \oplus b$ et $v(a) + v(b) = v(a \oplus b)$. De plus, $v(a) < v(b) \Leftrightarrow a \prec' b$. Par conséquent, d'après le théorème 3.1, il existe un réel strictement positif c tel que $v = c \cdot u$. Donc, $g_1(x_1) - g_1(x_1^0) = cf_1(x_1)$ pour tout $x_1 \in X_1$ et $g_2(x_2) - g_2(x_2^0) = cf_2(x_2)$ pour tout $x_2 \in X_2$. Il y a donc unicité à une transformation affine strictement positive près. ♦

Démonstration du théorème 3.3 : Je présente ici une adaptation de la démonstration donnée dans Fishburn (1970). Celle-ci se compose de deux grandes étapes : d'abord on suppose que l'axiome d'élimination (C_2) est vérifié, et on exhibe un groupe archimédien $(X/\sim, \oplus, \prec')$ sur lequel on applique le théorème de Hölder ; pour cela, contrairement à Fishburn, qui requiert la solvabilité non restreinte par rapport à tous les composants, nous n'utiliserons que la solvabilité non restreinte par rapport à deux composants. Ensuite, on montre que l'axiome d'indépendance, conjugué à la solvabilité non restreinte par rapport à trois composants, entraîne l'axiome (C_2) (Fishburn utilisait là encore la solvabilité par rapport à tous les composants).

Comme dans la démonstration précédente, notons $X/\sim$ l'ensemble des classes d'indifférence de X par rapport à $\sim$, et $x^\sim$ la classe contenant x. Fixons $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in X$. D'après la solvabilité non restreinte par rapport aux deux premiers composants du produit cartésien X, tout $a \in X/\sim$ contient des éléments de la forme $(x_i, i \in I, x_j^0, j \in J)$ et $(x_j, j \in J, x_i^0, i \in I)$, où

$$I \cup J = \{1, \ldots, n\},\ I \cap J = \emptyset,\ \{1\} \subset I,\ \{2\} \subset J.$$

On définit alors la loi de composition $\oplus$ sur $X/\sim$ de la manière suivante

$$a \oplus b = (x_1, \ldots, x_n) \text{ lorsque, } \forall I, J \text{ tels que } I \cap J = \emptyset,\ I \cup J = \{1, \ldots, n\},\ \{1, 2\} \not\subset I, J$$
$$(x_i, i \in I, x_j^0, j \in J) \in a \text{ et } (x_i^0, i \in I, x_j, j \in J) \in b.$$

$\oplus$ est une opération bien définie ; en effet, soient quatre sous-ensembles I_1, I_2, J_1, J_2 de $\{1, \ldots, n\}$ tels que

$$\begin{array}{ll}
\{1,2\} \not\subset I_1,\ \{1,2\} \not\subset J_1, & I_1 \cap J_1 = \emptyset,\ I_1 \cup J_1 = \{1, \ldots, n\}, \\
\{1,2\} \not\subset I_2,\ \{1,2\} \not\subset J_2, & I_2 \cap J_2 = \emptyset,\ I_2 \cup J_2 = \{1, \ldots, n\}, \\
(x_i, i \in I_1, x_j^0, j \in J_1) \in a, & (x_i^0, i \in I_1, x_j, j \in J_1) \in b, \\
(y_i, i \in I_2, x_j^0, j \in J_2) \in a, & (x_i^0, i \in I_2, y_j, j \in J_2) \in b.
\end{array}$$

alors, d'après (C_2), on a alors $(x_1, \ldots, x_n) \sim (y_1, \ldots, y_n)$, ce qui définit bien $\oplus$.

Il ne reste plus qu'à suivre la démonstration précédente. On définit $\prec'$ sur $X/\sim$ tel que $a \prec' b \Leftrightarrow x \prec y$ pour un $x \in a$ et un $y \in b$, et on montre que $(X/\sim, \oplus, \prec')$ est un groupe archimédien. Afin d'obtenir la commutativité et le fait que le groupe est strictement ordonné, on remplacera la condition de Thomsen, qui n'est valable qu'en dimension 2, par l'axiome (C_2).

Puisque $(X/\sim, \oplus, \prec')$ est un groupe archimédien, il est possible d'utiliser le théorème de Hölder ; ainsi la fonction f du théorème 3.1 existe. On définit alors $(x_1^0, \ldots, x_n^0) \in e$,

$$u_i(x_i) = f(a) \text{ lorsque } (x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0) \in a \text{ et } u(x) = f(a) \text{ quand } x \in a.$$

Alors $u(x) < u(y) \Leftrightarrow f(x^\sim) < f(y^\sim) \Leftrightarrow x \prec y$. De plus,

$$\begin{aligned}
(x_1, \ldots, x_n)^\sim &= (x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0)^\sim \oplus (x_1^0, x_2 \ldots, x_n)^\sim \\
&= (x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0)^\sim \oplus [(x_1^0, x_2, x_3^0, \ldots, x_n^0)^\sim \oplus (x_1^0, x_2^0, x_3, \ldots, x_n)^\sim] \\
&= \cdots \\
&= (x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0)^\sim \oplus (x_1^0, x_2, x_3^0, \ldots, x_n^0)^\sim \oplus (x_1^0, x_2^0, x_3, x_4^0, \ldots, x_n^0)^\sim \\
&\quad \oplus \cdots \oplus (x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0, x_n)^\sim,
\end{aligned}$$

ce qui entraîne que $u(x) = u_1(x_1) + u_2(x_2) + \cdots + u_n(x_n)$. L'unicité de u provient de l'unicité de f à une transformation linéaire strictement positive près, et du choix arbitraire de e.

Il reste maintenant à montrer que l'axiome d'indépendance, conjugué avec la solvabilité non restreinte, implique l'axiome (C_2). La démonstration que je présente ici est une adaptation de celle de Fishburn (1970) ; dans cette dernière, Fishburn doit avoir recours à la solvabilité non restreinte par rapport à tous les composants du produit cartésien. Ici, je vais présenter une variante un peu plus générale puisqu'elle ne requiert que la solvabilité non restreinte par rapport à trois composants.

Remarquons que l'axiome (C_2) peut être écrit de la manière suivante

$$\forall x, y, z, a, b, c \in X \text{ tels que, } \forall i \in \{1, 2\}, (x_i, y_i, z_i) \text{ est une permutation de } (a_i, b_i, c_i), [x \precsim a \text{ et } y \precsim b] \Rightarrow z \succsim c$$

A chaque x_i, y_i, z_i correspond un unique a_i, b_i ou c_i. Examinons toutes les possibilités : si $x_i = a_i$, alors $y_i = b_i$ et $z_i = c_i$, ou bien $y_i = c_i$ et $z_i = b_i$; de manière similaire, si $x_i = b_i$, alors $y_i = a_i$ et $z_i = c_i$, ou bien $y_i = c_i$ et $z_i = a_i$; enfin, si $x_i = c_i$, alors $y_i = a_i$ et $z_i = b_i$, ou bien $y_i = b_i$ et $z_i = a_i$. En résumé, toutes les possibilités de permutations possibles de (x_1, y_1, z_1) et de (x_2, y_2, z_2) sont décrites dans la table 3.1.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
\multicolumn{2}{|c|}{\text{a}} & \multicolumn{2}{c|}{\text{b}} & \multicolumn{2}{c|}{\text{c}} \\
\hline
\text{b} & \text{c} & \text{a} & \text{c} & \text{a} & \text{b} \\
\hline
\text{c} & \text{b} & \text{c} & \text{a} & \text{b} & \text{a} \\
\hline
\end{array}\right)$$

TAB. 3.1: Ensemble des permutations possibles pour la condition (C_2).

Cette table suggère donc une décomposition de x, y et z en six ensembles d'indices — ensembles qui peuvent être vides éventuellement — que nous numérotons de 1 à 6 suivant l'ordre décrit dans la table ci-dessus. Alors (C_2) peut être écrite sous la forme suivante :

$$x_1x_2x_3x_4x_5x_6 \precsim x_1x_2y_3z_4y_5z_6 \tag{3.14}$$

$$\underbrace{y_1y_2y_3y_4y_5y_6 \precsim y_1z_2x_3x_4z_5y_6}_{\Downarrow} \tag{3.15}$$

$$z_1z_2z_3z_4z_5z_6 \succsim z_1y_2z_3y_4x_5x_6 \tag{3.16}$$

Maintenant, supposons que le premier ensemble contienne un indice correspondant à un composant vérifiant la solvabilité non restreinte. Alors il existe s_1 tel que

$$s_1x_2y_3x_4y_5x_6 \sim x_1x_2x_3x_4x_5x_6. \tag{3.17}$$

Donc, d'après l'axiome d'indépendance, $s_1y_2y_3y_4y_5x_6 \sim x_1y_2x_3y_4x_5x_6$. D'après (3.17) et (3.14), $s_1x_2y_3x_4y_5x_6 \precsim x_1x_2y_3z_4y_5z_6$. Mais, d'après l'indépendance, $s_1z_2x_3x_4z_5x_6 \precsim x_1z_2x_3z_4z_5z_6$. (3.15) et l'axiome d'indépendance impliquent que $s_1y_2y_3y_4y_5x_6 \precsim s_1z_2x_3x_4z_5x_6$, et, par transitivité, $x_1y_2x_3y_4x_5x_6 \precsim x_1z_2x_3z_4z_5z_6$. Par conséquent, en utilisant encore l'indépendance, nous concluons que $z_1y_2z_3y_4x_5x_6 \precsim z_1z_2z_3z_4z_5z_6$. Ainsi, dans ce cas, (3.14) et (3.15) entraînent (3.16). Un procédé similaire montrerait que c'est aussi vrai lorsque l'indice d'un composant solvable appartient au second et au sixième ensemble d'indices.

Supposons maintenant que l'indice d'un composant solvable appartienne au troisième ensemble. Puisque $\succsim$ est une relation totale, soit (3.16) est vérifiée, soit $z_1z_2z_3z_4z_5z_6 \prec z_1y_2z_3y_4x_5x_6$. Supposons que la seconde alternative soit la bonne. Par un procédé similaire à celui employé dans le paragraphe précédent, on montre facilement que cette alternative, conjugué avec (3.14) implique que (3.15) est fausse, d'où contradiction. C'est pourquoi (3.16) est impliquée par (3.14) et (3.15).

Si aucune de ces configurations n'a été rencontrée, alors tous les composants vérifiant la solvabilité non restreinte sont dans les groupes d'indices 4 et 5. Puisque, par hypothèse, ceux-ci sont au nombre de 3, soit le quatrième groupe possède au moins deux composants solvables, soit c'est le cinquième. On suppose maintenant que c'est le quatrième qui en a deux ; dans le cas contraire, la démonstration est tout à fait similaire.

Nous remplaçons ici l'ancienne notation x_4 par x_4x_4' afin de faire apparaître deux groupes de variables solvables. Avec cette nouvelle notation, on veut montrer que

$$x_1x_2x_3x_4x_4'x_5x_6 \precsim x_1x_2y_3z_4z_4'y_5z_6 \tag{3.18}$$

$$\underbrace{y_1y_2y_3y_4y_4'y_5y_6 \precsim y_1z_2x_3x_4x_4'z_5y_6}_{\Downarrow} \tag{3.19}$$

$$z_1z_2z_3z_4z_4'z_5z_6 \succsim z_1y_2z_3y_4y_4'x_5x_6 \tag{3.20}$$

Puisque le groupe $(4')$ contient l'indice d'un composant vérifiant la solvabilité non restreinte, il existe s_4' tel que $x_1x_2y_3y_4s_4'y_5x_6 \sim x_1x_2x_3x_4x_4'x_5x_6$. Donc, par transitivité, $x_1x_2y_3y_4s_4'y_5x_6 \precsim x_1x_2y_3z_4z_4'y_5z_6$, et, par l'axiome d'indépendance, $z_1z_2z_3y_4s_4'z_5x_6 \precsim z_1z_2z_3z_4z_4'z_5z_6$. Considérons maintenant les préférences (3.19) et $x_1x_2y_3y_4s_4'y_5x_6 \sim x_1x_2x_3x_4x_4'x_5x_6$. La configuration du groupe (4) est alors identique à celle qu'avait le groupe 3 dans les préférences (3.15) et (3.14) ; Or le groupe (4) contient encore une variable solvable. En utilisant les paragraphes précédents, on conclut que $z_1z_2z_3y_4s_4'z_5x_6 \succsim z_1y_2z_3y_4y_4'x_5x_6$. En conjuguant cette préférence et $z_1z_2z_3y_4s_4'z_5x_6 \precsim z_1z_2z_3z_4z_4'z_5z_6$ (que l'on avait trouvée plus haut), on obtient (3.16). ♦

Avant de prouver le théorème 3.4, nous devons d'abord préciser quelques notions algébriques, et introduire une variante du théorème de Hölder, plus appropriée que le théorème 3.1 pour la démonstration que nous décrivons.

Définition 3.5 (structure additive symétrique) *Soit $X = X_1 \times X_2$. Si $\succsim$ est un préordre large total, et si $(X_1, X_2, \succsim)$ vérifie l'axiome d'indépendance (axiome 2.2), la condition de Thomsen (axiome 2.3), la solvabilité non restreinte par rapport à tous les composants de X (axiome 3.4) et la propriété archimédienne (axiome 3.3), si au moins un composant est essentiel, si $\forall x_1, y_1 \in X_1$, $\exists\, x_2, y_2 \in X_2$ tels que $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$, et si $\forall x_2', y_2' \in X_2$, $\exists\, x_1', y_1' \in X_1$ tels que $(x_1', x_2') \sim (y_1', y_2')$, alors $(X_1, X_2, \succsim)$ est une structure additive symétrique.*

Définition 3.6 (structure additive symétrique et bornée) *Soit $(X_1, X_2, \succsim)$ une structure additive symétrique. Elle est bornée si et seulement si*

$$\exists\, \underline{x_1}, \overline{x_1} \in X_1 \text{ et } \underline{x_2}, \overline{x_2} \in X_2 \text{ tels que } (\underline{x_1}, \overline{x_2}) \sim (\overline{x_1}, \underline{x_2}) \text{ et } \overline{x_1} \succsim x_1 \succsim \underline{x_1} \text{ et } \overline{x_2} \succsim x_2 \succsim \underline{x_2}\ \forall (x_1, x_2) \in X.$$

De plus, on définit :

- $\forall x_1 \in X_1$, $\pi(x_1) \in X_2$ *la solution (unique à $\sim_2$ près) de* $(\underline{x_1}, \pi(x_1)) \sim (x_1, \underline{x_2})$;
- $B_1 = \{(x_1, y_1) \in X_1$ *tels que* $x_1, y_1 \succ_1 \underline{x_1}$ *et* $(\overline{x_1}, \underline{x_2}) \succsim (x_1, \pi(y_1))\}$;
- $\forall (x_1, y_1) \in B_1$, $x_1 \circ y_1$ *est la solution (unique à $\sim_1$ près) de* $((x_1 \circ y_1), \underline{x_2}) \sim (x_1, \pi(y_1))$.

Des définitions similaires sont employées pour X_2, avec $\alpha(x_2)$ jouant le rôle de $\pi(x_1)$.

L'interprétation géométrique de $\pi(\cdot)$, $\alpha(\cdot)$ et de $\circ$ nous est fournie par la figure 3.5. On comprend ainsi que connaissant un point $A = (x_1, \underline{x_2})$, $\pi(x_1)$ correspond à l'ordonnée du point de concours de la courbe d'indifférence passant par A et de l'axe des X_2.

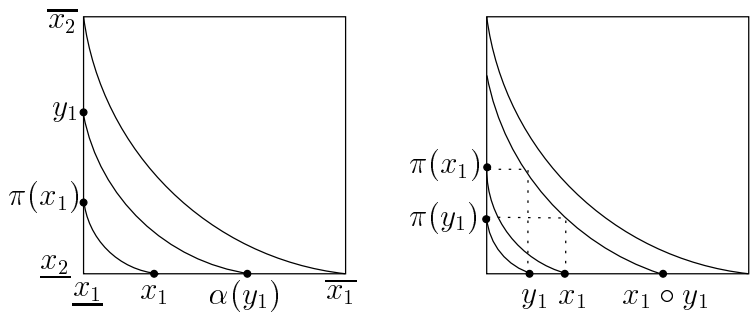


FIG. 3.5: Les opérateurs $\pi(\cdot)$, $\alpha(\cdot)$ et $\circ$.

Définition 3.7 (semi groupe local, positif, régulier, archimédien) *Soient A un ensemble non vide, $B \subset A \times A$, $\succsim$ une relation binaire sur A, et $\circ$ une opération binaire de B dans A. $(A, \succsim, B, \circ)$ est un semi groupe local, positif, régulier et archimédien si et seulement si, pour tous $a, b, c, d \in A$, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *$(A, \succsim)$ est un ensemble totalement ordonné.*
2. *Si $(a, b) \in B$, $a \succsim c$ et $b \succsim d$, alors $(c, d) \in B$.*
3. *Si $(c, a) \in B$ et $a \succsim b$, alors $c \circ a \succsim c \circ b$.*
4. *Si $(a, c) \in B$ et $a \succsim b$, alors $a \circ c \succsim b \circ c$.*
5. *$(a, b) \in B$ et $(a \circ b, c) \in B$ ssi $(b, c) \in B$ et $(a, b \circ c) \in B$; et, quand les deux conditions sont vérifiées, $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.*
6. *Si $(a, b) \in B$, alors $a \circ b \succ a$.*
7. *Si $a \succ b$, alors il existe $c \in A$ tel que $(b, c) \in B$ et $a \succsim b \circ c$.*
8. *Pour tout $a \in A$, soit $N_a \subset \mathbb{N}$ tel que $1 \in N_a$ et $1a = a$; si $n - 1 \in N_a$ et $((n-1)a, a) \in B$, où $na = ((n-1)a) \circ a$, alors $n \in N_a$; si $n - 1 \in N_a$ et $((n-1)a, a) \notin B$, alors, pour tout $m \geq n$, $m \notin B$. Alors $\{n | n \in N_a$ et $b \succ na\}$ est un ensemble fini. (condition archimédienne).*

Théorème 3.6 (variante du théorème de Hölder) *Soit $(A, \succsim, B, \circ)$ un semi groupe local, positif, régulier et archimédien. Alors il existe une fonction f de A dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tous $a, b \in A$,*

$$a \succsim b \Leftrightarrow f(a) \geq f(b),$$

$$\textit{Si } (a, b) \in B, \textit{ alors } f(a \circ b) = f(a) + f(b).$$

De plus, si g vérifie aussi ces deux propriétés, alors il existe $c > 0$ tel que $g = c\,;f$.

Démonstration du théorème 3.6 : Je ne vais pas donner ici la démonstration de ce théorème car elle suit exactement la démonstration du théorème de Hölder présentée page 45. Le principe consiste, à partir de l'hypothèse archimédienne, à encadrer les valeurs de $f(\cdot)$ par des fractions rationnelles de telle sorte que l'écart entre le majorant et le minorant devienne aussi petit que l'on veut. Le lecteur intéressé par une démonstration précise de ce théorème se réfèrera à Krantz, Luce, Suppes, et Tversky (1971), pages 48–52. ♦

Démonstration du théorème 3.4 : J'ai adapté ici la démonstration décrite dans Krantz, Luce, Suppes, et Tversky (1971), elle-même due à Holman (1971). J'ai jugé bon de la reproduire ici car, dans Krantz, Luce, Suppes, et Tversky (1971), elle est disséminée dans trois chapitres différents, ce qui la rend particulièrement difficile à comprendre.

Le principe de la démonstration est le suivant : on commence par supposer que $(X_1, X_2, \succsim)$ est une structure symétrique et bornée. Si $B_1 = \emptyset$, d'après la figure 3.5, cela signifie qu'il n'existe aucun $x_1 \in X_1$ tel que $\overline{x_1} \succ_1 x_1 \succ \underline{x_1}$. Dans ce cas, $f_1(\overline{x_1}) = f_2(\overline{x_2}) = 1$, $f_1(\underline{x_1}) = f_2(\underline{x_2}) = 0$, est une représentation additive de $\succsim$. Si $B_1 \neq \emptyset$, alors, on va montrer que $(X_1/{\sim_1}, \succsim_1^*, B_1/{\sim_1}, \circ)$ est un semi groupe local, positif, régulier et archimédien, où $X_1/{\sim_1}$ représente l'ensemble des classes d'équivalence de X_1 par rapport à $\sim_1$, où, pour $x_1 \in X_1$, ${x_1}^\sim$ est la classe d'équivalence contenant x_1, et où ${x_1}^\sim \succsim_1^* {y_1}^\sim$ est équivalent à $x_1 \succsim_1 y_1$; ainsi, on pourra utiliser le théorème 3.6.

1/ $(X_1/{\sim_1}, \succsim_1^*)$ est un ensemble totalement ordonné puisque $\succsim_1$ est un préordre large total. $\circ$ est une opération bien définie sur $B_1/{\sim_1}$; en effet, pour tout $x_1 \in X_1$, $(\underline{x_1}, \overline{x_2}) \sim (\overline{x_1}, \underline{x_2}) \succsim (x_1, \underline{x_2}) \succsim (\underline{x_1}, \underline{x_2})$, ce qui implique, par solvabilité restreinte par rapport au deuxième composant de X, l'existence de $\pi(x_1)$. Ainsi, pour tout $(x_1, y_1)^\sim \in B_1/{\sim_1}$, $(\overline{x_1}, \underline{x_2}) \succsim (x_1, \pi(y_1)) \succsim (x_1, \underline{x_2})$, ce qui garantit l'existence de $(x_1 \circ y_1)$, et donc, aussi, de $(x_1 \circ y_1)^\sim$. En outre, $(x_1, \pi(y_1)) \sim (y_1, \pi(x_1))$; en effet, par définition de $\pi(\cdot)$, $(\underline{x_1}, \pi(y_1)) \sim (y_1, \underline{x_1})$ et $(x_1, \underline{x_1}) \sim (\underline{x_1}, \pi(x_1))$. En utilisant la condition de Thomsen, on obtient donc $(x_1, \pi(y_1)) \sim (y_1, \pi(x_1))$. Or, par définition de $\circ$, $(x_1 \circ y_1, \underline{x_2}) \sim (x_1, \pi(y_1))$ et $(y_1 \circ x_1, \underline{x_2}) \sim (y_1, \pi(x_1))$. Donc $x_1 \circ y_1 \sim_1 y_1 \circ x_1$. Par conséquent, $(x_1 \circ y_1)^\sim \sim_1^* (y_1 \circ x_1)^\sim$.

2/ Supposons que $(x_1, y_1) \in B_1$, $x_1 \succsim_1 z_1$ et $y_1 \succsim_1 t_1$. Alors on a $(\underline{x_1}, \pi(y_1)) \sim (y_1, \underline{x_2}) \succsim (t_1, \underline{x_2}) \sim (\underline{x_1}, \pi(t_1))$, ce qui implique, d'après l'axiome d'indépendance, $(x_1, \pi(y_1)) \succsim (x_1, \pi(t_1))$. Or $x_1 \succsim_1 z_1$ et, puisque $(x_1, y_1) \in B_1$, $(\overline{x_1}, \underline{x_2}) \succsim$

$(x_1, \pi(y_1))$; donc $(\overline{x_1}, \underline{x_2}) \succsim (z_1, \pi(t_1))$. Par conséquent, $(z_1, t_1) \in B_1$. Donc, si $(x_1, y_1)^\sim \in B_1/\sim_1$, si $x_1{}^\sim \succsim_1^* z_1{}^\sim$ et si $y_1{}^\sim \succsim_1^* t_1{}^\sim$, alors $(z_1, t_1)^\sim \in B_1/\sim_1$.

4/ Supposons maintenant que $(x_1, z_1) \in B_1$ et $x_1 \succsim_1 y_1$. D'après l'indépendance, on a alors $(x_1, \pi(z_1)) \succsim (y_1, \pi(z_1)) \sim (z_1, \pi(y_1))$. Autrement dit, $(z_1, y_1) \in B_1$ et $x_1 \circ z_1 \succsim_1 y_1 \circ z_1$. Par conséquent, $(x_1 \circ z_1)^\sim \succsim_1^* (y_1 \circ z_1)^\sim$.

3/ De même, $(z_1, x_1)^\sim \in B_1/\sim_1$ implique que $(z_1 \circ x_1)^\sim \succsim_1^* (z_1 \circ y_1)^\sim$.

6/ Supposons que $(x_1, y_1) \in B_1$. Par hypothèse, on a donc $y_1 \succ \underline{x_1}$, et donc, $\pi(y_1) \succ \underline{x_2}$. Par conséquent, $(x_1 \circ y_1, \underline{x_2}) \sim (x_1, \pi(y_1)) \succ (x_1, \underline{x_2})$. Donc $x_1 \circ y_1 \succ_1 x_1$.

5/ Supposons que $(x_1, y_1), (x_1 \circ y_1, z_1) \in B_1 \times B_1$. D'après ce qui précède, $(\overline{x_1}, \underline{x_2}) \succsim (x_1 \circ y_1, \pi(z_1)) \succsim (y_1, \pi(z_1))$; donc $(y_1, z_1) \in B_1$. D'après $(y_1, \pi(x_1)) \sim (x_1 \circ y_1, \underline{x_2})$, $(y_1 \circ z_1, \underline{x_2}) \sim (y_1, \pi(z_1))$ et la condition de Thomsen, on a $(y_1 \circ z_1, \pi(x_1)) \sim (x_1 \circ y_1, \pi(z_1))$. Par conséquent, puisque $\circ$ est symétrique, $(\overline{x_1}, \underline{x_2}) \succsim (x_1 \circ y_1, \pi(z_1)) \sim (y_1 \circ z_1, \pi(x_1)) \sim (x_1, \pi(y_1 \circ z_1))$. Donc $(x_1, y_1 \circ z_1) \in B_1$. De plus, $(x_1 \circ (y_1 \circ z_1), \underline{x_1}) \sim (x_1, \pi(y_1 \circ z_1)) \sim (y_1 \circ z_1, \pi(x_1)) \sim (x_1 \circ y_1, \pi(z_1)) \sim ((x_1 \circ y_1) \circ z_1, \underline{x_2})$. Donc $x_1 \circ (y_1 \circ z_1) \sim_1 (x_1 \circ y_1) \circ z_1$. Par conséquent, $(x_1 \circ (y_1 \circ z_1))^\sim \sim_1^* ((x_1 \circ y_1) \circ z_1)^\sim$.

7/ Supposons que $x_1 \succ_1 y_1$. Puisque $(x_1, \pi(y_1)) \succ (x_1, \underline{x_2}) \succsim (y_1, \underline{x_2}) \sim (\underline{x_1}, \pi(y_1))$, la solvabilité restreinte nous assure l'existence de z_1 tel que $(x_1, \underline{x_2}) \sim (z_1, \pi(y_1)) \sim (y_1, \pi(z_1)) \sim (y_1 \circ z_1, \underline{x_2})$. D'où $y_1 \circ z_1 \sim_1 x_1$, ou encore $(y_1 \circ z_1)^\sim \sim_1^* x_1{}^\sim$.

8/ Enfin, $\{n | n \in N_x \text{ et } y_1 \succ_1 nx_1\}$ constitue une séquence standard, bornée. Elle est donc finie, d'après l'hypothèse archimédienne.

Ainsi, toutes les conditions d'application du théorème 3.6 sont réunies. Il existe donc une représentation g_1 pour $(X_1/\sim_1, \succsim_1^*, B_1/\sim_1, \circ)$. Soit f_1 la fonction définie sur X_1 telle que $f(x_1) = g_1(x_1{}^\sim)$; alors f_1 est une représentation pour $(X_1, \succsim_1, B_1, \circ)$. Pour $x_2 \in X_2$, on choisit $\alpha(x_2)$, avec $(\alpha(x_2), \underline{x_2}) \sim (\underline{x_1}, x_2)$, et on définit $f_2(x_2) = f_1[\alpha(x_2)]$. Or, si $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \precsim (\overline{x_1}, \underline{x_2})$, alors $(x_1, x_2) \succsim (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 \circ \alpha(x_2) \succsim_1 y_1 \circ \alpha(y_2)$; en effet, $(\underline{x_1}, x_2) \sim (\alpha(x_2), \underline{x_2}) \sim (\underline{x_1}, \pi[\alpha(x_2)])$, ce qui donne, par indépendance, $(x_1, x_2) \sim (x_1, \pi[\alpha(x_2)]) \sim (x_1 \circ \alpha(x_2), \underline{x_2})$. Par conséquent, suivant la représentabilité de f_1, pour tous $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \precsim (\overline{x_1}, \underline{x_2})$, $(x_1, x_2) \succsim (y_1, y_2) \Leftrightarrow f_1(x_1) + f_2(x_2) \geq f_1(y_1) + f_2(y_2)$.

Pour montrer que l'additivité est vérifiée sur toute la structure, il suffit de considérer le cas où $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \succsim (\overline{x_1}, \underline{x_2})$. Supposons que $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$, et, sans perte de généralité, que $y_1 \succsim_1 x_1$ et $x_2 \succsim_2 y_2$. Puisque $(y_1, \overline{x_2}) \succsim (\underline{x_1}, \overline{x_2}) \sim (\overline{x_1}, \underline{x_2}) \succsim (y_1, \underline{x_2})$, il existe z_2 tel que $(y_1, z_2) \sim (\underline{x_1}, \overline{x_2})$. De même, il existe z_1 tel que $(z_1, x_2) \sim (\underline{x_1}, \overline{x_2})$. D'après la condition de Thomsen, $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ et $(y_1, z_2) \sim (z_1, x_2)$, on a $(x_1, z_2) \sim (z_1, y_2)$. D'après l'axiome d'indépendance, $(\underline{x_1}, \overline{x_2}) \succsim (x_1, z_2), (z_1, y_2)$. Donc, d'après ce qui précède,

$$f_1(y_1) + f_2(z_2) = f_1(z_1) + f_2(x_2) \text{ et } f_1(x_1) + f_2(z_2) = f_1(z_1) + f_2(y_2) \ ;$$

d'où

$$f_1(x_1) + f_2(x_2) = f_1(y_1) + f_2(y_2).$$

Si $(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$, alors, par solvabilité restreinte, il existe t_1 tel que $x_1 \succ_1 t_1$ et $(t_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$. Alors,

$$f_1(x_1) + f_2(x_2) > f_1(t_1) + f_2(x_2) = f_1(y_1) + f_2(y_2).$$

Il faut maintenant abandonner l'hypothèse que $(X_1, X_2, \succsim)$ est borné et symétrique. D'après l'essentialité et la solvabilité restreinte, il existe $\overline{x_1} \succ_1 \underline{x_1}$ et $\overline{x_2} \succ_2 \underline{x_2}$ tels que $(\overline{x_1}, \underline{x_2}) \sim (\underline{x_1}, \overline{x_2})$. On a déjà montré que ceci détermine les bornes d'une structure symétrique bornée. Il suffit donc de montrer que la représentation additive définie sur chacune de ces sous-structures symétriques bornées peut être étendue à l'ensemble de $(X_1, X_2, \succsim)$.

Soient $\overline{x_1}, \underline{x_1}, \overline{x_2}, \underline{x_2}$, les bornes d'une sous-structure symétrique bornée de l'ensemble $(X, \succsim)$. Si $x_1 \succ_1 \overline{x_1}$ (resp. $\underline{x_1} \succ_1 x_1$), alors il existe une séquence standard décroissante (resp. croissante), dénotée $x_1^0 = x_1, x_1^{-1}, \ldots, x_1^{-p}$ (resp. $x_1^0 = x_1, x_1^1, \ldots, x_1^m$), telle que $(x_1^{-i}, \underline{x_2}) \sim (x_1^{-i-1}, \overline{x_2})$ (resp. $(x_1^{i+1}, \underline{x_2}) \sim (x_1^i, \overline{x_2})$) et $\overline{x_1} \succsim_1 x_1^{-p} \succ_1 \underline{x_1}$ (resp. $\overline{x_1} \succsim_1 x_1^m \succ_1 \underline{x_1}$) ; p (resp. m) est alors unique. Mais alors, on peut étendre une représentation f_1, f_2 sur une sous-structure bornée symétrique en normalisant $f_1(\overline{x_1}) = f_2(\overline{x_2}) = 1$, $f_1(\underline{x_1}) = f_2(\underline{x_2}) = 0$, et en imposant $f_1(x_1) = p + f_1(x_1^{-p})$ ou $f_1(x_1) = -m + f_1(x_1^m)$, suivant que $x_1 \succ_1 \overline{x_1}$ ou $\underline{x_1} \succ_1 x_1$. f_2 s'étend de la même manière. Ces extensions sont clairement nécessaires si l'on veut obtenir une représentation additive ; cela prouve donc l'unicité décrite dans l'énoncé du théorème. Il reste maintenant à montrer que les fonctions ainsi étendues sont des représentations additives.

Tout d'abord, il est facile de prouver que les f_i représentent $\succsim_i$. Il ne reste donc plus qu'à montrer que $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ implique $f_1(x_1) + f_2(x_2) = f_1(y_1) + f_2(y_2)$ (par solvabilité restreinte, on peut se passer d'examiner des préférences strictes).

Supposons donc que $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$, avec $\overline{x_2} \succsim_2 x_2, y_2 \succsim_2 \underline{x_2}$. Supposons que $x_1 \succ_1 y_1$ et $y_1 \succ_1 \overline{x_1}$; la démonstration est similaire dans les autres cas. Puisque $x_1 \succ_1 \overline{x_1}$, on peut construire la séquence standard décrite plus haut. D'abord, supposons que le n de cette séquence soit le même pour x_1 et y_1. Résolvons les indifférences suivantes : $(x_1', \overline{x_2}) \sim (x_1, x_2)$ et $(y_1', \overline{x_2}) \sim (y_1, y_2)$. D'après la condition de Thomsen, $(x_1', \underline{x_2}) \sim (x_1^{-1}, x_2)$ et $(y_1', x_2) \sim (y_1^{-1}, y_2)$ impliquent $(x_1^{-1}, x_2) \sim (y_1^{-1}, y_2)$. Par récurrence, on obtient $(x_1^{-p}, x_2) \sim (y_1^{-p}, y_2)$, et $f_1(x_1) + f_2(x_2) = f_1(y_1) + f_2(y_2)$. Si les entiers p sont différents pour x_1 et y_1, on construit une séquence standard $x_1^0, x_1^1, \ldots, x_1^p$ avec $x_1^0 = \underline{x_1}$, $x_1^1 = \overline{x_1}$, $x_1 \succ_1 x_1^p \succsim_1 y_1$ et $(x_1^p, \overline{x_1}) \succsim (x_1, x_2)$. On résout alors $(x_1^p, x_2') \sim (x_1, x_2)$. Nécessairement $y_1 \succ_1 x_1^{p-1}$. D'après ce qui précède, on a alors $(x_1^{-p}, x_2) \sim (x_1^0, x_2')$ et $(y_1^{-p+1}, y_2) \sim (x_1^1, x_2')$.

Par conséquent, il existe une représentation additive sur l'ensemble $X_1 \times \{p : \overline{x_2} \succsim_2 p \succsim_2 \underline{x_2}\}$, pour $\overline{x_2} \succ_2 \underline{x_2}$ tel qu'il existe $\overline{x_1}, \underline{x_1}$ tels que $(\underline{x_1}, \overline{x_2}) \sim (\overline{x_1}, \underline{x_2})$. Une argumentation symétrique s'applique pour X_2 et $\overline{x_1}, \underline{x_1}$. Remarquons que l'axiome d'élimination (C_3) est vérifié sur $(X_1, X_2, \succsim)$, puisqu'on peut exhiber des sous-structures symétriques bornées de taille arbitraire et possédant une représentation additive. Nous utilisons maintenant (C_3) pour conclure cette démonstration.

Si $x_1 \succ_1 \overline{x_1}$ et $\underline{x_2} \succ_2 x_2$, nous utilisons (C_3) pour obtenir $(x_1, x_2) \sim (x_1^{-1}, x_2^1)$, et, par définition, $f_1(x_1) + f_2(x_2) = f_1(x_1^{-1}) + f_2(x_2^1)$. On continue ainsi jusqu'à ce que $\overline{x_1} \succsim_1 (x_1^{-p})$ ou $(x_2^m) \succsim_2 \underline{x_2}$. Ainsi, si $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$, on peut se restreindre aux deux

cas suivants : $(x_1, y_1 \succsim_1 \underline{x_1}$ et $x_2, y_2 \succsim_2 \underline{x_2})$ ou bien $(\overline{x_1} \succsim_1 x_1, y_1$ et $\overline{x_2} \succsim_2 x_2, y_2)$. Par symétrie, on ne considère que le premier cas. D'après ce qui précède, il suffit seulement d'étudier le cas où $x_1 \succ_1 \overline{x_1}$ et $y_2 \succ_2 \overline{x_2}$. D'après (C_3), $(x_1^{-1}, y_2) \sim (x_1, y_2^{-1})$, d'où, d'après la condition de Thomsen, $(x_1^{-1}, x_2) \sim (y_1, y_2^{-1})$. On peut continuer ainsi jusqu'à $(x_1^{-i}, x_2^{-j}) \sim (y_1^{-m}, y_2^{-p})$, où $0 \leq i, j, m, p$, $i + j = m + p$, et au moins trois des quatre éléments x_1^{-i}, y_1^{-m}, x_2^{-j}, y_2^{-p} sont entre $\overline{x_1}, \underline{x_1}$ ou $\overline{x_2}, \underline{x_2}$. Ainsi,

$$f_1(x_1^{-i}) + f_2(x_2^{-j}) = f_1(y_1^{-m}) + f_2(y_2^{-p}).$$

♦

Avant de prouver le théorème 3.5, nous introduisons un lemme qui permet de considérer, non plus $\prod_{i=1}^n X_i$ dans son ensemble mais seulement un ensemble de produits cartésiens de deux composants.

Lemme 3.1 *Supposons que $n \geq 3$ et que $(X, \succsim)$ vérifie l'indépendance (axiome 2.2), l'axiome archimédien (axiome 3.3), la solvabilité restreinte par rapport à tous les composants (axiome 3.4), l'essentialité (axiome 3.5). Alors, pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, la relation $\succsim_{ij}$ satisfait la condition d'élimination (C_2).*

Démonstration du lemme 3.1 : Supposons que, pour $x_i, y_i, z_i \in X_i$ et $x_j, y_j, z_j \in X_j$, $i \neq j$, $(x_i, z_j) \succsim_{ij} (z_i, y_j)$ et $(z_i, x_j) \succsim_{ij} (y_i, z_j)$. Nous allons montrer qu'alors $(x_i, x_j) \succsim_{ij} (y_i, y_j)$. Puisque la conclusion est évidente d'après l'indépendance lorsque $x_i \succsim_i y_i$ et $x_j \succsim_j y_j$, nous supposons que soit $x_i \succsim_i y_i$ et $y_j \succ_j x_j$, soit $y_i \succ_i x_i$ et $x_j \succsim_j y_j$. Nous ne donnons la démonstration que dans le premier cas, le second étant similaire.

Si, pour tout couple d'éléments distincts $u_i, v_i \in \{x_i, y_i, z_i\}$, il existe $x_k, y_k \in X_k$, $k \neq i, j$, tel que $(u_i, x_k) \sim_{ik} (v_i, y_k)$, ou si, pour tout couple d'éléments distincts $u_j, v_j \in \{x_j, y_j, z_j\}$, il existe $x'_k, y'_k \in X_k$, $k \neq i, j$, tels que $(u_j, x'_k) \sim_{jk} (v_j, y'_k)$, alors, la condition de Thomsen est facilement démontrable. Nous le montrons pour deux cas, les quatre autres étant similaires.

Premièrement, supposons que $u_i = x_i$ et $v_i = z_i$, c'est-à-dire que $(x_i, x_k) \sim_{ik} (z_i, y_k)$; alors, par hypothèse et d'après l'axiome d'indépendance, $(z_i, z_j, y_k) \sim_{ijk} (x_i, z_j, x_k) \succsim_{ijk} (z_i, y_j, x_k)$, ce qui implique que $(z_j, y_k) \succsim_{jk} (y_j, x_k)$, entraînant ainsi $(x_i, x_j, x_k) \sim_{ijk} (z_i, x_j, y_k) \succsim_{ijk} (y_i, z_j, y_k) \succsim_{ijk} (y_i, y_j, x_k)$. Donc, par indépendance, $(x_i, x_j) \succsim_{ij} (y_i, y_j)$.

Dans le deuxième cas, supposons que $(x_j, x'_k) \sim_{jk} (y_j, y'_k)$. Alors, $(x_i, z_j, y'_k) \succsim_{ijk} (z_i, y_j, y'_k) \sim_{ijk} (z_i, x_j, x'_k) \succsim_{ijk} (y_i, z_j, x'_k)$, ce qui implique que $(x_i, y'_k) \succsim_{ik} (y_i, x'_k)$, d'où $(x_i, x_j, y'_k) \succsim_{ijk} (y_i, x_j, x'_k) \sim_{ijk} (y_i, y_j, y'_k)$, et, donc $(x_i, x_j) \succsim_{ij} (y_i, y_j)$.

Donc, maintenant, nous supposons qu'aucun élément de X_k similaire à ceux décrits ci-dessus n'existe. Par solvabilité restreinte, soit $(x_i, x_k) \succ_{ik} (y_i, y_k)$ pour tous x_k, y_k, soit $(y_i, y_k) \succ_{ik} (x_i, x_k)$. Puisque nous avons supposé que $x_i \succsim_i y_i$ et $(x_i, x_k) \succsim_{ik} (y_i, x_k)$, la première alternative doit être la bonne. De la même manière, pour tous x_k, y_k, $(y_j, x_k) \succ_{jk} (x_j, y_k)$. Puisque X_k est essentiel, il existe x_k, y_k tels que $x_k \succ_k y_k$.

Supposons que $\{x_i^0, \ldots, x_i^p\}$ et $\{y_j^0, \ldots, y_j^p\}$ soient des séquences standards relatives à x_k, y_k et telles que $x_i^0 = x_i$ et $y_j^0 = y_j$. Alors, pour $0 \leq l < p$ et $0 < m \leq p$,

on a $(x_i^l, y_j^m, x_k) \sim_{ijk} (x_i^l, y_j^{m-1}, y_k) \sim_{ijk} (x_i^{l+1}, y_j^{m-1}, x_k)$, de telle sorte que $\{x_i^l\}$ et $\{y_j^m\}$ sont duales. Supposons qu'on a construit les séquences jusqu'à x_i^{p-1} et y_j^{p-1}, pour $p \geq 1$. Si $(x_i^{p-1}, y_k) \succ_{ik} (y_i, x_k)$, alors, par solvabilité restreinte, il existe x_i^p tel que $(x_i^p, x_k) \sim_{ik} (x_i^{p-1}, y_k)$. Maintenant, si $(x_j, x_k) \succsim_{jk} (y_j^{p-1}, y_k)$, on a $(x_i, x_j, x_k) = (x_i^0, x_j, x_k) \succsim_{ijk} (x_i^0, y_j^{p-1}, y_k) \sim_{ijk} (x_i^{p-1}, y_j^0, y_k) \succ_{ijk} (y_i, y_j^0, x_k) = (y_i, y_j, x_k)$, et, donc $(x_i, x_j) \succsim_{ij} (y_i, y_j)$. Supposons maintenant que $(y_j^{p-1}, y_k) \succ_{jk} (x_j, x_k)$, alors, par solvabilité restreinte, il existe y_j^p.

D'après la propriété archimédienne, cette construction est finie, et il existe $p \geq 1$ tel que $(x_i^{p-1}, y_k) \succ_{ik} (y_i, x_k) \succsim_{ik} (x_i^p, y_k)$. On remarque que si $(x_i^l, z_j) \succsim_{ij} (z_i, y_j^l)$, alors, puisque $(x_i^{l+1}, y_j^l) \sim_{ij} (x_i^l, y_j^{l+1})$ et $(x_i^{l+1}, x_k) \sim_{ik} (x_i^l, y_k)$, la première partie de la démonstration nous donne $(x_i^{l+1}, z_j) \succsim_{ij} (z_i, y_j^{l+1})$. Puisque ceci est vrai pour $l = 0$, par hypothèse, c'est encore vrai jusqu'à $(x_i^p, z_j) \succsim_{ij} (z_i, y_j^p)$. Mais alors, puisque $(z_i, x_j) \succsim_{ij} (y_i, z_j)$, d'après la première partie de la démonstration, on a $(x_i^p, x_j) \succsim_{ij} (y_i, y_j^p)$.

Puisque $(x_i^p, x_k) \succ_{ik} (y_i, x_k) \succsim_{ik} (x_i^p, y_k)$, il existe $z_k \in X_k$ tel que $(x_i^p, z_k) \sim_{ik} (y_i, x_k)$, et la première partie de la démonstration peut alors s'appliquer. A partir de ce moment, on parcourt la séquence standard en sens inverse : $(x_i^{l+1}, x_j) \succsim_{ij} (y_i, y_j^{l+1})$ et $(x_i^l, y_j^{l+1}) \sim_{ij} (x_i^{l+1}, y_j^l)$ impliquent que $(x_i^l, x_j) \succsim_{ij} (y_i, y_j^l)$. Sachant que c'est vrai pour $l + 1 = p$, par récurrence sur l, ce doit aussi être vrai pour $l = 0$; et donc $(x_i, x_j) \succsim_{ij} (y_i, y_j)$. ♦

Démonstration du théorème 3.5 : Je vais appliquer ici une démonstration tirée de Krantz, Luce, Suppes, et Tversky (1971). Sans perte de généralité, on peut supposer que tous les composants sont essentiels. On commence par montrer qu'il existe une sous-structure symétrique sur laquelle le théorème est vérifié. Soient $x_i^0, x_i^1 \in X_i$ et $x_j^0, x_j^1 \in X_j$ tels que $x_i^1 \succ_i x_i^0$ et $x_j^1 \succ_j x_j^0$. Si $(x_i^0, x_j^1) \sim_{ij} (x_i^1, x_j^0)$, nous acceptons ces éléments dans notre sous-structure. Si $(x_i^1, x_j^0) \succ_{ij} (x_i^0, x_j^1)$, alors, puisque $(x_i^0, x_j^1) \succ_{ij} (x_i^0, x_j^0)$, par solvabilité restreinte, il existe $x_i^2 \in X_i$ tel que $x_i^2 \succ_i x_i^0$ et $(x_i^2, x_j^0) \sim_{ij} (x_i^0, x_j^1)$. Si $(x_i^0, x_j^1) \succ_{ij} (x_i^1, x_j^0)$, alors, un procédé similaire montre qu'il existe $x_j^2 \in X_j$ tel que $x_j^1 \succ_j x_j^2$ et $(x_i^1, x_j^2) \sim_{ij} (x_i^0, x_j^1)$. Dans tous les cas, on a exhibé une indifférence — cela correspond à la courbe d'indifférence allant du coin supérieur gauche de notre sous-structure jusqu'au coin inférieur droit (dans la figure 3.5). Pour simplifier la notation du reste de la démonstration, on supposera dans la suite que l'on a exhibé $x_i^0, x_i^1 \in X_i$ et $x_j^0, x_j^1 \in X_j$ tels que $x_i^1 \succ_i x_i^0$, $x_j^1 \succ_j x_j^0$ et $(x_i^0, x_j^1) \sim_{ij} (x_i^1, x_j^0)$.

On peut aussi construire $x_k^1, x_k^0 \in X_k$ tels que $(x_j^0, x_k^1) \sim_{jk} (x_j^1, x_k^0)$. D'après l'axiome d'indépendance, $(x_i^0, x_k^1) \sim_{ik} (x_i^1, x_k^0)$. On peut continuer par récurrence, et il est facile de voir que chaque sous-structure à deux composants bornée par ces éléments est symétrique. D'après le lemme 3.1, $(X_i, X_j, \succsim_{ij})$ vérifie les conditions d'application du théorème 3.4. Par conséquent, $(X_i, X_j, \succsim_{ij})$ admet une représentation additive $f_i + f_j$.

En fait, on peut sélectionner des fonctions $f_1, \ldots, f_n$ telles que toute paire de fonctions est une utilité additive sur une sous-structure symétrique. Pour montrer cela, il suffit de montrer que, pour tout triplet (i, j, k) tel que $i \neq j$, $j \neq k$ et $i \neq k$, les opérations π, α et $\circ$ — comme définies dans la définition 3.6 — induites sur j par i et k sont identiques.

D'après l'indépendance, quel que soit $x_j \in X_j$, $(\underline{x_i}, \underline{x_j}, \pi_k(x_j)) \sim_{ijk} (\underline{x_i}, x_j, \underline{a_k}) \sim_{ijk} (\pi_i(x_j), \underline{x_j}, \underline{a_k})$. Donc, encore d'après l'indépendance, pour tous $x_j, y_j \in X_j$, $(\pi_i(y_j), x_j \circ_k y_j, \underline{a_k}) \sim_{ijk} (\pi_i(y_j), x_j, \pi_k(y_j)) \sim_{ijk} (\underline{x_i}, x_j \circ_i y_j, \pi_k(y_j)) \sim_{ijk} (\pi_i(y_j), x_j \circ_i y_j, \underline{a_k})$. Par conséquent, $x_j \circ_k y_j \sim_j x_j \circ_i y_j$. Ainsi, si f_i, f_j et g_j, g_k sont des représentations additives, d'après l'unicité décrite dans le théorème 3.6, il existe une transformation linéaire permettant de passer de g_j, g_k à f_j, f_k. Il n'est pas difficile de voir que $f_i + f_k$ est aussi une représentation additive.

Supposons que $x_i, y_i \in X_i$, $x_j, y_j \in X_j$ et $x_k, y_k \in X_k$ appartiennent tous à la sous-structure symétrique et que $(x_i, x_j, x_k) \succsim_{ijk} (y_i, y_j, y_k)$, alors on montre que

$$f_i(x_i) + f_j(x_j) + f_k(x_k) \geq f_i(y_i) + f_j(y_j) + f_k(y_k).$$

C'est évident lorsque $x_i \succsim_i y_i$, $x_j \succsim_j y_j$ et $x_k \succsim_k y_k$; donc, nous supposons qu'au moins une de ces inégalités n'est pas vérifiée. Sans perte de généralité, on peut supposer que

$$(1) \quad x_i \succsim_i y_i,\ x_j \succsim_j y_j,\ y_k \succ_k x_k \qquad \text{ou} \qquad (2) \quad x_i \succsim_i y_i,\ y_j \succ_j x_j,\ y_k \succ_k x_k.$$

(1) Si $(x_i, x_k) \succsim_{ik} (y_i, y_k)$, alors $f_i(x_i)+f_k(x_k) \geq f_i(y_i)+f_k(y_k)$. Or $x_j \succsim_j y_j$ implique que $f_j(x_j) \geq f_j(y_j)$. Donc $f_i(x_i) + f_j(x_j) + f_k(x_k) \geq f_i(y_i) + f_j(y_j) + f_k(y_k)$. Sinon, $(y_i, y_k) \succ_{ik} (x_i, x_k)$. Or on sait que $(x_i, y_k) \succsim_{ik} (y_i, y_k)$. Donc, par solvabilité restreinte, il existe $z_k \in X_k$ tel que $(y_i, y_k) \sim_{ik} (x_i, z_k)$. Ainsi, $(x_i, x_j, x_k) \succsim_{ijk} (y_i, y_j, y_k) \sim_{ijk} (x_i, y_j, z_k)$, et, donc, $(x_j, x_k) \succsim_{jk} (y_j, z_k)$, ce qui entraîne $f_j(x_j) + f_k(x_k) \geq f_j(y_j) + f_k(z_k)$. A partir de $(x_i, z_k) \sim_{ik} (y_i, y_k)$, on a $f_i(x_i) + f_k(z_k) = f_i(y_i) + f_k(y_k)$. En additionnant les deux dernières équations, et en soustrayant $f_k(z_k)$, on obtient $f_i(x_i) + f_j(x_j) + f_k(x_k) \geq f_i(y_i) + f_j(y_j) + f_k(y_k)$.

(2) $y_j \succ_j x_j$ et $y_k \succ_k x_k$ impliquent que $(x_i, x_j, y_k) \succ_{ijk} (x_i, x_j, x_k) \succsim_{ijk} (y_i, y_j, y_k) \succ_{ijk} (y_i, x_j, y_k)$. Donc, par solvabilité restreinte, il existe $z_i \in X_i$ tel que $(z_i, x_j, y_k) \sim_{ijk} (x_i, x_j, x_k) \succsim_{ijk} (y_i, y_j, y_k)$. Ainsi, $f_i(x_i) + f_k(x_k) = f_i(z_i) + f_k(y_k)$ et $f_i(z_i) + f_j(x_j) \geq f_i(y_i)+f_j(y_j)$. En additionnant ces inégalités, et en soustrayant $f_i(z_i)$, on obtient $f_i(x_i)+ f_j(x_j) + f_k(x_k) \geq f_i(y_i) + f_j(y_j) + f_k(y_k)$.

Par récurrence, on étend la propriété de représentabilité additive de 3 à n composants. Mais jusqu'ici, on s'est placé dans une sous-structure symétrique bornée. Il faut maintenant étendre la représentation à X. Pour ce faire, on utilise le même procédé que pour le théorème 3.4, c'est-à-dire en utilisant l'axiome d'élimination (C_3). L'unicité de la représentation provient directement de l'unicité pour tout produit cartésien à deux composants. ♦

3.6 Résumé

A partir de ce chapitre, nous nous intéressons uniquement au cas où X, l'ensemble de toutes les conséquences pouvant résulter des alternatives offertes au décideur, est infini (dans le cas contraire, l'existence de fonctions d'utilité additives correspond à la non vacuité d'un polyèdre), et, de plus, est un produit cartésien.

Lorsque X est infini, l'existence de fonctions d'utilité additives peut être prouvée ou réfutée par des méthodes faisant appel à deux technologies mathématiques différentes :

la topologie et l'algèbre. Dans cette dernière, le coeur du problème consiste à essayer de se placer dans les conditions d'application du théorème de Hölder (voir page 33), ou, tout du moins, d'une variante de ce théorème. Celui-ci stipule que $(G, \oplus, \prec)$ est un groupe archimédien si et seulement s'il existe une fonction f qui représente $\prec$ et qui est additivement séparable par rapport à la loi $\oplus$ — c'est-à-dire $f(x \oplus y) = f(x) + f(y)$. Dans ce cas, f est unique à une transformation linéaire strictement positive près.

La section 3.3 regroupe les théorèmes d'existence sous l'hypothèse de solvabilité non restreinte ; selon celle-ci, quels que soient $x, y \in X$ et $i \in \{1, \ldots, n\}$, il existe un élément $z \in X$ obtenu à partir de y en modifiant uniquement le $i^{\text{ème}}$ composant de y — c'est-à-dire $z_j = y_j$ pour tout $j \neq i$ — et tel que z est indifférent à x. La section 3.4 regroupe les théorèmes d'existence sous l'hypothèse de solvabilité restreinte ; celle-ci exprime le fait que, pour tous $x, y, z \in X$, et tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, tels que y et z ne diffèrent que par leur $i^{\text{ème}}$ composant et $y \precsim x \precsim z$, il existe $t \in X$ obtenu à partir de y en modifiant uniquement le $i^{\text{ème}}$ composant de y (ou de z) et tel que x est indifférent à t. Ces deux sections nécessitent en outre un axiome archimédien, qui stipule que toute séquence d'éléments équi-espacés x_i^k de X_i — c'est-à-dire toute séquence telle qu'il existe $a, b \in X$ tels que $(x_i^k, (a_j, j \neq i))$ est indifférent à $(x_i^{k+1}, (b_j, j \neq i))$; on emploie aussi le terme de séquence standard — bornée par deux éléments de X est forcément finie. Grâce à ces axiomes, on obtient les théorèmes d'existence suivants :

- Si X est un produit cartésien de dimension n, et $\succsim$ un préordre large total sur X, vérifiant :
  - l'axiome d'indépendance (axiome 2.2),
  - la condition de Thomsen (axiome 2.3) si $n = 2$,
  - l'axiome archimédien (axiome 3.3),
  - soit la solvabilité non restreinte (axiome 3.1) par rapport à tous les composants de X, soit la solvabilité restreinte (axiome 3.4) ainsi que l'essentialité (axiome 3.5) par rapport à tous les composants de X,
- alors, il existe des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, f_i sur X_i, $i = 1, \ldots, n$, telles que

$$(x_1, \ldots, x_n) \succsim (y_1, \ldots, y_n) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} f_i(y_i) \text{ pour tous } x, y \in X \ ;$$

- alors, si g_i, $i = 1, \ldots, n$, sont aussi des fonctions d'utilité additives, il existe des constantes $a > 0$ et $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, tels que

$$g_i(\cdot) = a \cdot f_i(\cdot) + b_i, \ i = 1, \ldots, n.$$

  On dit aussi que f est unique à une transformation affine strictement positive près, qu'elle est unique à une échelle et une translation près, ou bien encore que f est cardinale.

3.7 Bibliographie

ADAMS, E. W. (1965) : "Elements of a Theory of Inexact Measurement," *Philosophy of Science*, 32, 205–228.

FISHBURN, P. C. (1970) : *Utility Theory for Decision Making.* Wiley, NewYork.

HÖLDER, O. (1901) : "Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass. Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellshaft der Wissenschaften zu Leipzig," *Mathematische-Physische Klasse*, 53, 1–64.

HOLMAN, E. W. (1971) : "A Note on Conjoint Measurement with Restricted Solvability," *Journal of Mathematical Psychology.*

JAFFRAY, J.-Y. (1974a) : "Existence, Propriétés de Continuité, Additivité de Fonctions d'Utilité sur un Espace Partiellement ou Totalement Ordonné," Thèse d'Etat, Université Paris VI.

——— (1974b) : "On the Extension of Additive Utilities to Infinite Sets," *Journal of Mathematical Psychology*, 11(4), 431–452.

KRANTZ, D. H. (1964) : "Conjoint Measurement : The Luce-Tukey Axiomatization and Some Extensions," *Journal of Mathematical Psychology*, 1, 248–277.

KRANTZ, D. H., R. D. LUCE, P. SUPPES, ET A. TVERSKY (1971) : *Foundations of Measurement (Additive and Polynomial Representations)*, vol. 1. Academic Press, New York.

LUCE, R. D. (1966) : "Two extensions of Conjoint Measurement," *Journal of Mathematical Psychology*, 3, 348–370.

LUCE, R. D., ET J. W. TUKEY (1964) : "Simultaneous Conjoint Measurement : A New Type of Fondamental Measurement," *Journal of Mathematical Psychology*, 1, 1–27.

NARENS, L. (1974) : "Minimal Conditions for Additive Conjoint Measurement and Qualitative Probability," *Journal of Mathematical Psychology*, 11, 404–430.

SCOTT, D. (1964) : "Measurement structures and Linear Inequalities," *Journal of Mathematical Psychology*, 1, 233–247.

SCOTT, D., ET P. SUPPES (1958) : "Foundational Aspects of Theories of Measurement," *Journal of Symbolic Logic*, 23(2), 113–128.

TVERSKY, A. (1967) : "A General Theory of Polynomial Conjoint Measurement," *Journal of Mathematical Psychology*, 4, 1–20.

Chapitre 4

L'approche topologique

L'utilité est tellement une propriété de la vérité qu'elle en indique sûrement ou la présence ou les approches.
Joseph Joubert

Historiquement parlant, il semblerait que les premiers résultats réellement concluants sur l'existence de fonctions d'utilité additivement séparables suivaient cette approche, cf. Debreu (1960) et Debreu (1964). Elle a d'ailleurs été adoptée et l'est encore par de nombreux auteurs ; citons par exemple Fishburn (1970), Wakker (1989) et Fuhrken et Richter (1991) pour des résultats sur des produits cartésiens, et Segal (1991), Segal (1994) et Chateauneuf et Wakker (1993) pour des résultats sur des sous-ensembles de produits cartésiens. Son terrain d'application de prédilection est le milieu économique ; voir par exemple Koopman (1972). Comme je l'avais évoqué à la fin du chapitre 2 et au début du chapitre 3, l'approche topologique consiste à introduire des conditions non nécessaires pour l'existence de fonctions d'utilité additives mais "très facilement" testables, de manière à induire l'ensemble des conditions d'élimination à partir de l'indépendance et d'une condition s'apparentant à la condition de Thomsen (la condition de l'hexagone).

L'avantage de l'approche topologique par rapport à l'approche algébrique est double : d'abord, les démonstrations sont très graphiques car elles se rapprochent de la "web theory", ce qui les rend relativement simples à comprendre ; ensuite, les hypothèses que requiert cette approche sont particulièrement adaptées au domaine économique. Cependant, comme il est fort justement précisé dans Wakker (1988) et Wakker (1989), les hypothèses employées dans l'approche topologique sont plus restrictives que celles de l'approche algébrique ; plus exactement, les axiomes nécessaires à l'approche topologique impliquent ceux de l'approche algébrique. Par conséquent, les théorèmes d'existence obtenus dans ce chapitre sont moins généraux que ceux du chapitre précédent. Quoi qu'il en soit, à titre de comparaison avec les résultats que je vais expliciter dans la deuxième partie de ce mémoire, il m'a semblé utile de présenter ici les résultats obtenus par cette approche.

Ce chapitre est scindé en 4 sections. Dans la première, je rappelle brièvement quelques

notions de topologie. La deuxième section est consacrée à la présentation d'un théorème d'existence de fonctions d'utilité additives ; j'y décris en particulier la condition de l'hexagone, je montre les idées intuitives cachées derrière ce théorème, et j'effectue une correspondance entre les hypothèses de l'approche topologique et celles de l'approche algébrique. La troisième section est un rapide résumé. Enfin, la quatrième et dernière section renferme la bibliographie du chapitre.

4.1 Quelques notions topologiques

Avant d'aborder le problème des fonctions d'utilité additives, il convient de fournir au lecteur peu familiarisé avec la topologie quelques définitions de base.

Définition 4.1 (topologie) *Soit X un ensemble, et $\mathcal{T}$ un ensemble de sous-ensembles de X. $\mathcal{T}$ est une topologie (sur X) si $\mathcal{T}$ contient $\emptyset$ et X, ainsi que toute intersection finie ou union de ses éléments. On dit alors que $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique.*

Exemple 4.1 Soit X un ensemble. Alors $\mathcal{P}(X)$, l'ensemble des parties de X est une topologie sur X ; on l'appelle la topologie discrète. $\{\emptyset, X\}$ est aussi une topologie ; c'est la topologie grossière. ♦

Définition 4.2 (ouvert/fermé) *Les ouverts sont les éléments de $\mathcal{T}$. Les fermés sont les complémentaires dans X des éléments de $\mathcal{T}$.*

Définition 4.3 (connexité) *Un espace topologique est connexe si les seuls ensembles qui sont à la fois ouverts et fermés sont $\emptyset$ et X, c'est-à-dire s'il n'existe pas de sous-ensembles ouverts G, H de X, autres que $\emptyset$ et X, tels que $G \cap H = \emptyset$ et $G \cup H = X$. La même définition s'applique pour G et H fermés.*

Exemple 4.2 $\mathbb{R}$, muni de la topologie euclidienne — c'est-à-dire de la topologie telle que tout ouvert est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ — est connexe ; dans cette topologie, tout intervalle de $\mathbb{R}$ est connexe. ♦

Définition 4.4 (densité) *Un ensemble $E \subset X$ est dense si son intersection avec n'importe quel ouvert est non vide.*

Exemple 4.3 L'ensemble des rationnels est dense dans $\mathbb{R}$ car entre deux réels, il existe toujours un rationnel. ♦

Définition 4.5 (séparabilité) *Un espace topologique est séparable s'il contient un ensemble dense dénombrable.*

Exemple 4.4 $\mathbb{R}$ est séparable car l'ensemble des rationnels est dense dans $\mathbb{R}$ et est dénombrable. ♦

Définition 4.6 (topologie produit) *Soit $X = \prod_{i \in I} X_i$, où chaque X_i est muni d'une topologie $\mathcal{T}_i$. La topologie produit sur X est la plus petite topologie contenant tous les sous-ensembles de X de la forme $E_i \times \prod_{j \neq i} X_j$, $i \in I$ et $E_i \in \mathcal{T}_i$.*

Définition 4.7 (préordre large total continu) *Un préordre large total $\succsim$ est dit continu si, quel que soit y, les ensembles $\{x$ tels que $x \succ y\}$ et $\{x$ tels que $x \prec y\}$ sont des ouverts.*

4.2 Représentations additives

Forts de toutes ces notions, nous nous plongeons maintenant dans l'univers fascinant de l'utilité additivement séparable. Nous allons voir en particulier un théorème d'existence et montrer son lien avec les théorèmes du chapitre 3. Mais, tout d'abord, nous devons introduire une nouvelle condition : la condition de l'hexagone.

4.2.1 La condition de l'hexagone

C'est une condition nécessaire pour l'existence de toute fonction d'utilité additive puisque c'est une sous-partie de la condition d'élimination d'ordre 3. Là encore, comme pour la condition de Thomsen, elle n'est utile que pour des produits cartésiens de dimension 2 ; en dimension supérieure ou égale à 3, elle est en effet induite par l'indépendance et la condition structurelle employée dans toute l'approche topologique : la connexité des X_i.

Axiome 4.1 (condition de l'hexagone) *Soit $X = X_1 \times X_2$, et $\succsim$ un préordre large total sur X. Si $(x_1, z_2) \sim (y_1, x_2)$, $(x_1, y_2) \sim (y_1, z_2)$ et $(y_1, z_2) \sim (z_1, x_2)$, alors $(y_1, y_2) \sim (z_1, z_2)$.*

L'interprétation graphique de cette condition est fournie par la figure 4.1.

4.2.2 Le théorème topologique central

Théorème 4.1 *Soit $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$. Supposons que chaque X_i est un espace topologique connexe (définition 4.3) et séparable (définition 4.5), et que X est muni de la topologie produit (définition 4.6). Supposons de plus qu'au moins deux composants X_i soient essentiels (axiome 3.5), et que $\succsim$ soit un préordre large total continu (définition 4.7) vérifiant l'axiome d'indépendance (2.2), et, lorsque seulement deux composants sont essentiels, la condition de l'hexagone (axiome 4.1) sur ces composants. Alors il existe une fonction d'utilité additive représentant $\succsim$, continue et unique à une transformation affine strictement positive près.*

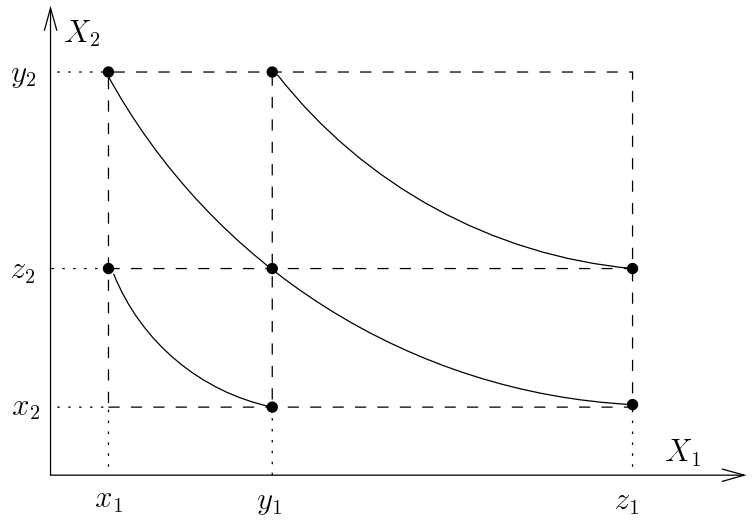


FIG. 4.1: La condition de l'hexagone.

Notons que l'on fait une différence entre le fait que deux composants sont essentiels et le fait que plus de deux composants sont essentiels. Celle-ci se situe dans l'utilisation ou non de la condition de l'hexagone. Or cette condition est réellement très similaire à la condition de Thomsen. On voit donc que le théorème ci-dessus suit bien les traces de ceux présentés dans le chapitre précédent. Le lecteur intéressé par ce théorème pourra se référer à Wakker (1989), où il est décrit et commenté avec moulte détails.

Le but de la première partie de ce mémoire n'est pas de dresser un catalogue des résultats classiques sur l'existence de fonctions d'utilité additives, mais plutôt d'offrir au lecteur des éléments de référence avec lesquels pourront être comparés les résultats de la partie 2. Deux critères me semblent pertinents pour cette comparaison : la généralité/applicabilité des théorèmes d'existence, et la simplicité (je devrais plutôt dire la complexité) de leurs démonstrations. Pour l'approche topologique, ce deuxième critère ne me paraît pas avoir beaucoup de sens ; en effet, bien que n'utilisant dans ses démonstrations que des notions d'analyse, l'approche suivie dans la deuxième partie de la thèse (que j'appelle approche analytique) n'utilise que le système d'axiomes de l'approche algébrique. Ainsi, les hypothèses de l'approche topologique et de l'approche analytique étant vraiment très différentes, je ne vois vraiment pas ce que pourrait apporter une comparaison de leurs systèmes de démonstrations respectifs ; aussi, me paraît-il inutile de démontrer ici le théorème ci-dessus. Le lecteur intéressé par une démonstration détaillée se référera à Wakker (1989).

4.2.3 Idées intuitives du théorème

L'idée du théorème ci-dessus — tout comme sa démonstration dans Wakker (1989) — est d'utiliser les différents axiomes pour construire une fonction d'utilité additive, mettant ainsi en évidence l'existence de ladite fonction. Le principe de construction est décrit entièrement dans la figure 4.2. Si une représentation additive existe, alors toute

transformée affine strictement positive de cette fonction est aussi une utilité représentant $\succsim$. Par conséquent, on peut prendre un point $x^0 \in X$ quelconque et lui affecter les valeurs $f_j(x_j^0) = 0$, $j = 1, \ldots, n$. De même, on choisit un $x_1^1 \in X_1$ tel que $x_1^1 \succ_1 x_1^0$, et auquel on affecte la valeur $f_1(x_1^1) = 1$. Mais, dans ce cas, il existe x_j^1 tel que $(x_1^0, x_j^1) \sim_{1j} (x_1^1, x_j^0)$. On affecte alors la valeur $f_j(x_j^1) = 1$. On continue ainsi en créant une séquence standard $\{x_j^0, x_j^1, \ldots, x_j^n, \ldots\}$, à laquelle on affecte les valeurs $f_j(x_j^k) = k$.

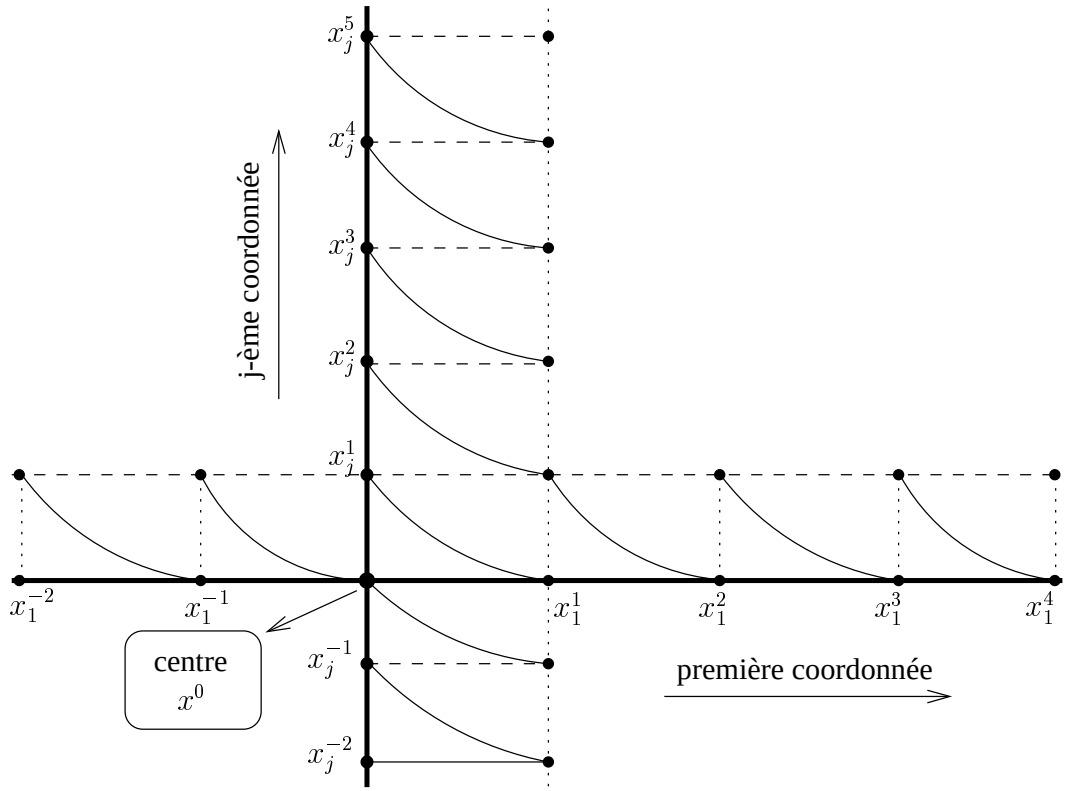


FIG. 4.2: Construction des séquences standards

De même, au lieu de créer cette séquence verticalement (voir figure 4.2), on peut aussi créer une séquence horizontalement, c'est-à-dire créer $f_1(x_1^2), f_1(x_1^3), \ldots, f_1(x_1^n)$. On peut alors enchaîner sur la création de nouvelles séquences standards verticales, mais cette fois en prenant x_1^1 et x_1^2 comme base au lieu de x_1^0 et x_1^1, puis avec x_1^2 et x_1^3, etc. On constitue ainsi la grille suggérée dans la figure 4.3.

On remarque au passage que, sur la grille, la condition de l'hexagone est vérifiée. Une fois la grille réalisée pour deux composants, on l'étend à trois, puis quatre, ..., puis à tous les composants. Sur les points du quadrillage, la fonction f est additive et représente $\succsim$. Il reste à compléter sur les autres points de X.

Pour ce faire, on utilise la densité engendrée par la connexité. D'après la figure 4.4, il est possible de doubler la grille déjà constituée. Sur cette figure, $x_1^{1/2}$ et $x_j^{1/2}$ sont tels que $(x_1^{1/2}, x_j^{1/2}) \sim_{1j} (x_1^1, x_j^0) \sim_{1j} (x_1^0, x_j^1)$. On attribue alors aux deux coordonnées ainsi trouvées la valeur $f_j(x_j^{1/2}) = 1/2$. On peut alors réitérer le procédé avec la nouvelle

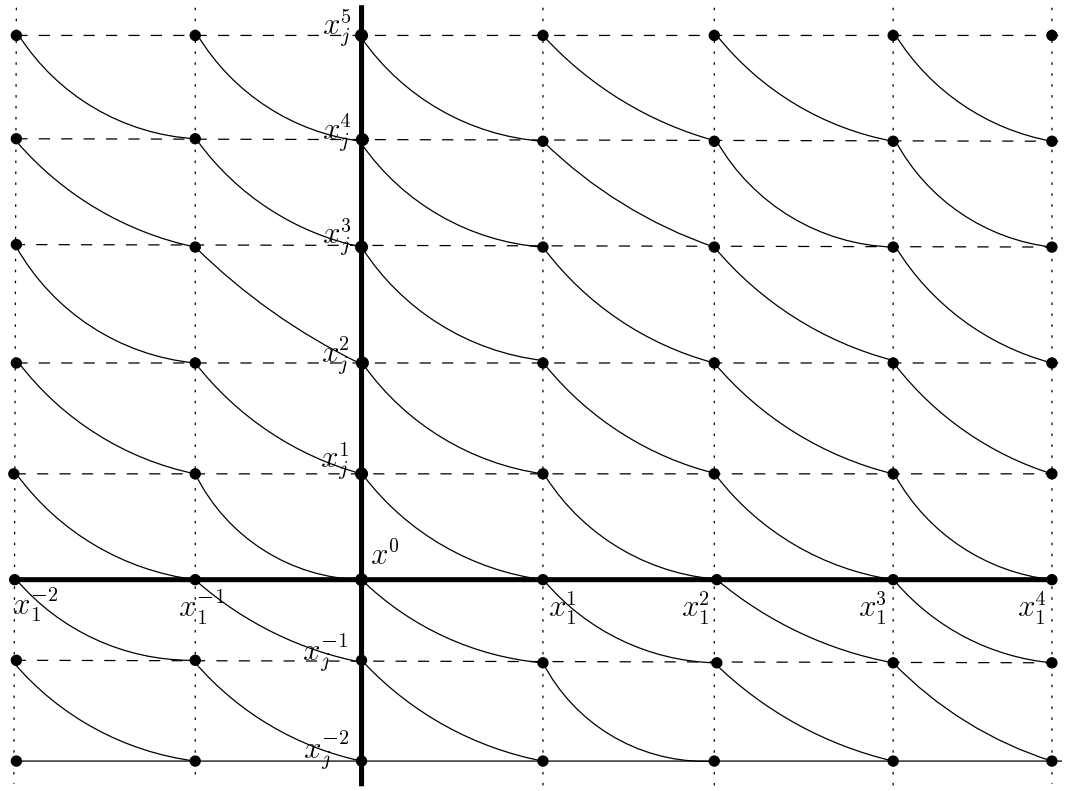


FIG. 4.3: Construction de la grille

grille ainsi créée. Et on a toujours une représentation additive sur la grille.

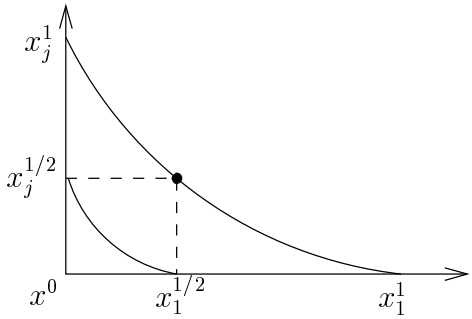


FIG. 4.4: Doublement de la grille par densité

Lorsque l'on double la grille une infinité de fois, cette dernière devient dense, et, donc, contient toutes les coordonnées dont la valeur de l'utilité est de la forme : $\sum_{i \in I} j/2^i$, où $I \subset \mathbb{N}$. Par passage à la limite, on obtient donc une représentation additive de X.

L'unicité provient du fait, qu'à partir du moment où $f(x^0)$ et $f(x_1^1)$ sont fixés, les images des autres points par f n'ont plus jamais été déterminées au hasard. Quant à la continuité, elle provient de la densité de la grille, et du passage à la limite utilisé à la fin du calcul.

4.2.4 Correspondance avec l'algèbre

Dans l'approche topologique, la solvabilité non restreinte et la solvabilité restreinte par rapport à chaque composant sont remplacées par la connexité ; en effet, supposons que les X_i soient des composants connexes et séparables, que $\succsim$ soit un préordre large total continu, et que $(x_1, \ldots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \succsim y \succsim (x_1, \ldots, x_{i-1}, c_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. Soient $G = \{v_i \in X_i$ tel que $(x_1, \ldots, x_{i-1}, v_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \succsim y\}$ et $H = \{w_i \in X_i$ tel que $(x_1, \ldots, x_{i-1}, w_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \precsim y\}$. $G \cup H = X_i$, et G et H sont non vides car $a_i \in G$ et $c_i \in H$. Puisque $\succsim$ est continu, H et G sont des fermés. Puisque X_i est connexe, $G \cap H \neq \emptyset$. Autrement dit, il existe un $z_i \in G \cap H$, ce qui est équivalent à l'existence de $z_i \in X_i$ tel que $(x_1, \ldots, x_{i-1}, z_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \sim y$. Donc le $i^{\text{ème}}$ composant vérifie la solvabilité restreinte.

L'axiome archimédien, quant à lui, est remplacé par la séparabilité ; en effet, l'intérêt de l'axiome archimédien est de limiter le nombre d'éléments de X de manière à garantir l'existence d'une bijection entre X et une partie de $\mathbb{R}$. Mais la séparabilité implique que X contient un ensemble A dense et dénombrable. Puisque A est dénombrable, il existe une injection φ de A dans $\mathbb{Q}$. Par conséquent, pour tous $x, y \in X$ tels que $x \succ y$, il existe $a \in A$ tel que $x \succ a \succ y$ et $\varphi(a) \in \mathbb{Q}$. Autrement dit, le nombre d'éléments de X est limité, et il existe une bijection entre X et une partie de $\mathbb{R}$.

4.3 Résumé

Comme je l'avais indiqué au chapitre 2, si l'on veut avoir des théorèmes d'existence de fonctions d'utilité additives applicables de manière pratique, il faut trouver des conditions structurelles permettant d'induire l'axiome d'élimination globale (C) à partir d'axiomes d'élimination d'ordres faibles (en principe inférieurs ou égaux à 2). Dans l'approche topologique ces conditions structurelles sont la connexité et la séparabilité des X_i (voir définitions page 62). Les axiomes d'élimination usités par l'approche topologique sont l'indépendance (voir page 23) et la condition de l'hexagone (voir page 63) ; cette dernière, qui ne sert que pour des ensembles X de dimension 2, stipule que si $(x_1, z_2) \sim (y_1, x_2)$, $(x_1, y_2) \sim (y_1, z_2)$ et $(y_1, z_2) \sim (z_1, x_2)$, alors $(y_1, y_2) \sim (z_1, z_2)$. Elle est illustrée par la figure 4.1.

D'après l'approche topologique,
si

- $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$,
- les X_i sont des espaces topologiques connexes (voir définition 4.3) et séparables (voir définition 4.5),
- X est muni de la topologie produit (définition 4.6),
- au moins deux composants X_i sont essentiels (axiome 3.5),
- $\succsim$ est un préordre large total continu (définition 4.7),
- $\succsim$ vérifie l'axiome d'indépendance (axiome 2.2),

– $\succsim$ vérifie la condition de l'hexagone (axiome 4.1) quand seulement deux coordonnées sont essentielles,

Alors

– il existe une fonction d'utilité additive représentant $\succsim$,

– cette fonction est continue,

– elle est unique à une transformation affine strictement positive près.

4.4 Bibliographie

Chateauneuf, A., et P. P. Wakker (1993) : "From Local to Global Additive Representation," *Journal of Mathematical Economics*, 22, 523–545.

Debreu, G. (1960) : "Topological Methods in Cardinal Utility Theory," in *Mathematical Methods in the Social Sciences*, ed. by K. J. Arrow, S. Karlin, et P. Suppes, pp. 16–26. Stanford University Press, Stanford, CA.

——— (1964) : "Continuity Properties of Paretian Utility," *International Economic Review*, 5(3), 285–293.

Fishburn, P. C. (1970) : *Utility Theory for Decision Making.* Wiley, NewYork.

Fuhrken, G., et M. K. Richter (1991) : "Additive Utility," *Economic Theory*, 1, 83–105.

Koopman, T. C. (1972) : "Representations of Preference Orderings With Independent Components of Consumption," in *Decision and Organisation*, ed. by C. B. McGuire, et R. Radner, chap. 3, pp. 57–78. North Holland, Amsterdam.

Segal, U. (1991) : "Additively Separable Representations on Non-convex Sets," *Journal of Economic Theory*, 56, 89–99.

——— (1994) : "A Sufficient Condition for Additively Separable Functions," *Journal of Mathematical Economics*, 23, 295–303.

Wakker, P. P. (1988) : "The Algebraic Versus the Topological Approach to Additive Representations," *Journal of Mathematical Psychology*, 32, 421–435.

——— (1989) : *Additive Representations of Preferences, A New Foundation of Decision Analysis.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Deuxième partie

Affaiblissement des hypothèses de solvabilité

Chapitre 5

Introduction à l'approche analytique

Y a autre chose.
Paul Volfoni

Les théorèmes d'existence de fonctions d'utilité additives montrés jusqu'ici incluent des conditions qui, comme nous l'avons vu, sont très restrictives (à savoir la solvabilité non restreinte (voir page 35) ou la solvabilité restreinte (voir page 41) dans l'approche algébrique, et la connexité (voir page 62) dans l'approche topologique). Si l'on désire des théorèmes pouvant s'appliquer à des problèmes très généraux, il devient donc impératif d'en construire de nouveaux, plus performants dans le sens où leur champ d'application est élargi, et tout aussi applicables de manière pratique que les théorèmes mentionnés dans les deux chapitres précédents. L'obtention de tels théorèmes est l'objectif de l'approche analytique.

Dans ce chapitre, je vais mettre l'accent, grâce à quelques exemples, sur les problèmes posés par les hypothèses structurelles des théorèmes classiques (solvabilité et connexité). L'analyse de ces problèmes va nous permettre de déduire une nouvelle approche de démonstration, qui, elle-même, nous permettra de découvrir des théorèmes d'existence plus puissants que les théorèmes classiques. Cette nouvelle approche de démonstration se veut plus intuitive que celle développée dans le chapitre 3 (on n'utilisera pas d'algèbre, et encore moins de semi groupe local, positif, régulier et archimédien). L'aspect intuitif des démonstrations me paraît en effet un des critères majeurs à respecter pour pouvoir généraliser les théorèmes d'existence.

Ce chapitre est divisé en 4 sections. Dans la première, une analyse critique de la première partie de ce mémoire révèle certains problèmes soulevés par les approches classiques. Ces problèmes sont de trois types : dans l'approche topologique, les composants doivent être denses les uns dans les autres, ce qui implique généralement que si l'un d'eux est un continuum, les autres doivent aussi l'être[1] ; aussi bien dans l'approche al-

[1] En fait, pour être précis, si l'on considère les espaces quotients $X_i^{\sim}$ de chacun des composants par rapport à sa relation de préférence induite, alors lorsque l'un de ces espaces est un continuum, les autres le sont aussi.

gébrique que dans l'approche topologique, les fonctions d'utilité additives sont toujours uniques à une transformation affine strictement positive près ; les démonstrations des théorèmes d'existence sont souvent longues et complexes sur le plan mathématique (elles requièrent en effet des connaissances assez pointues). Forts de ces considérations, nous mettons en place dans la deuxième section les fondements de l'approche analytique ; une première sous-section permet de délimiter le cadre de l'étude tandis qu'une deuxième décrit l'approche proprement dite. Enfin, nous en avons l'habitude maintenant, un petit résumé et une bibliographie sont présentés à la fin du chapitre.

5.1 Dynamique du problème

Cette section propose un examen critique sur les méthodes présentées dans la partie précédente. Cette critique va porter sur trois points différents correspondant chacun à une sous-section : le fait que les espaces sur lesquels portent les préférences sont des continuums, l'unicité des fonctions d'utilité additives, et les démonstrations des théorèmes d'existence. Nous allons montrer que, sur les deux premiers points, les hypothèses classiques sont réellement trop contraignantes et réduisent ainsi drastiquement le champ d'application des fonctions d'utilité additives, et que le dernier point constitue un obstacle à la généralisation des théorèmes d'existence.

5.1.1 Préférences sur des continuums

Cette sous-section s'adresse plus particulièrement à l'approche topologique, mais en pratique, elle s'applique aussi à l'approche algébrique. On a vu que dans l'approche topologique, les théorèmes assurant l'existence d'utilités additives nécessitaient une hypothèse de séparabilité. En pratique, cette hypothèse se traduit par le fait que chaque X_i doit être un continuum. On peut alors s'interroger sur la signification de cette propriété en termes de préférences. Rappelons que cette approche nous a été rapportée par Debreu (voir Debreu (1960)) et qu'elle était, à l'origine, destinée aux économistes. Lorsque les attributs reflètent des quantités monétaires, imposer de travailler sur des continuums paraît être une hypothèse acceptable. Mais sortons un peu de ce domaine, et prenons l'exemple suivant :

Exemple 5.1 Monsieur Guy Nipigue veut acheter une voiture. Parmi ses critères de choix figurent le modèle de la voiture, sa date de mise en circulation et son prix. Le prix peut être assimilé à un continuum. De même, on peut prétendre que, le temps étant sécable indéfiniment, c'est aussi, par là même, un continuum. Par contre, le modèle de la voiture est assurément un facteur dénombrable et, même, fini. Dans ce cas, on voit difficilement comment il pourrait se transformer en continuum. Qu'y a-t-il à mi-chemin entre une Renault 5 TR et une Renault 5 GTR ? Ici, considérer que chaque X_i est un continuum est une hypothèse un peu forte. En particulier, cela risque de rendre la construction des fonctions d'utilité de monsieur Nipigue assez délicate. ♦

Il existe donc des exemples relativement simples pour lesquels les modèles présentés dans la partie précédente ne s'appliquent pas. Ici, l'attribut reflétant le modèle de voiture n'est manifestement pas connexe, ce qui explique donc pourquoi l'approche topologique échoue dans cet exemple. De part la similitude entre connexité et solvabilité restreinte, on peut conclure que la solvabilité restreinte n'est pas non plus satisfaite. En fait, on peut trouver beaucoup de domaines dans lesquels certains attributs peuvent manifestement être considérés comme connexes (ou solvables), tandis que d'autres sont finis ou discrets. Citons par exemple, en théorie de la décision médicale, le cas de problèmes mettant en jeu la durée de vie des patients et des aspects monétaires (que l'on peut assurément assimiler à des composants connexes), ainsi que des états de santé (qui, généralement, sont discrets).

Ainsi, il semblerait qu'un affaiblissement des hypothèses de solvabilité non restreinte, de solvabilité restreinte et de connexité pourraient nous permettre de prendre en compte des problèmes plus réalistes.

5.1.2 Unicité des représentations

Dans tous les théorèmes présentés jusqu'ici, les représentations additives, lorsqu'elles existaient, étaient uniques à une transformation affine strictement positive près. Dans l'approche algébrique, cette propriété est une conséquence directe du théorème de Hölder (1901). En topologie, les hypothèses étant encore plus contraignantes que dans l'approche précédente (voir Wakker (1988)), l'unicité s'ensuit.

Mais interrogeons nous quelques instants sur la cause réelle de cette unicité à une transformation affine près. Pour ce faire, décortiquons l'exemple suivant.

Exemple 5.2 Soit $X = [0,2] \times \{0,5,6\}$. Soit $\succsim$ une relation de préférence sur X représentée par la fonction d'utilité additive $f(x,y) = x + y$. Quels que soient x, x', $f(x,0) < f(x',5)$. Par conséquent,

$$g(x,y) = x + g_2(y), \text{ où } g_2(y) = \begin{cases} y & \text{si } y = 0 \\ y + 20 & \text{sinon} \end{cases}$$

est aussi une fonction représentant $\succsim$. ♦

Nous avons ici deux fonctions, f et g, additives toutes les deux, représentant $\succsim$, et, pourtant, on ne peut manifestement pas passer de l'une à l'autre par une transformation affine. Les théorèmes d'existence montrés jusqu'ici ne peuvent donc s'appliquer à cet exemple ; cela veut donc dire qu'au moins un des axiomes des dits théorèmes n'est pas vérifié. Nous avons vu que l'axiome d'indépendance, la condition de Thomsen et la condition de l'hexagone étaient des conditions nécessaires pour l'existence d'utilités additives. Par déduction, il ne peut donc s'agir que de la connexité ou de la séparabilité dans l'approche topologique, et de la solvabilité (restreinte ou non) ou de la propriété archimédienne dans l'approche algébrique.

La séparabilité et l'axiome archimédien ne peuvent être mis en cause car leur but est de garantir que X ne contienne pas trop de classes d'indifférence par rapport à

$\mathbb{R}$, et sont donc vérifiés ici. Les seuls axiomes susceptibles d'être violés dans l'exemple ci-dessus sont donc la connexité et la solvabilité (restreinte). Et, en effet, on constate que ces propriétés ne sont pas vérifiées puisque entre $(2,0)$ et $(0,5)$, il y a un "trou" au sens où il n'existe aucun élément $(x,y) \in X$ tel que $(2,0) \prec (x,y) \prec (0,5)$, ce qui interdit l'existence d'un élément $y \in \{0,5,6\}$ tel que $(1,y) \sim (0,5)$, et ce bien que $(1,0) \prec (0,5) \prec (1,5)$.

On comprend donc que si l'on veut généraliser les théorèmes de la partie 1 de manière à prendre en compte des situations telles que celle de l'exemple ci-dessus, il faut absolument affaiblir l'hypothèse de solvabilité (restreinte ou non) par rapport à tous les composants de X et/ou de connexité par rapport à tous les composants de X. Deux techniques viennent alors immédiatement à l'esprit : soit l'affaiblissement provient du fait que l'on impose la solvabilité (restreinte ou non) et/ou la connexité seulement sur certains composants, soit l'on remplace la solvabilité (restreinte ou non) et la connexité par des conditions plus faibles et imposées à tous les composants ; évidemment, le mixage de ces deux techniques devrait permettre d'obtenir des conditions plus faibles que la solvabilité restreinte et, de plus, imposées uniquement à quelques composants.

5.1.3 Démonstration des théorèmes

Dans les deux sous-sections précédentes, nous n'avons critiqué les modèles de la première partie que sur la base de leurs résultats (c'est-à-dire de leurs théorèmes d'existence). Nous allons maintenant examiner les démonstrations desdits théorèmes.

La compréhension de ces dernières est peu aisée du fait de leur complexité mathématique. Dans l'approche topologique par exemple, il est assez difficile de s'imaginer physiquement ce qu'est un ensemble connexe, ou non connexe, ou ce qu'est un ensemble séparable. Ces notions restent souvent assez confuses. Dans l'approche algébrique, la notion de groupe n'est pas non plus très évidente à assimiler ; en particulier, dans la démonstration du théorème 3.4, les opérateurs de semi-groupes $\pi(\cdot)$, $\alpha(\cdot)$ et $\circ$ restent souvent hors de portée du grand public. Notons que les approches algébriques et topologiques ne sont pas les seules qui aient été développées jusqu'à maintenant, bien qu'elles soient tout de même les principales; citons par exemple l'approche par équations fonctionnelles (voir Aczèl (1966), Eichhorn (1978) et Gorman (1968)). Quoi qu'il en soit, la complexité mathématique de toutes ces approches rend leurs démonstrations à la fois difficiles à lire, et, en même temps, par le degré d'abstraction qu'elles requièrent, nous masquent leurs interprétations intuitives.

Il serait donc appréciable de formuler de nouvelles démonstrations utilisant des notions plus faciles à appréhender. L'approche analytique me semble, quant à elle, plus accessible au lecteur que les autres approches ; en effet, elle ne requiert que des connaissances mathématiques de faible niveau (par exemple, savoir ce qu'est la réciproque d'une fonction, ou bien ce que signifie la composition de fonctions $f \circ g$) ; de plus, les idées qu'elle véhicule sont particulièrement simples, et peuvent être exprimées, le plus souvent, graphiquement.

5.2 L'approche analytique

5.2.1 Cadre de l'étude

Si j'ai changé radicalement d'optique quant aux démonstrations proposées, j'ai quand même utilisé les axiomes développés dans l'approche algébrique, à savoir l'axiome archimédien, la solvabilité non restreinte et la solvabilité restreinte. Pourquoi ? Deux raisons à cela : premièrement, nous avons vu qu'il était indispensable du point de vue applicabilité d'employer des conditions structurelles de manière à éviter de devoir tester l'axiome d'élimination globale (C) ; et la définition de la solvabilité (restreinte ou non) me paraît particulièrement compréhensible, parce que très intuitive. Deuxièmement, puisque l'on veut généraliser les théorèmes d'existence de fonctions d'utilité additives, il semblerait plutôt étrange d'utiliser des axiomes tels que la connexité qui, on le sait, sont plus restrictifs que la solvabilité restreinte.

Examinons pendant quelques instants la solvabilité non restreinte et la solvabilité restreinte. Nous savons que ces deux conditions ne sont pas nécessaires pour l'existence de fonctions d'utilité additives. Pourquoi les avons-nous donc introduites ? C'était dans les sections 3.3 et 3.4 du chapitre 3 ; parmi les axiomes d'élimination, nous ne voulions faire appel qu'à l'axiome d'indépendance et à la condition de Thomsen. Etant donné que ces conditions n'étaient pas suffisantes pour garantir l'existence des représentations additives (voir les exemples dans Wakker (1989)), il était nécessaire de compenser en rajoutant des conditions structurant l'espace, la fameuse condition de solvabilité.

Mais, alors, on peut s'interroger sur la qualité de la structure ainsi créée. Par exemple, on peut se demander si l'on a réellement besoin que cette condition soit vérifiée par tous les composants de X pour en déduire l'existence d'une fonction d'utilité additive. A cette question, je répondrai dans les chapitres suivants par la négative. En fait nous verrons que la structure engendrée par la solvabilité (restreinte ou non) de deux ou trois attributs est suffisamment forte pour engendrer la représentabilité additive.

L'approche analytique s'intéresse donc à des problèmes dans lesquels deux, voire trois composants, sont solvables, les autres ne possédant aucune propriété structurelle a priori.

5.2.2 Description de l'approche

L'approche analytique se décompose en deux phases. La première consiste à étudier les produits cartésiens constitués par les attributs solvables (que ce soit en solvabilité restreinte ou non restreinte). La deuxième consiste à étendre la représentation produite par la phase 1 en incluant, un par un, les autres composants.

La première phase est développée sur des produits cartésiens à deux facteurs. Elle est fondée sur la constatation suivante : supposons que deux fonctions f et g représentent un même préordre large total $\succsim$. On a donc $x \succsim y \Leftrightarrow f(x) \geq f(y) \Leftrightarrow g(x) \geq g(y)$. Alors il existe une fonction $\varphi : f(X) \to \mathbb{R}$, strictement croissante, telle que $g = \varphi \circ f$. En effet, il est évident qu'il existe une fonction transformant f en g ; puisque f et g préservent le même ordre, φ est forcément croissante.

Autrement dit, si $\succsim$ est représentable par une fonction d'utilité additive g, et par une autre fonction, pas forcément additive, f, il est possible de transformer f en g. L'approche analytique consiste à essayer de trouver cette transformation. Pour cela, nous ne faisons pas appel à la notion de groupe ou autres connexités, mais seulement aux propriétés classiques des fonctions, composition, croissance, bijection, comonotonie, etc... Nous verrons en particulier que la condition de Thomsen prend une importance considérable dans l'approche analytique.

Lorsque la représentation additive est définie sur le produit cartésien des deux facteurs solvables, il ne reste plus qu'à l'étendre en incluant tous les autres composants (cf. Gonzales (1996b), Gonzales (1996a) ou encore Gonzales (1997)). Le procédé consiste à choisir un composant X_i. On se fixe une valeur x_i^0 à laquelle on affecte la valeur 0 pour l'utilité. A partir de ce moment, lorsque l'on prend un autre élément x_i^1 de X_i, on peut raccrocher ce dernier à x_i^0 grâce à la solvabilité (restreinte ou non) des premiers composants. Ainsi supposons que, sur la figure 5.1, on connaisse déjà une fonction d'uti-

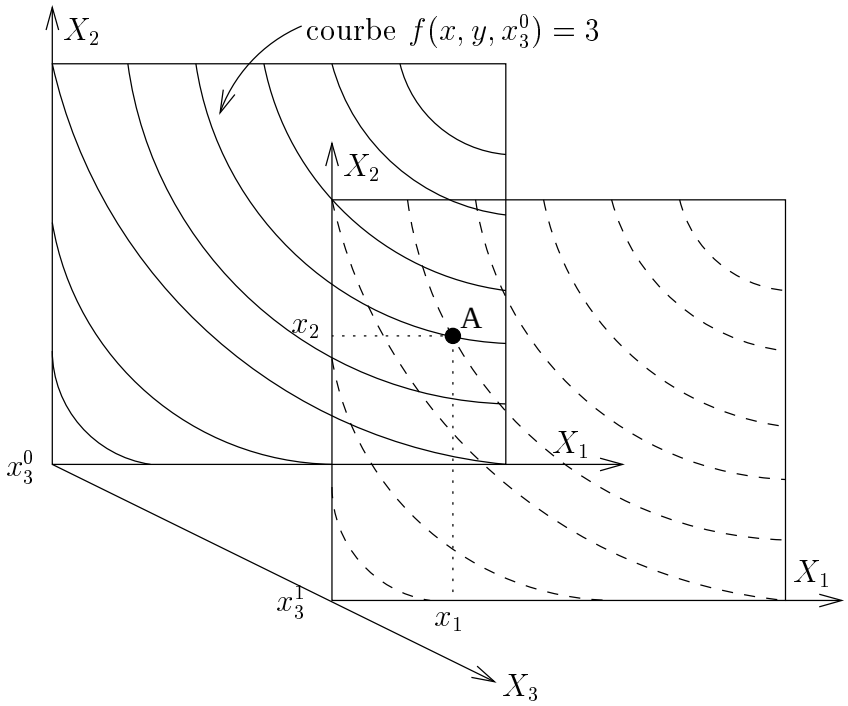


FIG. 5.1: La phase 2.

lité additive f sur le plan $\{x_3 = x_3^0\}$. On veut alors connaître la valeur de $f_3(x_3^1)$. On voit que le point A de coordonnées (x_1, x_2, x_3^1) est indifférent à un point de la courbe $f(x, y, x_3^0) = 3$. Ceci veut donc dire que $f_3(x_3^1) = f_1(x)+f_2(y)+f_3(x_3^0)-f_1(x_1)-f_2(x_2) = 3 - f_1(x_1) - f_2(x_2)$. Ainsi, on ne peut choisir arbitrairement la valeur de x_3^1. Lorsque l'on travaille en solvabilité restreinte, il peut s'avérer impossible de relier directement x_3^1 à x_3^0 ; mais, dans ce cas, on peut relier ces deux éléments grâce à des séquences dites "sur-standards" ; le principe en est le suivant : si x_3^1 et x_3^0 ne peuvent être reliés directement, on choisit x_3^2 "entre" x_3^1 et x_3^0, et, avec un peu de chance, x_3^1 et x_3^2 d'une part, et

x_3^0 et x_3^2 d'autre part, peuvent être reliés entre eux, ce qui permet de relier x_3^1 et x_3^0 par une égalité sur leurs images par la fonction d'utilité f ; c'est le cas sur la figure 5.2, où les points de liaison sont respectivement B et C. Si x_3^0, x_3^1 et x_3^2 ne sont pas reliés entre

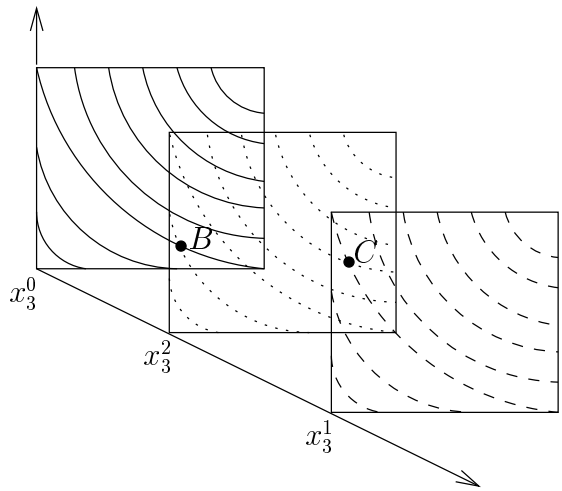


FIG. 5.2: Si x_3^0 et x_3^1 ne sont pas reliés directement.

eux, on trouve x_3^3 entre x_3^0 et x_3^2, et x_3^4 entre x_3^1 et x_3^2, et on recommence le processus. Un axiome archimédien que nous verrons plus loin nous permettra de conclure que ce processus est fini.

L'approche analytique se contente donc de constater que tel nouveau point est indifférent à tel ancien point déjà évalué. Un simple calcul arithmétique permet alors de déduire la valeur de la fonction d'utilité en ce nouveau point.

5.3 Résumé

L'approche analytique est une approche n'utilisant que des propriétés simples de fonctions, telles que la croissance, la bijection, etc, afin de dégager des conditions d'existence de représentations additives. Elle est plus générale que l'approche algébrique et l'approche topologique, dans la mesure ou elle permet l'existence de représentations additives sur des espaces dont certains composants ne vérifient ni connexité, ni solvabilité non restreinte, ni solvabilité restreinte. De plus, les démonstrations des théorèmes d'existence, bien que souvent longues, ne requièrent de la part du lecteur aucune connaissance mathématique pointue, et sont souvent très intuitives.

Cette approche est implémentée en deux phases : tout d'abord certaines techniques sont développées pour éliciter des fonctions d'utilité additives sur les sous-ensembles formés par les composants solvables (que ce soit en solvabilité restreinte ou non restreinte) ; ensuite, les représentations ainsi engendrées sont étendues aux composants non solvables par des techniques très simples.

5.4 Bibliographie

ACZÈL, J. (1966) : *Lectures on Functional Equations and Their Applications.* Academic Press, New York.

DEBREU, G. (1960) : "Topological Methods in Cardinal Utility Theory," in *Mathematical Methods in the Social Sciences*, ed. by K. J. Arrow, S. Karlin, et P. Suppes, pp. 16–26. Stanford University Press, Stanford, CA.

EICHHORN, W. (1978) : *Functional Equations in Economics.* Addison Wesley, London.

GONZALES, C. (1996a) : "Additive Utilities When Some Components Are Solvable And Others Are Not," *Journal of Mathematical Psychology*, 40(2), 141–151.

——— (1996b) : "Additive Utility Without Restricted Solvability on All Components," soumis pour publication.

——— (1997) : "Additive Utility Without Solvability on All Components," *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, 453, 64–90, Springer Verlag.

GORMAN, W. (1968) : "The Structure of Utility Functions," *Review of Economic Studies*, 35, 367–390.

HÖLDER, O. (1901) : "Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass. Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellshaft der Wissenschaften zu Leipzig," *Mathematische-Physische Klasse*, 53, 1–64.

WAKKER, P. P. (1988) : "The Algebraic Versus the Topological Approach to Additive Representations," *Journal of Mathematical Psychology*, 32, 421–435.

——— (1989) : *Additive Representations of Preferences, A New Foundation of Decision Analysis.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Chapitre 6

Etude des conditions d'élimination

Tout se passe comme si le paradoxe suivant était démontré : chacun ignore de quoi il retourne, mais tout le monde sait de quoi il s'agit.

John Brunner

L'aspect délicat dans la recherche de l'existence d'utilités additives réside dans le traitement des conditions d'élimination : celles-ci sont en effet très difficilement testables de manière pratique. Pour s'assurer qu'elles sont vérifiées, sans toutefois les tester, nous avons donc été amenés dans la partie 1 à introduire des hypothèses structurelles (solvabilité restreinte, solvabilité non restreinte et connexité), qui nous ont permis d'induire la condition d'élimination globale (C) à partir de l'axiome d'indépendance et de la condition de Thomsen. Dans les deux chapitres à venir, nous allons essayer d'affaiblir ces hypothèses structurelles. Mais pour cela, il convient de comprendre comment fonctionnent les différentes conditions d'élimination, d'étudier les interactions entre conditions d'ordres différents, et de chercher la structure minimale de l'espace X (le nombre minimum de composants vérifiant la solvabilité restreinte, par exemple) permettant d'induire des conditions d'élimination à partir de conditions d'élimination d'ordres inférieurs. C'est l'objet de ce chapitre.

Il comporte 6 sections. Dans la première, sont étudiés les rapports qui existent entre l'indépendance, une variante de la condition de Thomsen et la condition (C_2), et ce dans le cadre d'espaces bidimensionnels généraux, c'est-à-dire sans recourir à quelque hypothèse structurelle que ce soit. Dans la deuxième section, l'étude est étendue à des ensembles dont un composant vérifie la solvabilité non restreinte ; le résultat principal obtenu dans cette section montre que, d'une manière générale, toutes les conditions d'élimination d'ordre impair doivent être testées, ce qui exclut toute utilisation pratique. C'est pourquoi, dans la troisième section, l'étude porte sur des ensembles dont au moins deux des composants vérifient la solvabilité (restreinte et/ou non restreinte) ; dans les deux cas, si exactement deux composants sont solvables, la condition de Thomsen est

absolument nécessaire pour induire (C_2). La quatrième section est consacrée aux démonstrations des théorèmes et autres lemmes. Enfin, les cinquième et sixième sections contiennent respectivement un résumé et une bibliographie du présent chapitre.

6.1 Absence totale de solvabilité

6.1.1 Indépendance, condition de Thomsen et (C_2)

Nous savons que (C), l'axiome d'élimination globale, est nécessaire à l'existence de toute fonction d'utilité additive. Or, dans les théorèmes d'existence 3.2, 3.3, 3.4, et 3.5, c'est-à-dire en situation de solvabilité restreinte par rapport à tous les composants de X, seules l'indépendance et la condition de Thomsen sont requises. Ces deux dernières propriétés impliquent donc en particulier l'axiome d'élimination d'ordre 2.

Le but de cette sous-section est de montrer qu'en fait, sur des produits cartésiens de dimension 2, la solvabilité, qu'elle soit restreinte ou non, ne joue pas un rôle prépondérant dans l'établissement de cette propriété. Pour cela, on ne peut utiliser la condition de Thomsen telle qu'elle a été présentée au chapitre 3 ; en effet, celle-ci est énoncée en termes de relations d'indifférence, ce qui ne la rend utilisable que si de telles indifférences existent ; or, ceci n'est assuré que s'il y a solvabilité non restreinte, solvabilité restreinte ou connexité. L'exemple suivant montre comment l'absence d'hypothèse structurelle peut rendre la condition de Thomsen énoncée page 24 complètement inutile.

Exemple 6.1 Soit $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$; supposons que $\succsim$ soit représentable sur X par la fonction d'utilité additive $f(x_1, x_2) = \cos x_1 + 10x_2$. Alors deux éléments de X, (x_1, x_2) et (y_1, y_2), sont indifférents entre eux si et seulement si $\cos x_1 + 10x_2 = \cos y_1 + 10y_2$. Puisque x_2 et y_2 sont des nombres entiers, cette égalité est équivalente à $x_2 = y_2$ et $\cos x_1 = \cos y_1$. Autrement dit, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x_1 = y_1 + 2k\pi$ ou $x_1 = -y_1 + 2k\pi$; dans les deux cas, si $x_1 \neq y_1$, cela impliquerait que π est un rationnel. Par conséquent, aucune relation d'indifférence n'existe dans X (autre que la relation triviale $x \sim x$), et, donc, la condition de Thomsen est trivialement vérifiée ; ainsi, il est bien évident qu'elle ne structure absolument pas l'espace X, et, par voie de conséquence, qu'elle ne peut enrichir l'indépendance au point d'induire (C_2). ♦

Pour étudier le lien entre l'indépendance, la condition de Thomsen et l'axiome d'élimination d'ordre 2 sur des espaces complètement généraux (c'est-à-dire sans hypothèses structurelles), il convient donc de modifier légèrement la condition de Thomsen pour la rendre utilisable sur n'importe quel espace. La solution qui vient immédiatement à l'esprit est de remplacer les relations $\sim$, trop restrictives, par des relations $\succsim$. Ainsi, l'on obtient la condition de Thomsen élargie :

Axiome 6.1 (Thomsen élargie) *$\forall x_1, y_1, z_1 \in X_1$, $\forall x_2, y_2, z_2 \in X_2$, si $(x_1, z_2) \succsim (z_1, y_2)$ et $(z_1, x_2) \succsim (y_1, z_2)$ alors $(x_1, x_2) \succsim (y_1, y_2)$.*

L'interprétation graphique de cette nouvelle condition est fournie par la figure 6.1. D'une manière générale, si la condition de Thomsen élargie est vérifiée, alors la condition

de Thomsen (comme énoncée page 24) l'est aussi ; la réciproque est fausse sauf en situation de solvabilité (restreinte ou non), auquel cas les 2 conditions sont équivalentes.

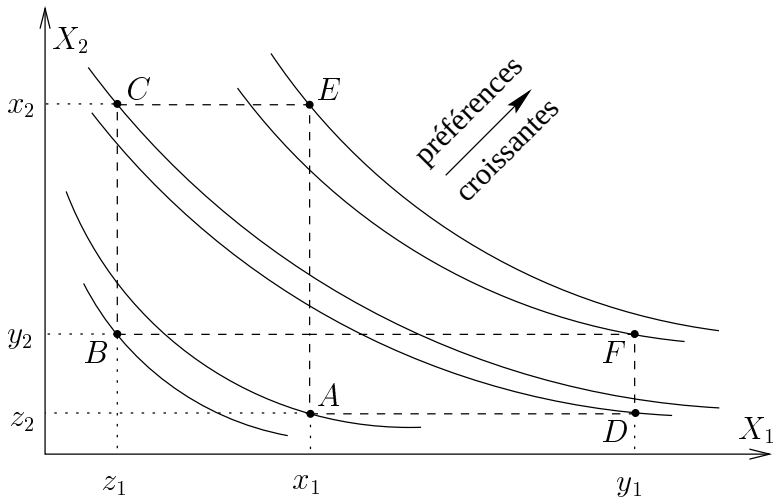


FIG. 6.1: La condition de Thomsen élargie.

Cette nouvelle condition nous permet alors d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 6.1 *Soit $X = X_1 \times X_2$, muni d'un préordre large total $\succsim$. Supposons que $\succsim$ vérifie l'axiome d'indépendance (axiome 2.2) et la condition de Thomsen élargie (axiome 6.1). Alors, $(X, \succsim)$ satisfait aussi l'axiome d'élimination du second ordre.*

6.1.2 L'axiome (C_2) sur des espaces de dimension n

Dans cette sous-section, je voudrais montrer l'importance relative des différents axiomes (transitivité de $\succsim$, indépendance, condition de Thomsen élargie) dans l'obtention de (C_2), et ce en environnement non solvable. D'après sa définition (page 26), l'axiome (C_2) fait intervenir des éléments $(x_1^i, \ldots, x_n^i)$, $(y_1^i, \ldots, y_n^i)$, où $i \in \{1, 2, 3\}$, et où, $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$, (x_j^1, x_j^2, x_j^3) est une permutation de (y_j^1, y_j^2, y_j^3) ; le nombre de permutations étant fini, on peut tester toutes les configurations correspondantes. A cet effet, j'ai écrit un programme qui permet de déduire, pour une configuration donnée, quelles sont les propriétés parmi la transitivité de $\succsim$, l'indépendance, la condition de Thomsen élargie et les différentes combinaisons de ces axiomes, celles qui permettent de déduire l'axiome d'élimination d'ordre 2. Le résultat de ce programme sur l'ensemble des configurations possibles est résumé dans le tableau suivant, qui présente, pour chaque axiome ou combinaison d'axiomes, le nombre de configurations dans lesquelles la condition (C_2) a pu être induite :

nb comp	Ø	Tr	Ind	Tr + Ind	Thomsen	Ind + Thomsen	¬trouvé
2	6	2	4	22	4	-	-
3	10	2	12	162	-	6	24
4	18	2	28	946	-	12	290
5	34	2	60	5130	-	20	2530

La colonne "nb comp" désigne le nombre de composants des produits cartésiens testés, "Ø" contient le nombre de configurations pour lesquelles (C_2) est trivialement vérifiée, "Tr" regroupe les configurations où (C_2) est impliquée par la transitivité uniquement, "Ind" pour l'indépendance, "Thomsen" pour la condition de Thomsen élargie, et ¬trouvé pour les configurations dans lesquelles aucune combinaison de ces axiomes n'est suffisante pour permettre de déduire (C_2).

Plusieurs remarques doivent être formulées. D'abord, l'indépendance et la condition de Thomsen élargie n'impliquent (C_2) que pour des produits cartésiens de dimension 2 ; au delà de ce nombre de composants, il faut rajouter d'autres conditions, telles que la solvabilité restreinte ou des sous-parties de (C_i). Ensuite, on remarque que la condition de Thomsen joue un rôle assez négligeable par rapport à l'indépendance. Enfin, c'est surtout la combinaison de l'indépendance et de la transitivité qui permet de déduire l'axiome (C_2).

6.2 Solvabilité non restreinte sur un composant

Le but de cette section est d'étudier la représentabilité de produits cartésiens à **deux composants**, dont un n'est pas solvable. On montre alors (cf. Gonzales (1995)) que, contrairement au cas de deux composants solvables, pour $m \geq 3$ l'axiome d'élimination d'ordre m, (C_m), n'implique pas l'axiome d'élimination d'ordre $m+1$. Cependant, si (C_m) est "enrichi" par une certaine condition, (S_{m+1}) pour ne pas la nommer, alors (C_{m+1}) est vérifié. (S_{m+1}) est une sous-partie symétrique de (C_{m+1}). A la fin de cette section, une famille générique d'exemples montre que, pour m pair, (C_m) peut être vérifié sans que (C_{m+1}) le soit. Ainsi, il semble peu probable de trouver une axiomatique facilement testable indiquant l'existence d'utilités additives lorsque la solvabilité non restreinte n'est vérifiée que par un composant de X. Cette remarque constitue une généralisation de Scott et Suppes (1958). La solvabilité non restreinte implique la solvabilité restreinte ; le résultat est donc encore valable lorsqu'un seul composant de X vérifie la solvabilité restreinte. Cette section peut aussi servir de complément à Fishburn (1981), qui montre l'unicité des utilités additives (lorsqu'elles existent) sur de tels ensembles de préférence.

6.2.1 Nécessité de la condition de Thomsen

Examinons les théorèmes d'existence mentionnés dans la partie précédente. Une constatation s'impose : on différencie toujours le cas où le produit cartésien X possède deux composants du cas où il en a plus. Cette différence se traduit par le besoin de recourir ou non à la condition de Thomsen. En effet, un résultat classique montre

que, dans des produits cartésiens de dimension 2 où tous les composants sont solvables (solvabilité restreinte ou non), l'axiome d'élimination du second ordre ne peut être impliqué seulement par l'indépendance. Un contre-exemple connu (voir par exemple Wakker (1989, page 71)) illustrant cette propriété est le suivant : $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $\succsim$ est défini par la fonction d'utilité $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + \min\{x_1, x_2\}$ (cf. figure 6.2) ; en effet, il est

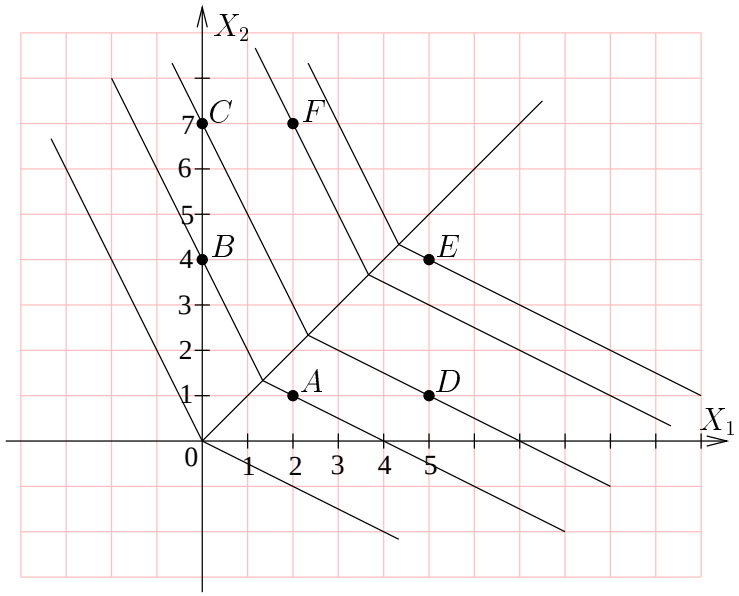


FIG. 6.2: Courbes d'indifférence $x_1 + x_2 + \min\{x_1, x_2\} = \text{constante}$.

relativement facile de montrer que $\succsim$ vérifie l'indépendance, et, pourtant, $\succsim$ ne vérifie pas la condition de Thomsen car

$$\begin{array}{ll} A = (2,1) \sim (0,4) = B & f(2,1) = f(0,4) = 4, \\ C = (0,7) \sim (5,1) = D & f(0,7) = f(5,1) = 7, \\ E = (5,4) \succ (2,7) = F & 13 = f(5,4) > f(2,7) = 11. \end{array}$$

Puisque le but de cette sous-section est d'étudier des cas plus généraux que ceux traités par les théorèmes précédents dans la mesure où les hypothèses structurelles sont allégées, nous allons encore rencontrer cette même différence. Cependant, il est intéressant de donner ici un autre contre-exemple, qui sera utile pour comprendre la sous-section suivante.

Supposons que $X = X_1 \times X_2$, où $X_1 = \mathbb{R}$ et $X_2 = \{0, 2, 4, 6\}$, et que $\succsim$ est représentable sur X par la fonction d'utilité suivante :

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2 & \text{si} \quad x_2 \leq 4 \\ \frac{1}{3}(x_1 \bmod 3)^2 + 3(x_1 \operatorname{div} 3) + 6.75 & \text{si} \quad x_2 = 6 \end{cases} \tag{6.1}$$

où mod et div correspondent respectivement au modulo et à la division entière, c'est-à-dire que, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $(x \bmod y) \in [0, y[$, $(x \operatorname{div} y) \in \mathbb{N}$ et $x = (x \bmod y) + (x \operatorname{div} y)y$.

Travailler dans l'espace $X_1 \times X_2$, comme suggéré par la définition de f et la première partie de ce mémoire, n'est pas très efficace car, le second composant étant discret, il

n'existe aucune courbe d'indifférence dans X ; à titre indicatif, la moitié gauche de la figure 6.3 représente graphiquement $\succsim$ sur $X_1 \times X_2$: les droites horizontales contiennent les éléments de X, et les courbes en pointillés permettent de relier entre eux les points indifférents d'après $\succsim$. Essayons de trouver un autre espace de travail plus efficace. Fixons la valeur du deuxième composant à x_2 ; dans ce cas, la fonction d'utilité $f(x_1, x_2)$ est une fonction d'un seul paramètre, x_1, et est, de surcroît, continue sur $\mathbb{R}$. Pour bien marquer le fait que cette fonction ne dépend que de x_1, nous allons la noter $f_{[x_2]}(x_1)$. Elle est représentée sur la partie droite de la figure 6.3. Il me semble que la figure parle d'elle même : du coté gauche, $\succsim$ n'admettant aucune les courbes d'indifférence, on a des difficultés à représenter la relation de préférence ; du coté droit, la relation $\succsim$ est très facilement représentable par le graphe des fonctions $f_{[0]}(x_1)$, $f_{[2]}(x_1)$, $f_{[4]}(x_1)$ et $f_{[6]}(x_1)$. Il semble donc relativement attractif de travailler dans l'espace $X_1 \times \mathbb{R}$, où $\mathbb{R}$ représente l'ensemble image de X par f, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs que peut prendre $f(x_1, x_2)$ sur X.

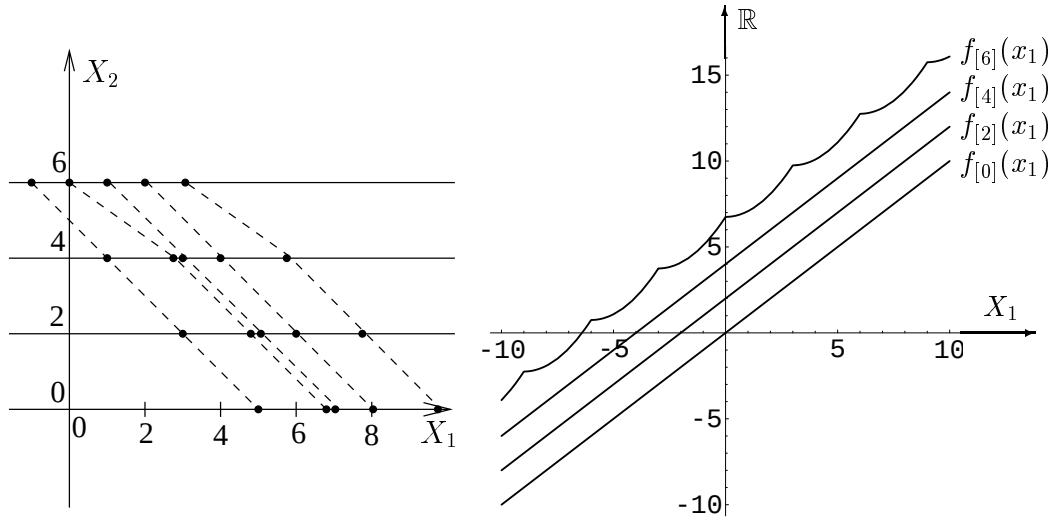


FIG. 6.3: Passage de l'espace X à l'espace de travail.

Le seul problème qui se pose est de traduire la définition de l'indépendance dans le nouvel espace de travail.

$$(x_1, x_2) \succsim (y_1, x_2) \Leftrightarrow (x_1, y_2) \succsim (y_1, y_2)$$

est équivalent à

$$f_{[x_2]}(x_1) \geq f_{[x_2]}(y_1) \Leftrightarrow f_{[y_2]}(x_1) \geq f_{[y_2]}(y_1). \tag{6.2}$$

$$(x_1, x_2) \succsim (x_1, y_2) \Leftrightarrow (y_1, x_2) \succsim (y_1, y_2)$$

est équivalent à

$$f_{[x_2]}(x_1) \geq f_{[y_2]}(x_1) \Leftrightarrow f_{[x_2]}(y_1) \geq f_{[y_2]}(y_1). \tag{6.3}$$

Autrement dit, et puisque nous considérons ici des fonctions continues, les graphes de $f_{[x_2]}$ et de $f_{[y_2]}$ ne se coupent jamais. Il est clair que les deux conditions (6.2) et (6.3)

sont satisfaites par la fonction f définie par (6.1) car toute fonction $f_{[x_2]}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $x_1 + 6 \leq \frac{1}{3}(x_1 \bmod 3)^2 + 3(x_1 \operatorname{div} 3) + 6.75$ pour tout $x_1 \in X_1$.

Par contre, l'axiome d'élimination d'ordre 2 ne peut être vérifié car

$$\begin{array}{rcccl} f(1.5,6) & = & f(3.5,4) & = & 7.5, \\ f(3.5,2) & = & f(\sqrt{21}/2-3,6) & = & 5.5, \\ f(\sqrt{21}/2-3,4) = \sqrt{21}/2+1 & < & f(1.5,2) & = & 3.5. \end{array}$$

Autrement dit, l'indépendance ne permet pas de déduire (C_2) ; pour obtenir ce dernier axiome, il faut au moins enrichir l'indépendance par une condition du type condition de Thomsen. Notons que d'après la sous-section précédente, l'adjonction de la condition de Thomsen élargie serait suffisante pour entraîner (C_2).

6.2.2 Interactions entre $(\mathbf{C}_m)$, $(\mathbf{S}_{m+1})$ et $(\mathbf{C}_{m+1})$

Le but de cette sous-section est de montrer les relations exactes qui existent entre (C_m) et (C_{m+1}) lorsqu'un seul composant de X vérifie l'axiome de solvabilité non restreinte. Nous savons déjà que (C_{m+1}) implique (C_m). Nous allons voir maintenant comment obtenir (C_{m+1}). Pour cela, commençons par définir une nouvelle condition d'élimination : (S_{m+1}).

Condition (S_{m+1}) [axiome d'élimination symétrique d'ordre $m+1$] : *Supposons que $m+2 = 2k$. soient $m+2$ éléments de X_1, $x_1^1, \ldots, x_1^{m+2}$, et $m+2$ éléments de X_2, $x_2^1, \ldots, x_2^k$ et $y_2^1, \ldots, y_2^k$, tels que, $\forall i \leq k < j$, $x_1^i \neq x_1^j$, et, $\forall i, j < k$, $x_2^i \neq y_2^j$. Alors,*

$$\left(\begin{array}{ccc} (x_1^1, x_2^1) & \succsim & (x_1^k, y_2^1) \\ (x_1^2, x_2^2) & \succsim & (x_1^1, y_2^2) \\ (x_1^3, x_2^3) & \succsim & (x_1^2, y_2^3) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_1^k, x_2^k) & \succsim & (x_1^{k-1}, y_2^k) \\ (x_1^{k+1}, y_2^1) & \succsim & (x_1^{m+2}, x_2^1) \\ (x_1^{k+2}, y_2^2) & \succsim & (x_1^{k+1}, x_2^2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_1^{m+1}, y_2^{k-1}) & \succsim & (x_1^m, x_2^{k-1}) \end{array}\right) \Rightarrow (x_1^{m+2}, y_2^k) \precsim (x_1^{m+1}, x_2^k).$$

De par sa définition, (S_{m+1}) est une sous-partie symétrique de (C_{m+1}). On peut maintenant montrer que (C_m) implique (C_{m+1}) sauf dans les cas symétriques traités par (S_{m+1}). D'où le théorème :

Théorème 6.2 *Soient X un produit cartésien de dimension 2 et $\succsim$ un préordre large total sur X. Supposons que $(X, \succsim)$ vérifie l'axiome d'élimination (C_m), $m \geq 2$, et qu'au moins un composant de X vérifie l'axiome de solvabilité non restreinte. Alors,*

- *si m est impair, $(X, \succsim)$ satisfait aussi (C_{m+1}).*
- *si m est pair et si $(X, \succsim)$ satisfait (S_{m+1}), $(X, \succsim)$ satisfait aussi (C_{m+1}).*

Autrement dit, puisque (C_{m+1}) implique (C_m) et (S_{m+1}), le corollaire suivant est évident :

Corollaire 6.1 *Soient X un produit cartésien de dimension 2 et $\succsim$ un préordre large total sur X. Supposons qu'au moins un composant de X vérifie la solvabilité non restreinte. Alors, pour $m \geq 2$,*

- *si m est impair, $(C_{m+1}) \Leftrightarrow (C_m)$.*
- *si m est pair, $(C_{m+1}) \Leftrightarrow (S_{m+1}) + (C_m)$.*

Evidemment, le corollaire et le théorème ci-dessus peuvent paraître restrictifs à certains égards : ils ne portent que sur des ensembles de dimension 2, et requièrent non pas la solvabilité restreinte sur un composant, mais la solvabilité non restreinte sur un composant. Mais en fait, nous verrons dans la sous-section suivante une famille générique d'exemples montrant que la condition (S_{m+1}) ne peut être déduite de (C_m) lorsque la solvabilité restreinte (ou non restreinte) n'est vérifiée que par un composant ; ainsi, si l'on veut obtenir des théorèmes d'existence d'utilités additives, on devra avoir recours à une infinité de conditions d'élimination symétrique. Dans ces conditions, on ne peut espérer trouver grâce à une généralisation du théorème et/ou du corollaire ci-dessus des théorèmes d'existence d'utilités additives applicables en pratique.

6.2.3 Difficulté du test de (C)

Cette sous-section est consacrée à l'étude d'une famille générique d'exemples montrant que l'on ne peut déduire (C_{m+1}) de (C_m) lorsque seulement un composant de X est solvable. Ici, on utilise encore la solvabilité non restreinte ; en effet, lorsqu'il y a solvabilité non restreinte, il y a aussi solvabilité restreinte (la réciproque est fausse) ; par conséquent, étudier seulement des exemples dans lesquels la solvabilité non restreinte est vérifiée par un composant de l'espace est suffisant pour montrer que $(C_m) \not\Rightarrow (C_{m+1})$ dans le cadre le plus général possible. Nous procédons pour cela en deux étapes ; dans la première, nous examinons un exemple montrant que (C_2) peut être vérifié sans que (C_3) le soit pour autant. La deuxième étape généralise ce résultat à tous les axiomes d'élimination d'ordres pairs. Bien évidemment, si cette propriété est vraie pour des ensembles X de dimension 2, elle reste encore vraie pour des ensembles de dimension n.

Axiome d'élimination d'ordre 3

Nous allons suivre ici l'approche élaborée dans la sous-section 6.2.1. Supposons que $X = \mathbb{R} \times \{0, 2, 4, 6\}$ et que $\succsim$ sur X soit défini par la fonction d'utilité suivante :

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2 & \text{si} \quad x_2 \leq 4 \\ 0.5(x_1 \bmod 2)^2 + (x_1 \operatorname{div} 2) + 6.5 & \text{si} \quad x_2 = 6 \end{cases} \tag{6.4}$$

L'axiome d'indépendance est vérifié parce que $f_{[i]}$ et $f_{[j]}$ sont comonotones et strictement croissantes pour tous i, j, et parce que $0.5(x \bmod 2)^2 + (x \operatorname{div} 2) + 6.5 > x + 6$ pour tout x, de telle sorte que les graphes de $f_{[i]}$ et de $f_{[j]}$ n'ont jamais d'intersection.

Pour la condition de Thomsen, la justification est un peu plus complexe. Mais la figure 6.4 peut aider à mieux comprendre comment cette condition s'exprime dans l'espace de travail $X_1 \times \mathbb{R}$.

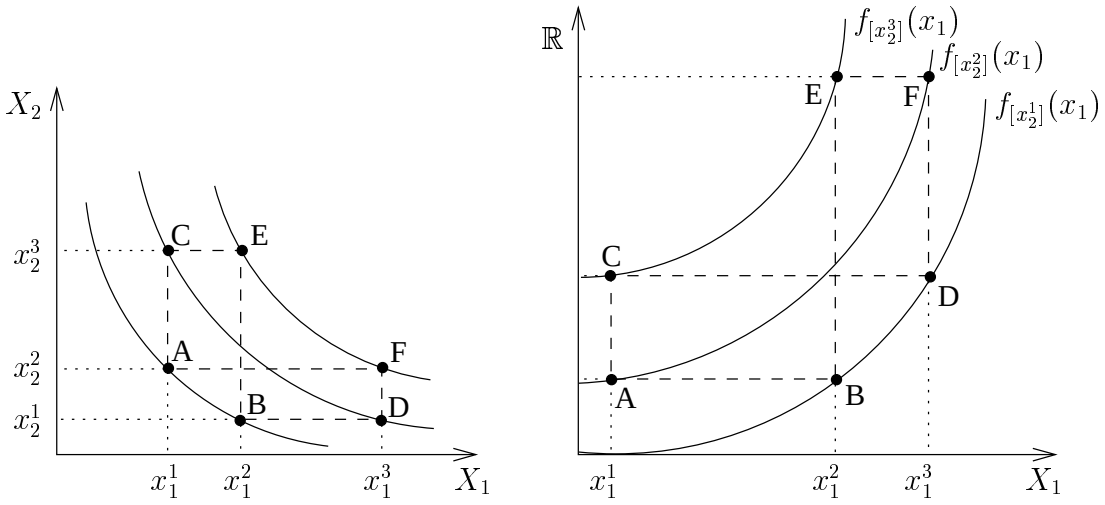


FIG. 6.4: Traduction de la condition Thomsen

$$\Big[(x_1^1, x_2^2) \sim (x_1^2, x_2^1) \text{ et } (x_1^1, x_2^3) \sim (x_1^3, x_2^1)\Big] \Rightarrow (x_1^2, x_2^3) \sim (x_1^3, x_2^2).$$

Donc, en termes de fonctions d'utilité,

$$f_{[x_2^2]}(x_1^1) = f_{[x_2^1]}(x_1^2), \quad f_{[x_2^3]}(x_1^1) = f_{[x_2^1]}(x_1^3) \quad \text{et} \quad f_{[x_2^3]}(x_1^2) = f_{[x_2^2]}(x_1^3).$$

D'après la première égalité, $x_1^2 = f_{[x_2^1]}^{-1} \circ f_{[x_2^2]}(x_1^1)$; d'après la seconde égalité, $x_1^3 = f_{[x_2^1]}^{-1} \circ f_{[x_2^3]}(x_1^1)$. Par conséquent, la troisième égalité peut être écrite de la manière suivante :

$$f_{[x_2^3]} \circ f_{[x_2^1]}^{-1} \circ f_{[x_2^2]}(x_1^1) = f_{[x_2^2]} \circ f_{[x_2^1]}^{-1} \circ f_{[x_2^3]}(x_1^1).$$

Mais ceci doit être vrai pour tout x_1^1. Par conséquent, la condition de Thomsen s'écrit :

$$\forall x_2^1 \precsim_2 x_2^2 \precsim_2 x_2^3, \forall x_1 \in X_1, \quad f_{[x_2^3]} \circ f_{[x_2^1]}^{-1} \circ f_{[x_2^2]}(x_1) = f_{[x_2^2]} \circ f_{[x_2^1]}^{-1} \circ f_{[x_2^3]}(x_1). \tag{6.5}$$

La figure 6.4 montre bien le passage de l'espace $X_1 \times X_2$ au nouvel espace de travail : les courbes d'indifférence de $X_1 \times X_2$ deviennent des droites horizontales dans l'espace de travail; les droites horizontales de $X_1 \times X_2$ deviennent les fonctions $f_{[\cdot]}(\cdot)$ dans le nouvel espace de travail. Ainsi, la condition de Thomsen s'exprime sous la forme suivante :
Si

- les intersections de la droite horizontale AB avec les graphes des fonctions $f_{[x_2^2]}(\cdot)$ et $f_{[x_2^1]}(\cdot)$ ont pour abscisses respectives x_1^1 et x_1^2,
- les intersections de la droite horizontale CD avec les graphes des fonctions $f_{[x_2^3]}(\cdot)$ et $f_{[x_2^2]}(\cdot)$ ont pour abscisses respectives x_1^1 et x_1^3,

alors

- la droite horizontale intersectant le graphe de la fonction $f_{[x_2^3]}(\cdot)$ en abscisse x_1^2 doit aussi intersecter le graphe de la fonction $f_{[x_2^2]}(\cdot)$ en abscisse x_1^3.

Montrons maintenant que la condition de Thomsen est bien vérifiée par la relation $\succsim$. Supposons que $x_2^3 \neq 6$, alors (6.5) est clairement équivalent à $((x + x_2^2) - x_2^1) + x_2^3 = ((x + x_2^3) - x_2^1) + x_2^2$; par conséquent, dans ce cas, la condition de Thomsen est satisfaite par (6.4). Maintenant, supposons que $x_2^3 = 6$. si, de plus, $x_2^2 = 6$, alors (6.5) trivialement vérifiée ; si $x_2^2 \neq 6$, alors la condition de Thomsen est aussi vérifiée car (6.5) est équivalent à $f_{[6]}(x+x_2^2-x_2^1) = f_{[6]}(x)+x_2^2-x_2^1$; et, puisque $x_2^2-x_2^1$ sont des multiples de 2, (6.5) est équivalent à $f_{[6]}(x+2) = f_{[6]}(x)+2$. D'après (6.1), f satisfait visiblement cette condition. Par conséquent, la condition de Thomsen est vérifiée par la relation de préférence $\succsim$.

Passons maintenant à la condition de Thomsen élargie : Supposons que

$$(x_1^1, x_2^2) \succsim (x_1^2, x_2^1) \quad \text{et} \quad (x_1^3, x_2^1) \succsim (x_1^1, x_2^3) \ ;$$

en termes d'utilités, ces deux relations sont équivalentes à

$$f_{[x_2^2]}(x_1^1) \geq f_{[x_2^1]}(x_1^2) \quad \text{et} \quad f_{[x_2^1]}(x_1^3) \geq f_{[x_2^3]}(x_1^1).$$

Puisque les fonctions $f_{[\cdot]}(\cdot)$ sont continues et varient de $-\infty$ à $+\infty$, il existe $y_1^1 \in \mathbb{R}$ tel que $f_{[x_2^2]}(y_1^1) = f_{[x_2^1]}(x_1^2)$. Pour être exact, l'existence de y_1^1 provient de la solvabilité non restreinte. Or, les $f_{[\cdot]}(\cdot)$ sont strictement croissantes, ce qui implique que $x_1^1 \geq y_1^1$. Par conséquent, $f_{[x_2^1]}(x_1^3) \geq f_{[x_2^3]}(x_1^1) \geq f_{[x_2^3]}(y_1^1)$. De même, il existe $y_1^3 \in \mathbb{R}$ tel que $f_{[x_2^1]}(y_1^3) = f_{[x_2^3]}(y_1^1)$; $x_1^3 \geq y_1^3$. Mais alors,

$$f_{[x_2^2]}(y_1^1) = f_{[x_2^1]}(x_1^2) \quad \text{et} \quad f_{[x_2^1]}(y_1^3) = f_{[x_2^3]}(y_1^1).$$

Donc, d'après la condition de Thomsen, $f_{[x_2^3]}(x_1^2) = f_{[x_2^2]}(y_1^3)$. Or $x_1^3 \geq y_1^3$ et $f_{[x_2^2]}$ est une fonction strictement croissante. Donc

$$f_{[x_2^3]}(x_1^2) \leq f_{[x_2^2]}(x_1^3).$$

Par conséquent, la condition de Thomsen élargie est vérifiée. Mais d'après le théorème 6.1, si l'indépendance et la condition de Thomsen élargie sont vérifiées, alors (C_2) l'est aussi. Par conséquent, $\succsim$ vérifie la condition d'élimination du second ordre.

Cependant, $\succsim$ ne vérifie pas l'axiome d'élimination du troisième ordre. En effet,

$$\begin{array}{rclcl} f_{[6]}(1) & = & f_{[4]}(3) & = & 7, \\ f_{[0]}(3) & = & f_{[2]}(1) & = & 3, \\ f_{[2]}(1.5) & = & f_{[0]}(3.5) & = & 3.5, \\ f_{[4]}(3.5) = 7.5 & < & f_{[6]}(1.5) & = & 7.625. \end{array}$$

Axiome d'élimination d'ordre m

Généralisons l'exemple ci-dessus de la manière suivante : soient m un nombre impair supérieur ou égal à trois, $X = \mathbb{R} \times \{0, 2, 4, \ldots, 2m\}$, et $\succsim$ le préordre large total sur X représenté par la fonction d'utilité suivante :

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2 & si \quad x_2 < 2m \\ 0.5(x_1 \bmod 2)^2 + 2(x_1 \operatorname{div} 2) + m^2 + 2m - 2.5 & si \quad x_2 = 2m \end{cases} \tag{6.6}$$

Alors, le lemme suivant est vrai.

Lemme 6.1 *(C_i) est vérifié pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, m+1\}$.*

Cependant (C_{m+2}) n'est pas vérifiée. En effet, l'exemple suivant viole cette condition.

$$\begin{pmatrix} (2(m-1)+1, 0) & \sim & (1, 2(m-1)) \\ (4(m-1)+1, 0) & \sim & (2(m-1)+1, 2(m-1)) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ ((m+1)(m-1)+1, 0) & \sim & ((m-1)(m-1)+1, 2(m-1)) \\ (1, 2m) & \sim & ((m+1)(m-1)+1, 2(m-1)) \\ (0, 2(m-1)) & \sim & (2(m-1), 0) \\ (2(m-1), 2(m-1)) & \sim & (4(m-1), 0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ ((m-1)(m-1), 2(m-1)) & \sim & ((m+1)(m-1), 0) \\ ((m+1)(m-1), 2(m-1)) & \prec & (0, 2m) \end{pmatrix}$$

en effet,

$$\begin{array}{rcl} f_{[0]}(2(m-1)+1) & = & f_{[2(m-1)]}(1) = 2(m-1)+1 \\ f_{[0]}(4(m-1)+1) & = & f_{[2(m-1)]}(2(m-1)+1) = 4(m-1)+1 \\ & \vdots & \\ f_{[0]}((m+1)(m-1)+1) & = & f_{[2(m-1)]}((m-1)(m-1)+1) = m^2 \\ f_{[2m]}(1) & = & f_{[2(m-1)]}((m+1)(m-1)+1) = m^2+2m-2 \\ f_{[2(m-1)]}(0) & = & f_{[0]}(2(m-1)) = 2(m-1) \\ f_{[2(m-1)]}(2(m-1)) & = & f_{[0]}(4(m-1)) = 4(m-1) \\ & \vdots & \\ f_{[2(m-1)]}((m-1)(m-1)) & = & f_{[0]}((m+1)(m-1)) = m^2-1 \\ f_{[2(m-1)]}((m+1)(m-1)) = m^2+2m-3 & < & f_{[2m]}(0) = m^2+2m-2.5 \end{array}$$

On remarquera que la séquence de points ci-dessus viole manifestement (S_{m+2}), et, par voie de conséquence, (C_{m+2}). Cet exemple générique montre qu'il est illusoire de chercher une axiomatisation à base de conditions d'élimination d'ordres faibles (inférieurs ou égaux à 3 par exemple) lorsque seulement un composant vérifie la solvabilité restreinte ou non restreinte. C'est pourquoi, dans tout ce qui suit, nous supposerons toujours qu'au moins deux composants de l'espace vérifient soit la solvabilité restreinte, soit la solvabilité non restreinte.

6.3 Solvabilité non restreinte sur au moins deux composants

Nous étudierons dans le chapitre 8 des théorèmes d'existence d'utilités additives sur des espaces multidimensionnels pour lesquels au moins deux composants vérifient l'hypothèse de solvabilité (restreinte ou non). L'idée sous-jacente à ces théorèmes est de construire une fonction d'utilité additive sur les sous-espaces formés par les composants solvables, et, dans une deuxième phase, d'étendre la fonction d'utilité ainsi créée à l'espace X tout entier. Un problème se pose alors, c'est celui de la condition de Thomsen. En effet, le théorème d'existence sur le sous-espace formé par les composants solvables requiert la condition de Thomsen uniquement si ce dernier est de dimension 2 (cf. les théorèmes 3.2, 3.3, 3.4 et 3.5). On peut alors se poser la question suivante : pourquoi doit-on utiliser dans ces théorèmes la condition de Thomsen en dimension 2 et pas en dimension 3 ? Est-ce parce que l'espace X a au moins trois composants, ou bien est-ce parce que ces composants sont solvables ?

Nous allons tenter de répondre ici à cette question. Pour cela, nous allons travailler dans un premier temps sur des espaces de dimension 3, et, ensuite, nous généraliserons les résultats obtenus à des espaces de dimension n.

6.3.1 Produits cartésiens de dimension 3

Dans cette sous-section, nous nous restreindrons à des produits cartésiens à trois composants dont deux seulement sont solvables ; plus précisément, nous allons utiliser la solvabilité non restreinte. Toute cette sous-section est consacrée à la démonstration du théorème suivant :

Contre-exemple 6.1 *Soit X un produit cartésien à 3 composants. Soit $\succsim$ un préordre large total sur X tel que tous les composants de X soient essentiels mais seulement 2 vérifient la solvabilité non restreinte, et tel que $\succsim$ vérifie l'axiome archimédien (voir page 38). Alors l'axiome d'indépendance n'implique pas la condition de Thomsen.*

La démonstration de ce théorème s'exécute en deux temps ; premièrement, nous allons étudier quelques propriétés induites par l'indépendance sur des produits cartésiens du type $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{x_3^0, x_3^1\}$ — où x_3^0 et x_3^1 sont des constantes arbitraires. Ces propriétés vont nous permettre de déduire une méthode générale de construction de relations de préférence satisfaisant les hypothèses du théorème. Cette méthode consiste à définir $\succsim$ à partir d'une de ses fonctions d'utilité h. Dans un deuxième temps, nous allons exhiber une relation particulière qui ne vérifie pas la condition de Thomsen.

Soit $\succsim$ une relation de préférence sur $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{x_3^0, x_3^1\}$ vérifiant l'axiome d'indépendance. Supposons que les deux premiers composants de X vérifient la solvabilité non restreinte, et que $\succsim$ soit représentable par une fonction d'utilité h. D'après l'axiome d'indépendance,

$$\forall x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R},\ (x_1, x_2, x_3^0) \sim (y_1, y_2, x_3^0) \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3^1) \sim (y_1, y_2, x_3^1).$$

Ceci signifie que les courbes d'indifférence sont identiques dans les plans $\{x_3 = x_3^0\}$ et $\{x_3 = x_3^1\}$. **Attention :** même si la forme des courbes d'indifférence est strictement la même dans les deux plans, la valeur de l'utilité sur ces courbes diffère suivant les plans $\{x_3 = \text{constante}\}$; dans le cas contraire, on aurait $h(x_1, x_2, x_3^0) = h(x_1, x_2, x_3^1)$, ce qui, d'après l'axiome d'indépendance, serait également vrai pour tout couple (y_1, y_2), et, par conséquent, le troisième composant ne serait pas essentiel, ce qui serait contraire aux hypothèses du théorème.

Cette remarque suggère la construction de deux fonctions $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, représentant respectivement l'utilité dans le plan $\{x_3 = x_3^0\}$ et la transformation de cette utilité pour passer du plan $\{x_3 = x_3^0\}$ au plan $\{x_3 = x_3^1\}$. En termes plus mathématiques,

$$\begin{aligned} h(x_1, x_2, x_3^0) &= g(x_1, x_2), \\ h(x_1, x_2, x_3^1) &= \varphi \circ g(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Notons que les courbes d'indifférence sont les courbes $g(x_1, x_2) = \text{constante}$. La construction de $\succsim$ sur X se réduit alors à projeter les courbes obtenues grâce à la fonction g sur les plans $\{x_3 = x_3^0\}$ et $\{x_3 = x_3^1\}$, et à utiliser la fonction φ afin de modifier les valeurs associées aux courbes du plan $\{x_3 = x_3^1\}$.

Garantir le fait que l'axiome d'indépendance n'est pas violé à l'intérieur des plans, c'est-à-dire lorsque l'on compare des éléments appartenant à un même plan $\{x_3 = \text{constante}\}$, est relativement aisé : il suffit que $g(x_1, x_2)$ soit strictement croissante en x_1 et x_2 — c'est-à-dire que $g(x_1, x_2) \geq g(y_1, x_2) \Leftrightarrow x_1 \geq y_1$ et $g(x_1, x_2) \geq g(x_1, y_2) \Leftrightarrow x_2 \geq y_2$ — et que φ soit aussi strictement croissante. En effet, supposons que ces conditions soient vérifiées. Alors

$$\begin{aligned} \forall x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2, x_3^0) \succsim (y_1, x_2, x_3^0) &\Leftrightarrow g(x_1, x_2) \geq g(y_1, x_2) \\ &\Leftrightarrow x_1 \geq y_1 \\ &\Leftrightarrow g(x_1, y_2) \geq g(y_1, y_2) \\ &\Leftrightarrow (x_1, y_2, x_3^0) \succsim (y_1, y_2, x_3^0). \end{aligned}$$

Le même argument s'appliquerait si les rôles de x_1 et x_2 avaient été échangés. Si φ est strictement croissante,

$$\begin{aligned} \forall x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2, x_3^0) \succsim (y_1, y_2, x_3^0) &\Leftrightarrow g(x_1, x_2) \geq g(y_1, y_2) \\ &\Leftrightarrow \varphi \circ g(x_1, x_2) \geq \varphi \circ g(y_1, y_2) \\ &\Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3^1) \succsim (y_1, y_2, x_3^1), \end{aligned}$$

et donc l'indépendance est vérifiée dans les deux plans $\{x_3 = \text{constante}\}$.

Maintenant, nous devons examiner les contraintes imposées par l'axiome d'indépendance lorsque les deux éléments n'appartiennent pas au même plan, c'est-à-dire les contraintes imposées par des relations de préférence similaires à $(x_1, x_2, x_3^0) \succsim (y_1, x_2, x_3^1)$. Nous appellerons ces contraintes "contraintes d'indépendance inter plans". Leur nature est expliquée dans la figure 6.5. Puisque les courbes d'indifférence sont les mêmes dans les deux plans, il est pratique de superposer celles-ci sur le même dessin ; pour les différencier, j'ai dessiné les courbes d'indifférence du plan $\{x_3 = x_3^0\}$ en traits gras,

contrairement à celles du plan $\{x_3 = x_3^1\}$. g est strictement croissante en x_1 et x_2, donc les courbes "$g(x_1, x_2) =$ constante" sont décroissantes — à condition qu'elles soient continues, ce que nous supposerons — et, donc, elles peuvent être écrites de manière équivalente comme "$x_2 =$ fonction(x_1)", où fonction est strictement décroissante. Dans la figure 6.5, j'ai affecté à chaque courbe sa fonction.

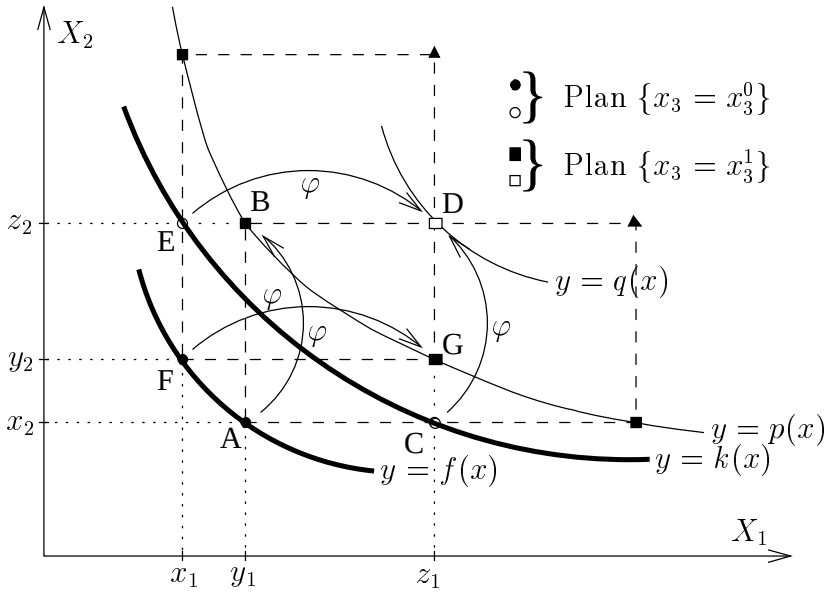


FIG. 6.5: contraintes inter plans

Supposons que

$$A = (y_1, x_2, x_3^0) \sim B = (y_1, z_2, x_3^1).$$

Alors, d'après l'axiome d'indépendance,

$$C = (z_1, x_2, x_3^0) \sim D = (z_1, z_2, x_3^1).$$

Supposons maintenant que

$$F = (x_1, y_2, x_3^0) \sim A = (y_1, x_2, x_3^0) \sim G = (z_1, y_2, x_3^1).$$

Alors, encore par indépendance,

$$E = (x_1, z_2, x_3^0) \sim D = (z_1, z_2, x_3^1).$$

Par conséquent, nous devons aussi avoir

$$E = (x_1, z_2, x_3^0) \sim C = (z_1, x_2, x_3^0).$$

Exprimons maintenant cette relation en termes fonctionnels. Etant donné un point arbitraire $C = (z_1, x_2)$ et deux fonctions connues f et p, on peut définir

$$\begin{cases} z_1 & \to & y_2 = p(z_1) & \to & x_1 = f^{-1}(y_2), \\ x_2 & \to & y_1 = f^{-1}(x_2) & \to & z_2 = p(y_1). \end{cases}$$

Puisque l'indépendance inter plans se traduit par le fait que $E = (x_1, z_2)$ et $C = (z_1, x_2)$ appartiennent à la même courbe d'indifférence, à savoir la courbe $y = k(x)$, nous pouvons en déduire que :

$$z_2 = k(x_1) \quad \text{et} \quad x_2 = k(z_1).$$

En d'autres termes, d'après les équations ci-dessus,

$$\begin{aligned} z_2 &= k(x_1) = k \circ f^{-1}(y_2) = k \circ f^{-1} \circ p(z_1), \\ z_2 &= p(y_1) = p \circ f^{-1}(x_2) = p \circ f^{-1} \circ k(z_1) \ ; \end{aligned}$$

d'où

$$p \circ f^{-1} \circ k(z_1) = k \circ f^{-1} \circ p(z_1).$$

Or par hypothèse, z_1 était arbitraire. Par conséquent, l'indépendance inter plans implique que,

$$\forall x_1 \in X_1,\ p \circ f^{-1} \circ k(x_1) = k \circ f^{-1} \circ p(x_1).$$

Autrement dit, lors de la construction de l'exemple, si f et p sont des fonctions connues, alors toute fonction se trouvant "à l'intérieur de la bande formée par celles-ci" — c'est-à-dire toute fonction dont la courbe d'indifférence se trouve entre les courbes d'indifférence associées à f et à p — ne peut être choisie avec un certain degré de liberté que sur le petit intervalle correspondant à $[CE]$; au delà de cet intervalle, la fonction est entièrement définie par la combinaison de l'indépendance inter plans et des définitions de f et p. Quant au degré de liberté, toute courbe peut convenir tant que l'indépendance à l'intérieur des plans reste vérifiée. De plus, les courbes à l'extérieur de f et p — comme celle passant par le point D — sont déterminées par les courbes se trouvant entre f et p. Par exemple, le point D est déterminé par A, B, C et E, F, G. En fait, c'est le cas pour n'importe quelle courbe "extérieure" car dès que les courbes "intérieures" ont été choisies, localement près de f et de p, les courbes extérieures — telles que q — sont imposées. Mais alors, k et q peuvent jouer le rôle tenu précédemment par f et p ; or p se trouve entre k et q, il existe donc une courbe à l'extérieur de k et q, imposée par p, et ainsi de suite. Par ce procédé, on construit une séquence standard infinie, ce qui, d'après l'axiome archimédien, implique que tout l'espace peut être atteint.

Maintenant nous avons tout le matériel mathématique nécessaire à la construction des fonctions g et φ. Par souci de simplicité, l'exemple que je vais décrire ci-dessous utilise la droite $x_2 = x_1$ comme axe de symétrie. Cette propriété est en effet relativement pratique car elle entraîne une symétrie entre les deux premiers composants (les composants solvables). g décrit les courbes d'indifférence dans l'espace $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$; notons ces dernières $\mathcal{C}_{[\alpha]}$, en utilisant la règle suivante pour évaluer α : le point de coordonnées (α, α) appartient à la courbe $\mathcal{C}_{[\alpha]}$; ainsi $\mathcal{C}_{[\alpha]} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : g(x_1, x_2) = g(\alpha, \alpha)\}$. De plus, imposons sur g la condition suivante : $g(x_1, x_2 = x_1) = x_1$ pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$. Ainsi, $\mathcal{C}_{[\alpha]} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : g(x_1, x_2) = \alpha\}$. De par leur définition, les courbes $\mathcal{C}_{[\alpha]}$ peuvent être perçues comme des graphes de fonctions ; notons $f_{[\alpha]}$ la fonction associée à la courbe $\mathcal{C}_{[\alpha]}$, c'est-à-dire que $\mathcal{C}_{[\alpha]} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = f_{[\alpha]}(x_1)\}$. Par définition, $f_{[\alpha]}$ et $\mathcal{C}_{[\alpha]}$ sont en bijection.

Pour commencer la construction, j'ai choisi pour fonctions f et p de la figure 6.5 les fonctions $f_{[0]}$ et $f_{[1]}$. Ceci signifie que $f_{[\varphi(0)]} = f_{[1]}$, ou $\varphi(0) = 1$, ou, plus simplement, que $(0, 0, x_3^1) \sim (1, 1, x_3^0)$. Ces fonctions pouvant être prises arbitrairement — à condition bien sûr qu'elles soient strictement décroissantes, et qu'elles n'aient pas d'intersection — je les ai donc définies comme suit :

$$f_{[0]}(x_1) = \begin{cases} -2x_1 & \text{si } x_1 \leq 0 \\ -\frac{x_1}{2} & \text{si } x_1 \geq 0 \end{cases} \tag{6.7}$$

$$f_{[1]}(x_1) = \begin{cases} -2x_1 + 3 & \text{si } x_1 \leq 1 \\ \frac{3-x_1}{2} & \text{si } x_1 \geq 1 \end{cases} \tag{6.8}$$

Notons le fait que $f_{[0]}$ et $f_{[1]}$ sont continues, strictement décroissantes, et donc bijectives, qu'elles varient de $+\infty$ jusqu'à $-\infty$ et qu'elles admettent la droite $x_2 = x_1$ comme axe de symétrie.

Maintenant, nous devons construire les courbes "intérieures". Pour cela, nous allons utiliser un procédé en deux étapes. Tout d'abord, choisissons la partie "arbitraire" des courbes d'indifférence (celle qui correspond à l'intervalle $[CE]$ sur la figure 6.5) :

$$\forall \alpha \in]0, 1[,\ f_{[\alpha]}(x_1) = \begin{cases} -2x_1 + 3\alpha & \text{si } x_1 \in [\frac{\alpha-1}{2}, \alpha] \\ \frac{3\alpha - x_1}{2} & \text{si } x_1 \in [\alpha, 2\alpha + 1] \end{cases} \tag{6.9}$$

Ensuite, l'indépendance inter plans impose le reste de la construction, comme on l'a montré dans la figure 6.5. Ceci a pour résultat l'équation suivante :

$$\forall x_1 \in \mathbb{R},\ f_{[\alpha]} \circ f_{[0]}^{-1} \circ f_{[1]}(x_1) = f_{[1]} \circ f_{[0]}^{-1} \circ f_{[\alpha]}(x_1) \tag{6.10}$$

Remarquons que l'équation (6.10) est vérifiée pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$, et que (6.9) n'entre pas en conflit avec (6.10) du fait que $f_{[\alpha]}$ décroît sur $[\frac{\alpha-1}{2}, 2\alpha+1]$ et que $f_{[0]}^{-1} \circ f_{[1]}(2\alpha+1) = \frac{\alpha-1}{2}$. L'équation (6.10) est illustrée par la figure 6.6 : si A appartient à la courbe $\mathcal{C}_{[\alpha]}$, alors B doit aussi appartenir à la courbe $\mathcal{C}_{[\alpha]}$, et inversement.

Les courbes $\mathcal{C}_{[\alpha]}$ définies par (6.9) et (6.10) vérifient les conditions imposées précédemment. En particulier, l'équation (6.10) étend la définition de $\mathcal{C}_{[\alpha]}$ sur la totalité de $\mathbb{R}$. Les propriétés de ces courbes sont décrites dans le lemme suivant.

Lemme 6.2 *Soit α dans $]0, 1[$. Supposons que $f_{[\alpha]}$ est définie par les équations (6.9) et (6.10). Alors, $f_{[\alpha]}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, continue, strictement décroissante, $f_{[\alpha]}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, et la droite $x_2 = x_1$ est un axe de symétrie. En outre,*

$$\forall \alpha, \beta \in [0, 1],\ \alpha \leq \beta \Leftrightarrow \left[f_{[\alpha]}(x_1) \leq f_{[\beta]}(x_1),\ \forall x_1 \in \mathbb{R} \right].$$

Maintenant que la construction des courbes intérieures est achevée, il reste celle des courbes extérieures. Là encore, deux étapes vont être nécessaires. Premièrement, grâce à la figure 6.5, nous allons déduire le principe de construction des courbes d'indifférence de $\succsim$ "localement au dessus" de $f_{[1]}$; ce principe est décrit par l'équation (6.11). Ensuite, ce principe est généralisé à tout l'espace grâce aux équations (6.13) et (6.14).

Revenons à la figure 6.5. Dans celle-ci, le point D du plan $\{x_3 = x_3^1\}$ est indifférent aux points C et E du plan $\{x_3 = x_3^0\}$. Cela signifie que $h(z_1, z_2, x_3^1) = h(z_1, x_2, x_3^0)$,

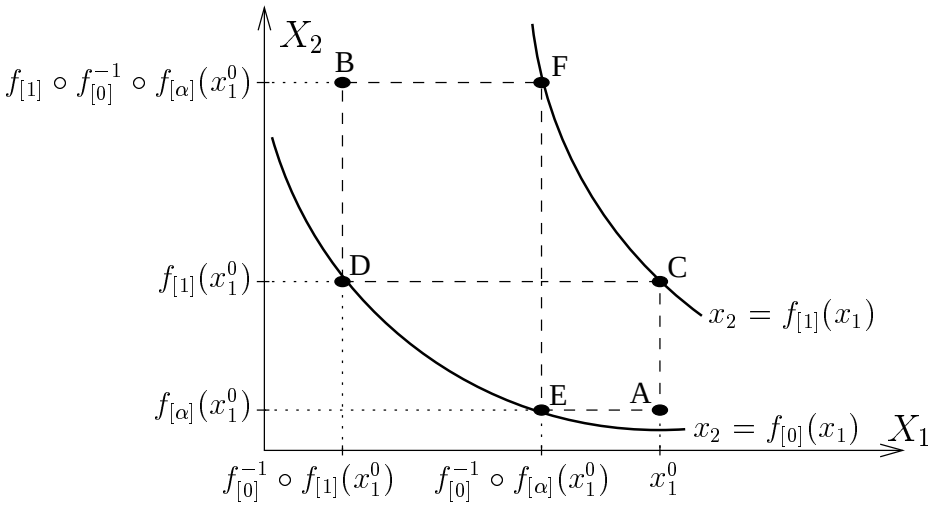


FIG. 6.6: construction des courbes intérieures

ou, en termes de g et de φ, $g(z_1, z_2) = \varphi \circ g(z_1, x_2)$. Mais, d'après l'indépendance inter plans, nous savons aussi que $z_2 = q(z_1) = p \circ f^{-1} \circ k(z_1)$. Ceci suggère donc le principe de construction suivant pour notre exemple :

$$\forall x_1 \in \mathbb{R},\ f_{[\varphi(\alpha)]}(x_1) = f_{[1]} \circ f_{[0]}^{-1} \circ f_{[\alpha]}(x_1)\ ;$$

en conjuguant, cette équation avec (6.10), on obtient :

$$\forall x_1 \in \mathbb{R},\ f_{[\varphi(\alpha)]}(x_1) = f_{[\alpha]} \circ f_{[0]}^{-1} \circ f_{[1]}(x_1) = f_{[1]} \circ f_{[0]}^{-1} \circ f_{[\alpha]}(x_1), \tag{6.11}$$

ce qui correspond dans la figure 6.7 à : "si A et B appartiennent à $\mathcal{C}_{[\alpha]}$, alors E et G appartiennent à $\mathcal{C}_{[\varphi(\alpha)]}$".

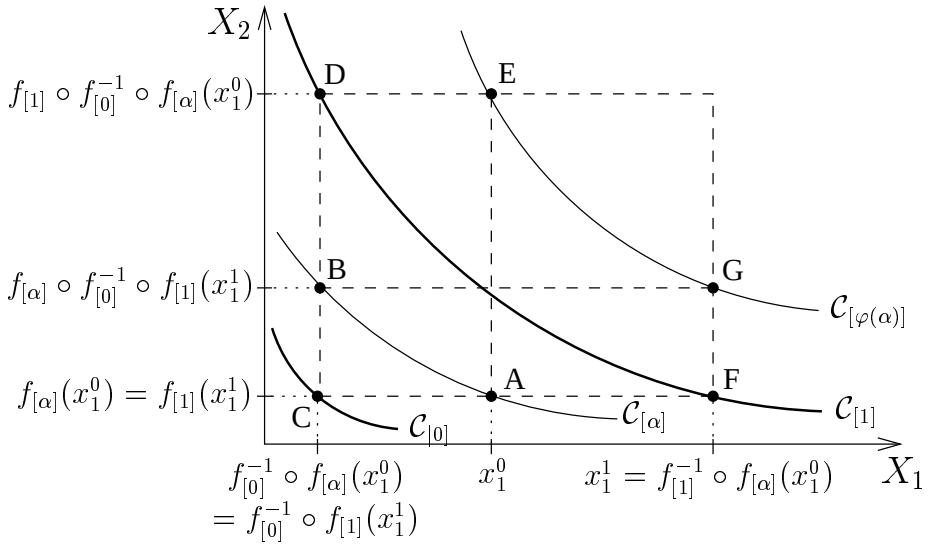


FIG. 6.7: construction des courbes extérieures

Les propriétés des nouvelles courbes sont décrites dans le lemme suivant :

Lemme 6.3 *Soit α dans $[0,1]$. Supposons que $f_{[\varphi(\alpha)]}$ est définie par l'équation (6.11). Alors $f_{[\varphi(\alpha)]}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, continue, strictement décroissante, $f_{[\varphi(\alpha)]}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, la droite $x_2 = x_1$ est un axe de symétrie ; de plus,*

$$\forall \beta \in [0,1],\ \alpha \leq \beta \Leftrightarrow [f_{[\varphi(\alpha)]}(x_1) \leq f_{[\varphi(\beta)]}(x_1),\ \forall x_1 \in \mathbb{R}]\ ;$$

$$\forall x_1 \in \mathbb{R},\ f_{[\varphi(\alpha)]} \circ f^{-1}_{[\varphi(0)]} \circ f_{[\varphi(1)]}(x_1) = f_{[\varphi(1)]} \circ f^{-1}_{[\varphi(0)]} \circ f_{[\varphi(\alpha)]}(x_1). \tag{6.12}$$

Remarquons que, d'après (6.11), $f_{[\varphi(1)]} = f_{[1]} \circ f^{-1}_{[0]} \circ f_{[1]}$; par conséquent, puisque, par hypothèse, $f_{[\varphi(0)]} = f_{[1]}$,

$$f_{[\varphi(1)]} \circ f^{-1}_{[\varphi(0)]} = f_{[1]} \circ f^{-1}_{[0]} \circ f_{[1]} \circ f^{-1}_{[1]} = f_{[1]} \circ f^{-1}_{[0]}\ ;$$

de même, $f^{-1}_{[\varphi(0)]} \circ f_{[\varphi(1)]}(\cdot) = f^{-1}_{[0]} \circ f_{[1]}(\cdot)$; ainsi, (6.12) est équivalent à

$$\forall x_1 \in \mathbb{R},\ f_{[\varphi(\alpha)]} \circ f^{-1}_{[0]} \circ f_{[1]}(x_1) = f_{[1]} \circ f^{-1}_{[0]} \circ f_{[\varphi(\alpha)]}(x_1).$$

Nous pouvons maintenant décrire la construction globale de l'exemple. Il est relativement aisé de remarquer que, quel que soit $\alpha \in [0,1]$, et quel que soit $x_1 \in \mathbb{R}$, $f_{[\varphi(0)]}(x_1) \leq f_{[\varphi(\alpha)]}(x_1) \leq f_{[\varphi(1)]}(x_1)$. Or $f_{[\varphi(1)]} = f_{[\varphi(\varphi(0))]}$; par conséquent, $f_{[\varphi(0)]}$ peut jouer le rôle de f dans la figure 6.5, et $f_{[\varphi(\varphi(0))]}$ le rôle de p ; ceci suggère qu'on peut recommencer le processus de construction en remplaçant $f_{[0]}$ par $f_{[\varphi(0)]}$ et $f_{[1]}$ par $f_{[\varphi(1)]}$. Par conséquent, $f_{[\varphi^2(\alpha)]}$ — où φ^2 signifie $\varphi \circ \varphi$ — peut être défini à partir de $f_{[\varphi(\alpha)]}$ d'une manière tout à fait similaire à la définition de $f_{[\varphi(\alpha)]}$ à partir de $f_{[\alpha]}$. Ainsi l'équation (6.11) peut se généraliser en (6.13) et (6.14), où $\alpha \in [0,1]$ et $k \in \mathbb{N}$ — φ^0 représente la fonction Identité sur $\mathbb{R}$.

$$f_{[\varphi^{k+1}(\alpha)]}(x_1) = \begin{cases} f_{[\varphi^k(\alpha)]} \circ f^{-1}_{[\varphi^k(0)]} \circ f_{[\varphi^k(1)]}(x_1) \\ f_{[\varphi^k(1)]} \circ f^{-1}_{[\varphi^k(0)]} \circ f_{[\varphi^k(\alpha)]}(x_1) \end{cases} \tag{6.13}$$

$$f_{[\varphi^{-k-1}(\alpha)]}(x_1) = \begin{cases} f_{[\varphi^{-k}(\alpha)]} \circ f^{-1}_{[\varphi^{-k}(1)]} \circ f_{[\varphi^{-k}(0)]}(x_1) \\ f_{[\varphi^{-k}(0)]} \circ f^{-1}_{[\varphi^{-k}(1)]} \circ f_{[\varphi^{-k}(\alpha)]}(x_1) \end{cases} \tag{6.14}$$

Nous avons vu précédemment que $f^{-1}_{[\varphi(0)]} \circ f_{[\varphi(1)]}(\cdot) = f^{-1}_{[0]} \circ f_{[1]}(\cdot)$ et $f_{[\varphi(1)]} \circ f^{-1}_{[\varphi(0)]}(\cdot) = f_{[1]} \circ f^{-1}_{[0]}(\cdot)$; il est facile d'étendre cette propriété par récurrence de façon à obtenir : $f^{-1}_{[\varphi^k(0)]} \circ f_{[\varphi^k(1)]}(\cdot) = f^{-1}_{[0]} \circ f_{[1]}(\cdot)$ et $f_{[\varphi^k(1)]} \circ f^{-1}_{[\varphi^k(0)]}(\cdot) = f_{[1]} \circ f^{-1}_{[0]}(\cdot)$. Ainsi, (6.13) et (6.14) sont équivalents à

$$\begin{aligned} f_{[\varphi^{k+1}(\alpha)]}(x_1) &= f_{[\varphi^k(\alpha)]} \circ f^{-1}_{[0]} \circ f_{[1]}(x_1) = f_{[1]} \circ f^{-1}_{[0]} \circ f_{[\varphi^k(\alpha)]}(x_1), \\ f_{[\varphi^{-k-1}(\alpha)]}(x_1) &= f_{[\varphi^{-k}(\alpha)]} \circ f^{-1}_{[1]} \circ f_{[0]}(x_1) = f_{[0]} \circ f^{-1}_{[1]} \circ f_{[\varphi^{-k}(\alpha)]}(x_1). \end{aligned}$$

Le procédé de construction garantit que $f_{[\varphi^{k+1}(\alpha)]}$ et $f_{[\varphi^{-k-1}(\alpha)]}$ sont bien définies sur $\mathbb{R}$, continues, strictement décroissantes, et admettent la droite $x_2 = x_1$ comme axe de symétrie, que $f_{[\varphi^{k+1}(\alpha)]}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et que $f_{[\varphi^{-k-1}(\alpha)]}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. De plus, si $\alpha, \beta \in [0,1]$, alors $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow f_{[\varphi^k(\alpha)]}(x_1) \leq f_{[\varphi^k(\beta)]}(x_1)$ pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$ et tout entier relatif k.

La construction du préordre large total est maintenant achevée ; il reste seulement à prouver que toutes les propriétés escomptées sont bien vérifiées. C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 6.3 *La relation binaire $\succsim$ représentée par les fonctions $f_{[\varphi^k(\alpha)]}$ est un préordre large total bien défini sur X et satisfait l'indépendance et l'axiome archimédien. En outre, les deux premiers composants vérifient la solvabilité non restreinte.*

Jusqu'à maintenant la construction a été réalisée à un niveau assez abstrait, et il apparaît assez difficile d'imaginer la forme des courbes d'indifférence. C'est pourquoi j'ai dessiné dans la figure 6.8 l'aspect de ces courbes localement autour des axes d'origine.

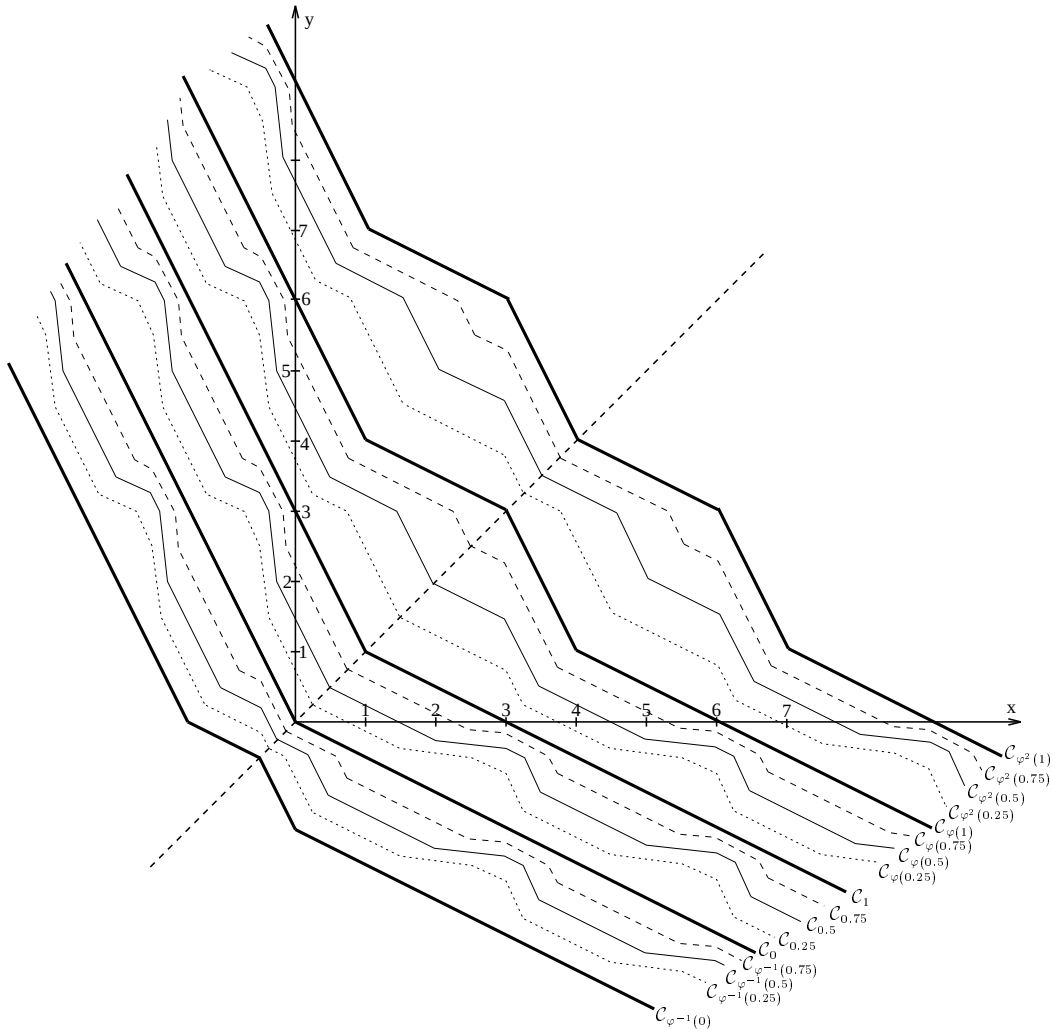


FIG. 6.8: quelques courbes d'indifférence autour des axes

Afin de conclure, nous devons montrer que la condition de Thomsen n'est pas vérifiée

partout dans X. En effet,

$$\begin{array}{rcl} h(0.2, 0.2, x_3^0) & = & h(0.5, 0.5, x_3^0) = 0.2, \\ h(0.7, 0.05, x_3^0) & = & h(0.2, 0.4, x_3^0) = 4/15, \\ h(0.5, 0.4, x_3^0) = 13/30 & > & h(0.7, 0.2, x_3^0) = 11/30. \end{array}$$

Par conséquent la condition de Thomsen ne peut être vérifiée. Par la même occasion, on constate que $\succsim$ n'admet pas de représentation additive.

6.3.2 Produits cartésiens de dimension n

Dans la sous-section précédente, nous avons montré que, dans le cadre de produits cartésiens à 3 composants, la combinaison de la solvabilité non restreinte par rapport à deux composants et de l'indépendance n'est pas suffisante pour dériver la condition de Thomsen. Nous allons étendre ici cette propriété à des produits cartésiens de dimension quelconque.

Soit $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0, 1\} \times \{0, 2\} \times \ldots \times \{0, p\}$. Utilisons les courbes d'indifférence définies dans la section précédente et supposons que

$$h(x_1, x_2, i_1, i_2, \ldots, i_p) = \varphi^{i_1+i_2+\cdots+i_p} \circ h(x_1, x_2, 0, \ldots, 0) = \varphi^{i_1+i_2+\cdots+i_p} \circ g(x_1, x_2),$$

où, $\forall j \in \{1, \ldots, p\}$, $i_j \in \{0, j\}$.

Il est clair que $i_1 + i_2 + \cdots + i_p \in \{0, \ldots, \frac{p(p+1)}{2}\}$. Considérons un $j \in \{1, \ldots, \frac{p(p+1)}{2}\}$ arbitraire et $\alpha \in [0, 1]$, et définissons $\psi = \varphi^j$. Alors,

$$\begin{array}{l} f_{[\psi(0)]} \circ f_{[0]}^{-1} = f_{[\varphi^j(0)]} \circ f_{[0]}^{-1} = (f_{[1]} \circ f_{[0]}^{-1})^j, \\ f_{[0]}^{-1} \circ f_{[\psi(0)]} = f_{[0]}^{-1} \circ f_{[\varphi^j(0)]} = (f_{[0]}^{-1} \circ f_{[1]})^j. \end{array}$$

Ainsi,

$$f_{[\psi(0)]} \circ f_{[0]}^{-1} \circ f_{[\alpha]} = f_{[\varphi^j(0)]} \circ f_{[0]}^{-1} \circ f_{[\alpha]} = (f_{[1]} \circ f_{[0]}^{-1})^j \circ f_{[\alpha]}.$$

Or, par une utilisation répétée de (6.10), il est facile de montrer que

$$(f_{[1]} \circ f_{[0]}^{-1})^j \circ f_{[\alpha]} = f_{[\alpha]} \circ (f_{[0]}^{-1} \circ f_{[1]})^j \ ;$$

mais

$$f_{[\alpha]} \circ (f_{[0]}^{-1} \circ f_{[1]})^j = f_{[\alpha]} \circ f_{[0]}^{-1} \circ f_{[\psi(0)]}.$$

Donc

$$f_{[\psi(0)]} \circ f_{[0]}^{-1} \circ f_{[\alpha]} = f_{[\alpha]} \circ f_{[0]}^{-1} \circ f_{[\psi(0)]}.$$

Ceci généralise la formule (6.10).

$$f_{[\psi(\alpha)]} = f_{[\varphi^j(1)]} \circ f_{[\varphi^j(0)]}^{-1} \circ f_{[\varphi^{j-1}(\alpha)]} = f_{[1]} \circ f_{[0]}^{-1} \circ f_{[\varphi^{j-1}(\alpha)]},$$

et donc, par récurrence sur j,

$$f_{[\psi(\alpha)]} = (f_{[1]} \circ f_{[0]}^{-1})^j \circ f_{[\alpha]} = f_{[\psi(0)]} \circ f_{[0]}^{-1} \circ f_{[\alpha]},$$

ce qui généralise la formule (6.11). De la même manière, on peut étendre (6.13) et (6.14) comme suit : pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} f_{[\psi^{k+1}(\alpha)]}(x_1) &= f_{[\psi^k(\alpha)]} \circ f^{-1}_{[\psi^k(0)]} \circ f_{[\psi^{k+1}(0)]}(x_1), \\ &= f_{[\psi^{k+1}(0)]} \circ f^{-1}_{[\psi^k(0)]} \circ f_{[\psi^k(\alpha)]}(x_1), \\ f_{[\psi^{-k-1}(\alpha)]}(x_1) &= f_{[\psi^{-k}(\alpha)]} \circ f^{-1}_{[\psi^{-k+1}(0)]} \circ f_{[\psi^{-k}(0)]}(x_1), \\ &= f_{[\psi^{-k}(0)]} \circ f^{-1}_{[\psi^{-k+1}(0)]} \circ f_{[\psi^{-k}(\alpha)]}(x_1). \end{aligned}$$

Par une démonstration identique à celle du théorème 6.3, il est possible de prouver que la relation $\succsim$ représentée par h est un préordre large total sur X satisfaisant l'indépendance et l'axiome archimédien, et que les deux premiers composants vérifient la solvabilité non restreinte. Et pourtant,

$$\begin{aligned} h(0.2, 0.2, 0, \ldots, 0) &= h(0.5, 0.5, 0, \ldots, 0) = 0.2, \\ h(0.7, 0.05, 0, \ldots, 0) &= h(0.2, 0.4, 0, \ldots, 0) = 4/15, \\ h(0.5, 0.4, 0, \ldots, 0) = 13/30 &> h(0.7, 0.2, 0, \ldots, 0) = 11/30. \end{aligned}$$

Par conséquent, la condition de Thomsen n'est pas vérifiée.

6.4 Démonstrations

Démonstration du théorème 6.1 : La démonstration est relativement simple : le nombre de configurations possibles (le nombre de permutations dans la définition de la condition (C_2)) étant fini et peu élevé, il suffit d'examiner séparément toutes les configurations possibles. Pour chaque configuration, cette démonstration est immédiate. J'en donne ici un exemple pour que le lecteur en soit persuadé. Prenons la configuration suivante :

$$\begin{array}{ccc} (a_1, x_2) & \succsim & (b_1, x_2') \\ (c_1, y_2) & \succsim & (a_1, y_2') \\ \hline (b_1, z_2) & \precsim & (c_1, z_2') \end{array} \tag{6.15}$$

dans laquelle $a_1, b_1, c_1 \in X_1$, $x_2, x_2', y_2, y_2', z_2, z_2' \in X_2$ et (x_2', y_2', z_2') est une permutation de (x_2, y_2, z_2). Supposons que $x_2' = y_2$, $y_2' = x_2$ et $z_2' = z_2$. Alors, les deux premières lignes de (6.15) s'écrivent comme suit : $(a_1, x_2) \succsim (b_1, y_2)$ et $(c_1, y_2) \succsim (a_1, x_2)$. Donc, par transitivité, $(c_1, y_2) \succsim (b_1, y_2)$, et donc, d'après l'axiome d'indépendance, $(c_1, z_2) \succsim (b_1, z_2)$, ce qui correspond à la troisième ligne de (6.15). Toutes les démonstrations des autres configurations sont du même ordre, c'est-à-dire évidentes. A titre indicatif, j'ai résumé dans le tableau ci-dessous les différentes possibilités offertes par (6.15).

x_2'	y_2'	z_2'	Démonstration
x_2	y_2	z_2	transitivité + indépendance
x_2	z_2	y_2	transitivité + indépendance
y_2	x_2	z_2	transitivité + indépendance
y_2	z_2	x_2	condition de Thomsen
z_2	x_2	y_2	transitivité
z_2	y_2	x_2	transitivité + indépendance

Dans les tableaux ci-dessous, le lecteur trouvera toutes les autres configurations possibles.

$x'_1 = x_1,\ y'_1 = y_1,\ z'_1 = z_1$			
x'_2	y'_2	z'_2	Démonstration
x_2	y_2	z_2	$\emptyset$
x_2	z_2	y_2	indépendance
y_2	x_2	z_2	$\emptyset$
y_2	z_2	x_2	transitivité + indépendance
z_2	x_2	y_2	transitivité + indépendance
z_2	y_2	x_2	indépendance

$x'_1 = x_1,\ y'_1 = z_1,\ z'_1 = y_1$			
x'_2	y'_2	z'_2	Démonstration
x_2	y_2	z_2	indépendance
x_2	z_2	y_2	$\emptyset$
y_2	x_2	z_2	transitivité + indépendance
y_2	z_2	x_2	transitivité + indépendance
z_2	x_2	y_2	transitivité + indépendance
z_2	y_2	x_2	transitivité + indépendance

$x'_1 = y_1,\ y'_1 = x_1,\ z'_1 = z_1$			
x'_2	y'_2	z'_2	Démonstration
x_2	y_2	z_2	$\emptyset$
x_2	z_2	y_2	transitivité + indépendance
y_2	x_2	z_2	$\emptyset$
y_2	z_2	x_2	transitivité + indépendance
z_2	x_2	y_2	transitivité + indépendance
z_2	y_2	x_2	transitivité + indépendance

$x'_1 = y_1,\ y'_1 = z_1,\ z'_1 = x_1$			
x'_2	y'_2	z'_2	Démonstration
x_2	y_2	z_2	transitivité + indépendance
x_2	z_2	y_2	transitivité + indépendance
y_2	x_2	z_2	transitivité + indépendance
y_2	z_2	x_2	transitivité
z_2	x_2	y_2	condition de Thomsen élargie
z_2	y_2	x_2	transitivité + indépendance

$x'_1 = z_1,\ y'_1 = y_1,\ z'_1 = x_1$			
x'_2	y'_2	z'_2	Démonstration
x_2	y_2	z_2	indépendance
x_2	z_2	y_2	transitivité + indépendance
y_2	x_2	z_2	transitivité + indépendance
y_2	z_2	x_2	transitivité + indépendance
z_2	x_2	y_2	transitivité + indépendance
z_2	y_2	x_2	$\emptyset$

♦

Démonstration du théorème 6.2 : Cette démonstration est adaptée d'une démonstration de Luce et Tukey. On remarque tout d'abord que (C_m) est équivalent à la condition suivante :

Condition (C_m) : *Supposons que* $(x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^{m+1})$ *— resp.* $(x_2^1, \ldots, x_2^{m+1})$ *— soit une permutation de* $(y_1^1, \ldots, y_1^{m+1})$ *— resp.* $(y_2^1, \ldots, y_2^{m+1})$*. Alors :*

$$[(x_1^i, x_2^i) \succsim (y_1^i, y_2^i)\ \forall i \in \{1, \ldots, m+1\}] \Rightarrow [(x_1^i, x_2^i) \sim (y_1^i, y_2^i)\ \forall i \in \{1, \ldots, m+1\}].$$

Dans la suite de cette démonstration, c'est cette définition qui sera utilisée plutôt que celle du chapitre 2. Supposons que (C_m) est vérifiée — ainsi que (S_{m+1}) si m est impair — et montrons que (C_{m+1}) est aussi vérifiée. Considérons la séquence d'éléments ci-dessous :

$$[(x_1^i, x_2^i) \succsim (y_1^i, y_2^i)\ \forall i \in \{1, \ldots, m+2\}], \tag{6.16}$$

où, bien évidemment, $(y_1^1, \ldots, y_1^{m+2})$ et $(y_2^1, \ldots, y_2^{m+2})$ sont respectivement des permutations de $(x_1^1, \ldots, x_1^{m+2})$ et $(x_2^1, \ldots, x_2^{m+2})$.

Premier cas : s'il existe i_0 et j_0 tels que $(x_1^{i_0}, x_2^{i_0}) = (y_1^{j_0}, y_2^{j_0})$:

Substituons

$$(x_1^{i_0}, x_2^{i_0}) \succsim (y_1^{i_0}, y_2^{i_0}) \quad \text{et} \quad (x_1^{j_0}, x_2^{j_0}) \succsim (y_1^{j_0}, y_2^{j_0})$$

par

$$(x_1^{i_0}, x_2^{i_0}) \succsim (y_1^{j_0}, y_2^{j_0}) \quad \text{et} \quad (x_1^{j_0}, x_2^{j_0}) \succsim (y_1^{i_0}, y_2^{i_0}).$$

Puisque $(x_1^{i_0}, x_2^{i_0}) = (y_1^{j_0}, y_2^{j_0})$, on peut éliminer la ligne $(x_1^{i_0}, x_2^{i_0}) \succsim (y_1^{j_0}, y_2^{j_0})$ de la séquence ; on se retrouve alors dans les conditions d'application de (C_m) ; donc,

$$(x_1^{j_0}, x_2^{j_0}) \sim (y_1^{i_0}, y_2^{i_0})$$

et,

$$\forall i \neq i_0, j_0,\ (x_1^i, x_2^i) \sim (y_1^i, y_2^i).$$

Mais $(x_1^{j_0}, x_2^{j_0}) \succsim (y_1^{j_0}, y_2^{j_0}) = (x_1^{i_0}, x_2^{i_0}) \succsim (y_1^{i_0}, y_2^{i_0})$, donc $(x_1^{i_0}, x_2^{i_0}) \sim (y_1^{i_0}, y_2^{i_0})$ et $(x_1^{j_0}, x_2^{j_0}) \sim (y_1^{j_0}, y_2^{j_0})$. Par conséquent, (C_{m+1}) est vérifié.

Si l'on n'est pas dans le cas ci-dessus, on change l'ordre des relations de préférence de manière à obtenir des cycles de la forme :

$$\begin{pmatrix} (x_1^1, x_2^1) & \succsim & (x_1^k, y_2^1) \\ (x_1^2, x_2^2) & \succsim & (x_1^1, y_2^2) \\ (x_1^3, x_2^3) & \succsim & (x_1^2, y_2^3) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_1^{k-1}, x_2^{k-1}) & \succsim & (x_1^{k-2}, y_2^{k-1}) \\ (x_1^k, x_2^k) & \succsim & (x_1^{k-1}, y_2^k) \end{pmatrix} \tag{6.17}$$

Second cas : si $k = m + 2$:

Nous savons qu'il existe $i_0 \in \{1, \ldots, m+2\}$ tel que $y_2^{i_0} = x_2^1$. Si $i_0 = 1$, nous sommes dans le cas précédent ; sinon, par solvabilité non restreinte par rapport au premier composant, il existe $g_1^{i_0-1}$ tel que $(g_1^{i_0-1}, y_2^{i_0-1}) \sim (x_1^{i_0-1}, y_2^{i_0})$. Mais alors, d'après (C_2),

$$\left.\begin{array}{ccc} (g_1^{i_0-1}, y_2^{i_0-1}) & \succsim & (x_1^{i_0-1}, y_2^{i_0}) \\ (x_1^{i_0-1}, x_2^{i_0-1}) & \succsim & (x_1^{i_0-2}, y_2^{i_0-1}) \end{array}\right\} \Rightarrow (x_2^{i_0-2}, y_2^{i_0}) \precsim (g_1^{i_0-1}, x_2^{i_0-1}) \tag{6.18}$$

Donc (6.17) peut être remplacé par :

$$\begin{pmatrix} (x_1^1, x_2^1) & \succsim & (x_1^{m+2}, y_2^1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_1^{i_0-2}, x_2^{i_0-2}) & \succsim & (x_1^{i_0-3}, y_2^{i_0-2}) \\ (g_1^{i_0-1}, x_2^{i_0-1}) & \succsim & (x_1^{i_0-2}, y_2^{i_0}) \\ (x_1^{i_0}, x_2^{i_0}) & \succsim & (g_1^{i_0-1}, y_2^{i_0-1}) \\ (x_1^{i_0+1}, x_2^{i_0+1}) & \succsim & (x_1^{i_0}, y_2^{i_0+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_1^{m+2}, x_2^{m+2}) & \succsim & (x_1^{m+1}, y_2^{m+2}) \end{pmatrix}$$

On réitère ce procédé avec les indices $i_0 - 1$, $i_0 - 2, \ldots, 1$, de telle sorte que $y_2^{i_0}$ remonte jusqu'à la première relation de préférence. Ainsi, en travaillant sur $i_0 - 1$, on obtient le cycle suivant :

$$\begin{pmatrix} (x_1^1, x_2^1) & \succsim & (x_1^{m+2}, y_2^1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (g_1^{i_0-2}, x_2^{i_0-2}) & \succsim & (x_1^{i_0-3}, y_2^{i_0}) \\ (g_1^{i_0-1}, x_2^{i_0-1}) & \succsim & (g_1^{i_0-2}, y_2^{i_0-2}) \\ (x_1^{i_0}, x_2^{i_0}) & \succsim & (g_1^{i_0-1}, y_2^{i_0-1}) \\ (x_1^{i_0+1}, x_2^{i_0+1}) & \succsim & (x_1^{i_0}, y_2^{i_0+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_1^{m+2}, x_2^{m+2}) & \succsim & (x_1^{m+1}, y_2^{m+2}) \end{pmatrix}$$

Lorsque l'on a effectué ce travail sur $i_0 - 2, \ldots, 1$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} (g_1^1, x_2^1) & \succsim & (x_1^{m+2}, x_2^1) \\ (g_1^2, x_2^2) & \succsim & (g_1^1, y_2^1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (g_1^{i_0-1}, x_2^{i_0-1}) & \succsim & (g_1^{i_0-2}, y_2^{i_0-2}) \\ (x_1^{i_0}, x_2^{i_0}) & \succsim & (g_1^{i_0-1}, y_2^{i_0-1}) \\ (x_1^{i_0+1}, x_2^{i_0+1}) & \succsim & (x_1^{i_0}, y_2^{i_0+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_1^{m+2}, x_2^{m+2}) & \succsim & (x_1^{m+1}, y_2^{m+2}) \end{pmatrix}$$

D'après l'indépendance, $(g_1^1, x_2^1) \succsim (x_1^{m+2}, x_2^1) \Leftrightarrow (g_1^1, y_2^1) \succsim (x_1^{m+2}, y_2^1)$, et donc, en remplaçant la première ligne de la dernière séquence d'éléments par $(g_1^1, y_2^1) \succsim (x_1^{m+2}, y_2^1)$, nous nous retrouvons dans les conditions d'application du premier cas. Par conséquent, chaque $\succsim$ peut être remplacé par un $\sim$ dans la dernière liste. Maintenant, puisque nous avons des indifférences, il est possible d'utiliser l'implication inverse dans (6.18), à savoir :

$$\left.\begin{array}{ccc} (x_2^{i_k-2}, y_2^{i_k}) & \sim & (g_1^{i_k-1}, x_2^{i_k-1}) \\ (g_1^{i_k-1}, y_2^{i_k-1}) & \sim & (x_1^{i_k-1}, y_2^{i_k}) \end{array}\right\} \Rightarrow (x_1^{i_k-1}, x_2^{i_k-1}) \sim (x_1^{i_k-2}, y_2^{i_k-1})$$

Et donc, il est possible de propager en arrière les indifférences jusqu'à la liste initiale (6.16). Par conséquent, (C_{m+1}) est vérifié.

Troisième cas : s'il existe exactement deux cycles de longueur $(m+2)/2$:

Changeons l'ordre des indices de telle manière que les $(m+2)/2$ premières relations de préférence appartiennent au premier cycle.

cas 3.1 : s'il existe $i_0 \leq \frac{m+2}{2}$ et $i_1 \leq \frac{m+2}{2}$ tels que $x_2^{i_0} = y_2^{i_1}$:

Dans le cas précédent, nous avons modifié seulement les i_0 premiers éléments, et l'hypothèse selon laquelle le cycle était de longueur $m+2$ était utilisée seulement pour garantir l'existence de i_0. Par conséquent, une démonstration similaire s'applique ici. Donc (C_{m+1}) est vérifié.

cas 3.2 : $(x_2^{i_0} = y_2^{i_1}) \Rightarrow (i_0 \leq \frac{m+2}{2}, i_1 > \frac{m+2}{2})$ ou $(i_0 > \frac{m+2}{2}, i_1 \leq \frac{m+2}{2})$:

Dans ce cas, puisqu'il y a exactement deux cycles de longueur $\frac{m+2}{2}$. Ceci signifie que $m+2$ et m sont pairs. Mais, par hypothèse, (S_{m+1}) est vérifiée, et le cas présent correspond exactement à (S_{m+1}). Par conséquent, (C_{m+1}) est vérifiée.

Quatrième cas : s'il existe un cycle de longueur $k < \frac{m+2}{2}$:

Réordonnons les indices de telle manière que les k premières relations de préférence correspondent à ce cycle. En fait, on obtient le cycle décrit par (6.17) :

$$\begin{pmatrix} (x_1^1, x_2^1) & \succsim & (x_1^k, y_2^1) \\ (x_1^2, x_2^2) & \succsim & (x_1^1, y_2^2) \\ (x_1^3, x_2^3) & \succsim & (x_1^2, y_2^3) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_1^{k-1}, x_2^{k-1}) & \succsim & (x_1^{k-2}, y_2^{k-1}) \\ (x_1^k, x_2^k) & \succsim & (x_1^{k-1}, y_2^k) \end{pmatrix}$$

S'il existe $i, j \leq k$ tels que $x_2^i = y_2^j$, on utilise le style de démonstration décrit dans le second cas. Sinon, supposons que $x_2^1 = y_2^{k+1}$ — c'est possible puisque l'on peut réordonner les indices. Supposons que la relation de préférence correspondant à y_2^{k+1} soit

$$(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}) \succsim (x_1^p, y_2^{k+1}).$$

Par solvabilité non restreinte par rapport au premier composant, il existe g_1^1 tel que $(g_1^1, x_2^1) \sim (x_1^p, y_2^{k+1})$ — en fait, $g_1^1 = x_1^p$; de même, il existe g_1^2 tel que $(g_1^2, x_2^2) \sim (g_1^1, y_2^2)$, g_1^3 tel que $(g_1^3, x_2^3) \sim (g_1^2, y_2^3)$, et, plus généralement, g_1^i, $i \in \{2, \ldots, k\}$, tel que $(g_1^i, x_2^i) \sim (g_1^{i-1}, y_2^i)$. Maintenant remarquons que, par hypothèse, (C_{2k-1}) est vérifié car $2k - 1 \leq m$; constituons la séquence d'éléments formée par la séquence précédente et $[(g_1^2, x_2^2) \sim (g_1^1, y_2^2), \ldots, (g_1^k, x_2^k) \sim (g_1^{k-1}, y_2^k)]$:

$$\begin{pmatrix} (x_1^1, x_2^1) & \succsim & (x_1^k, y_2^1) \\ (x_1^2, x_2^2) & \succsim & (x_1^1, y_2^2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_1^{k-1}, x_2^{k-1}) & \succsim & (x_1^{k-2}, y_2^{k-1}) \\ (x_1^k, x_2^k) & \succsim & (x_1^{k-1}, y_2^k) \\ (g_1^1, y_2^2) & \succsim & (g_1^2, x_2^2) \\ (g_1^2, y_2^3) & \succsim & (g_1^3, x_2^3) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (g_1^{k-1}, y_2^k) & \succsim & (g_1^k, x_2^k) \end{pmatrix}$$

Or d'après la définition de (C_{2k-1}) donnée page 26, la séquence d'éléments ci-dessus implique $(g_1^1, x_2^1) \succsim (g_1^k, y_2^1)$, ou encore $(x_1^p, x_2^1) \succsim (g_1^k, y_2^1)$ puisque $g_1^1 = x_1^p$. Maintenant, en substituant dans la séquence d'éléments initiale le cycle des k premières lignes par le cycle composé des g_1^i, on obtient :

$$\begin{pmatrix} (x_1^p, x_2^1) & \succsim & (g_1^k, y_2^1) \\ (g_1^2, x_2^2) & \sim & (x_1^p, y_2^2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (g_1^k, x_2^k) & \sim & (g_1^{k-1}, y_2^k) \\ (x_1^{k+1}, x_2^{k+1}) & \succsim & (x_1^p, x_2^1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_1^{m+2}, x_2^{m+2}) & \succsim & (x_1^{m+1}, y_2^{m+2}) \end{pmatrix}$$

Mais, grâce à (x_1^p, x_2^1), nous nous retrouvons dans le premier cas ; par conséquent, chaque $\succsim$ peut être remplacé par $\sim$. Maintenant, en utilisant à nouveau (C_{2k-1}), (6.17) et le cycle avec les g_1^i, on déduit que les $\succsim$ peuvent être remplacés par des $\sim$ dans le cycle (6.17), et donc, dans toute la séquence d'éléments initiale. Par conséquent (C_{m+1}) est vérifié. ♦

Démonstration du corollaire 6.1 : Evident d'après le théorème 6.2. ♦

Démonstration du lemme 6.1 : Comme je l'ai expliqué dans la sous-section 6.2.1, nous allons travailler avec $f_{[x_2]}(x_1)$ plutôt qu'avec $f(x_1, x_2)$. Pour tous x_2^1, x_2^2, $f_{[x_2^1]}$ et $f_{[x_2^2]}$ sont des fonctions strictement croissantes sur $\mathbb{R}$. De plus, leurs graphes n'ont pas d'intersection. Par conséquent, $\succsim$ vérifie l'axiome d'indépendance. La condition de Thomsen, traduite dans l'espace $X_1 \times \mathbb{R}$, donne la condition suivante sur $f_{[2m]}$:

$$f_{[2m]}(x+2) = f_{[2m]}(x) + 2.$$

Par conséquent, elle est aussi vérifiée. Le processus décrit page 88 pour passer de la condition de Thomsen à la condition de Thomsen élargie est encore valable ici. Donc $\succsim$ vérifie la condition de Thomsen élargie. Par conséquent, d'après le théorème 6.1 (voir page 81), la condition (C_2) est aussi vérifiée.

Maintenant, d'après le théorème 6.2, pour montrer que (C_{m+1}) est vérifié, il suffit de montrer que, pour tout $i = 3, 5, \ldots, m$, (S_i) est vérifié. Dans la définition de (S_i), s'il n'existe aucun j tel que $x_2^j = 2m$ ou $y_2^j = 2m$, alors, (S_i) est vérifié puisque c'est un cas particulier d'axiome d'élimination et que, sur le sous-espace $\mathbb{R} \times \{0, 2, 4, \ldots, 2m-2\}$, $\succsim$ est représenté par la fonction d'utilité additive $x_1 + x_2$.

Soit $k \leq (m+1)/2$. Considérons l'ensemble de relations de préférence suivant :

$$\begin{pmatrix} (x_1^1, x_2^1) & \succsim & (x_1^k, y_2^1) \\ (x_1^2, x_2^2) & \succsim & (x_1^1, y_2^2) \\ (x_1^3, x_2^3) & \succsim & (x_1^2, y_2^3) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_1^k, x_2^k) & \succsim & (x_1^{k-1}, y_2^k) \\ (x_1^{k+1}, y_2^1) & \succsim & (x_1^{2k}, x_2^1) \\ (x_1^{k+2}, y_2^2) & \succsim & (x_1^{k+1}, x_2^2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_1^{2k-1}, y_2^{k-1}) & \succsim & (x_1^{2k-2}, x_2^{k-1}) \end{pmatrix} \tag{6.19}$$

où, $\forall i \leq k < j$, $x_1^i \neq x_1^j$, et, $\forall i, j < k$, $x_2^i \neq y_2^j$.

Supposons maintenant qu'il existe au moins un indice $j \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $x_2^j = 2m$ ou $y_2^j = 2m$. Le problème auquel nous sommes confrontés est de savoir si, oui ou non, (6.19) implique $(x_1^{2k}, y_2^k) \precsim (x_1^{2k-1}, x_2^k)$.

Supposons qu'il existe p indices $\{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$ tels que $y_2^{i_j} = 2m$. En utilisant la transformation (6.18) comme dans la démonstration du théorème 6.2, on peut supposer que $i_1, \ldots, i_p$ sont les p premiers indices. Cette opération vise uniquement à simplifier les

notations. Maintenant, en traduisant les k premières relations de préférence en termes d'utilité f, nous obtenons :

$$\sum_{i=1}^{k}(x_1^i + x_2^i) \geq \sum_{i=1}^{p-1} f_{[2m]}(x_1^i) + f_{[2m]}(x_1^k) + \sum_{i=p+1}^{k}(x_1^{i-1} + y_2^i)$$

D'après (6.4), il est facile de montrer que $f_{[2m]}(x_1) \geq x_1 + m^2 \ \forall x_1 \in X_1$; par conséquent, l'inégalité ci-dessus implique que

$$\sum_{i=1}^{k} x_2^i \geq \sum_{i=1}^{k} x_2^i - \sum_{i=p+1}^{k} y_2^i \geq p \cdot m^2 \geq m^2.$$

Or ceci est impossible ; en effet, $k \leq \dfrac{m+1}{2}$ et $x_2^i \leq 2(m-1)$ car $x_2^i \neq y_2^{i_j} = 2m$, et donc

$$\sum_{i=1}^{k} x_2^i \leq \frac{m+1}{2} \cdot 2(m-1) = m^2 - 1.$$

Supposons maintenant qu'il existe p indices $\{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$ tels que $x_2^{i_j} = 2m$. Remarquons que, parmi les k premières relations de préférence, il existe au moins une préférence stricte ; sinon, l'inégalité suivante serait vraie :

$$\sum_{j=1}^{p} f_{[2m]}(x_1^{i_j}) + \sum_{\substack{j \notin \{i_1,\ldots,i_p\} \\ j \leq k}} (x_1^j + x_2^j) = \sum_{j=1}^{p}(x_1^{i_j} + y_2^{i_j}) + \sum_{\substack{j \notin \{i_1,\ldots,i_p\} \\ j \leq k}} (x_1^j + x_2^j),$$

ce qui serait équivalent à

$$\sum_{j=1}^{p} f_{[2m]}(x_1^{i_j}) = \sum_{j=1}^{p} x_1^j + \sum_{j=1}^{p} y_2^{i_j} + \sum_{\substack{j \notin \{i_1,\ldots,i_p\} \\ j \leq k}} (y_2^j - x_2^j).$$

Or, par définition de $f_{[2m]}$, $\forall x_1 \in \mathbb{R}$, $f_{[2m]}(x_1) \geq x_1 + m^2$; donc

$$\sum_{j=1}^{p} f_{[2m]}(x_1^{i_j}) \geq p \cdot m^2 + \sum_{j=1}^{p} x_1^{i_j}.$$

Par conséquent, on aurait

$$\sum_{j=1}^{p} y_2^{i_j} + \sum_{\substack{j \notin \{i_1,\ldots,i_p\} \\ j \leq k}} (y_2^j - x_2^j) \geq p \cdot m^2,$$

ce qui est impossible puisque

$$\sum_{j=1}^{p} y_2^{i_j} + \sum_{\substack{j \notin \{i_1,\ldots,i_p\} \\ j \leq k}} (y_2^j - x_2^j) \leq k \cdot 2(m-1) \leq m^2 - 1.$$

Si $x_2^i = 2m$, $i \leq k$, alors :

$(x_1^{k+i}, y_2^i) \succsim (x_1^{k+i-1}, x_2^i)$, ce qui est équivalent à $x_1^{k+i} + y_2^i \geq f_{[2m]}(x_1^{k+i-1})$;

sinon :

$(x_1^{k+i}, y_2^i) \succsim (x_1^{k+i-1}, x_2^i)$, ce qui est équivalent à $x_1^{k+i} + y_2^i \geq x_1^{k+i-1} + x_2^i$.

Par conséquent les $k-1$ dernières relations de préférence de (6.19) impliquent que

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}(x_1^{k+i} + y_2^i) \geq \sum_{j=2}^{p-1} f_{[2m]}(x_1^{k+i_j-1}) + f_{[2m]}(x_1^{2k}) \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum_{\substack{i \notin \{i_1,\ldots,i_p\} \\ 2 \leq i \leq k-1}} (x_1^{k+i-1} + x_2^i) \end{array}\right] & \text{si } x_2^1 = 2m, \\ & \text{et } x_2^k = 2m, \\ \left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}(x_1^{k+i} + y_2^i) \geq \sum_{j=2}^{p} f_{[2m]}(x_1^{k+i_j-1}) + f_{[2m]}(x_1^{2k}) \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum_{\substack{i \notin \{i_1,\ldots,i_p\} \\ 2 \leq i \leq k-1}} (x_1^{k+i-1} + x_2^i) \end{array}\right] & \text{si } x_2^1 = 2m, \\ & \text{et } x_2^k \neq 2m, \\ \left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}(x_1^{k+i} + y_2^i) \geq \sum_{j=1}^{p-1} f_{[2m]}(x_1^{k+i_j-1}) + x_1^{2k} + x_2^1 \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum_{\substack{i \notin \{i_1,\ldots,i_p\} \\ 2 \leq i \leq k-1}} (x_1^{k+i-1} + x_2^i) \end{array}\right] & \text{si } x_2^1 \neq 2m, \\ & \text{et } x_2^k = 2m, \\ \left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}(x_1^{k+i} + y_2^i) \geq \sum_{j=1}^{p} f_{[2m]}(x_1^{k+i_j-1}) + x_1^{2k} + x_2^1 \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum_{\substack{i \notin \{i_1,\ldots,i_p\} \\ 2 \leq i \leq k-1}} (x_1^{k+i-1} + x_2^i) \end{array}\right] & \text{si } x_2^1 \neq 2m, \\ & \text{et } x_2^k \neq 2m. \end{cases}$$

L'équation ci-dessus est équivalente à

$$\begin{cases} x_1^{2k-1} \geq \displaystyle\sum_{j=2}^{p-1}\left(f_{[2m]}(x_1^{k+i_j-1}) - x_1^{k+i_j-1}\right) + f_{[2m]}(x_1^{2k}) \\ \qquad - \displaystyle\sum_{j=1}^{p-1} y_2^{i_j} + \sum_{\substack{i\notin\{i_1,\dots,i_p\}\\ 2\leq i\leq k-1}} (x_2^i - y_2^i) & \text{si } x_2^1 = 2m, \text{ et } x_2^k = 2m, \\ x_1^{2k-1} \geq \displaystyle\sum_{j=2}^{p}\left(f_{[2m]}(x_1^{k+i_j-1}) - x_1^{k+i_j-1}\right) + f_{[2m]}(x_1^{2k}) \\ \qquad - \displaystyle\sum_{j=1}^{p} y_2^{i_j} + \sum_{\substack{i\notin\{i_1,\dots,i_p\}\\ 2\leq i\leq k-1}} (x_2^i - y_2^i) & \text{si } x_2^1 = 2m, \text{ et } x_2^k \neq 2m, \\ x_1^{2k-1} \geq \displaystyle\sum_{j=1}^{p-1}\left(f_{[2m]}(x_1^{k+i_j-1}) - x_1^{k+i_j-1}\right) + x_1^{2k} \\ \qquad - \displaystyle\sum_{j=1}^{p-1} y_2^{i_j} + \sum_{\substack{i\notin\{i_1,\dots,i_p\}\\ i\leq k-1}} (x_2^i - y_2^i) & \text{si } x_2^1 \neq 2m, \text{ et } x_2^k = 2m, \\ x_1^{2k-1} \geq \displaystyle\sum_{j=1}^{p}\left(f_{[2m]}(x_1^{k+i_j-1}) - x_1^{k+i_j-1}\right) + x_1^{2k} \\ \qquad - \displaystyle\sum_{j=1}^{p} y_2^{i_j} + \sum_{\substack{i\notin\{i_1,\dots,i_p\}\\ i\leq k-1}} (x_2^i - y_2^i) & \text{si } x_2^1 \neq 2m, \text{ et } x_2^k \neq 2m. \end{cases}$$

Donc, puisque $f_{[2m]}(x_1) \geq x_1 + m^2 \ \forall x_1 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x_1^{2k-1} \geq x_1^{2k} + (p-1)\cdot m^2 - \displaystyle\sum_{j=1}^{p-1} y_2^{i_j} + \sum_{\substack{i\notin\{i_1,\dots,i_p\}\\ i\leq k-1}} (x_2^i - y_2^i) & \text{si } x_2^k = 2m \\ x_1^{2k-1} \geq x_1^{2k} + p\cdot m^2 - \displaystyle\sum_{j=1}^{p} y_2^{i_j} + \sum_{\substack{i\notin\{i_1,\dots,i_p\}\\ i\leq k-1}} (x_2^i - y_2^i) & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans le premier cas,

$$\begin{aligned} x_1^{2k-1} + m^2 &\geq x_1^{2k} + p\cdot m^2 - \sum_{j=1}^{k} y_2^j + \sum_{\substack{i\notin\{i_1,\dots,i_p\}\\ i\leq k-1}} x_2^i + y_2^k \\ &\geq x_1^{2k} + p\cdot m^2 - \sum_{j=1}^{k} y_2^j + y_2^k \\ &> x_1^{2k} + y_2^k, \end{aligned}$$

car

$$p\cdot m^2 \geq m^2 > m^2 - 1 \geq \sum_{i=1}^{k}(2m-2) \geq \sum_{i=1}^{k} y_2^i.$$

Mais puisque $f_{[2m]}(x_1) \geq x_1 + m^2$ $\forall x_1 \in \mathbb{R}$, $f_{[2m]}(x_1^{2k-1}) > x_1^{2k} + y_2^k$. Donc $(x_1^{2k-1}, x_2^k) \succ (x_1^{2k}, y_2^k)$.
Dans le second cas,

$$\begin{aligned} x_1^{2k-1} &\geq x_1^{2k} + p \cdot m^2 - \sum_{i=1}^{k} y_2^i + \sum_{\substack{i \notin \{i_1,\ldots,i_p\} \\ i \leq k-1}} x_2^i + (y_2^k - x_2^k) \\ &\geq x_1^{2k} + p \cdot m^2 - \sum_{i=1}^{k} y_2^i + (y_2^k - x_2^k) \\ &> x_1^{2k} + (y_2^k - x_2^k). \end{aligned}$$

Par conséquent, $(x_1^{2k-1}, x_2^k) \succ (x_1^{2k}, y_2^k)$.

Autrement dit, (S_i) est bien vérifiée pour tout $i \in \{3, \ldots, m\}$, et, donc, (C_m) aussi. Puisque m est impair, (C_{m+1}) est aussi vérifiée (d'après le théorème 6.2). ♦

Démonstration du lemme 6.2 : D'après les équations (6.7) et (6.8), nous pouvons déduire les équations suivantes :

$$f_{[0]}^{-1} \circ f_{[1]}(x_1) = \begin{cases} x_1 - \frac{3}{2} & \text{si } x_1 \in]-\infty, 1] \\ \frac{x_1 - 3}{4} & \text{si } x_1 \in [1, 3] \\ x_1 - 3 & \text{si } x_1 \in [3, +\infty] \end{cases} \tag{6.20}$$

$$f_{[1]} \circ f_{[0]}^{-1}(x_1) = \begin{cases} x_1 + \frac{3}{2} & \text{si } x_1 \in]-\infty, -\frac{1}{2}] \\ 4x_1 + 3 & \text{si } x_1 \in [-\frac{1}{2}, 0] \\ x_1 + 3 & \text{si } x_1 \in [0, +\infty] \end{cases} \tag{6.21}$$

Donc, d'après (6.10), $\forall \alpha \in]0, 1[$, $f_{[\alpha]} \circ f_{[0]}^{-1} \circ f_{[1]}(2\alpha + 1) = f_{[\alpha]}(\frac{\alpha-1}{2})$. Par conséquent, l'équation (6.9) n'est pas en contradiction avec l'équation (6.10). En utilisant (6.9) et (6.10), nous définissons $f_{[\alpha]}$ sur $[\frac{\alpha-4}{2}, \frac{\alpha-1}{2}]$ puisque $f_{[0]}^{-1} \circ f_{[1]}$ est évidemment continue et croissante, $f_{[0]}^{-1} \circ f_{[1]}(\frac{\alpha-1}{2}) = \frac{\alpha-4}{2}$ et $f_{[0]}^{-1} \circ f_{[1]}(2\alpha + 1) = \frac{\alpha-1}{2}$. $f_{[0]}^{-1} \circ f_{[1]}$ et $f_{[1]} \circ f_{[0]}^{-1}$ étant continues et strictement croissantes sur $[\frac{\alpha-1}{2}, 2\alpha + 1]$, $f_{[\alpha]}$ est continue et décroît strictement sur $[\frac{\alpha-4}{2}, \frac{\alpha-1}{2}]$. Par récurrence, on construit $f_{[\alpha]}$ sur $]-\infty, 2\alpha + 1]$ car on montre facilement que $\forall k \in \mathbb{N}$, $f_{[0]}^{-1} \circ f_{[1]}(\frac{\alpha-1-3k}{2}) = \frac{\alpha-4-3k}{2}$. Bien entendu, la construction par récurrence assure la continuité et la croissance de $f_{[\alpha]}$.

De plus, $\forall k \in \mathbb{N}$, $f_{[1]} \circ f_{[0]}^{-1} \circ f_{[\alpha]}(\frac{\alpha-1-3k}{2}) = 2\alpha + 1 + 3k$, ce qui entraîne que $\lim_{x_1 \to -\infty} f_{[\alpha]}(x_1) = +\infty$. La droite $x_2 = x_1$ étant axe de symétrie pour $f_{[0]}$ et $f_{[1]}$ sur $\mathbb{R}$, et pour $f_{[\alpha]}$ sur $[\frac{\alpha-1}{2}, 2\alpha + 1]$, c'est aussi un axe de symétrie pour $f_{[\alpha]}$ sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, $f_{[\alpha]}$ est bien définie sur $[-2\alpha - 1, +\infty[$, continue, strictement décroissante et $\lim_{x_1 \to +\infty} f_{[\alpha]}(x_1) = -\infty$.

Maintenant, considérons $\alpha, \beta \in [0, 1]$ tels que $\alpha \leq \beta$. D'après l'équation (6.9) — ainsi que les équations (6.7) et (6.8) si α ou β est égal à 0 ou à 1 — il est évident que $\forall x_1 \in [\frac{\beta-1}{2}, 2\alpha + 1]$, $f_{[\alpha]} \leq f_{[\beta]}$. Sur l'intervalle $[\frac{\alpha-1}{2}, \frac{\beta-1}{2}]$, l'inégalité $f_{[\alpha]}(x_1) \leq f_{[\beta]}(x_1)$ doit aussi être vérifiée car, sinon, $f_{[\beta]}$ ne pourrait être bijective. Maintenant, s'il existait un $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $f_{[\alpha]}(x_1) > f_{[\beta]}(x_1)$, alors, par une utilisation répétée de (6.10), il existerait un $x_1' \in [\frac{\alpha-1}{2}, 2\alpha + 1]$ tel que $f_{[\alpha]}(x_1') > f_{[\beta]}(x_1')$, ce qui, comme nous l'avons

déjà montré, est impossible. Réciproquement, si $\forall x_1 \in \mathbb{R}$, $f_{[\alpha]}(x_1) \leq f_{[\beta]}(x_1)$, alors c'est vrai en particulier pour tout $x_1 \in [\frac{\beta-1}{2}, 2\alpha+1]$. Mais alors, d'après l'équation (6.9) — et (6.7) ou (6.8) — $\alpha \leq \beta$. ♦

Démonstration du lemme 6.3 : D'après (6.10), nous savons que $f_{[\varphi(\alpha)]}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ pour tout $\alpha \in [0,1]$. Puisque $f_{[\alpha]}$, $f_{[0]}$ et $f_{[1]}$ sont continues, strictement décroissantes, varient de $+\infty$ à $-\infty$ et admettent la droite $x_2 = x_1$ comme axe de symétrie, $f_{[\varphi(\alpha)]}$ possède les mêmes propriétés. D'après le lemme 6.2, pour tout $\alpha, \beta \in [0,1]$, $\alpha \leq \beta \Rightarrow [f_{[\alpha]}(x_1) \leq f_{[\beta]}(x_1)\ \forall x_1 \in \mathbb{R}]$; et d'après le changement de variable $y_1 = f_{[1]}^{-1} \circ f_{[0]}(x_1)$ et le fait que $f_{[1]}^{-1} \circ f_{[0]}(x_1)$ varie de $-\infty$ à $+\infty$, $\alpha \leq \beta \Rightarrow [f_{[\alpha]} \circ f_{[0]}^{-1} \circ f_{[1]}(y_1) \leq f_{[\beta]} \circ f_{[0]}^{-1} \circ f_{[1]}(y_1)\ \forall y_1 \in \mathbb{R}]$.

$f_{[\varphi(1)]} = f_{[1]} \circ f_{[0]}^{-1} \circ f_{[1]}$ et $f_{[\varphi(0)]} = f_{[1]}$ — puisque, par hypothèse $\varphi(0) = 1$; donc

$$\begin{aligned}
f_{[\varphi(\alpha)]} \circ f_{[\varphi(0)]}^{-1} \circ f_{[\varphi(1)]} &= f_{[\alpha]} \circ f_{[0]}^{-1} \circ f_{[1]} \circ f_{[1]}^{-1} \circ f_{[1]} \circ f_{[0]}^{-1} \circ f_{[1]} \\
&= f_{[\alpha]} \circ f_{[0]}^{-1} \circ f_{[1]} \circ f_{[0]}^{-1} \circ f_{[1]} \\
&= f_{[1]} \circ f_{[0]}^{-1} \circ f_{[\alpha]} \circ f_{[0]}^{-1} \circ f_{[1]} \\
&= f_{[1]} \circ f_{[0]}^{-1} \circ f_{[1]} \circ f_{[1]}^{-1} \circ f_{[\alpha]} \circ f_{[0]}^{-1} \circ f_{[1]} \\
&= f_{[\varphi(1)]} \circ f_{[\varphi(0)]}^{-1} \circ f_{[\varphi(\alpha)]},
\end{aligned}$$

ce qui prouve bien que l'équation (6.11) est vérifiée. ♦

Lemme 6.4 *Supposons que pour tout $\alpha \in [0,1]$, $\mathcal{C}_{[\alpha]}$ est donnée par (6.7), (6.8), ou (6.9) et (6.10). Supposons de plus que $\mathcal{C}_{[\varphi^k(\alpha)]}$ et $\mathcal{C}_{[\varphi^{-k}(\alpha)]}$ sont déterminées pour tout $k \in \mathbb{N}$ grâce aux équations (6.11), (6.13), (6.11) et (6.14). Alors φ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_{[\beta]}$ aussi est bien définie $\forall \beta \in \mathbb{R}$. De plus, φ croît strictement de $-\infty$ à $+\infty$, $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $(x_1, x_2) \in \mathcal{C}_{[\alpha]}$, et, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,*

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow [f_{[\alpha]}(x_1) \leq f_{[\beta]}(x_1)\ \forall x_1 \in \mathbb{R}].$$

$$\forall x_1, x_1' \in \mathbb{R},\ f_{[\alpha]}(x_1) = f_{[\beta]}(x_1') \Rightarrow f_{[\varphi(\alpha)]}(x_1) = f_{[\varphi(\beta)]}(x_1').$$

Démonstration du lemme 6.4 : D'après (6.9), tout point du polyèdre défini par $\{(x_1, x_2) : f_{[0]}(x_1) \leq x_2 \leq f_{[1]}(x_1)$ et $\frac{x_1-3}{4} \leq x_2 \leq 4x_1 + 3\}$ appartient à une courbe d'indifférence $\mathcal{C}_{[\alpha]}$. On peut aisément montrer que tout point du domaine $\{(x_1, x_2) : f_{[0]}(x_1) \leq x_2 \leq f_{[1]}(x_1)$ et $4x_1 + 3 \leq x_2 \leq 4x_1 + 9 + 3\}$ peut être obtenu grâce à (6.10) à partir d'un point du polyèdre précédent ; et, par récurrence, que $\forall k > 1$, tout point du polyèdre $\{(x_1, x_2) : f_{[0]}(x_1) \leq x_2 \leq f_{[1]}(x_1)$ et $4x_1 + 9k - 6 \leq x_2 \leq 4x_1 + 9k + 3\}$ est obtenu grâce à la formule (6.10) à partir d'un point de $\{(x_1, x_2) : f_{[0]}(x_1) \leq x_2 \leq f_{[1]}(x_1)$ et $4x_1 + 9(k-1) - 6 \leq x_2 \leq 4x_1 + 9(k-1) + 3\}$. En utilisant l'axe de symétrie $x_2 = x_1$, nous en concluons que tout point dans le polyèdre $\{(x_1, x_2) : f_{[0]}(x_1) \leq x_2 \leq f_{[1]}(x_1)\}$ appartient à une courbe d'indifférence $\mathcal{C}_{[\alpha]}$.

Supposons maintenant que, $\forall k \geq 0$, tout point du domaine $\{(x_1, x_2) : f_{[\varphi^k(0)]}(x_1) \leq x_2 \leq f_{[\varphi^k(1)]}(x_1)\}$ appartienne à une courbe $\mathcal{C}_{[\varphi^k(\alpha)]}$. Considérons un point arbitraire

(x_1^0, x_2^0) dans le domaine défini par $\{(x_1, x_2) : f_{[\varphi^{k+1}(0)]}(x_1) \leq x_2 \leq f_{[\varphi^{k+1}(1)]}(x_1)\}$. Par hypothèse, x_2^0 est tel que $f_{[\varphi^{k+1}(0)]}(x_1^0) \leq x_2^0 \leq f_{[\varphi^{k+1}(1)]}(x_1^0)$. Donc $x_2^1 = f_{[0]} \circ f_{[1]}^{-1}(x_2^0)$ est tel que $f_{[\varphi^k(0)]}(x_1^0) \leq x_2^1 \leq f_{[\varphi^k(1)]}(x_1^0)$. Or, par hypothèse, il existe une courbe $\mathcal{C}_{[\varphi^k(\alpha)]}$ telle que $(x_1^0, x_2^1) \in \mathcal{C}_{[\varphi^k(\alpha)]}$. Donc

$$\begin{aligned} x_2^1 = f_{[\varphi^k(\alpha)]}(x_1^0) \quad \text{et} \quad x_2^0 &= f_{[1]} \circ f_{[0]}^{-1} \circ f_{[\varphi^k(\alpha)]}(x_1^0) \\ &= f_{[\varphi^k(1)]} \circ f_{[\varphi^k(0)]}^{-1} \circ f_{[\varphi^k(\alpha)]}(x_1^0) \\ &= f_{[\varphi^{k+1}(\alpha)]}(x_1^0). \end{aligned}$$

Par conséquent, tout point du domaine défini par $\{(x_1, x_2) : f_{[\varphi^{k+1}(0)]}(x_1) \leq x_2 \leq f_{[\varphi^{k+1}(1)]}(x_1)\}$ appartient à une courbe d'indifférence $\mathcal{C}_{[\beta]}$. On applique le même genre de démonstration dans le cas où k est négatif. Maintenant, nous pouvons étendre cette propriété locale à la totalité de $\mathbb{R}^2$.

Supposons que pour tout $k \geq 0$,

$$f_{[\varphi^k(1)]}(x_1) \geq \begin{cases} 3(k+1) - 2x_1 & \text{si } x_1 \leq k+1, \\ \dfrac{3(k+1) - x_1}{2} & \text{autrement.} \end{cases}$$

Notons que cette propriété est vraie pour $k = 0$ car $f_{[\varphi^k(1)]}$ correspond alors à $f_{[1]}$. $f_{[\varphi^{k+1}(1)]} = (f_{[1]} \circ f_{[0]}^{-1})^{k+1} \circ f_{[1]} = (f_{[1]} \circ f_{[0]}^{-1}) \circ f_{[\varphi^k(1)]}$; donc, en utilisant l'équation (6.21) dans la démonstration du lemme 6.2, nous déduisons l'inégalité suivante :

$$f_{[\varphi^{k+1}(1)]}(x_1) \geq \begin{cases} 3(k+2) - 2x_1 & \text{si } x_1 \leq k+1, \\ 3 + \dfrac{3(k+1) - x_1}{2} & \text{si } x_1 \in [k+1, 3(k+1)], \\ 3 + 6(k+1) - 2x_1 & \text{si } x_1 \in [3(k+1), 3(k+1)+1], \\ \dfrac{3(k+2) - x_1}{2} & \text{si } x_1 \geq 3(k+1)+1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\text{Mais dans } [k+1, k+2], && 3 + \frac{3(k+1) - x_1}{2} \geq -2x_1 + 3(k+2) \\ &\quad\ \text{dans } [k+2, 3(k+1)], && 3 + \frac{3(k+1) - x_1}{2} \geq \frac{3(k+2) - x_1}{2} \\ &\text{et} \quad \text{dans } [3(k+1), 3(k+1)+1], && 3 + 6(k+1) - 2x_1 \geq \frac{3(k+2) - x_1}{2}. \end{aligned}$$

Donc

$$f_{[\varphi^{k+1}(1)]}(x_1) \geq \begin{cases} 3(k+2) - 2x_1 & \text{si } x_1 \leq k+2, \\ \dfrac{3(k+2) - x_1}{2} & \text{autrement.} \end{cases}$$

Puisque cette propriété est vérifiée pour $k = 0$, par récurrence, elle l'est aussi pour tout $k \geq 0$. Donc, tout point (x_1^0, x_2^0) du polyèdre défini par $\{(x_1, x_2) : f_{[0]}(x_1) \leq x_2 \leq g_{[k]}(x_1)\}$, où

$$g_{[k]}(x_1) = \begin{cases} 3(k+1) - 2x_1 & \text{si } x_1 \leq k+1, \\ \dfrac{3(k+1) - x_1}{2} & \text{autrement,} \end{cases}$$

appartient aussi au polyèdre $\{(x_1, x_2) : f_{[0]}(x_1) \leq x_2 \leq f_{[\varphi^k(1)]}(x_1)\}$. Mais nous avons vu dans le paragraphe précédent que, dans ce cas, il existe une courbe $\mathcal{C}_{[\alpha]}$ contenant

(x_1^0, x_2^0). Or $\lim_{k\to+\infty}\{(x_1,x_2) : f_{[0]}(x_1) \leq x_2 \leq g_{[k]}(x_1)\} = \{(x_1,x_2) : f_{[0]}(x_1) \leq x_2\}$. Donc tout point de ce dernier ensemble appartient à une courbe d'indifférence. Une démonstration similaire montrerait que tout point de l'ensemble $\{(x_1,x_2) : x_2 \leq f_{[0]}(x_1)\}$ appartient aussi à une courbe d'indifférence.

Donc tout point de $\mathbb{R}^2$ appartient à une courbe $\mathcal{C}_{[\alpha]}$. C'est vrai en particulier pour tout point de la droite $x_2 = x_1$. Par conséquent, $\mathcal{C}_{[\alpha]}$ est définie pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Le principe de construction garantit que φ est définie sur $\mathbb{R}$. Supposons maintenant que α et β sont des nombres réels tels que $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$. Alors, $f_{[\varphi(\alpha)]} = f_{[\varphi(\beta)]}$. Mais, d'après les paragraphes précédents,

$$\text{il existe } k, k' \in \mathbb{N} \text{ et } \gamma, \delta \in [0,1] \text{ tels que } \alpha = \varphi^k(\gamma) \text{ et } \beta = \varphi^{k'}(\delta).$$

Alors

$$\begin{aligned} f_{[\varphi(\alpha)]} &= f_{[\varphi^k(1)]} \circ f^{-1}_{[\varphi^k(0)]} \circ f_{[\varphi^k(\gamma)]} \\ &= f_{[1]} \circ f^{-1}_{[0]} \circ f_{[\varphi^k(\gamma)]} \end{aligned}$$

et

$$f_{[\varphi(\beta)]} = f_{[1]} \circ f^{-1}_{[0]} \circ f_{[\varphi^{k'}(\delta)]}.$$

Puisque $f_{[1]} \circ f^{-1}_{[0]}$ est une bijection, $f_{[\varphi^k(\gamma)]} = f_{[\varphi^{k'}(\delta)]}$. Par conséquent, $\varphi^k(\gamma) = \varphi^{k'}(\delta)$, et donc, $\alpha = \beta$, ce qui implique que φ est une bijection.

Nous savons déjà que pour tout entier k, et pour tous $\alpha, \beta \in [0,1]$,

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow [f_{[\varphi^k(\alpha)]}(x_1) \leq f_{[\varphi^k(\beta)]}(x_1),\ \forall x_1 \in \mathbb{R}].$$

Mais d'après (6.13) et (6.14), $f_{[\varphi^{k+1}(0)]}(x_1) = f_{[\varphi^k(1)]}(x_1)$; donc, $\forall k, k' \in \mathbb{N}$,

$$\varphi^k(\alpha) \leq \varphi^{k'}(\beta) \Leftrightarrow [f_{[\varphi^k(\alpha)]}(x_1) \leq f_{[\varphi^{k'}(\beta)]}(x_1)\ \forall x_1 \in \mathbb{R}].$$

Par conséquent, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow [f_{[\alpha]}(x_1) \leq f_{[\beta]}(x_1)\ \forall x_1 \in \mathbb{R}]$, et, puisque $f_{[1]} \circ f^{-1}_{[0]}$ est strictement croissante,

$$f_{[\alpha]}(x_1) \leq f_{[\beta]}(x_1) \Leftrightarrow f_{[1]} \circ f^{-1}_{[0]} \circ f_{[\alpha]}(x_1) \leq f_{[1]} \circ f^{-1}_{[0]} \circ f_{[\beta]}(x_1) \Leftrightarrow f_{[\varphi(\alpha)]}(x_1) \leq f_{[\varphi(\beta)]}(x_1).$$

Ainsi, φ est strictement croissante.

Pour terminer la démonstration, supposons que $x_1, x_1', \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ soient tels que $f_{[\alpha]}(x_1) = f_{[\beta]}(x_1')$. Alors

$$\begin{aligned} f_{[\varphi(\alpha)]}(x_1) &= f_{[1]} \circ f^{-1}_{[0]} f_{[\alpha]}(x_1) \\ &= f_{[1]} \circ f^{-1}_{[0]} \circ f_{[\beta]}(x_1') \\ &= f_{[\varphi(\beta)]}(x_1'). \end{aligned}$$

♦

Lemme 6.5 *Pour tous $\alpha, \beta \in [0,1]$, il existe une constante $m(\alpha,\beta)$ telle que $m(\alpha,\beta) \leq f_{[\beta]}(x_1) - f_{[\alpha]}(x_1)$ pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$. De plus, $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow m(\alpha,\beta) \geq 0$.*

Démonstration du lemme 6.5 : Le principe de construction de $f_{[\alpha]}$, pour $\alpha \in [0,1]$, consiste à créer la fonction sur un petit intervalle d'après l'équation (6.9), et, ensuite, à étendre sa définition sur $\mathbb{R}$ grâce à (6.10). Mais si x_1 est supérieur ou égal à 4, $f_{[\alpha]}(x_1) \leq -0.5$ car $f_{[\alpha]} \leq f_{[1]}$ et $f_{[1]}(4) = -0.5$. De plus, par (6.21), $f_{[1]} \circ f_{[0]}^{-1} \circ f_{[\alpha]}(x_1) = f_{[\alpha]}(x_1) + \frac{3}{2}$. Donc, dans (6.10), l'extension de $f_{[\alpha]}$ sur $[4, +\infty[$ est réalisée par des translations. Il en est de même pour son extension sur $]-\infty, -1.5]$ parce que $f_{[0]} \leq f_{[\alpha]}$ et $f_{[0]}(-1.5) = 3$, ce qui, d'après (6.20), implique des translations.

Ainsi, la différence $f_{[\beta]}(x_1) - f_{[\alpha]}(x_1)$ ne doit être calculée que sur $\{x_1 \in [-1.5, 4]\}$. Mais, dans cet ensemble, d'après le lemme 6.2, nous savons que $f_{[\alpha]}$ et $f_{[\beta]}$ sont continues. Donc, puisque $[-1.5, 4]$ est un intervalle fermé, $f_{[\beta]}(x_1) - f_{[\alpha]}(x_1)$ admet un maximum et un minimum, qui sont atteints. De plus, encore d'après le lemme 6.2, $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow f_{[\alpha]}(x_1) \leq f_{[\beta]}(x_1)$. Par conséquent, le minimum de $f_{[\beta]}(x_1) - f_{[\alpha]}(x_1)$ sur $[-1.5, 4]$ est 0 si et seulement si $\alpha = \beta$. ♦

Démonstration du théorème 6.3 : Dans cette démonstration, nous allons montrer successivement que $\succsim$ est un préordre large total sur X, que les deux premiers composants du produit cartésien vérifient la solvabilité non restreinte, et que l'axiome d'indépendance ainsi que l'axiome archimédien sont vérifiés.

1ere étape : $\succsim$ est un préordre large total sur X

$\succsim$ est un préordre large total bien défini parce que, d'après le lemme 6.4, pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $(x_1, x_2) \in \mathcal{C}_{[\alpha]}$, et il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(\beta) = \alpha$, de telle sorte que $(x_1, x_2) \in \mathcal{C}_{[\varphi(\beta)]}$.

2eme étape : la solvabilité non restreinte sur les 2 premiers composants de X

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_{[\alpha]}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et est bijective. Donc, $\forall x_2 \in \mathbb{R}$ (resp. $x_1 \in \mathbb{R}$), il existe un nombre $x_1 \in \mathbb{R}$ (resp. $x_2 \in \mathbb{R}$) tel que $f_{[\alpha]}(x_1) = x_2$. Ceci garantit la solvabilité non restreinte par rapport à x_1 (resp. x_2) dans le plan $\{x_3 = x_3^0\}$. φ étant bijective, continue, et variant de $-\infty$ à $+\infty$, il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(\beta) = \alpha$; et, puisque $h(x_1, x_2, x_3^1) = \varphi \circ h(x_1, x_2, x_3^0)$, la solvabilité non restreinte par rapport à x_1 (resp. x_2) est aussi assurée dans le plan $\{x_3 = x_3^1\}$. Par conséquent, les deux premiers composants de X vérifient la solvabilité non restreinte.

3eme étape : l'axiome d'indépendance

Soient $x_1^0, x_1^1, x_2^0, x_2^1 \in \mathbb{R}$ tels que $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \precsim (x_1^1, x_2^1, x_3^0)$. D'après le lemme 6.4, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha \leq \beta$, $(x_1^0, x_2^0) \in \mathcal{C}_{[\alpha]}$ et $(x_1^1, x_2^1) \in \mathcal{C}_{[\beta]}$. φ est strictement croissante, donc

$$\begin{array}{ll} & [\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \varphi(\alpha) \leq \varphi(\beta)] \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{c} h(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = \alpha \leq h(x_1^1, x_2^1, x_3^0) = \beta \\ \Leftrightarrow \quad \varphi \circ h(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = \varphi(\alpha) \leq \varphi \circ h(x_1^1, x_2^1, x_3^0) = \varphi(\beta) \end{array} \right] \\ \Leftrightarrow & (x_1^0, x_2^0, x_3^1) \precsim (x_1^1, x_2^1, x_3^1). \end{array}$$

Par conséquent, l'axiome d'indépendance est vérifié par rapport au troisième composant.

Maintenant, soient $x_1, x_2^0, x_2^1 \in \mathbb{R}$ tels que $(x_1, x_2^0, x_3^0) \precsim (x_1, x_2^1, x_3^0)$. Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $(x_1, x_2^0) \in \mathcal{C}_{[\alpha]}$ et $(x_1, x_2^1) \in \mathcal{C}_{[\beta]}$, avec $\alpha \leq \beta$. Dans ce cas, d'après le lemme 6.4, $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow [f_{[\alpha]}(x_1) \leq f_{[\beta]}(x_1)$ pour tout $x_1 \in \mathbb{R}]$. Donc $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow x_2^0 \leq x_2^1$; ainsi, $\forall x_1' \in \mathbb{R}$, $(x_1', x_2^0, x_3^0) \precsim (x_1', x_2^1, x_3^0)$. D'après l'indépendance par rapport au troisième composant,

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2^0, x_3^1) \precsim (x_1, x_2^1, x_3^1) &\Leftrightarrow (x_1, x_2^0, x_3^0) \precsim (x_1, x_2^1, x_3^0) \\
&\Leftrightarrow [(x_1', x_2^0, x_3^0) \precsim (x_1', x_2^1, x_3^0)\ \forall x_1' \in \mathbb{R}] \\
&\Leftrightarrow [(x_1', x_2^0, x_3^1) \precsim (x_1', x_2^1, x_3^1)\ \forall x_1' \in \mathbb{R}].
\end{aligned}$$

D'après la symétrie entre x_1 et x_2, nous avons

$$\begin{aligned}
(x_1^0, x_2, x_3^1) \precsim (x_1^1, x_2, x_3^1) &\Leftrightarrow (x_1^0, x_2, x_3^0) \precsim (x_1^1, x_2, x_3^0) \\
&\Leftrightarrow [(x_1^0, x_2', x_3^0) \precsim (x_1^1, x_2', x_3^0)\ \forall x_2' \in \mathbb{R}] \\
&\Leftrightarrow [(x_1^0, x_2', x_3^1) \precsim (x_1^1, x_2', x_3^1)\ \forall x_2' \in \mathbb{R}].
\end{aligned}$$

Par conséquent, à l'intérieur des plans, l'indépendance est vérifiée par rapport aux premier et second composants.

Soient $x_1, x_2^0, x_2^1 \in \mathbb{R}$ tels que $(x_1, x_2^0, x_3^0) \sim (x_1, x_2^1, x_3^1)$. Alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $(x_1, x_2^1) \in \mathcal{C}_{[\alpha]}$ et $(x_1, x_2^0) \in \mathcal{C}_{[\varphi(\alpha)]}$. Ainsi $x_2^1 = f_{[\alpha]}(x_1)$ tandis que $x_2^0 = f_{[\varphi(\alpha)]}(x_1)$. Mais d'après le lemme 6.4, $\forall x_1' \in \mathbb{R}$, $\exists\, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $(x_1', x_2^1) \in \mathcal{C}_{[\beta]}$, et, alors $(x_1', x_2^0) \in \mathcal{C}_{[\varphi(\beta)]}$. Donc, $\forall x_1' \in \mathbb{R}$, $(x_1', x_2^0, x_3^0) \sim (x_1', x_2^1, x_3^1)$. Maintenant, supposons que $x_1, x_2^0, x_2^1 \in \mathbb{R}$ sont tels que $(x_1, x_2^0, x_3^0) \precsim (x_1, x_2^1, x_3^1)$. Alors il existe x_2^2 tel que $(x_1, x_2^0, x_3^0) \precsim (x_1, x_2^2, x_3^0) \sim (x_1, x_2^1, x_3^1)$. D'après le début de ce paragraphe ainsi que le précédent, $\forall x_1' \in \mathbb{R}$, $(x_1', x_2^0, x_3^0) \precsim (x_1', x_2^2, x_3^0) \sim (x_1', x_2^1, x_3^1)$. Par symétrie, l'implication suivante doit aussi être vraie : $(x_1, x_2^0, x_3^1) \precsim (x_1, x_2^1, x_3^0) \Rightarrow [(x_1', x_2^0, x_3^1) \precsim (x_1', x_2^1, x_3^0)$ $\forall x_1' \in \mathbb{R}]$. Par conséquent l'indépendance est satisfaite pour le premier composant. Et, de par la symétrie entre x_1 et x_2, elle l'est aussi pour le deuxième composant.

4eme étape : l'axiome archimédien

Considérons une séquence standard par rapport au premier composant :

$$\begin{aligned}
\{x_1^k :\ & x_1^k \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N},\ \mathrm{Non}((x_1^0, x_2^0, x_3^0) \sim (x_1^0, x_2^1, x_3^0)) \text{ et} \\
& \forall k, k+1 \in \mathbb{N},\ (x_1^k, x_2^1, x_3^0) \sim (x_1^{k+1}, x_2^0, x_3^0)\}.
\end{aligned}$$

Notons que par solvabilité non restreinte par rapport au second composant, toute séquence standard par rapport au premier composant peut être transformée en une séquence comme celle ci-dessus. Dans la suite, nous supposerons que $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \prec (x_1^0, x_2^1, x_3^0)$; une démonstration similaire serait employée dans le cas contraire.

Il existe α, β tels que $x_2^0 = f_{[\alpha]}(x_1^0)$ et $x_2^1 = f_{[\beta]}(x_1^0)$, de telle sorte que $x_2^1 = f_{[\beta]} \circ f_{[\alpha]}^{-1}(x_2^0)$. De manière similaire, il existe γ_1 tel que $x_2^1 = f_{[\gamma_1]}(x_1^1)$. Mais, puisque $(x_1^0, x_2^1, x_3^0) \sim (x_1^1, x_2^0, x_3^0)$, l'équation suivante doit être vraie :

$$f_{[\gamma_1]} = f_{[\beta]} \circ f_{[\alpha]}^{-1} \circ f_{[\beta]}.$$

Il existe γ_2 tel que $x_2^1 = f_{[\gamma_2]}(x_1^2)$. Mais alors, puisque $(x_1^1, x_2^1, x_3^0) \sim (x_1^2, x_2^0, x_3^0)$, l'équation suivante est vraie :

$$\begin{aligned} f_{[\gamma_2]} &= f_{[\gamma_1]} \circ f_{[\beta]}^{-1} \circ f_{[\gamma_1]} \\ &= (f_{[\beta]} \circ f_{[\alpha]}^{-1})^2 \circ f_{[\beta]} \end{aligned}$$

Par récurrence, en examinant x_1^k, on trouverait l'équation suivante :

$$f_{[\gamma_k]} = (f_{[\beta]} \circ f_{[\alpha]}^{-1})^k \circ f_{[\beta]}.$$

Maintenant, α (resp. β) peut être écrit comme $\varphi^p(\nu)$ (resp. $\varphi^m(\mu)$), avec μ et ν dans l'intervalle $[0, 1]$. Alors

$$f_{[\gamma_k]} = (f_{[\mu]} \circ (f_{[0]}^{-1} \circ f_{[1]})^m \circ (f_{[0]}^{-1} \circ f_{[1]})^{-p} \circ f_{[\nu]}^{-1})^k \circ f_{[\beta]},$$

ou, de manière équivalente,

$$f_{[\gamma_k]} = (f_{[\mu]} \circ (f_{[0]}^{-1} \circ f_{[1]})^{m-p} \circ f_{[\nu]}^{-1})^k \circ f_{[\mu]} \circ (f_{[0]}^{-1} \circ f_{[1]})^m.$$

μ et ν appartiennent à $[0, 1]$; donc, $\forall x_1 \in \mathbb{R}$,

$$f_{[0]}(x_1) \leq f_{[\mu]}(x_1) \leq f_{[1]}(x_1) \quad \text{et} \quad f_{[0]}(x_1) \leq f_{[\nu]}(x_1) \leq f_{[1]}(x_1).$$

De plus, $f_{[0]}^{-1} \circ f_{[1]}$ est strictement croissante. Par conséquent,

$$\begin{aligned} f_{[\gamma_k]} &> (f_{[0]} \circ (f_{[0]}^{-1} \circ f_{[1]})^{m-p} \circ f_{[1]}^{-1})^k \circ f_{[0]} \circ (f_{[0]}^{-1} \circ f_{[1]})^m \\ &> f_{[0]} \circ (f_{[0]}^{-1} \circ f_{[1]})^{k(m-p-1)+m}. \end{aligned}$$

Mais $f_{[0]}^{-1} \circ f_{[1]}^{-1}$ est croissante et vérifie $f_{[0]}^{-1} \circ f_{[1]}^{-1}(x_1) < x_1 - \frac{3}{2}$ $\forall x_1 \in \mathbb{R}$, et $f_{[0]}$ est décroissante et vérifie $f_{[0]}(x_1) > -x_1$ $\forall x_1 \in \mathbb{R}$. Donc

$$f_{[\gamma_k]}(x_1) > g(x_1) = -x_1 + \frac{3}{2}[k(m-p-1)+m] \ \forall x_1 \in \mathbb{R}.$$

L'intersection de g avec la droite $x_2 = x_1$ nous donne

$$x_1 = \frac{3[k(m-p-1)+m]}{4}.$$

Or $f_{[\gamma_k]}$ se trouve au "dessus" de g, donc

$$\gamma_k > \frac{3[k(m-p-1)+m]}{4}.$$

Par conséquent, si $m > p+1$, $lim_{k \to +\infty} \gamma_k = +\infty$. Ainsi la séquence standard ne peut être bornée supérieurement.

Si $m = p+1$, alors

$$f_{[\gamma_k]} = [(f_{[\mu]} \circ f_{[0]}^{-1}) \circ (f_{[1]} \circ f_{[\nu]}^{-1})]^k \circ f_{[\mu]} \circ (f_{[0]}^{-1} \circ f_{[1]})^m.$$

D'après le lemme 6.5, $f_{[\mu]} \geq f_{[0]} + m(0,\mu)$ et $f_{[1]} \geq f_{[\nu]} + m(\nu,1)$. Donc

$$f_{[\gamma_k]} \geq (\mathrm{Id} + m(0,\mu) + m(\nu,1))^k \circ f_{[\mu]} \circ (f_{[0]}^{-1} \circ f_{[1]})^m,$$

où Id représente la fonction Identité. Un raisonnement similaire à celui du paragraphe précédent montre que la séquence standard ne peut être bornée, car on ne peut avoir en même temps $m(0,\mu) = m(\nu,1) = 0$; en effet, si $m(0,\mu) = m(\nu,1) = 0$, alors $\alpha = \beta$, ce qui serait contraire aux hypothèses.

Si $m = p$, alors

$$f_{[\gamma_k]} = [(f_{[\mu]} \circ f_{[\nu]}^{-1})]^k \circ f_{[\mu]} \circ (f_{[0]}^{-1} \circ f_{[1]})^m.$$

Ici, puisque $m = p$, $\mu > \nu$. Donc d'après le lemme 6.5, $f_{[\mu]} \geq f_{[\nu]} + m(\nu,\mu)$, et donc

$$f_{[\gamma_k]} \geq (\mathrm{Id} + m(\nu,\mu))^k \circ f_{[\mu]} \circ (f_{[0]}^{-1} \circ f_{[1]})^m.$$

Ainsi, la séquence standard n'admet aucune borne supérieure, ce qui achève la démonstration que l'axiome archimédien est vérifié. ♦

6.5 Résumé

Ce chapitre s'inspire principalement de Gonzales (1996a) et Gonzales (1995). Les résultats principaux sont :

1. Si X est un produit cartésien bidimensionnel :

   – la condition de Thomsen élargie correspond à la propriété suivante :

   $$[(x_1,z_2) \succsim (z_1,y_2) \text{ et } (z_1,x_2) \succsim (y_1,z_2)] \Rightarrow (x_1,x_2) \succsim (y_1,y_2).$$

   – (indépendance + condition de Thomsen élargie) $\Leftrightarrow (C_2)$.

2. Si X est bidimensionnel et si la solvabilité non restreinte est vérifiée par un de ses composants :

   – un contre-exemple montre que l'indépendance n'entraine pas la condition de Thomsen élargie.

   – l'axiome d'élimination symétrique d'ordre $m+1$, que l'on note (S_{m+1}), correspond à la définition suivante : posons $m+2 = 2k$. soient $m+2$ éléments de X_1, $x_1^1, \ldots, x_1^{m+2}$, et $m+2$ éléments de X_2, $x_2^1, \ldots, x_2^k$ et $y_2^1, \ldots, y_2^k$, tels

que, $\forall i \leq k < j$, $x_1^i \neq x_1^j$, et, $\forall i, j < k$, $x_2^i \neq y_2^j$. Alors,

$$\left(\begin{array}{ccc} (x_1^1, x_2^1) & \succsim & (x_1^k, y_2^1) \\ (x_1^2, x_2^2) & \succsim & (x_1^1, y_2^2) \\ (x_1^3, x_2^3) & \succsim & (x_1^2, y_2^3) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_1^k, x_2^k) & \succsim & (x_1^{k-1}, y_2^k) \\ (x_1^{k+1}, y_2^1) & \succsim & (x_1^{m+2}, x_2^1) \\ (x_1^{k+2}, y_2^2) & \succsim & (x_1^{k+1}, x_2^2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_1^{m+1}, y_2^{k-1}) & \succsim & (x_1^m, x_2^{k-1}) \end{array}\right) \Rightarrow (x_1^{m+2}, y_2^k) \precsim (x_1^{m+1}, x_2^k).$$

- si m est un nombre impair supérieur à 2, alors $(c_{m+1}) \Leftrightarrow (C_m)$.
- si m est un nombre pair supérieur ou égal à 2, alors $(c_{m+1}) \Leftrightarrow (C_m) + (S_{m+1})$.
- Quel que soit m pair, des contre-exemples montrent que $(C_m) \not\Rightarrow (S_{m+1})$.

3. Si X est un produit cartésien à n dimensions et si la solvabilité restreinte est vérifiée par exactement deux composants :

   - une famille générique de contre-exemples montre que l'indépendance n'entraine pas la condition de Thomsen.

De tous ces résultats, on retiendra qu'il est illusoire de vouloir trouver une axiomatique testable en pratique lorsque la solvabilité (restreinte ou non) est vérifiée par moins de 2 composants de X (car, dans ce cas, il faut au moins tester tous les axiomes d'élimination symétrique). Lorsque seulement deux composants sont solvables, on sera obligé de recourir à la condition de Thomsen.

6.6 Bibliographie

FISHBURN, P. C. (1981) : "Uniqueness Properties in Finite-Continuous Additive Measurement," *Mathematical Social Sciences*, 1, 145–153.

GONZALES, C. (1995) : "Two Factor Additive Conjoint Measurement with One Solvable Component," working paper.

——— (1996a) : "Additive Utilities When Some Components Are Solvable And Others Are Not," *Journal of Mathematical Psychology*, 40(2), 141–151.

SCOTT, D., ET P. SUPPES (1958) : "Foundational Aspects of Theories of Measurement," *Journal of Symbolic Logic*, 23(2), 113–128.

WAKKER, P. P. (1989) : *Additive Representations of Preferences, A New Foundation of Decision Analysis*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Chapitre 7

Préférences en dimension 2

Seras-tu ingénu au point de croire que nous t'enseignons ouvertement le plus grand et le plus important des secrets ?

Artephius

Le but de ce chapitre est d'étudier du point de vue de l'approche analytique l'existence d'utilités additives sur des ensembles (produits cartésiens) à deux dimensions. Afin d'obtenir des théorèmes applicables en pratique, c'est-à-dire des théorèmes ne faisant appel qu'à des axiomes d'élimination d'ordre peu élevé, il est impératif d'introduire des hypothèses structurelles sur X ; dans le cas contraire, tous les axiomes d'élimination doivent être testés, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 7.1 Soit m un nombre impair supérieur ou égal à 3. Considérons l'ensemble $X = \{0, 1, \ldots, m^2\} \times \{0, 2, 4, \ldots, 2m\}$ muni du préordre large total $\succsim$ représenté par la fonction d'utilité suivante :

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2 & si \quad x_2 < 2m, \\ 0.5(x_1 \bmod 2)^2 + 2(x_1 \operatorname{div} 2) + m^2 + 2m - 2.5 & si \quad x_2 = 2m. \end{cases}$$

Notons que la définition de f est la même que (6.6) page 89, et que X est un sous-ensemble de l'ensemble X de la page 89. Par conséquent, (C_1), (C_2),..., (C_{m+1}) sont vérifiés, mais pas (C_{m+2}). Autrement dit, il existe une famille générique d'exemples pour lesquels des conditions d'élimination d'ordres arbitrairement élevés doivent être testés. ♦

Les conditions structurelles utilisées par l'approche analytique sont identiques à celles de l'approche algébrique, à savoir la solvabilité non restreinte et la solvabilité restreinte. Il existe pourtant une différence avec l'approche algébrique : les hypothèses structurelles ne portent plus sur tous les composants de X, mais seulement sur certains, ce qui permet d'accroitre considérablement le champ d'application des utilités additives. Ainsi la première des six sections de ce chapitre est consacrée au cas où l'ensemble X possède un

seul composant vérifiant la solvabilité restreinte. D'une manière générale, ainsi que le suggère la famille générique d'exemples de la page 89, cette condition structurelle n'est pas assez forte pour pouvoir déduire l'ensemble des conditions d'élimination à partir de conditions d'ordres faibles ; cependant, il existe des cas particuliers où (C), la condition d'élimination globale, peut être dérivée de l'axiome d'indépendance. L'étude de ces cas est réalisée dans la première section du présent chapitre. Dans la deuxième section, la solvabilité restreinte est étendue aux deux composants de l'espace (dans ce chapitre tous les produits cartésiens sont bidimensionnels) ; on obtient alors des théorèmes d'existence similaires à ceux de l'approche algébrique. Toutefois, le mode de démonstration de ces théorèmes est particulier à l'approche analytique et mérite d'être mentionné. Enfin la troisième section est consacrée à des produits cartésiens pour lesquels la solvabilité restreinte par rapport aux deux composants est locale, c'est-à-dire vérifiée sur certaines régions de X seulement. Les quatrième, cinquième et sixième sections sont respectivement consacrées aux démonstrations, à un résumé et à une bibliographie du chapitre.

7.1 Solvabilité restreinte sur un seul composant

D'une manière générale, il n'existe pas de théorème d'existence "facilement testable" d'utilités additives pour des ensembles bidimensionnels dont un seul composant vérifie la solvabilité (restreinte ou non). Cependant, certains ensembles existent, qui ont des propriétés structurelles servant de substitut à la solvabilité. Deux cas particuliers sont présentés dans cette section, répartis chacun dans une sous-section. L'objet de la première est l'étude de produits cartésiens à deux composants dont le second est binaire, c'est-à-dire n'admet que deux valeurs. Dans la seconde sous-section, X_2, l'espace correspondant à la deuxième dimension de X, est un ensemble équi-espacé.

7.1.1 Espaces dont le second composant est binaire

Dans toute cette sous-section, l'hypothèse de base est que $\mathrm{Card}(X_2) = 2$. Le but recherché est de montrer que si le premier composant vérifie la solvabilité restreinte, l'axiome d'indépendance est alors une condition d'élimination suffisamment forte pour entraîner l'existence d'utilités additives.

Lemme de représentation

Lemme 7.1 *Soient $X = X_1 \times X_2$ un produit cartésien à deux dimensions tel que $\mathrm{Card}(X_2) = 2$, et $\succsim$ un préordre large total sur X. Supposons que X_1 vérifie la solvabilité restreinte (cf. page 41), que $(X, \succsim)$ vérifie l'axiome d'indépendance (cf. page 23) ainsi que l'axiome archimédien (cf. page 38), et que $\succsim$ soit représentable par une fonction d'utilité. Alors $\succsim$ est représentable par une utilité additive. De plus, l'unicité de cette représentation est comprise entre une propriété ordinale et une propriété cardinale.*

Rappelons qu'une fonction est ordinale si elle est unique à une transformation strictement croissante près, et cardinale si elle est unique à une transformation affine strictement positive près.

En fait, ce lemme, bien que paraîssant relativement anodin, est la base de la démonstration par l'approche analytique du théorème classique d'existence pour des produits cartésiens de dimension 2 (cf. Fishburn (1970, théorème 5.2, p58)). L'avantage principal de ce lemme est la simplicité déconcertante avec laquelle on peut le démontrer : de simples constatations géométriques sont suffisantes.

Examinons maintenant les hypothèses du lemme. Si le premier composant est essentiel, alors la solvabilité restreinte est requise sur ce composant pour pouvoir utiliser l'axiome archimédien. Ce dernier est aussi indispensable si l'on veut obtenir une utilité additive, comme le montre le contre-exemple suivant :

Exemple 7.2 Soit $X = X_1 \times X_2$, où $X_1 = \{m : m \in \mathbb{N}^*\} \cup \{1/p : p \in \mathbb{N}^*\}$ et $X_2 = \{0, 1\}$. Supposons que $\succsim$ vérifie $\forall m, p \in \mathbb{N}^*$

- $(m, 0) \succ (1/p, 1)$,
- $(1/(p+1), 0) \succ (1/p, 0)$,
- $(m, 0) \succ (m+1, 0)$,
- $(1/(p+1), 1) \succ (1/p, 1)$,
- $(m, 1) \succ (m+1, 1)$,
- $(1/(p+1), 0) \sim (1/p, 1)$,
- $(m+1, 1) \sim (m, 0)$.

On peut remarquer aisément que $\succsim$ est représentable par l'utilité suivante :

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x_2 + 1/x_1) & \text{si } x_1 \in \{1/p : p \in \mathbb{N}^*\}, \\ \pi + \operatorname{arctg}(x_2 - x_1) & \text{si } x_1 \in \{m : m \in \mathbb{N}^*\}. \end{cases}$$

Il est facile de voir que l'axiome d'indépendance est vérifié par $\succsim$ (grâce à la fonction f par exemple, puisque arctg est une fonction croissante, et dont l'ensemble d'arrivée est $]-\pi/2, \pi/2[$). La solvabilité restreinte est aussi vérifiée par le premier composant car la valeur $\pi/2$ ne peut jamais être atteinte par la fonction d'utilité f. $\succsim$ est représentable par la fonction d'utilité f. Par conséquent, toutes les hypothèses du lemme 7.1 sont vérifiées, excepté (peut-être ?) l'axiome archimédien. Cependant, aucune fonction d'utilité additive ne peut représenter $\succsim$; en effet, supposons que $g_1 : X_1 \to \mathbb{R}$ et $g_2 : X_2 \to \mathbb{R}$ soient telles que $\succsim$ est représentable par $g_1 + g_2$. Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$

$$\left(\frac{1}{p+1}, 0\right) \sim \left(\frac{1}{p}, 1\right) \Rightarrow g_1\left(\frac{1}{p+1}\right) - g_1\left(\frac{1}{p}\right) = g_2(1) - g_2(0) = \text{constante},$$

et donc $[g_1(1/(p+1)) + g_2(1)] - [g_1(1/p) + g_2(1)]$ est une constante, c'est-à-dire que cette différence ne dépend pas de p. Par conséquent, $[g_1(1/p) + g_2(1)] - [g_1(1/1) +$

$g_2(1)]$ doit tendre vers $+\infty$ lorsque $1/p$ tend vers 0. Mais alors, quel nombre fini devrait prendre $g_1(m) + g_2(0)$ qui, rappelons-le, doit vérifier $g_1(m) + g_2(0) > g_1(1/p) + g_2(1)$? Aucun nombre fini ne convient ; ainsi aucune utilité additive ne représente $\succsim$. C'est bien entendu l'axiome archimédien qui est violé dans cet exemple. ♦

Le lecteur familier de Fishburn (1981) objectera que l'unicité des utilités additives du lemme 7.1 semble contredire celle montrée par Fishburn dans le cadre de produits cartésiens bidimensionnels dont un composant vérifie la solvabilité restreinte et l'autre est discret. En fait il n'en est rien car si l'on examine attentivement les hypothèses utilisées par Fishburn, on remarquera que celui-ci suppose que le deuxième composant est de cardinal supérieur ou égal à 3.

Intuitions du lemme

Soient $X = X_1 \times \{0, 1\}$ et $\succsim$ un préordre large total sur X représentable par une fonction d'utilité f (pas forcément additive). Comme dans le chapitre précédent, nous allons noter $f_{[0]}(\cdot) = f(\cdot, 0)$ and $f_{[1]}(\cdot) = f(\cdot, 1)$. Pour éviter quelques écueils mathématiques qui n'apporteraient absolument rien du point de vue intuitif, nous allons supposer que $f_{[0]}$ et $f_{[1]}$ sont des fonctions continues, bijectives, et telles que $\{f_{[0]}(x_1) : x_1 \in X_1\} = \{f_{[1]}(x_1) : x_1 \in X_1\} = \mathbb{R}$.

Supposons qu'une fonction d'utilité additive $g = g_1 + g_2$ représente $\succsim$; dans ce cas,

$$(x_1, x_2) \succsim (y_1, y_2) \Leftrightarrow f(x_1, x_2) \geq f(y_1, y_2) \Leftrightarrow g(x_1, x_2) \geq g(y_1, y_2).$$

Autrement dit, il existe une fonction strictement croissante, φ, telle que $g(x_1, x_2) = \varphi \circ f(x_1, x_2)$ $\forall (x_1, x_2) \in X$. Or g est additive ; donc, $\forall x_1 \in X_1$,

$$g(x_1, 1) - g(x_1, 0) = g_1(x_1) + g_2(1) - g_1(x_1) - g_2(0) = g_2(1) - g_2(0) = \text{ constante.}$$

Par conséquent, $\forall x_1 \in X_1$

$$\varphi \circ f_{[1]}(x_1) - \varphi \circ f_{[0]}(x_1) = g_2(1) - g_2(0) = \text{constante.}$$

Ainsi, l'existence d'une utilité additive représentant $\succsim$ est équivalente à l'existence d'une constante α et d'une fonction strictement croissante $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telles que, $\forall x_1 \in X_1$

$$\varphi \circ f_{[1]}(x_1) = \varphi \circ f_{[0]}(x_1) + \alpha. \tag{7.1}$$

Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $x_1 = f_{[0]}^{-1}(y)$. L'égalité ci-dessus est alors équivalente à

$$\varphi \circ f_{[1]} \circ f_{[0]}^{-1}(y) = \varphi(y) + \alpha.$$

Notons $h = f_{[1]} \circ f_{[0]}^{-1}$; avec cette nouvelle notation, l'égalité ci-dessus devient :

$$\varphi \circ h(y) = \varphi(y) + \alpha, \ \forall y \in \mathbb{R}. \tag{7.2}$$

Par conséquent, l'existence d'une utilité additive représentant $\succsim$ correspond à l'existence d'une constante réelle α et d'une fonction, φ, strictement croissante et satisfaisant (7.2). Le deuxième composant étant essentiel, il existe $x_1 \in X_1$ tel que soit $f_{[1]}(x_1) > f_{[0]}(x_1)$, soit $f_{[1]}(x_1) < f_{[0]}(x_1)$. D'après l'axiome d'indépendance, cette propriété ne dépend pas du x_1 choisi. Dans la suite, nous supposerons que $f_{[1]}(x_1) > f_{[0]}(x_1)$. De par sa définition, h est une fonction strictement croissante et telle que $h(x) > x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; en effet, puisque f représente $\succsim$, $x_1 \succ_1 y_1 \Leftrightarrow f_{[0]}(x_1) > f_{[0]}(y_1)$; soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 = f_{[0]}^{-1}(x)$ et $y_1 = f_{[0]}^{-1}(y)$. Alors $f_{[0]}^{-1}(x) \succ_1 f_{[0]}^{-1}(y) \Leftrightarrow x > y$; et comme l'ensemble d'arrivée de $f_{[0]}$ et de $f_{[1]}$ est $\mathbb{R}$, cette propriété est vraie pour tous x, y. On a donc

$$f_{[0]}^{-1}(x) \succ_1 f_{[0]}^{-1}(y) \Leftrightarrow x > y \Leftrightarrow f_{[1]} \circ f_{[0]}^{-1}(x) = h(x) > f_{[1]} \circ f_{[0]}^{-1}(y) = h(y) \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

De plus, comme $f_{[1]}(x_1) > f_{[0]}(x_1)\ \forall x_1 \in X_1$, on a bien $h(x) > x\ \forall x \in \mathbb{R}$. De même, on a forcément $\alpha > 0$. Notons que la valeur de la constante α n'a strictement aucune importance tant qu'elle reste strictement positive ; en effet, d'après (7.1), on peut substituer α par $\beta > 0$ si, par la même occasion, on remplace φ par $\frac{\beta}{\alpha}\varphi$.

Autrement dit, pour prouver le lemme 7.1, on peut fixer α à n'importe quelle valeur strictement positive, et il ne reste plus qu'à montrer l'existence de φ. Or construire une fonction φ satisfaisant (7.2) est relativement aisé. Rappelons que, quel que soit X_1, φ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ puisque c'est une transformation permettant de passer d'une fonction d'utilité (non) additive à une fonction d'utilité additive.

Construisons φ. Choisissons un α positif quelconque — $\alpha = 1$ par exemple — et un élément quelconque y^0 dans $\mathbb{R}$; affectons une valeur arbitraire p^0 à $\varphi(y^0)$. Soit $y^1 = h(y^0)$. Pour respecter (7.2), on doit avoir $\varphi(y^1) = \varphi(y^0) + \alpha$. (7.2) n'impose une relation que sur les images de y et $h(y)$ par la fonction φ ; or h est une fonction croissante ; (7.2) n'impose donc aucune condition entre les éléments de $[y^0, y^1]$. Toute fonction croissante définie sur $[y^0, y^1]$ et telle que $\varphi(y^0) = p^0$ et $\varphi(y^1) = p^0 + \alpha$ peut donc convenir ; en particulier, on peut choisir la fonction

$$\varphi(y) = p^0 + \frac{\alpha}{y^1 - y^0}(y - y^0),\ \forall y \in [y^0, y^1].$$

Etendons maintenant le domaine de définition de φ. Soit $y^2 = h(y^1)$. Puisque $h(y) > y$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $y^0 < y^1 < y^2$. Définissons φ sur $[y^1, y^2]$ à partir de sa définition sur $[y^0, y^1]$ et (7.2) ; c'est ce qui est illustré dans la figure 7.1. Puisque φ et h sont continues respectivement sur $[y^0, y^1]$ et sur $\mathbb{R}$, grâce à (7.2) φ est bien définie et continue sur $[y^1, y^2]$, et donc, par extension, sur $[y^0, y^2]$. De plus, puisque φ et h sont strictement croissantes respectivement sur $[y^0, y^1]$ et $\mathbb{R}$, φ est croissante sur $[y^1, y^2]$ et

$$\forall x \in [y^0, y^1], \forall y \in [y^1, y^2],\ \varphi(x) \leq \varphi(y^1) \leq \varphi(y).$$

Autrement dit, φ ainsi définie est croissante sur $[y^0, y^2]$. On peut alors recommencer ce processus et définir $y^3 = h(y^2)$, et ainsi de suite. Cette construction correspond à la figure 7.1. Sur la figure, on voit bien que la séquence $y^0, y^1, \ldots$ est croissante. De la même manière, en définissant $y^{i-1} = h^{-1}(y^i)$, on peut étendre le domaine de définition

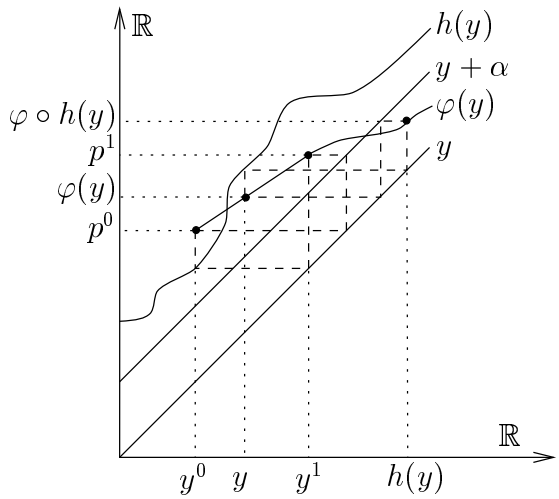


FIG. 7.1: Construction de la fonction φ.

de φ à "gauche" de y^0. La méthode de construction garantit que φ est bien définie sur les intervalles du type $[y^{-m}, y^p]$, et que (7.2) est vérifié sur ces intervalles.

Il reste un dernier problème à régler : est-ce que la construction garantit que φ est bien définie sur $\{y : \exists x_1 \in X_1 \text{ tel que } y = f_{[0]}(x_1)\} \cup \{y : \exists x_1 \in X_1 \text{ tel que } y = f_{[1]}(x_1)\}$? Si tel n'était pas le cas, cela voudrait dire qu'il existe y tel que, $\forall p \in \mathbb{Z}$, soit $y^p < y$, soit $y^p > y$. Mais, $\forall y \in \mathbb{R}$, on sait qu'il existe $x_1 \in X_1$ tel que $y = f_{[0]}(x_1)$. Par conséquent, pour tout y^i, il existe $x_1^i \in X_1$ tel que $f_{[0]}(x_1^i) = y^i$. Mais dans ce cas,

$$y^{i+1} = h(y^i) \Rightarrow f_{[0]}(x_1^{i+1}) = h \circ f_{[0]}(x_1^i) = f_{[1]} \circ f_{[0]}^{-1} \circ f_{[0]}(x_1^i) = f_{[1]}(x_1^i).$$

Or, par définition de $f_{[0]}$ et $f_{[1]}$, ceci signifie que $(x_1^{i+1}, 0) \sim (x_1^i, 1)$. Ainsi, à la séquence (y^i) est associée une séquence standard (x_1^i) par rapport au premier composant. D'après l'axiome archimédien, il est donc impossible que $y^p < y$ ou $y^p > y$ $\forall p \in \mathbb{Z}$. Par conséquent, φ est bien définie sur $\{y : \exists\, x_1 \in X_1 \text{ tel que } y = f_{[0]}(x_1)\} \cup \{y : \exists\, x_1 \in X_1 \text{ tel que } y = f_{[1]}(x_1)\}$. Détail amusant, l'axiome archimédien se traduit donc par le fait que la fonction h ne peut se rapprocher arbitrairement de la première médiatrice, c'est-à-dire de la droite $y = x$.

Corollaire pratique

Le lemme 7.1 présuppose l'existence d'une fonction d'utilité représentant $\succsim$. En pratique, il est rare de pouvoir affirmer a priori qu'une telle fonction existe. Il serait donc intéressant d'introduire dans le lemme précédent des hypothèses permettant d'affirmer qu'une fonction d'utilité existe. Or Debreu (1954) et Debreu (1964) fournissent des arguments garantissant l'existence de ces fonctions. Leur idée est la suivante : Supposons qu'il existe un ensemble $A_1 \subset X_1$ au plus dénombrable tel que $\forall x_1, y_1 \in X_1$

$$x_1 \prec_1 y_1 \Rightarrow \exists\, a_1, b_1 \in A_1 \text{ tels que } x_1 \precsim_1 a_1 \prec_1 b_1 \precsim_1 y_1.$$

Dans ce cas, il existe un ensemble $A \subset X$, au plus dénombrable, tel que

$$x \prec y \Rightarrow \exists\, a, b \in A \text{ tels que } x \precsim a \prec b \precsim y.$$

A est très avantageux par rapport à X car A est dénombrable ; ainsi, il existe une bijection de A dans $\mathbb{Q}$, ou, tout du moins, une partie de $\mathbb{Q}$. Autrement dit, à chaque élément de A peut être associé un nombre rationnel. On sent donc bien intuitivement qu'il doit exister une fonction d'utilité sur A. Et puisqu'entre tout couple d'éléments x, y de X, il existe un couple d'éléments de A, A doit être dense dans X. Aussi, la fonction d'utilité sur A peut-elle être étendue à X.

En résumé, le lemme 7.1 devient :

Corollaire 7.1 *Soient $X = X_1 \times X_2$ un produit cartésien à deux dimensions tel que* $\mathrm{Card}(X_2) = 2$, *et $\succsim$ un préordre large total sur X. Supposons que X_1 vérifie la solvabilité restreinte (cf. page 41), et que $(X, \succsim)$ vérifie l'axiome d'indépendance (cf. page 23) ainsi que l'axiome archimédien (cf. page 38). Supposons de plus qu'il existe un ensemble dénombrable $A_1 \subset X_1$ tel que $\forall x_1, y_1 \in X_1$*

$$x_1 \prec_1 y_1 \Rightarrow \exists\, a_1, b_1 \in A_1 \text{ tels que } x_1 \precsim_1 a_1 \prec_1 b_1 \precsim_1 y_1. \tag{7.3}$$

Alors il existe deux fonctions $f_1 : X_1 \to \mathbb{R}$ et $f_2 : X_2 \to \mathbb{R}$ telles que :

$$x \succsim y \Leftrightarrow f_1(x_1) + f_2(x_2) \geq f_1(y_1) + f_2(y_2).$$

De plus, l'unicité de f est comprise entre une propriété ordinale et une propriété cardinale.

7.1.2 Espaces dont le second composant est équi-espacé

Dans toute cette sous-section, X_2, l'ensemble correspondant au deuxième composant, est supposé être une séquence $(x_2^i)_{i \in N}$, où N est un ensemble (fini ou infini) d'entiers consécutifs (positifs et/ou négatifs). On supposera que, $\forall i, i+1 \in N$, $x_2^{i+1} \succ_2 x_2^i$. Avant d'aller plus loin, il convient de décrire exactement ce que signifie le terme "ensemble équi-espacé" :

Définition 7.1 (ensemble équi-espacé) *X_2 est un ensemble équi-espacé si l'équivalence suivante est vérifiée $\forall i, i+1, i+2 \in N$:*

$$\forall x_1, y_1 \in X_1,\ (x_1, x_2^i) \sim (y_1, x_2^{i+1}) \Leftrightarrow (x_1, x_2^{i+1}) \sim (y_1, x_2^{i+2}). \tag{7.4}$$

Cette définition est illustrée par la figure 7.2

Le lemme 7.1 permet alors de dériver le corollaire suivant :

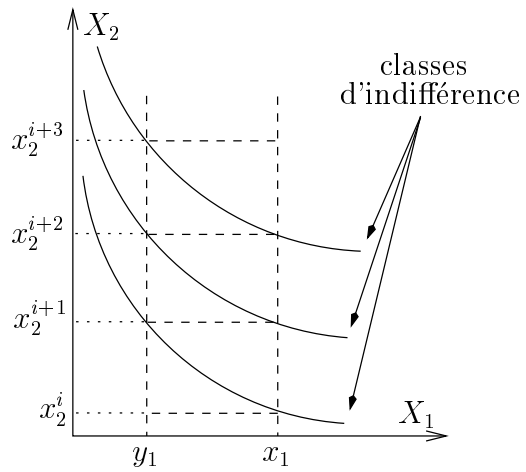


FIG. 7.2: Ensemble équi-espacé

Corollaire 7.2 *Soit $X = X_1 \times X_2$ un produit cartésien à deux dimensions muni d'un préordre large total sur X noté $\succsim$, tel que $X_2 = \{x_2^i,\ i \in N\}$ est un ensemble équi-espacé et tel que, pour tous $i, i+1 \in N$, $x_2^{i+1} \succ_2 x_2^i$. Supposons que X_1 vérifie la solvabilité restreinte (cf. page 41), que tous les composants soient essentiels (cf. page 43), que $(X, \succsim)$ vérifie l'axiome d'indépendance (cf. page 23) ainsi que l'axiome archimédien (cf. page 38), et que $\succsim$ soit représentable par une fonction d'utilité. Alors $\succsim$ est représentable par une fonction d'utilité additive. De plus, l'unicité de cette fonction se situe entre une propriété ordinale et une propriété cardinale.*

L'intuition de ce corollaire est graphique. Considérons un entier i tel que $i, i+1, i+2 \in N$. D'après le lemme 7.1, on sait qu'il existe une fonction d'utilité additive f représentant $\succsim$ sur $X_1 \times \{x_2^i, x_2^{i+1}\}$. On va essayer d'étendre la fonction f de telle sorte qu'elle représente $\succsim$ sur $X_1 \times \{x_2^i, x_2^{i+1}, x_2^{i+2}\}$. A l'instar de la section précédente, nous noterons $f_{[x_2^i]}(\cdot) = f(\cdot, x_2^i)$, $f_{[x_2^{i+1}]}(\cdot) = f(\cdot, x_2^{i+1})$ et $f_{[x_2^{i+2}]}(\cdot) = f(\cdot, x_2^{i+2})$. L'espace de travail suggéré par ces fonctions est $X_1 \times \mathbb{R}$ — comme nous l'avions évoqué dans le chapitre précédent, page 84. La figure 7.3 illustre d'ailleurs l'extension de f dans cet espace de travail ; sur cette figure ont été tracés les graphes des fonctions $f_{[x_2^i]}(\cdot)$, $f_{[x_2^{i+1}]}(\cdot)$ et $f_{[x_2^{i+2}]}(\cdot)$.

L'équivalence (7.4) est alors représentée par des rectangles du type $ABCD$. En effet, dans l'espace de travail, les lignes horizontales sont les classes d'indifférence de $\succsim$; par conséquent le segment horizontal $[AB]$ signifie que $(y_1, x_2^{i+1}) \sim (x_1, x_2^i)$. De même, le segment horizontal $[CD]$ traduit le fait que $(y_1, x_2^{i+2}) \sim (x_1, x_2^{i+1})$. Puisque $ABCD$ est un rectangle, les longueurs des segments BD et AC doivent être égales. f étant additive sur $X_1 \times \{x_2^i, x_2^{i+1}\}$, on a donc

$$f_{[x_2^{i+1}]}(x_1) - f_{[x_2^i]}(x_1) = f_1(x_1) + f_2(x_2^{i+1}) - f_1(x_1) - f_2(x_2^i) = f_2(x_2^{i+1}) - f_2(x_2^i),\ \forall x_1 \in X_1.$$

Autrement dit, la différence $f_{[x_2^{i+1}]}(x_1) - f_{[x_2^i]}(x_1)$ ne dépend pas de x_1 ; ainsi, le fait que la fonction d'utilité f soit additive sur $X_1 \times \{x_2^i, x_2^{i+1}\}$ se traduit par le fait que

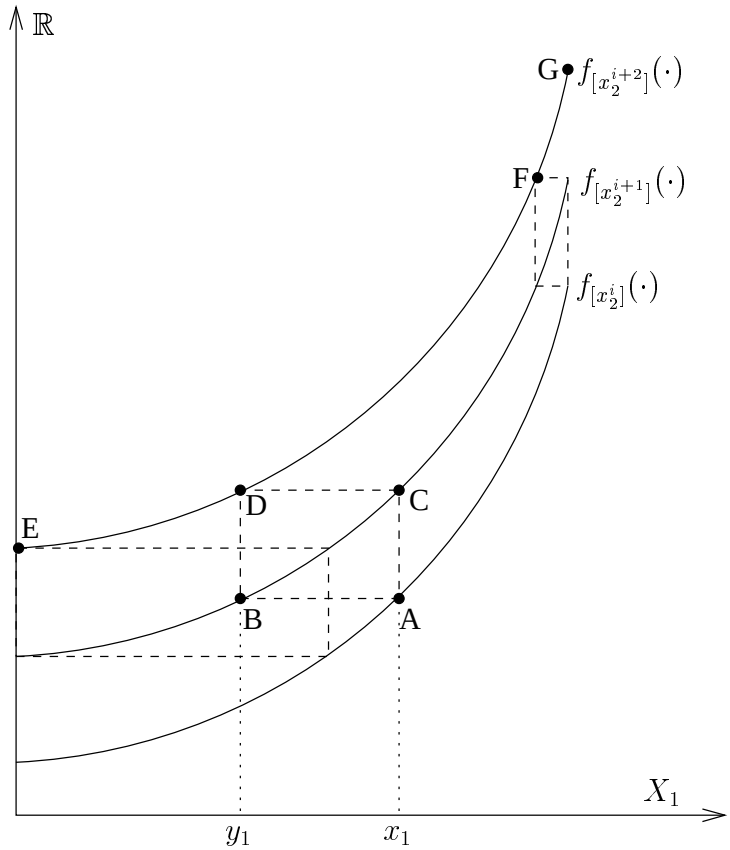


FIG. 7.3: Construction de la fonction d'utilité.

le graphe de $f_{[x_2^{i+1}]}(\cdot)$ est une translation verticale du graphe de la fonction $f_{[x_2^{i}]}(\cdot)$. Or la relation (7.4) permet de définir $f_{[x_2^{i+2}]}(\cdot)$ sur $[EF]$ à partir de $f_{[x_2^{i}]}(\cdot)$ et $f_{[x_2^{i+1}]}(\cdot)$ grâce à des rectangles du type $ABCD$. Il est donc clair que le graphe de $f_{[x_2^{i+2}]}(\cdot)$ sur la portion $[EF]$ est une translation verticale du graphe de $f_{[x_2^{i+1}]}(\cdot)$. Il reste maintenant à construire $f_{[x_2^{i+2}]}(\cdot)$ sur FG. Mais, sur ce segment, la seule contrainte à respecter est la comonotonie des fonctions $f_{[x_2^{i+1}]}(\cdot)$ et $f_{[x_2^{i+2}]}(\cdot)$; aussi, une translation verticale du graphe de $f_{[x_2^{i+1}]}(\cdot)$ convient pour $f_{[x_2^{i+2}]}(\cdot)$. On a donc étendu la fonction d'utilité additive f sur $X_1 \times \{x_2^i, x_2^{i+1}, x_2^{i+2}\}$. On peut alors recommencer avec $i+3, i+4, \ldots$ L'axiome archimédien garantit que la fonction f ne peut diverger vers l'infini que si x_1 et/ou x_2^i diverge(nt) eux aussi vers l'infini.

Bien évidemment, grâce à Debreu (1954) et Debreu (1964), on peut déduire le corollaire suivant :

Corollaire 7.3 *Soit $X = X_1 \times X_2$ un produit cartésien à deux dimensions muni d'un préordre large total sur X noté $\succsim$, tel que $X_2 = \{x_2^i,\ i \in N\}$ est un ensemble équi-espacé et tel que, $\forall i, i+1 \in N$, $x_2^{i+1} \succ_2 x_2^i$. Supposons que X_1 vérifie la solvabilité restreinte (cf. page 41), que tous les composants soient essentiels (cf. page 43), et que $(X, \succsim)$ vérifie l'axiome d'indépendance (cf. page 23) ainsi que l'axiome archimédien (cf. page 38). Supposons de plus qu'il existe un ensemble dénombrable $A \subset X$ tel que pour tous $x, y \in X$*

$$x \prec y \Rightarrow \exists\, a, b \in A \text{ tels que } x \precsim a \prec b \precsim y.$$

Alors $\succsim$ est représentable par une fonction d'utilité additive. De plus, l'unicité de cette fonction se situe entre une propriété ordinale et une propriété cardinale.

7.2 Solvabilité sur deux composants

Les approches algébrique et topologique, bien qu'assez différentes (les axiomes et autres démonstrations font appel à des domaines mathématiques assez éloignés), ont pourtant un point commun : c'est de montrer en une seule et même étape l'existence d'utilités additives. Or, le terme "existence d'utilité additive" décrit deux notions, à savoir, d'une part, l'existence d'utilités représentant $\succsim$, et, d'autre part, le fait que certaines de ces utilités sont additives. Remarque relativement anodine, et même triviale, me direz-vous. Exact, et, cependant, c'est la clé de voûte de l'approche analytique en dimension 2 : l'idée est de partir de la constatation qu'il est plus facile de montrer que $\succsim$ est représentable par une fonction d'utilité que de montrer qu'elle l'est par une fonction d'utilité **additive** ; en effet, du point de vue théorique, pour qu'une fonction d'utilité additive existe, il faut, bien entendu, des axiomes assurant l'existence de fonctions d'utilité (le fait que $\succsim$ soit un préordre large total, par exemple), mais, en outre, il faut aussi des axiomes permettant la séparabilité additive (les axiomes d'élimination par exemple). Aussi, dans l'approche analytique, la représentabilité additive se montre en deux étapes :

1. on montre que la relation de préférence $\succsim$ est représentable par une fonction d'utilité f (pas forcément additive),
2. on montre que l'on peut transformer f en une fonction d'utilité additive.

Cette méthode a deux avantages principaux. Tout d'abord, elle applique le vieil adage "diviser pour mieux régner" dans la mesure où chacune deux étapes du processus de démonstration est simple à réaliser, alors même que la démonstration de théorèmes d'existence similaires ou moins généraux par Krantz, Luce, Suppes, et Tversky (1971) est très abstraite et donc très compliquée. On pourrait résumer cela de la manière suivante : la complexité du tout est supérieure à la somme des complexités des parties. Le second avantage de la méthode est de permettre de généraliser avec peu d'efforts les théorèmes classiques d'existence d'utilités additives, comme nous le verrons dans la section suivante.

Pour l'heure, on supposera dans tout le reste de cette section que les deux composants de X vérifient la solvabilité restreinte. Ainsi, le but recherché est d'obtenir avec la méthode de démonstration décrite ci-dessus le théorème d'existence 3.4.

7.2.1 1ère étape : la représentabilité de $\succsim$

La première étape consiste à obtenir une fonction d'utilité. On peut alors se demander quels sont les axiomes du théorème 3.4 utiles à cet effet. La réponse est donnée par le lemme ci-dessous, dont l'énoncé était relativement prévisible : on savait déjà que, pour être représentable par une fonction d'utilité, $\succsim$ doit être un préordre large total. De plus, il faut aussi que le nombre de classes d'équivalence de $\succsim$ soit inférieur au nombre de nombres réels (mathématiquement, il faut qu'il existe une bijection de l'ensemble quotient $X/\sim$ vers $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$) ; c'est pourquoi l'axiome archimédien doit figurer dans le lemme. Or la définition de cet axiome suggère l'emploi de l'axiome d'indépendance, ainsi que de la solvabilité restreinte. On avait vu page 43 que, lorsqu'elle n'est pas associée à l'essentialité, la solvabilité restreinte peut ne jouer aucun rôle ; par conséquent, l'essentialité doit aussi figurer au nombre des hypothèses. Il est donc tout à fait logique d'obtenir le lemme suivant :

Lemme 7.2 *Soient X un produit cartésien à deux dimensions et $\succsim$ un préordre large total sur X vérifiant l'indépendance (cf. page 23) et la condition de Thomsen (cf. page 24). Supposons que les deux composants de X soient essentiels (cf. page 43) et qu'ils vérifient la solvabilité restreinte (cf. page 41) ainsi que l'axiome archimédien (cf. page 38). Alors $\succsim$ est représentable par une fonction d'utilité.*

L'idée de ce lemme est d'utiliser les différents axiomes pour se ramener au fameux théorème d'existence de Debreu (1964) :

Condition de représentabilité de Debreu : *$(Z, Y, \succsim)$ satisfait la condition de représentabilité de Debreu si et seulement si les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *Y est un ensemble dénombrable tel que $Y \subset Z$,*
2. *$\succsim$ un préordre large total sur Z.*
3. *$\forall x, y \in Z,\ x \prec y \Rightarrow \exists\, z, t \in Y$ tels que $x \precsim z \prec t \precsim y$.*

Théorème 7.1 (de Debreu) *Soit $\succsim$ un préordre large total sur un ensemble Z. S'il existe Y tel que $(Z, Y, \succsim)$ vérifie la condition de représentabilité de Debreu, alors $\succsim$ est représentable sur Z par une fonction d'utilité.*

Dans la suite de ce chapitre, $\forall x, y \in X$ tels que $x \precsim y$, nous noterons $[x, y]$ l'ensemble $\{z \in X : x \precsim z \precsim y\}$. Par analogie, $[x_1, y_1]$ correspond à l'ensemble $\{z_1 \in X_1 : x_1 \precsim_1 z_1 \precsim_1 y_1\}$. Montrons maintenant comment le lemme 7.2 peut se ramener au théorème 7.1. Pour cela, deux sous-étapes sont nécessaires :

- 1ère sous-étape : on montre qu'il existe $x, y \in X$ et un ensemble dénombrable $Y \subset [x, y]$ tels que $([x, y], Y, \succsim)$ vérifie la condition de représentabilité de Debreu.

– $2^{\text{ème}}$ sous-étape : grâce à l'ensemble Y, et en utilisant certaines séquences standards, on montre qu'il existe un ensemble $Z \subset X$ dénombrable tel que $(X, Z, \succsim)$ vérifie la condition de représentabilité de Debreu.

$1^{\text{ère}}$ sous-étape :

Supposons que, $\forall x, y \in X$ tels que $x \prec y$, il n'existe aucun ensemble dénombrable $Y \subset [x, y]$ tel que $([x, y], Y, \succsim)$ vérifie la condition de représentabilité de Debreu. Dans ce cas, $\forall x, y \in X$ tels que $x \prec y$, $\exists\, z \in X$ tel que $x \prec z \prec y$; en effet, dans le cas contraire, il existerait $x, y \in X$ tels que $\{z \in X : x \prec z \prec y\} = \emptyset$, ce qui contredirait l'hypothèse car cela entraînerait que $([x, y], \{x, y\}, \succsim)$ vérifie la condition de représentabilité de Debreu. Puisque les deux composants de X sont essentiels, il existe $(y_1, y_2) \in X$ et $(t_1, t_2) \in X$ tels que $y_1 \prec_1 t_1$ et $y_2 \prec_2 t_2$. A partir de ces deux éléments, grâce à la solvabilité restreinte, et ainsi que le montre la figure 7.4, il existe aussi deux éléments dans X, (x_1^0, x_2^0) et (x_1^1, x_2^1), tels que $x^0 \prec x^1$ et $(x_1^0, x_2^1) \sim (x_1^1, x_2^0)$. Les parties grisées de la figure 7.4 correspondent à l'ensemble $\{(x_1, x_2) : x_1 \in [x_1^0, x_1^1] \text{ et } x_2 \in [x_2^0, x_2^1]\}$. Bien entendu, pour tout couple d'éléments, x, y, dans ces parties grisées, il existe un élément z, lui aussi dans la partie grisée, tel que $x \prec z \prec y$.

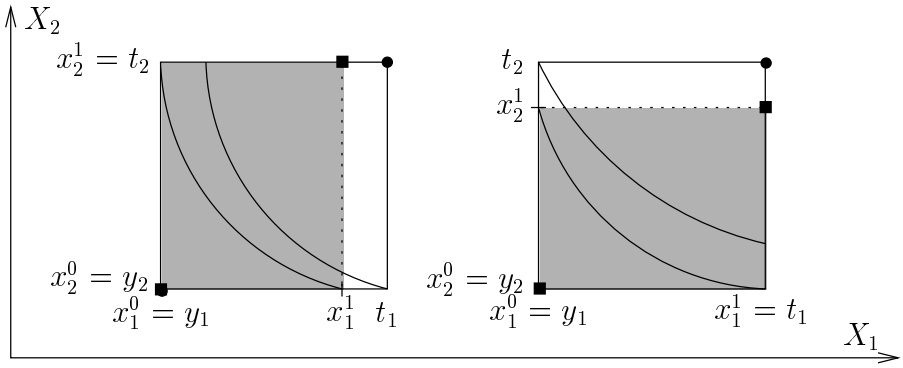


FIG. 7.4: Existence de x^0 et x^1

Nous allons montrer par construction qu'il existe un ensemble dénombrable Y inclus dans les parties grisées et tel que $([x_1^0, x_1^1] \times [x_2^0, x_2^1], Y, \succsim)$ vérifie la condition de représentabilité de Debreu. Pour cela, on remarquera que, par solvabilité restreinte par rapport au premier composant, pour tout z dans $[x_1^0, x_1^1] \times [x_2^0, x_2^1]$ au dessous de la courbe d'indifférence contenant (x_1^0, x_2^1) et (x_1^1, x_2^0), il existe $t_1 \in [x_1^0, x_1^1]$ tel que $(t_1, x_2^0) \sim z$ (cf. figure 7.5). De même, si y est au dessus de la courbe d'indifférence contenant (x_1^0, x_2^1) et (x_1^1, x_2^0), il existe $x_1 \in [x_1^0, x_1^1]$ tel que $(x_1, x_2^1) \sim y$; autrement dit, pour montrer l'existence de Y, il suffit de montrer qu'il existe $Y_1 \subset [x_1^0, x_1^1]$ dénombrable et tel que $([x_1^0, x_1^1], Y_1, \succsim_1)$ vérifie la condition de représentabilité de Debreu.

Pour montrer l'existence de Y_1, il suffit de construire une suite d'ensembles $(Y_1^i)_{i \in \mathbb{N}}$, tous finis, telle que $Y_1 = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Y_1^i$ soit dense dans $[x_1^0, x_1^1]$. Soit $Y_1^0 = \{x_1^0, x_1^1\}$. On sait qu'il existe $z \in X$ tel que $(x_1^0, x_2^0) \prec z \prec (x_1^1, x_2^0)$. Cet élément permet, comme le montre la figure 7.6, de construire deux séquences standards (y_1^k) et (t_1^k) de bases respectives

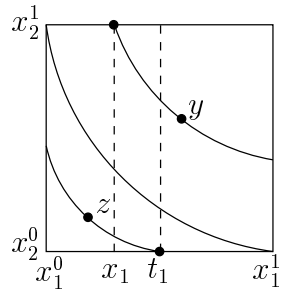


FIG. 7.5: Existence de t_1 et de x_1.

$\{x_2^0, z_2\}$ et $\{z_2, t_2\}$, où z_2 est le deuxième composant de z et t_2 est l'intersection de la courbe d'indifférence contenant z avec l'axe vertical passant par (x_1^0, x_2^0) et (x_1^0, x_2^1) (cette intersection existe d'après la solvabilité restreinte par rapport au deuxième composant).

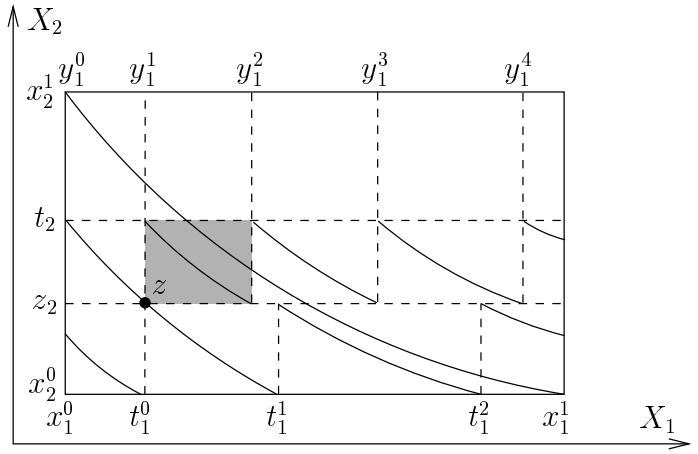


FIG. 7.6: Construction de Y_1^1.

Définissons Y_1^1 comme l'ensemble des points de la séquence standard de cardinal le plus élevé ; ici, on a donc $Y_1^1 = \{y_1^0, y_1^1, y_1^2, y_1^3, y_1^4\}$. Remarquons que Y_1^1 est de cardinal fini, et que ce dernier est supérieur ou égal à 3. La construction de l'ensemble Y_1^2 s'effectue sur le même principe : choisissons un point quelconque c de la partie grisée de la figure 7.6 et construisons les séquences standards (a_1^k) et (b_1^k) de bases respectives $\{z_2, c_2\}$ et $\{c_2, b_2\}$ illustrées par la figure 7.7 ; dans celle-ci, les courbes en pointillés correspondent aux courbes de la figure 7.6, c_2 correspond au second composant de c et b_2 représente l'intersection de la courbe d'indifférence avec la droite verticale passant par les points (y_1^1, x_2^0) et (y_1^1, x_2^1). Là encore, Y_1^2 est égal à l'ensemble des points de la séquence standard de cardinal le plus élevé ; ici on a donc $Y_1^2 = \{b_1^0, \ldots, b_1^{16}\}$. On remarque donc que $\mathrm{Card}(Y_1^2) \geq 2\,\mathrm{Card}(Y_1^1) - 1$. Pour construire Y_1^3, on recommence le processus en remplaçant la partie grisée par le petit rectangle de bord inférieur gauche c et de bord supérieur droit (b_1^5, b_2).

D'une manière générale, pour obtenir Y_1^{k+1} à partir de Y_1^k, on repartira toujours d'un rectangle délimité par deux points consécutifs de la séquence standard définissant Y_1^k, et

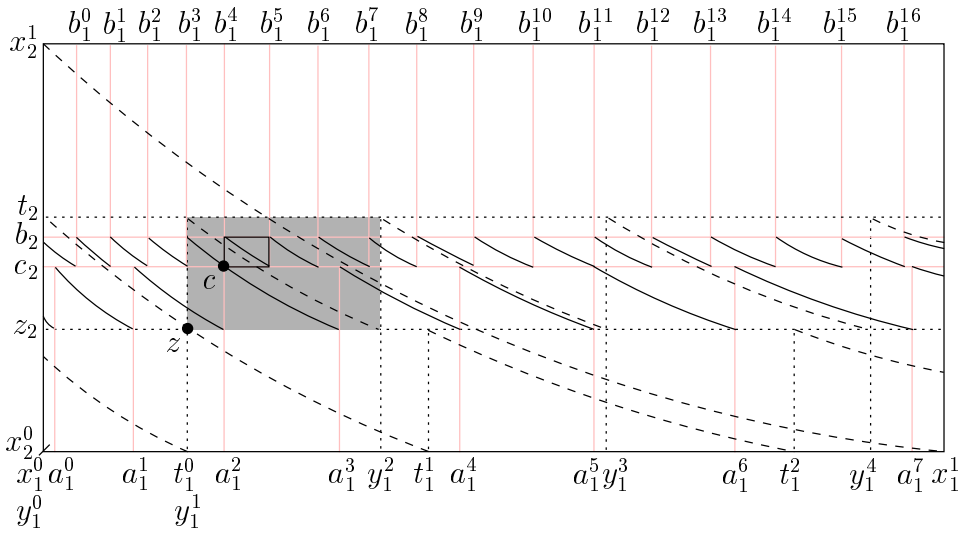


FIG. 7.7: Construction de Y_1^2.

on construira deux séquences standards allant de x_1^0 jusqu'à x_1^1. L'axiome archimédien garantit que celles-ci sont finies. De plus, il est aisé de montrer que $\mathrm{Card}(Y_1^{k+1}) \geq 2\ \mathrm{Card}(Y_1^k) - 1\ \forall k \in \mathbb{N}$; en effet, considérons, dans la figure 7.8, la séquence (y_1^j) engendrant l'ensemble Y_1^i. Pour construire Y_1^{i+1} selon le processus décrit ci-dessus, j'ai choisit de partir du point a, qui a la particularité d'engendrer deux séquences standards identiques (t_1^k). Ceci entraîne que

$$t_1^k = y_1^j \quad t_1^{k+2} = y_1^{j+1} \quad t_1^{k+4} = y_1^{j+2}.$$

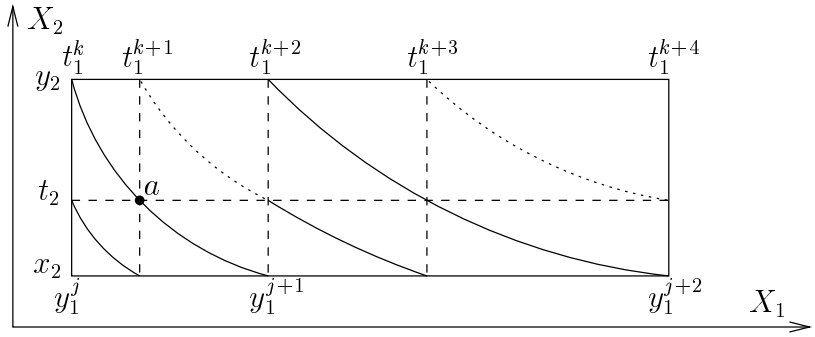


FIG. 7.8: $\mathrm{Card}(Y_1^{k+1}) \geq 2\ \mathrm{Card}(Y_1^k) - 1$.

Ainsi, le choix de a implique que $\mathrm{Card}(Y_1^{k+1}) = 2\ \mathrm{Card}(Y_1^k) - 1$. Si l'on prend un point de départ différent de a, disons b, le fait de toujours choisir la séquence standard de cardinal le plus élevé implique que cette dernière a au moins autant de points que la séquence engendrée par a ; vous n'êtes pas entièrement convaincu ? Reportez-vous à la figure 7.9, dans laquelle la séquence z_1^m a été engendrée à partir d'un point b quelconque différent de a.

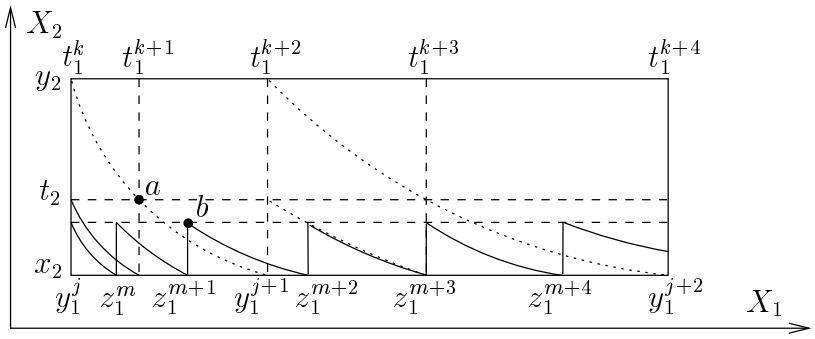
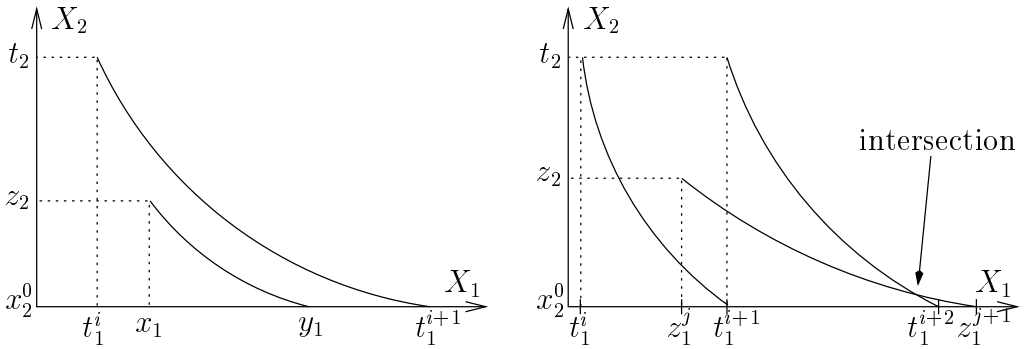


FIG. 7.9: $\mathrm{Card}(Y_1^{k+1}) \geq 2\,\mathrm{Card}(Y_1^k) - 1$ (suite).

Ainsi, $Y_1 = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Y_1^i$ est un ensemble dénombrable (puisque c'est une réunion dénombrable d'ensembles finis) contenant des séquences standard de cardinal aussi élevé que l'on veut. Soient deux éléments $x_1, y_1 \in [x_1^0, x_1^1]$ tels que $x_1 \prec_1 y_1$. Supposons qu'il n'existe aucun $z_1, t_1 \in Y_1$ tels que

$$x_1 \precsim_1 z_1 \prec_1 t_1 \precsim_1 y_1,$$

c'est-à-dire que $([x_1^0, x_1^1], Y_1, \succsim_1)$ ne vérifie pas la condition de représentabilité de Debreu. Dans ce cas, créons la séquence standard (z_1^i) admettant x_1, y_1 comme éléments consécutifs. Sur la figure 7.10, elle admet pour base $\{x_2^0, z_2\}$. D'après l'axiome archimédien la séquence est de cardinal fini, disons m. Or on sait qu'il existe dans Y_1 une séquence standard (t_1^i) de cardinal supérieur ou égal à $m+2$. Sur la figure 7.10, elle admet pour base $\{x_2^0, t_2\}$. On voit bien sur cette dernière (sur la partie de gauche plus exactement) que l'on doit avoir $x_2^0 \prec_2 z_2 \prec_2 t_2$; en effet, dans le cas contraire, les courbes d'indifférence étant continues sur la figure (ce qui revient approximativement à la solvabilité restreinte), elles auraient une intersection, ce qui est impossible car ces courbes représentent des classes d'indifférence distinctes de $\succsim$.



(a) s'il n'y a aucun élément de (t_1^i) entre x_1 et y_1, alors z_2 appartient obligatoirement à $]x_2^0, t_2[$

(b) il ne peut y avoir deux éléments de la séquence (t_1^i) entre deux éléments consécutifs de la séquence (z_1^j)

FIG. 7.10: L'impossibilité de violer la condition de représentabilité de Debreu

Pour les mêmes raisons, il ne peut exister deux éléments de la séquence (t_1^i) entre deux éléments consécutifs de la séquence (z_1^j) sans que, comme le montre la figure 10(b), la courbe d'indifférence passant par (t_1^{j+2}, x_2^0) intersecte celle passant par (z_1^{j+1}, x_2^0), ce qui, là encore, est absurde. Mais, dans ce cas, la séquence (t_1^i) ne peut avoir plus de $m+1$ points ($m-1$ étant le nombre de points a priori possibles entre z_1^0 et z_1^m, auquel on peut rajouter au plus un point dans $[x_1^0, z_1^0[$ et un point dans $]z_1^m, x_1^1]$). Or, par hypothèse, la séquence (t_1^i) est de cardinal supérieur ou égal à $m+2$, d'où contradiction. Il existe donc dans Y_1 une séquence standard dont deux éléments consécutifs se trouvent "entre" x_1 et y_1. Par conséquent $([x_1^0, x_1^1], Y_1, \succsim_1)$ vérifie la condition de représentabilité de Debreu, et donc il existe un ensemble dénombrable $Y \subset [x_1^0, x_1^1] \times [x_2^0, x_2^1]$ tel que $([x_1^0, x_1^1] \times [x_2^0, x_2^1], Y, \succsim)$ vérifie la condition de représentabilité de Debreu. Ceci clôt la première sous-étape. Il s'agit maintenant d'étendre cette propriété à la totalité de X.

2ème sous-étape :

L'extension de l'ensemble Y obtenu dans la sous-étape précédente est réalisée par des séquences standards comme le montre la figure 7.11.

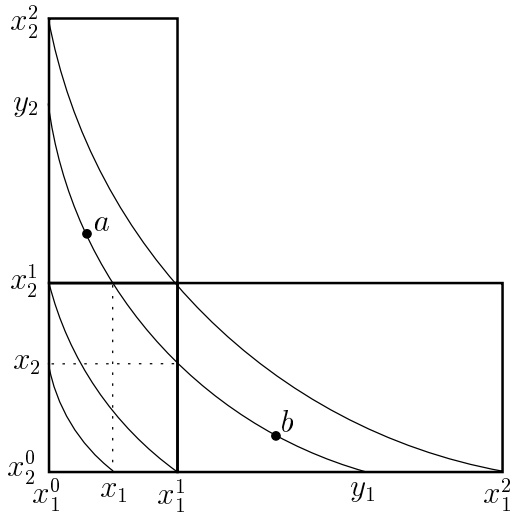


FIG. 7.11: Extension de A_1

On a vu qu'il existait un ensemble dénombrable $Y_1 \subset [x_1^0, x_1^1]$ tel que $([x_1^0, x_1^1], Y_1, \succsim_1)$ vérifie la condition de représentabilité de Debreu. Observons sur la figure 7.11 que pour chaque point a de $[x_1^0, x_1^1] \times [x_2^1, x_2^2]$ au dessous de la courbe d'indifférence passant par (x_1^0, x_2^2) et (x_1^1, x_2^1), il existe un point de $[x_1^0, x_1^1] \times \{x_2^1\}$ qui lui est indifférent. De même, pour chaque point de $[x_1^0, x_1^1] \times [x_2^1, x_2^2]$ au dessus de la courbe d'indifférence passant par (x_1^0, x_2^2) et (x_1^1, x_2^1), il existe un point de $[x_1^0, x_1^1] \times \{x_2^2\}$ qui lui est indifférent. Par conséquent, puisque $([x_1^0, x_1^1], Y_1, \succsim_1)$ vérifie la condition de représentabilité de Debreu, il existe un ensemble Y' tel que $([x_1^0, x_1^1] \times [x_2^1, x_2^2], Y', \succsim)$ vérifie la condition de représentabilité de Debreu (ici, c'est surtout l'axiome d'indépendance qui est important).

De même, pour tout point $b \in [x_1^1, x_1^2] \times [x_2^0, x_2^1]$ au dessous de la courbe d'indifférence passant par (x_1^1, x_2^1) et (x_1^2, x_2^0), il existe un point de $\{x_1^1\} \times [x_2^0, x_2^1]$ qui lui est indifférent.

Mais sur la figure 7.11, on voit bien qu'à chaque point de $\{x_1^1\} \times [x_2^0, x_2^1]$ correspond un point de $[x_1^0, x_1^1] \times \{x_2^1\}$ sur la même courbe d'indifférence. A Y_1 on peut donc associer par bijection l'ensemble $Y_2 \subset [x_2^0, x_2^1]$ tel que tout point de Y_1 est indifférent à un point de Y_2 et réciproquement. De par sa définition, Y_2 est dénombrable et permet, à l'instar du paragraphe précédent, de déduire l'existence d'un ensemble $Y'' \subset [x_1^1, x_1^2] \times [x_2^0, x_2^1]$ tel que $([x_1^1, x_1^2] \times [x_2^0, x_2^1], Y'', \succsim)$ vérifie la condition de représentabilité de Debreu.

On peut réutiliser le processus décrit ci-dessus pour déduire que pour tout ensemble $[x_1^i, x_1^{i+1}] \times [x_2^j, x_2^{j+1}]$ il existe un ensemble dénombrable Y''' tel que $([x_1^i, x_2^{i+1}] \times [x_2^j, x_2^{j+1}], Y''', \succsim)$ vérifie la condition de représentabilité de Debreu. En fait, puisque toute réunion finie d'ensembles dénombrables est dénombrable, $\forall i, j, p, q$, il existe un ensemble dénombrable $Z' \subset [x_1^i, x_1^j] \times [x_2^p, x_2^q]$ tel que $([x_1^i, x_1^j] \times [x_2^p, x_2^q], Z', \succsim)$ vérifie la condition de représentabilité de Debreu. On peut alors étendre la condition de représentabilité en rajoutant les "rectangles"

$$\begin{array}{ll}
[x_1^k, x_1^{k+1}] \times [x_2^q, x_2^{q+1}] & \forall k \in \{i-1, \ldots, j+1\}, \\
[x_1^k, x_1^{k+1}] \times [x_2^{p-1}, x_2^p] & \forall k \in \{i-1, \ldots, j+1\}, \\
[x_1^{i-1}, x_1^i] \times [x_2^k, x_2^{k+1}] & \forall k \in \{p-1, \ldots, q+1\}, \\
[x_1^j, x_1^{j+1}] \times [x_2^k, x_2^{k+1}] & \forall k \in \{p-1, \ldots, q+1\}.
\end{array}$$

On voit donc par ce processus que l'on peut étendre la représentabilité sur la totalité de X pourvu que les séquences standards permettent de couvrir tout l'espace X ; or cette condition est remplie grâce à l'axiome archimédien. En conclusion : il existe un ensemble dénombrable $Z \subset X$ tel que $(X, Z, \succsim)$ vérifie la condition de représentabilité de Debreu. Ainsi, $\succsim$ est représentable par une fonction d'utilité sur X.

7.2.2 2ème étape : la représentabilité additive de $\succsim$

Lorsque la première étape est terminée, on sait qu'il existe une fonction d'utilité f (pas forcément additive) représentant $\succsim$ sur X. Il ne reste plus qu'à transformer cette fonction en une fonction d'utilité additive. Pour cela, je vais faire appel à la condition de Thomsen ainsi qu'à une nouvelle condition : la condition de Reidemeister. Celle-ci sera omise par la suite car elle est en fait induite par l'indépendance et la condition de Thomsen. Toutefois, il me paraît intéressant de la mentionner ici parce qu'elle intervient dans la construction intuitive de la transformation de f en utilité additive.

Axiome 7.1 (condition de Reidemeister) $\forall x_1, y_1, z_1, t_1 \in X_1, \forall x_2, y_2, z_2, t_2 \in X_2$,

$$[(x_1, y_2) \sim (y_1, x_2) \ et \ (x_1, t_2) \sim (y_1, z_2) \ et \ (t_1, y_2) \sim (z_1, x_2)] \Rightarrow (t_1, t_2) \sim (z_1, z_2).$$

Le lecteur aura assurément remarqué que la condition de Reidemeister est un cas particulier de l'axiome d'élimination symétrique d'ordre 3, (S_3). Son interprétation graphique est fournie par la figure 7.12, dans laquelle la partie gauche illustre la condition de Reidemeister dans l'espace $X_1 \times X_2$ (les courbes sont alors des courbes d'indifférence), et la partie droite illustre ladite condition dans l'espace de travail développé au chapitre précédent, page 84 (les courbes sont alors les graphes d'une fonction d'utilité f, le second composant étant fixé à différentes valeurs).

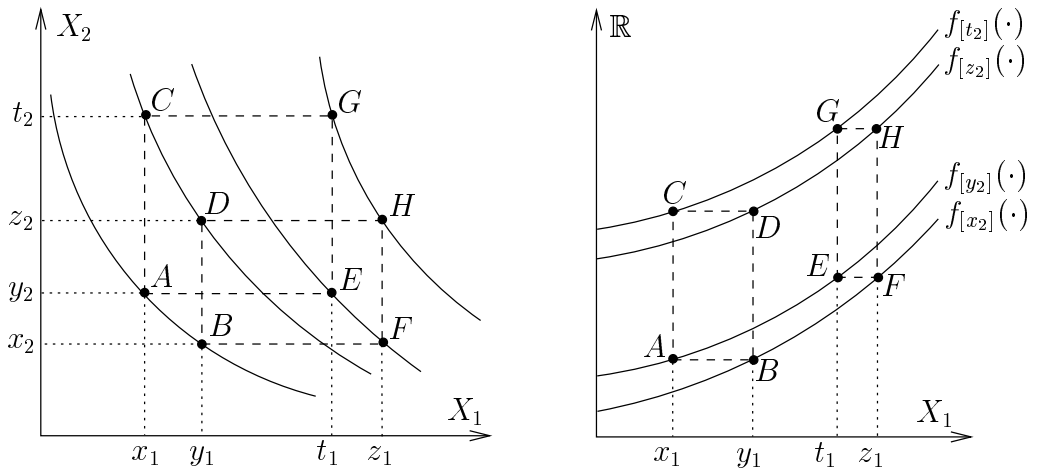


FIG. 7.12: La condition de Reidemeister.

Lemme 7.3 *Soit X un produit cartésien bidimensionnel muni d'un préordre large total $\succsim$ sur X vérifiant l'indépendance (cf. page 23), la condition de Thomsen (cf. page 24) et la condition de Reidemeister. Supposons que la solvabilité restreinte (cf. page 41), l'essentialité (cf. page 43) et l'axiome archimédien (cf. page 38) soient vérifiés par les deux composants de X. Alors $\succsim$ est représentable par une fonction d'utilité additive. De plus, cette fonction est unique à une transformation affine strictement positive près.*

L'intuition de ce lemme est, comme dans la première étape, graphique. Considérons une séquence standard quelconque par rapport au deuxième composant, $(x_2^i)_{i\in N}$, de base $\{y_1, x_1\}$. L'équivalence suivante est alors vérifiée :

$$\forall i, i+1, i+2 \in N,\ (x_1, x_2^i) \sim (y_1, x_2^{i+1}) \Leftrightarrow (x_1, x_2^{i+1}) \sim (y_1, x_2^{i+2}).$$

Autrement dit, $\{x_2^i,\ i \in N\}$ est un ensemble équi-espacé (cf. définition 7.1 page 125). Ainsi, $X_1 \times \{x_2^i,\ i \in N\}$ est un espace de dimension 2 dont le premier composant vérifie la solvabilité restreinte et dont le deuxième composant est équi-espacé ; donc, d'après le lemme 7.2 et la section 7.1 en général, il existe une fonction strictement croissante $\varphi : \{y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in X \text{ tel que } y = f(x)\} \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi \circ f$ est additive sur $X_1 \times \{x_2^i,\ i \in N\}$. Notons que puisque φ est strictement croissante, $\varphi \circ f$ est forcément une fonction d'utilité représentant $\succsim$ sur X.

Comme nous l'avions vu dans la section 7.1, la fonction φ n'est pas unique à une transformation affine strictement positive près ; c'est à la fois un handicap et un avantage : handicap car il se peut que $\varphi \circ f$ ne soit pas additive sur la totalité de X, mais c'est aussi un avantage car trouver une fonction φ telle que $\varphi \circ f$ est additive sur $X_1 \times \{x_2^i,\ i \in N\}$ est chose relativement aisée (cf. section 7.1). Vouloir trouver directement une fonction φ telle que $\varphi \circ f$ est additive sur X relève de l'utopie car cette transformation est unique (à une échelle et une translation près), et, pour la trouver, il faudrait prendre en compte en même temps toutes les courbes d'indifférence. Plutôt que de s'essayer à cet exercice de style compliqué, on va construire une suite de fonctions φ

qui tend vers la transformation cherchée. Le dicton populaire affirme que Paris ne s'est pas fait en un jour, l'obtention de la transformation recherchée non plus.

Le fait de travailler sur $X_1 \times \{x_2^i,\ i \in N\}$ suggère de se placer dans le même espace de travail que dans la section 7.1, c'est-à-dire l'espace développé dans le chapitre 6, page 84. Ainsi, $\varphi \circ f$ peut être représentée par la figure 7.13, dans laquelle les graphes des fonctions $\varphi \circ f_{[x_2^{i+1}]}(\cdot)$, $\varphi \circ f_{[x_2^{i+2}]}(\cdot)$ et $\varphi \circ f_{[x_2^{i+3}]}(\cdot)$, se déduisent du graphe de $\varphi \circ f_{[x_2^i]}(\cdot)$ par translation verticale ; ainsi, les longueurs des segments $[AB]$, $[CD]$, $[EF]$, $[GH]$, $[IL]$ et $[JK]$ sont toutes égales.

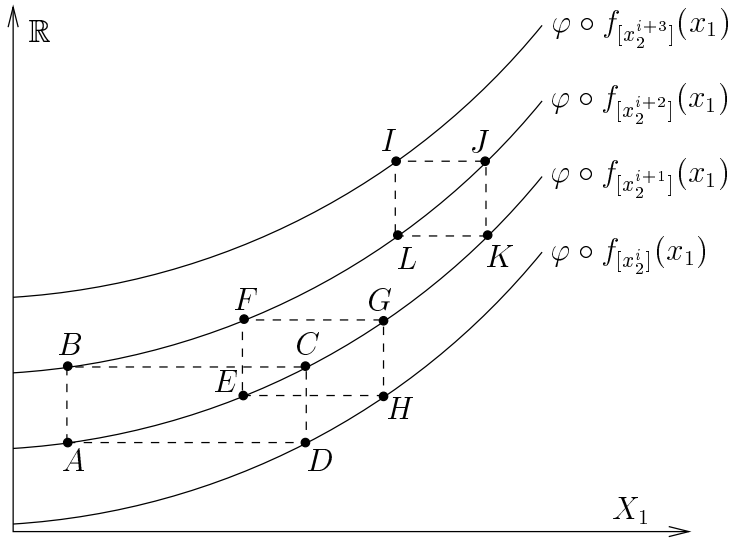


FIG. 7.13: $\varphi \circ f$ sur $X_1 \times \{x_2^i,\ i \in N\}$.

Supposons maintenant que $\varphi \circ f$ soit additive sur $X_1 \times [x_2^0, x_2^1]$. Alors, cette fonction est additive sur X ; en effet, on remarque sur la figure 7.14 que

$$\begin{array}{rcl} D = (x_1^1, x_2^0) & \sim & (x_1^2, x_2) = A, \\ B = (x_1^2, y_2) & \sim & (x_1^1, x_2^1) = C, \\ E = (x_1^3, x_2) & \sim & (x_1^4, x_2^0) = H, \end{array}$$

ce qui implique, d'après la condition de Reidemeister, que $G = (x_1^4, x_2^1) \sim (x_1^3, y_2) = F$. Donc, d'après les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G, H, $(ABCD)$ et $(EFGH)$ sont des rectangles. Par conséquent, les longueurs des segments $[AB]$ et $[CD]$ sont égales, ainsi que celles des segments $[EF]$ et $[GH]$. Comme $\varphi \circ f$ est additive sur $X_1 \times \{x_2^0, x_2^1\}$, les longueurs des segments $[CD]$ et $[GH]$ sont égales, et, par conséquent, les longueurs des segments $[AB]$ et $[EF]$ sont aussi égales. Ainsi, la courbe $\varphi \circ f_{[y_2]}$ se déduit de la courbe $\varphi \circ f_{[x_2]}$ par translation verticale. Maintenant, par hypothèse, on a supposé que $\varphi \circ f$ est additive sur $X_1 \times [x_2^0, x_2^1]$, ce qui signifie que les longueurs des segments $[AP]$ et $[EQ]$ sont égales. Puisque A et E appartiennent respectivement aux segments $[BP]$ et $[EQ]$,

$$\begin{array}{l} \text{longueur de } [BP] = \text{longueur de } [BA] + \text{longueur de } [AP], \\ \text{longueur de } [FQ] = \text{longueur de } [FE] + \text{longueur de } [EQ], \end{array}$$

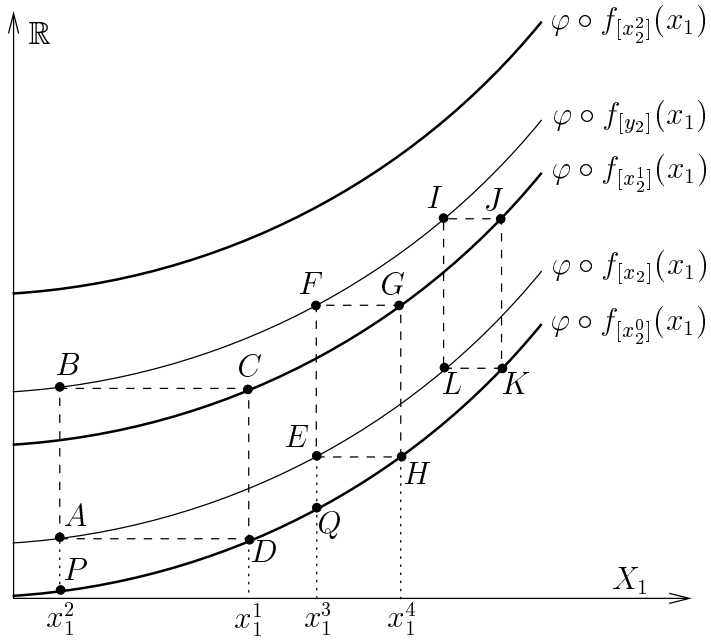


FIG. 7.14: L'additivité de $\varphi \circ f$ sur $X_1 \times [x_2^0, x_2^1]$ est propagée sur X par la condition de Reidemeister.

ce qui implique que longueur de $[BP]$ = longueur de $[FQ]$. Autrement dit, le graphe de $\varphi \circ f_{[y_2]}$ peut se déduire du graphe de $\varphi \circ f_{[x_2^0]}$ par translation verticale. Cette remarque est en fait généralisable à n'importe quelle courbe.

En résumé, tous les graphes des fonctions $\varphi \circ f_{[z_2]}$ se déduisent par translation verticale de courbes $\varphi \circ f_{[t_2]}$ comprises entre les graphes de $\varphi \circ f_{[x_2^0]}$ et de $\varphi \circ f_{[x_2^1]}$; de plus, si $\varphi \circ f$ est additive sur $X_1 \times [x_2^0, x_2^1]$, alors elle l'est aussi sur X. Par conséquent, il suffit d'étudier l'additivité de $\varphi \circ f$ sur $X_1 \times [x_2^0, x_2^1]$ pour en déduire son additivité sur X. La condition de Thomsen permet encore de réduire l'espace d'étude ; en effet, sur la figure 7.15, la condition de Thomsen correspond à des relations du type

$$\left[B, D \in \varphi \circ f_{[x_2^0]} \quad \text{et} \quad C, E \in \varphi \circ f_{[x_2^1]} \quad \text{et} \quad A \in \varphi \circ f_{[x_2]}\right] \Rightarrow F \in \varphi \circ f_{[x_2]}.$$

De même, la condition de Thomsen permet d'affirmer que si G est sur le graphe de la fonction $\varphi \circ f_{[x_2]}$, alors H l'est aussi. Autrement dit, le graphe de la fonction $\varphi \circ f_{[x_2]}$ défini sur la portion $[AF[$ suffit pour déterminer grâce à la condition de Thomsen le graphe sur tout X_1. Une autre conséquence est que si la portion $[AF[$ du graphe de $\varphi \circ f_{[x_2]}$ est une translation verticale de la portion $[JD[$ du graphe de $\varphi \circ f_{[x_2^0]}$, alors l'ensemble du graphe de $\varphi \circ f_{[x_2]}$ sur X_1 est une translation de celui de $\varphi \circ f_{[x_2^0]}$. Donc, l'additivité de $\varphi \circ f$ ne dépend que de l'additivité sur la zone grisée de la figure 7.16.

Mais que veut dire que $\varphi \circ f$ est additive dans la zone grisée ? D'après ce que l'on avait vu dans la sous-section 7.1.2,

$\varphi \circ f$ est additive dans la zone grisée	$\Leftrightarrow$	$\forall x_2 \in [x_2^0, x_2^1]$, la restriction de $\varphi \circ f_{[x_2]}$ sur $[x_1^0, x_1^1]$ est une translation verticale de la restriction de $\varphi \circ f_{[x_2^0]}$ sur $[x_1^0, x_1^1]$.

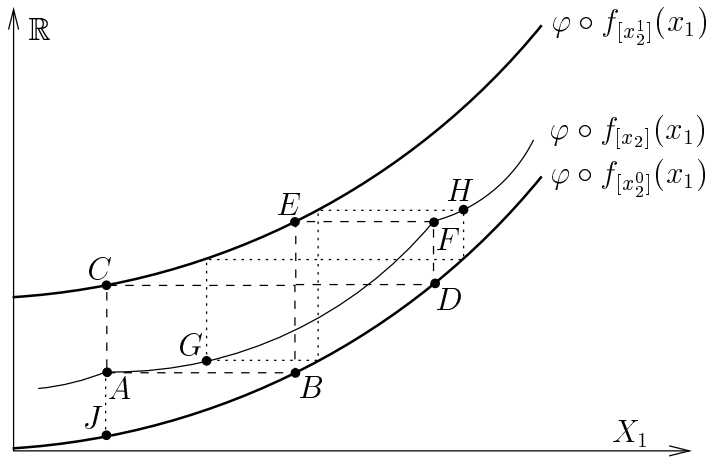


FIG. 7.15: Réduction de l'espace d'étude par la condition de Thomsen.

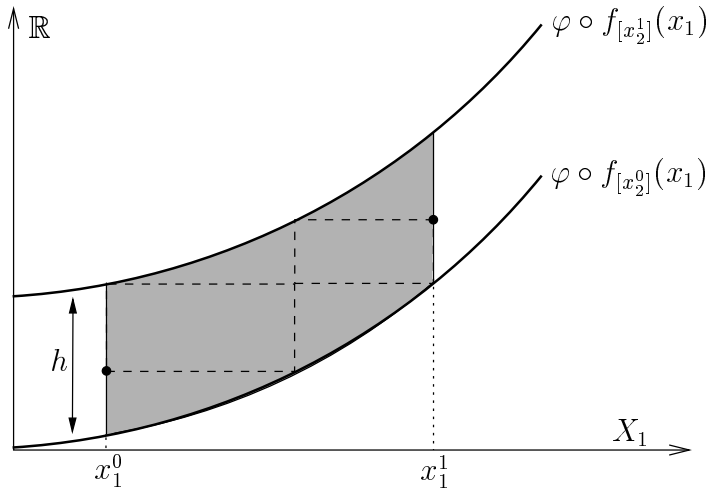


FIG. 7.16: L'additivité de $\varphi \circ f$ ne dépend que de l'additivité sur la zone grisée.

On peut énoncer cette équivalence de manière différente et néanmoins équivalente :

$$\begin{array}{lcl} \varphi \circ f \text{ est additive dans} & \Leftrightarrow & \forall x_2 \in [x_2^0, x_2^1], \text{ la restriction de } \left(\varphi \circ f_{[x_2]} - \varphi \circ f_{[x_2^0]}\right) \\ \text{la zone grisée} & & \text{sur } [x_1^0, x_1^1] \text{ est une constante,} \end{array}$$

ou encore

$$\begin{array}{lcl} \varphi \circ f \text{ est additive dans} & \Leftrightarrow & \forall (x_1, x_2) \in [x_1^0, x_1^1] \times [x_2^0, x_2^1], \\ \text{la zone grisée} & & \Big[\left(\varphi \circ f_{[x_2]}(x_1) - \varphi \circ f_{[x_2^0]}(x_1)\right) - \\ & & \qquad \left(\varphi \circ f_{[x_2]}(x_1^0) - \varphi \circ f_{[x_2^0]}(x_1^0)\right)\Big] = 0. \end{array}$$

D'après ce qui précède, on sait que si h est la hauteur séparant $\varphi \circ f_{[x_2^1]}(x_1^0)$ de $\varphi \circ f_{[x_2^0]}(x_1^0)$, alors, $\forall (x_1, x_2) \in [x_1^0, x_1^1] \times [x_2^0, x_2^1]$,

$$\left|\left(\varphi \circ f_{[x_2]}(x_1) - \varphi \circ f_{[x_2^0]}(x_1)\right) - \left(\varphi \circ f_{[x_2]}(x_1^0) - \varphi \circ f_{[x_2^0]}(x_1^0)\right)\right| \leq h \ ;$$

ainsi, $\forall x_1 \in [x_1^0, x_1^1],\ \forall x_2, y_2 \in [x_2^0, x_2^1]$,

$$\left|\Big(\varphi \circ f_{[x_2]}(x_1) - \varphi \circ f_{[y_2]}(x_1)\Big) - \Big(\varphi \circ f_{[x_2]}(x_1^0) - \varphi \circ f_{[y_2]}(x_1^0)\Big)\right| \leq 2h.$$

Autrement dit, si l'on arrive à construire une suite de transformations telle que les hauteurs correspondantes tendent vers 0, la limite de la suite sera la transformation recherchée.

Si $\varphi \circ f$ est additive sur X, la suite ne comporte qu'une seule transformation : φ. Sinon, il existe $x_2 \in [x_2^0, x_2^1]$ tel que, pour au moins un $x_1 \in [x_1^0, x_1^1]$,

$$\Big(\varphi \circ f_{[x_2]}(x_1) - \varphi \circ f_{[x_2^0]}(x_1)\Big) - \Big(\varphi \circ f_{[x_2]}(x_1^0) - \varphi \circ f_{[x_2^0]}(x_1^0)\Big) \neq 0.$$

Dans ce cas, soient h' la hauteur séparant $\varphi \circ f_{[x_2^1]}(x_1^0)$ de $\varphi \circ f_{[x_2]}(x_1^0)$ et h'' la hauteur séparant $\varphi \circ f_{[x_2]}(x_1^0)$ de $\varphi \circ f_{[x_2^0]}(x_1^0)$. On a forcément $h = h' + h''$, et donc soit $h' \leq h/2$ soit $h'' \leq h/2$. Supposons que h' soit inférieur ou égal à $h/2$ (un processus similaire s'appliquerait dans l'autre cas) ; on peut alors construire une fonction ψ strictement croissante telle que $\psi \circ f$ soit additive sur $X_1 \times \{y_2^i, i \in P\}$, où (y_2^i) est une séquence standard admettant x_2 et x_2^1 comme éléments consécutifs. Tout le travail décrit ci-dessus est encore applicable; on voit donc que $\forall (x_1, y_2) \in [x_1^0, x_1^1] \times [x_2, x_2^1]$,

$$\left|\Big(\psi \circ f_{[y_2]}(x_1) - \psi \circ f_{[x_2^1]}(x_1)\Big) - \Big(\psi \circ f_{[y_2]}(x_1^0) - \psi \circ f_{[x_2^1]}(x_1^0)\Big)\right| \leq h' \leq h/2,$$

et donc, $\forall x_1 \in [x_1^0, x_1^1],\ \forall y_2, z_2 \in [x_2, x_2^1]$,

$$\left|\Big(\psi \circ f_{[y_2]}(x_1) - \psi \circ f_{[z_2]}(x_1)\Big) - \Big(\psi \circ f_{[y_2]}(x_1^0) - \psi \circ f_{[z_2]}(x_1^0)\Big)\right| \leq 2h' \leq h.$$

Ce processus revient à affiner l'espace d'étude de la zone grisée de la figure 7.16, exprimée sous forme de pointillés dans la figure 7.17, à la zone grisée dans cette dernière.

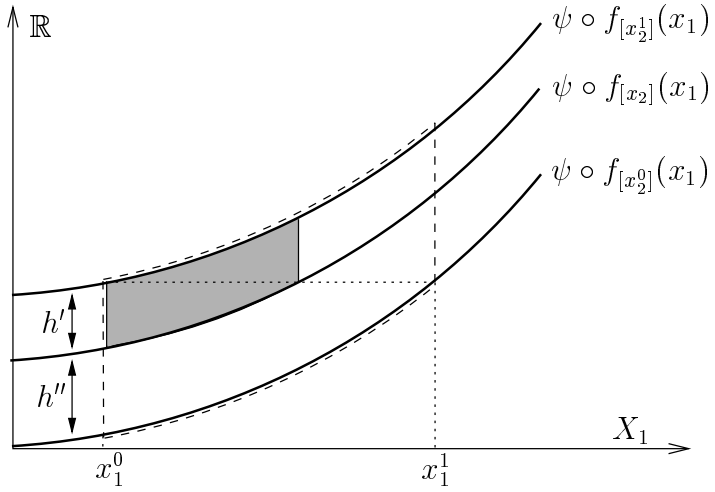


FIG. 7.17: Affinement de la zone grisée.

En poursuivant le processus, on peut construire un suite de transformations telle que la variation de hauteur entre deux courbes quelconques est toujours inférieure à $h/2^p$,

et ce, quel que soit $p \in \mathbb{N}$. On voit donc que la composée de f par ces transformations se rapproche de plus en plus d'une fonction additive.

Le lemme 7.3, bien qu'utilisant peu d'axiomes d'élimination (indépendance, condition de Thomsen et condition de Reidemeister) n'est toutefois pas optimal car la condition de Reidemeister peut se déduire des autres axiomes, comme le montre le lemme suivant :

Lemme 7.4 *Soit X un produit cartésien bidimensionnel muni d'un préordre large total $\succsim$ sur X satisfaisant l'indépendance (cf. page 23) et la condition de Thomsen (cf. page 24). Supposons que les deux composants de X vérifient la solvabilité restreinte, l'essentialité et l'axiome archimédien. Alors $\succsim$ vérifie aussi la condition de Reidemeister.*

On peut donc en déduire le corollaire suivant :

Corollaire 7.4 *Soit X un produit cartésien bidimensionnel muni d'un préordre large total $\succsim$ sur X vérifiant l'indépendance (cf. page 23) et la condition de Thomsen (cf. page 24). Supposons que la solvabilité restreinte (cf. page 41), l'essentialité (cf. page 43) et l'axiome archimédien (cf. page 38) soient vérifiés par les deux composants de X. Alors $\succsim$ est représentable par une fonction d'utilité additive. De plus, cette fonction est unique à une transformation affine strictement positive près.*

7.3 Solvabilité restreinte "locale" sur deux composants

Le but de cette section est de montrer que, grâce au travail développé dans les sections précédentes de ce chapitre, on peut généraliser sans trop de difficultés les théorèmes d'existence classiques. Pour cela, considérons un produit cartésien bidimensionnel X et $\succsim$ un préordre large total sur X vérifiant l'axiome d'indépendance et la condition de Thomsen. Supposons que P soit un ensemble, fini ou infini, d'entiers consécutifs. Supposons de plus que X se présente sous la forme suivante :

$$X = X_1 \times \bigcup_{i \in P} [x_2^i, y_2^i],\ y_2^i \succ_2 x_2^i,$$

et que la solvabilité restreinte soit vérifiée sur X_1 et les $[x_2^i, y_2^i]$. Dans ce cas, les théorèmes classiques permettent de garantir l'existence de fonctions d'utilités additives sur les ensembles du type $X_1 \times [x_2^i, y_2^i]$, mais pas sur X car ce dernier ne vérifie pas la solvabilité restreinte par rapport à ses deux composants (cf. les "trous" qui existent entre y_2^i et x_2^{i+1}. En fait, si l'on veut propager la structure additive au delà des trous, il faut utiliser, comme nous l'avions fait dans la section précédente, la condition de Reidemeister. Il est alors relativement aisé de montrer le théorème suivant :

Théorème 7.2 *Soit $X = X_1 \times X_2$, où $X_2 = \bigcup_{i \in P} [x_2^i, y_2^i]$ un produit cartésien bidimensionnel. Soit $\succsim$ un préordre large total sur X vérifiant la condition de Reidemeister et la condition archimédienne par rapport aux deux composants sur X. Supposons que $\succsim$ vérifie aussi l'indépendance et la condition de Thomsen sur les produits cartésiens $X_1 \times [x_2^i, y_2^i]$, que X_1 et les $[x_2^i, y_2^i]$ vérifient la solvabilité restreinte et l'essentialité, et que, $\forall i \in P$, $\nexists\, x_1, y_1 \in X_1$, $(x_1, x_2^{i+1}) \sim (y_1, y_2^i$. Alors $\succsim$ est représentable sur X par une fonction d'utilité additive. De plus, cette fonction est unique à une transformation affine strictement positive près sur les produits cartésiens $X_1 \times [x_2^i, y_2^i]$.*

Je ne présenterai pas dans cette section d'autres théorèmes d'existence. Cependant, je pense que l'utilisation de la condition de Reidemeister devrait permettre d'obtenir des résultats bien plus généraux que le théorème ci-dessus, en particulier sur des sous-ensembles de produits cartésiens.

7.4 Démonstrations

Démonstration du lemme 7.1 : Soit $X_2 = \{a_2, b_2\}$. Si $x_1 \sim_1 y_1$ $\forall x_1, y_1 \in X_1$, alors le lemme est trivialement démontré. De même, si $a_2 \sim_2 b_2$, alors le lemme est aussi démontré. Donc, sans perte de généralité, on peut supposer que $b_2 \succ_2 a_2$. Désignons par $\tilde{X}_1$ l'ensemble des classes d'indifférence de X_1 par $\sim$. L'existence d'une fonction d'utilité f représentant $\succsim$ sur $X_1 \times \{a_2, b_2\}$ est équivalente à l'existence d'une utilité f^* représentant $\succsim^*$ sur $\tilde{X}_1 \times \{a_2, b_2\}$, où $\succsim^*$ est définie de la manière suivante :

$$(\tilde{x_1}, x_2) \succsim^* (\tilde{y_1}, y_2) \Leftrightarrow [\exists\, x_1 \in \tilde{x_1}, \exists\, y_1 \in \tilde{y_1} \text{ tels que } (x_1, x_2) \succsim (y_1, y_2)].$$

L'avantage de $\tilde{X}_1$ sur X_1 est que les restrictions de f^* à $\tilde{X}_1 \times \{a_2\}$ et $\tilde{X}_1 \times \{b_2\}$ sont des bijections. Dans toute la suite de la démonstration, nous allons travailler dans l'espace $\tilde{X}_1 \times \{a_2, b_2\}$. Pour alléger les notations, je ne vais supprimer le caractère "*" apposé à f et $\succsim$.

Par hypothèse du lemme, $\succsim$ est représentable par une fonction d'utilité f. Notons $f_{[a_2]}(\cdot) = f(\cdot, a_2)$ et $f_{[b_2]}(\cdot) = f(\cdot, b_2)$, comme suggéré dans le chapitre précédent. Pour prouver qu'une utilité additive existe, il est suffisant de montrer qu'il existe une fonction strictement croissante φ transformant f en une fonction additive. En d'autres termes,

$$\forall x_1 \in \tilde{X}_1,\ \varphi \circ f_{[b_2]}(x_1) = \varphi \circ f_{[a_2]}(x_1) + \alpha, \text{ pour un } \alpha \in \mathbb{R}_+^*. \tag{7.5}$$

Supposons que, $\forall x_1, y_1 \in \tilde{X}_1$, $(x_1, a_2) \prec (y_1, b_2)$. Alors, puisque f est une fonction d'utilité représentant $\succsim$, $f_{[a_2]}(\tilde{X}_1) \cap f_{[b_2]}(\tilde{X}_1) = \emptyset$. Dans ce cas, soit φ définie par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} \arctan(x) & \text{si } x \in f_{[a_2]}(\tilde{X}_1), \\ \arctan(f_{[a_2]}(f_{[b_2]}^{-1}(x))) + \pi & \text{si } x \in f_{[b_2]}(\tilde{X}_1). \end{cases}$$

Il est clair que $\varphi \circ f$ est une fonction d'utilité additive représentant $\succsim$ sur X.

Supposons maintenant que $f_{[a_2]}(\tilde{X}_1) \cap f_{[b_2]}(\tilde{X}_1) \neq \emptyset$. (7.5) est équivalente à l'équation suivante :

$$\varphi \circ (f_{[b_2]} \circ f_{[a_2]}^{-1})(x) = \varphi(x) + \alpha,\ \forall x \in f_{[a_2]}(\tilde{X}_1). \tag{7.6}$$

Remarquons que la valeur de α n'est pas importante, tant qu'elle reste strictement positive. En effet, si on substituait α par $\beta > 0$, φ serait remplacée par $\frac{\beta}{\alpha}\varphi$. Soit $x^0 \in f_{[a_2]}(\tilde{X}_1)$. La valeur de $\varphi(x^0)$ peut être choisie arbitrairement car cela n'affecte en aucun cas (7.6).

Dans le reste de la démonstration, nous allons construire une fonction φ vérifiant (7.6). Définissons d'abord φ sur $[x^0, f_{[b_2]} \circ f^{-1}_{[a_2]}(x^0)]$ de la manière suivante :

$$\varphi(x) = \frac{\alpha(x - x^0)}{f_{[b_2]} \circ f^{-1}_{[a_2]}(x^0) - x^0} + \varphi(x^0),\ \forall x \in [x^0, f_{[b_2]} \circ f^{-1}_{[a_2]}(x^0)]. \tag{7.7}$$

On doit maintenant étendre le domaine de définition de φ. Or $\forall x \in [x^0, f_{[b_2]} \circ f^{-1}_{[a_2]}(x^0)] \cap f_{[a_2]}(\tilde{X}_1)$, on peut appliquer (7.6) sur x.

$$\text{Soit } x^1 = \sup\{x : x \in [x^0, f_{[b_2]} \circ f^{-1}_{[a_2]}(x^0)] \cap f_{[a_2]}(\tilde{X}_1)\}.$$

En utilisant (7.6) sur $[x^0, x^1[$ si x^1 n'est pas atteint ou $[x^0, x^1]$ sinon, on définit φ sur

- $\left[f_{[b_2]} \circ f^{-1}_{[a_2]}(x^0), \left(f_{[b_2]} \circ f^{-1}_{[a_2]}\right)^2 (x^0)\right[\cap f(\tilde{X}_1, X_2)$ si x^1 n'est pas atteint,
- $\left[f_{[b_2]} \circ f^{-1}_{[a_2]}(x^0), \left(f_{[b_2]} \circ f^{-1}_{[a_2]}\right)^2 (x^0)\right] \cap f(\tilde{X}_1, X_2)$ sinon.

φ est alors strictement croissante car, d'après l'axiome d'indépendance, $f_{[b_2]} \circ f^{-1}_{[a_2]}(x) > x$ $\forall x \in f_{[a_2]}(\tilde{X}_1)$ et $\alpha > 0$.

Maintenant deux cas peuvent se produire :

- si $x^1 = f_{[b_2]} \circ f^{-1}_{[a_2]}(x^0)$ mais $x^1 \notin f_{[a_2]}(\tilde{X}_1)$, ou $x^1 < f_{[b_2]} \circ f^{-1}_{[a_2]}(x^0)$:
  Alors, s'il existe $y \in \tilde{X}_1$ tel que $f_{[a_2]}(y) \geq x^1$, d'après la définition de x^1, $f_{[a_2]}(y) > f_{[b_2]} \circ f^{-1}_{[a_2]}(x^0)$, ce qui implique que $(y, a_2) \succsim (f^{-1}_{[a_2]}(x^0), b_2) \succsim (f^{-1}_{[a_2]}(x^0), a_2)$, et donc, par solvabilité restreinte, il existe $z \in \tilde{X}_1$ tel que $f_{[a_2]}(z) = f_{[b_2]} \circ f^{-1}_{[a_2]}(x^0)$, ce qui contredit l'hypothèse de départ. Par conséquent, il n'existe aucun élément y tel que $f_{[a_2]}(y) \geq x^1$, et donc φ a été bien définie sur $\{x \in f(\tilde{X}_1, X_2) : x \geq x^0\}$.

- si $x^1 = f_{[b_2]} \circ f^{-1}_{[a_2]}(x^0)$ et $x^1 \in f_{[a_2]}(\tilde{X}_1)$:
  Alors φ a été définie sur $[x^0, (f_{[b_2]} \circ f^{-1}_{[a_2]})^2(x^0)] \cap f(\tilde{X}_1, X_2)$.

  $$\text{Soit } x^2 = \sup\{x : x \in [x^0, (f_{[b_2]} \circ f^{-1}_{[a_2]})^2(x^0)] \cap f_{[a_2]}(\tilde{X}_1)\}.$$

  On peut alors réutiliser le procédé décrit ci-dessus, mais, cette fois, avec l'ensemble $[x^1, x^2]$ au lieu de $[x^0, x^1]$. En itérant le procédé, on construit une suite de points $(x^i)_{i=0}^n$, où n est soit un entier fini, soit $+\infty$. φ est alors définie sur $[x^0, x^n] \cap f(\tilde{X}_1, X_2)$ si n est fini, ou sur $[x^0, x^n[\cap f(\tilde{X}_1, X_2)$ si n est infini.

  Si n est fini, alors, d'après la solvabilité restreinte, φ a été définie sur l'ensemble $\{x \in f(\tilde{X}_1, X_2) : x^0 \leq x\}$.

Si n est infini, alors φ a été définie sur $[x^0, (f_{[b_2]} \circ f_{[a_2]}^{-1})^n(x^0)[\cap f(\tilde{X}_1, X_2)$. Maintenant, supposons qu'il existe $x \in f(\tilde{X}_1, X_2)$ tel que, $\forall i \in \mathbb{N}$, $(f_{[b_2]} \circ f_{[a_2]}^{-1})^i(x^0) < x$. Par construction, $\varphi((f_{[b_2]} \circ f_{[a_2]}^{-1})^i(x^0)) = \varphi(x^0) + i\alpha$; par conséquent, cela devrait tendre vers $+\infty$ lorsque i tend vers $+\infty$. Mais alors $\varphi(x)$ ne peut pas être fini, et donc φ ne peut pas être définie sur $f(\tilde{X}_1, X_2)$. Montrons que ce cas de figure ne peut pas arriver.

$\forall i, i+1 \geq 0$, $x^{i+1} = f_{[b_2]} \circ f_{[a_2]}^{-1}(x^i)$, et, durant le processus de construction, $x^i, x^{i+1} \in f_{[a_2]}(\tilde{X}_1)$. Par conséquent, on peut construire une suite d'éléments de X_1, appelons-la $(y^i)_{i \geq 0} \in \tilde{X}_1$, telle que, $\forall i \in \mathbb{N}$, $x^i = f_{[a_2]}(y^i)$. Mais alors $f_{[a_2]}(y^{i+1}) = f_{[b_2]}(y^i)$, ou, en termes de relations d'indifférence, $(y^{i+1}, a_2) \sim (y^i, b_2)$. Ainsi, (y^i) est une séquence standard infinie mais bornée par x. L'axiome archimédien ne peut donc pas être vérifié, ce qui est contraire aux hypothèses. Par conséquent, le cas de figure décrit ci-dessus ne peut pas arriver, et donc φ a bien été définie sur $\{x \in f(\tilde{X}_1, X_2) : x^0 \leq x\}$.

En utilisant (7.6) en sens inverse, on peut construire φ sur $\{x \in f(\tilde{X}_1, X_2) : x^0 \geq x\}$. Et, bien entendu, à l'instar de ce qui a été montré ci-dessus, φ est strictement croissante. Par conséquent, il existe bien φ sur $f(\tilde{X}_1, X_2)$. Remarquons que φ n'est pas unique à une transformation affine strictement positive près puisqu'elle peut être définie arbitrairement dans (7.7). ♦

Démonstration du corollaire 7.1 : Trivial d'après le lemme 7.1 et le théorème de Debreu (1964). ♦

Démonstration du corollaire 7.2 : Supposons qu'il existe une fonction d'utilité représentant $\succsim$ sur X. Considérons des éléments arbitraires $i, i+1 \in N$. D'après le lemme 7.1, il existe une fonction d'utilité additive f représentant $\succsim$ sur $X_1 \times \{x_2^i, x_2^{i+1}\}$. Ceci signifie qu'il existe une constante α telle que $f(\cdot, x_2^{i+1}) = f(\cdot, x_2^i) + \alpha$. Supposons que $i+2 \in N$.

$$\text{Soit } A_1 = \{y_1 \in X_1 : \exists\, x_1 \in X_1 \text{ tel que } (y_1, x_2^{i+1}) \sim (x_1, x_2^i)\}.$$

(7.4) définit $f(\cdot, x_2^{i+2})$ sur A_1 car

$$\begin{aligned}(x_1, x_2^i) \sim (y_1, x_2^{i+1}) &\Leftrightarrow f(x_1, x_2^i) &&= f(y_1, x_2^i) + \alpha \\ &\Leftrightarrow (x_1, x_2^{i+1}) &&\sim (y_1, x_2^{i+2}) \\ &\Leftrightarrow f(y_1, x_2^{i+2}) &&= f(x_1, x_2^i) + \alpha = f(y_1, x_2^i) + 2\alpha.\end{aligned}$$

D'après la solvabilité restreinte, il est évident qu'il n'existe aucun élément $z_1 \in X_1$ tel que, $\forall x_1 \in A_1$, $z_1 \prec_1 x_1$. Il reste donc à étendre $f(\cdot, x_2^{i+1})$ sur $B_1 = \{x_1 \in X_1 : \forall y_1 \in A_1, x_1 \succ_1 y_1\}$. Mais $\forall x_1 \in B_1$ et $\forall y_1 \in X_1$, $(x_1, x_2^{i+2}) \succ (y_1, x_2^{i+1})$. Donc $f(\cdot, x_2^{i+2})$, défini comme $f(\cdot, x_2^{i+1}) + \alpha$ convient pour être une fonction d'utilité (puisque elle est supérieure ou égale à $\max_{x_1 \in A_1} f(x_1, x_2^{i+1}) + \alpha$).

Par conséquent, il existe une fonction d'utilité additive sur $X_1 \times \{x_2^i, x_2^{i+1}, x_2^{i+2}\}$. Par récurrence, on construit la fonction d'utilité sur $X_1 \times \{x_2^j : j \in N \text{ et } j \geq i\}$. Avec

un procédé similaire, on construit aussi f sur $X_1 \times \{x_2^j : j \in N \text{ et } j \leq i\}$. Remarquons que la suite (x_2^j) est une séquence standard. D'après l'axiome archimédien, on a donc bien construit une fonction d'utilité additive représentant $\succsim$ sur X. L'unicité découle directement de l'unicité du lemme 7.1. ♦

Démonstration du corollaire 7.3 : Trivial d'après le corollaire 7.2 et le théorème de Debreu (1964). ♦

Lemme 7.5 *Soit X un produit cartésien bidimensionnel muni d'un préordre large total $\succsim$ vérifiant l'axiome d'indépendance. Supposons que les deux composants de X vérifient l'essentialité et la solvabilité restreinte. S'il existe $x, y \in X$ tels que $x_1 \prec_1 y_1$ et $x_2 \prec_2 y_2$, alors il existe $a, b \in X$ tels que*

$$x \precsim a \prec b \precsim y, \qquad a_1 \prec_1 b_1, \qquad a_2 \prec_2 b_2, \qquad (a_1, b_2) \sim (b_1, a_2).$$

Démonstration du lemme 7.5 : Deux cas peuvent se présenter :

- Si $(y_1, x_2) \precsim (x_1, y_2)$, alors $(y_1, x_2) \precsim (x_1, y_2) \prec (y_1, y_2)$; donc, par solvabilité restreinte par rapport au deuxième composant, il existe $z_2 \in [x_2, y_2[$ tel que $(y_1, z_2) \sim (x_1, y_2)$. Par conséquent, $a = (x_1, z_2)$ et $b = (y_1, y_2)$ satisfont le lemme.
- Si $(y_1, x_2) \succ (x_1, y_2)$, alors $(x_1, y_2) \prec (y_1, x_2) \prec (y_1, y_2)$; donc, par solvabilité restreinte par rapport au premier composant, il existe $z_1 \in]x_1, y_1[$ tel que $(z_1, y_2) \sim (y_1, x_2)$. Par conséquent, $a = (z_1, x_2)$ et $b = (y_1, y_2)$ satisfont le lemme.

♦

Démonstration du lemme 7.2 : La démonstration consiste à montrer que les hypothèses du lemme 7.2 assurent que l'on est dans les conditions d'application du fameux théorème de Debreu (théorème 7.1). Pour cela, la démonstration est organisée en deux étapes :

- 1ère étape : on montre, d'une part, qu'il existe $x, y \in X$ tels que $x_1 \prec_1 y_1$, $x_2 \prec_2 y_2$, et $(x_1, y_2) \sim (y_1, x_2)$, et, d'autre part, qu'il existe un ensemble dénombrable $Y \subset [x, y]$ tel que $([x, y], Y, \succsim)$ vérifie la condition de représentabilité de Debreu (cf. page 129).
- 2ème étape : grâce à l'ensemble Y, et en utilisant certaines séquences standards, on montre qu'il existe un ensemble $Z \subset X$ dénombrable tel que $(X, Z, \succsim)$ vérifie la condition de représentabilité de Debreu. On peut alors utiliser le théorème de Debreu, qui stipule qu'il existe une utilité additive représentant $\succsim$ sur X.

1ère étape :

Supposons qu'il existe $z, t \in X$ tels que $z \prec t$ et tels qu'il existe un ensemble dénombrable $Y \subset [z, t]$ tel que $([z, t], Y, \succsim)$ vérifie la condition de représentabilité de

Debreu. Dans ce cas, on sait que soit $z_1 \prec_1 t_1$, soit $z_2 \prec_2 t_2$. Par symétrie, on ne traitera que le premier cas. Si, en plus de $z_1 \prec_1 t_1$, on a aussi $z_2 \prec_2 t_2$, alors, d'après le lemme 7.5, il existe $x, y \in [z, t]$ tels que $x_1 \prec_1 y_1$, $x_2 \prec_2 y_2$ et tels que $(x_1, y_2) \sim (y_1, x_2)$. Soit $Y' = Y \cap [x, y]$; il est clair que $([x, y], Y', \succsim)$ vérifie la condition de représentabilité de Debreu.

Supposons maintenant que $z_2 \sim_2 t_2$. Alors, comme le second composant est essentiel, il existe $x_2 \in X_2$ tel que $\mathrm{Non}(x_2 \sim_2 t_2)$. Supposons donc que $x_2 \succ_2 t_2$ (la démonstration suit le même principe lorsque $x_2 \prec_2 t_2$). Deux cas peuvent se présenter : si $(z_1, x_2) \succsim (t_1, t_2)$, alors, par solvabilité par rapport au deuxième composant, il existe $y_2 \in]t_2, x_2]$ tel que $(z_1, y_2) \sim (t_1, t_2)$. Dans ce cas, s'il existe $r_2 \in]t_2, y_2[$ alors, par solvabilité restreinte par rapport au premier composant, $(z_1, r_2) \prec (z_1, y_2) \sim (t_1, t_2) \prec (t_1, r2)$ implique qu'il existe $r_1 \in]z_1, t_1[$ tel que $(r_1, r_2) \sim (t_1, t_2)$. Mais alors $(z_1, z_2) \prec (r_1, r_2)$, $z_1 \prec_1 r_1$ et $z_2 \prec_2 r_2$. Donc, comme $Y \subset [z, t] = [z, r]$, on peut se ramener au cas du paragraphe précédent. S'il n'existe pas de r_2 dans $]t_2, y_2[$, alors par solvabilité restreinte, il n'existe pas non plus de r_1 dans $]z_1, t_1[$. Par conséquent, $([z, (t_1, y_2)], \{z, t, (z_1, y_2), (t_1, y_2)\}, \succsim)$ vérifie la condition de représentabilité de Debreu ainsi que les propriétés recherchées dans la première étape. Si on avait eu $(z_1, x_2) \prec (t_1, t_2)$, alors, on aurait eu $(z_1, t_2) \prec (z_1, x_2) \prec (t_1, t_2)$. Par solvabilité par rapport au premier composant, il existerait donc $x_1 \in]z_1, t_1[$ tel que $(x_1, t_2) \sim (t_1, t_2)$. Alors $([z, x], Y \cap [z, x], \succsim)$ vérifierait les propriétés recherchées.

Enfin, le dernier cas à envisager : si $t_2 \prec_2 z_2$. Dans ce cas, $(z_1, t_2) \prec (z_1, z_2) \prec (t_1, t_2)$. Par conséquent, d'apres la solvabilité restreinte par rapport au premier composant, il existe $x_1 \in]z_1, t_1[$ tel que $(z_1, z_2) \sim (x_1, t_2)$. Par conséquent, $(x_1, t_2) \prec (t_1, t_2)$ et $x_1 \prec_1 t_1$. On peut donc se ramener au paragraphe précédent.

Conclusion : dans tous les cas, s'il existe $z, t \in X$ tels que $z \prec t$ et tels qu'il existe un ensemble dénombrable $Y \subset [z, t]$ tel que $([z, t], Y, \succsim)$ vérifiant la condition de représentabilité de Debreu, alors il existe $x, y \in X$ tels que $x_1 \prec_1 y_1$, $x_2 \prec_2 y_2$ et tels que $(x_1, y_2) \sim (y_1, x_2)$, et il existe un ensemble dénombrable $Y' \subset [x, y]$ tels que $([x, y], Y', \succsim)$ vérifie la condition de représentabilité de Debreu.

Supposons maintenant que, $\forall x, y \in X$ tels que $x \prec y$, il n'existe aucun ensemble dénombrable $Y \subset [x, y]$ tel que $([x, y], Y, \succsim)$ vérifie la condition de représentabilité de Debreu. Dans ce cas, $\forall x, y \in X$ tels que $x \prec y$, $\exists\, z \in X$ tel que $x \prec z \prec y$; en effet, dans le cas contraire, il existerait $x, y \in X$ tels que $\{z \in X : x \prec z \prec y\} = \emptyset$, ce qui contredirait l'hypothèse car cela entraînerait que $([x, y], \{x, y\}, \succsim)$ vérifie la condition de représentabilité de Debreu. Puisque les deux composants de X sont essentiels, il existe donc $(y_1, y_2) \in X$ et $(t_1, t_2) \in X$ tels que $y_1 \prec_1 t_1$ et $y_2 \prec_2 t_2$. D'après le lemme 7.5, il existe $x^0, x^1 \in [x, y]$ tels que $x_1^0 \prec_1 x_1^1$, $x_2^0 \prec_2 x_2^1$ et $(x_1^0, x_2^1) \sim (x_1^1, x_2^0)$. Bien entendu,

$$\forall x, y \in [x_1^0, x_1^1] \times [x_2^0, x_2^1] \text{ tels que } x \prec y,\ \exists\, z \in [x_1^0, x_1^1] \times [x_2^0, x_2^1] \text{ tel que } x \prec z \prec y\ ;$$

en effet, on sait qu'il existe $z \in X$ tel que $x \prec z \prec y$. Or $(x_1^0, x_2^0) \precsim x, y \precsim (x_1^1, x_2^1)$; donc $(x_1^0, x_2^0) \precsim z \precsim (x_1^1, x_2^1)$. De plus, $(x_1^0, x_2^1) \sim (x_1^1, x_2^0)$, donc soit $(x_1^0, x_2^0) \precsim z \precsim (x_1^1, x_2^0)$, soit $(x_1^0, x_2^1) \precsim z \precsim (x_1^1, x_2^1)$, ce qui, d'après la solvabilité restreinte par rapport au deuxième ou au premier composant assure l'existence d'un élément indifférent à z dans $[x_1^0, x_1^1] \times [x_2^0, x_2^1]$.

Nous allons montrer par construction qu'il existe un ensemble dénombrable $Y \subset [x_1^0, x_1^1] \times [x_2^0, x_2^1]$ et tel que $([x_1^0, x_1^1] \times [x_2^0, x_2^1], Y, \succsim)$ vérifie la condition de représentabilité de Debreu. Pour cela, on remarque que

$$\forall z \in [x_1^0, x_1^1] \times [x_2^0, x_2^1] \text{ tel que } z \precsim (x_1^1, x_2^0),\ (x_1^0, x_2^0) \precsim z \precsim (x_1^1, x_2^0),$$

ce qui implique par solvabilité restreinte par rapport au premier composant qu'il existe $t_1 \in [x_1^0, x_1^1]$ tel que $z \sim (t_1, x_2^0)$; de même, $\forall z \in [x_1^0, x_1^1] \times [x_2^0, x_2^1]$ tel que $z \succsim (x_1^1, x_2^0) \sim (x_1^0, x_2^1)$, $(x_1^0, x_2^1) \precsim z \precsim (x_1^1, x_2^1)$, ce qui implique par solvabilité restreinte par rapport au premier composant qu'il existe $t_1 \in [x_1^0, x_1^1]$ tel que $z \sim (t_1, x_2^1)$. Autrement dit, pour montrer l'existence de Y, il suffit de montrer qu'il existe $Y_1 \subset [x_1^0, x_1^1]$ dénombrable et tel que $([x_1^0, x_1^1], Y_1, \succsim_1)$ vérifie la condition de représentabilité de Debreu.

Pour montrer l'existence de Y_1, il suffit de construire une suite d'ensembles $(Y_1^i)_{i \in \mathbb{N}}$, tous finis, telle que $Y_1 = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Y_1^i$ soit dense dans $[x_1^0, x_1^1]$; en effet, toute réunion dénombrable d'ensembles finis est dénombrable ; de plus, si Y_1 est dense dans $[x_1^0, x_1^1]$, on a bien :

$$\forall x_1, x_1' \in [x_1^0, x_1^1] \text{ tels que } x_1 \prec_1 x_1',\ \exists\, y_1, y_1' \in Y_1 \text{ tels que } x_1 \precsim_1 y_1 \prec_1 y_1' \precsim_1 x_1'.$$

Soit $Y_1^0 = \{x_1^0, x_1^1\}$. On sait qu'il existe $z \in [x_1^0, x_1^1] \times [x_2^0, x_2^1]$ tel que $(x_1^0, x_2^0) \prec z \prec (x_1^1, x_2^0)$. Donc, par solvabilité restreinte par rapport au premier composant, $\exists\, t_1^0 \in]x_1^0, x_1^1[$ tel que $z \sim (t_1^0, x_2^0)$. Or $(x_1^0, x_2^1) \sim (x_1^1, x_2^0)$; donc $(x_1^0, x_2^0) \prec z \prec (x_1^0, x_2^1)$. Par conséquent, par solvabilité restreinte par rapport au deuxième composant, $\exists\, t_2 \in]x_2^0, x_2^1[$ tel que $z \sim (x_1^0, t_2)$. Constituons maintenant sur $[x_1^0, x_1^1]$ la séquence standard (t_1^k) de base $\{x_2^0, t_2\}$ et la séquence standard (y_1^k) de base $\{t_2, x_2^1\}$ telle que $y_1^0 = x_1^0$. Soit Y_1^1 l'ensemble des points de la séquence standard de cardinal le plus élevé. D'après l'axiome archimédien, Y_1^1 est de cardinal fini. De plus, celui-ci est supérieur ou égal à 3 ; en effet, on sait déjà que (t_1^k) admet deux éléments : $t_1^{-1} = x_1^0$ et t_1^0. $x_1^0 = y_1^0$ appartient aussi à (y_1^k). Or (y_1^k) admet pour base $\{t_2, x_2^1\}$ et $x_2^0 \prec_2 t_2 \prec_2 x_2^1$, donc

$$(x_1^0, t_2) \prec (x_1^0, x_2^1) \sim (x_1^1, x_2^0) \prec (x_1^1, t_2).$$

Ainsi, d'après la solvabilité restreinte par rapport au premier composant, $\exists\, y_1^1 \in]x_1^0, x_1^1[$ tel que $(x_1^0, x_2^1) \sim (y_1^1, t_2)$. Deux cas peuvent alors se présenter :

- Si $t_1^0 \precsim_1 y_1^1$ alors
$$(x_1^0, x_2^0) \prec (t_1^0, t_2) \precsim (y_1^1, t_2) \sim (x_1^1, x_2^0),$$
ce qui implique, par solvabilité restreinte par rapport au deuxième composant, qu'il existe $t_1^1 \in]x_1^0, x_1^1]$ tel que $(t_1^0, t_2) \sim (t_1^1, x_2^0)$, et donc, (t_1^k) est de cardinal supérieur ou égal à 3.

- Si $t_1^0 \succ_1 y_1^1$ alors, d'après la condition de Thomsen,
$$\Big[(x_1^1, x_2^0) \sim (x_1^0, x_2^1) \ \text{ et } \ (x_1^0, t_2) \sim (t_1^0, x_2^0)\Big] \Rightarrow (t_1^0, x_2^1) \sim (x_1^1, t_2)\ ;$$
par conséquent,
$$(y_1^1, t_2) \prec (y_1^1, x_2^1) \prec (t_1^0, x_2^1) \sim (x_1^1, t_2),$$

ce qui implique, par solvabilité restreinte par rapport au premier composant, qu'il existe $y_1^2 \in]y_1^1, x_1^1[$ tel que $(y_1^2, t_2) \sim (y_1^1, x_2^1)$, et donc, (y_1^k) est de cardinal supérieur ou égal à 3.

On peut maintenant construire Y_1^2 à partir de Y_1^1. Si la séquence standard formant Y_1^1 est (t_1^k), alors on remarque que

$$t_1^{-1} \prec_1 t_1^0, \quad x_2^0 \prec_2 t_2, \quad (t_1^0, x_2^0) \sim (t_1^{-1}, t_2) \ ;$$

autrement dit, t_1^{-1} joue maintenant le rôle tenu précédemment par x_1^0, t_1^0 joue celui de x_1^1, et t_2 joue le rôle tenu précédemment par x_2^1. A l'instar des paragraphes précédents, on peut donc trouver $t_2' \in]x_2^0, t_2[$ et constituer deux séquences standards de bases respectives $\{x_2^0, t_2'\}$ et $\{t_2', t_2\}$. Les deux séquences vont varier, comme dans les paragraphes précédents entre x_1^0 et x_1^1. On définit alors Y_1^2 comme l'ensemble des éléments de la séquence standard de cardinal le plus élevé. Là encore, l'axiome archimédien garantit que Y_1^2 est de cardinal fini ; de plus, $\mathrm{Card}(Y_1^2) \geq \mathrm{Card}(Y_1^1) + 1$; en effet,

- Si la séquence standard constituant Y_1^2 est (z_1^k) de base $\{x_2^0, t_2'\}$, alors, grâce à une démonstration similaire à celle des paragraphes précédents, il existe $z_1^0, z_1^1, \ldots, z_1^p \in [t_1^{-1}, t_1^0]$, $p \geq 2$; puisque $z_1^p \precsim_1 t_1^0$ et $t_2' \prec_2 t_2$, on a $(z_1^p, t_2') \prec (t_1^0, t_2)$, d'où

$$(z_1^p, x_2^0) \prec (z_1^p, t_2') \prec (t_1^0, t_2) \sim (t_1^1, x_2^0),$$

ce qui implique, par solvabilité restreinte par rapport au premier composant, qu'il existe $z_1^{p+1} \in [t_1^0, t_1^1]$ tel que $(z_1^{p+1}, x_2^0) \sim (z_1^p, t_2')$. On sait que z_1^p, z_1^{p-1} et z_1^{p-2} appartiennent à $[t_1^{-1}, t_1^0]$ car, d'après les paragraphes ci-dessus, (z_1^k) a au moins trois éléments dans $[t_1^{-1}, t_1^0]$. Ainsi,

$$(t_1^{-1}, x_2^0) \prec (z_1^p, x_2^0) \prec (t_1^0, x_2^0) \sim (t_1^{-1}, t_2),$$

ce qui implique, par solvabilité restreinte par rapport au deuxième composant qu'il existe t_2'' tel que $(z_1^p, x_2^0) \sim (t_1^{-1}, t_2'')$. Mais alors

$$(z_2^{p-2}, x_2^0) \prec (z_1^p, x_2^0) \sim (t_1^{-1}, t_2'') \precsim (z_2^{p-2}, t_2''),$$

ce qui implique, par solvabilité restreinte par rapport au deuxième composant qu'il existe $t_2''' \in]x_2^0, t_2'']$ tel que $(z_1^{p-2}, t_2''') \sim (z_1^p, x_2^0)$. Par conséquent, on a aussi

$$(z_1^{p-2}, t_2''') \sim (z_1^p, x_2^0) \quad \text{et} \quad (z_1^{p-1}, x_2^0) \sim (z_2^{p-2}, t_2'),$$

ce qui implique d'après la condition de Thomsen que $(z_1^p, t_2') \sim (z_1^{p-1}, t_2''')$. Or $(z_1^p, t_2') \sim (z_1^{p+1}, x_2^0)$. On a donc :

$$(z_1^{p-1}, t_2''') \sim (z_1^{p+1}, x_2^0) \quad \text{et} \quad (z_1^p, x_2^0) \sim (z_1^{p-1}, t_2'),$$

ce qui implique d'après la condition de Thomsen que $(z_1^{p+1}, t_2') \sim (z_1^p, t_2''')$. Or $z_1^p \precsim_1 t_1^0$ et $t_2''' \prec t_2$; donc $(z_1^{p+1}, t_2') \prec (t_1^0, t_2)$. Par conséquent, puisque $z_1^{p+1} \succsim_1 t_1^0$ et $(t_1^0, t_2) \sim (t_1^1, x_2^0)$, on a

$$(t_1^0, x_2^0) \prec (z_1^{p+1}, t_2') \prec (t_1^1, x_2^0),$$

ce qui implique, par solvabilité restreinte qu'il existe $z_1^{p+2} \in]t_1^0, t_1^1[$ tel que $(z_1^{p+2}, x_2^0) \sim (z_1^{p+1}, t_2')$. Autrement dit, entre t_1^0 et t_1^1 la séquence standard (z_1^k) a au moins deux éléments. On peut recommencer ce processus pour montrer qu'en fait, $\forall i$, la séquence (z_1^k) possède toujours au moins deux éléments entre t_1^i et t_1^{i+1}. Puisqu'elle en possède 3 entre t_1^{-1} et t_1^0, il est clair que $\mathrm{Card}(Y_1^2) \geq \mathrm{Card}(Y_1^1) + 1$.

– Si la séquence standard constituant Y_1^2 est (z_1^k) de base $\{t_2', t_2\}$, alors, grâce à une démonstration similaire à celle des paragraphes précédents, il existe $z_1^0, z_1^1, \ldots, z_1^p \in [t_1^{-1}, t_1^0]$, $p \geq 2$; puisque $z_1^p \precsim_1 t_1^0$, on a

$$(z_1^p, t_2') \prec (z_1^p, t_2) \prec (t_1^0, t_2) \sim (t_1^1, x_2^0) \prec (t_1^1, t_2'),$$

ce qui implique, par solvabilité restreinte par rapport au premier composant, qu'il existe $z_1^{p+1} \in [t_1^0, t_1^1]$ tel que $(z_1^{p+1}, t_2) \sim (z_1^p, t_2')$. On sait que z_1^p, z_1^{p-1} et z_1^{p-2} appartiennent à $[t_1^{-1}, t_1^0]$ car, d'après les paragraphes ci-dessus, (z_1^k) a au moins trois éléments dans $[t_1^{-1}, t_1^0]$. Or

$$(z_1^p, x_2^0) \precsim (t_1^0, x_2^0) \sim (t_1^{-1}, t_2) \precsim (z_1^{p-2}, t_2) \prec (z_1^p, t_2) \ ;$$

donc, par solvabilité restreinte par rapport au deuxième composant, il existe $t_2''' \in [x_2^0, t_2[$ tel que $(z_1^p, t_2''') \sim (z_1^{p-2}, t_2)$. Or $(z_1^{p-2}, t_2) \sim (z_1^{p-1}, t_2')$, donc $(z_1^{p-1}, t_2') \sim (z_1^p, t_2''')$; de plus $(z_1^p, t_2) \sim (z_1^{p+1}, t_2')$; donc, d'après la condition de Thomsen, $(z_1^{p+1}, t_2''') \sim (z_1^{p-1}, t_2)$. De plus, puisque $t_2''' \in [x_2^0, t_2[$,

$$(z_1^p, t_2''') \prec (z_1^p, t_2) \precsim (t_1^0, t_2) \sim (t_1^1, x_2^0) \precsim (t_1^1, t_2'''),$$

ce qui implique, par solvabilité restreinte par rapport au premier composant, qu'il existe $z_1^{p+2} \in [t_1^0, t_1^1]$ tel que $(z_1^p, t_2) \sim (z_1^{p+2}, t_2''')$. D'après la condition de Thomsen,

$$(z_1^p, t_2) \sim (z_1^{p+2}, t_2''') \quad \text{et} \quad (z_1^{p+1}, t_2''') \sim (z_1^p, t_2')$$

impliquent que $(z_1^{p+2}, t_2') \sim (z_1^{p+1}, t_2)$; z_1^{p+2} est donc bien un élément de la séquence standard (z_1^k). On a donc construit deux éléments de la séquence standard entre t_1^0 et t_1^1. On peut donc conclure par récurrence, comme dans le cas précédent, que $\mathrm{Card}(Y_1^2) \geq \mathrm{Card}(Y_1^1) + 1$.

Dans le cas où la séquence standard formant Y_1^1 serait (y_1^k), une démonstration similaire s'appliquerait. En fait on pourrait même montrer que $\mathrm{Card}(Y_1^2) \geq 2\mathrm{Card}(Y_1^1) - 1$.

D'une manière générale, pour obtenir Y_1^{k+1} à partir de Y_1^k, on repartira toujours d'un rectangle délimité par deux points consécutifs de la séquence standard définissant Y_1^k, et on construira deux séquences standards allant de x_1^0 jusqu'à x_1^1. L'axiome archimédien garantit que celles-ci sont finies. De plus, en utilisant le même argument que celui ci-dessus, $\mathrm{Card}(Y_1^{k+1}) \geq \mathrm{Card}(Y_1^k) + 1 \ \forall k \in \mathbb{N}$.

Ainsi, $Y_1 = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Y_1^i$ est un ensemble dénombrable (puisque c'est une réunion dénombrable d'ensembles finis) contenant des séquences standard de cardinal aussi élevé que

l'on veut. Soient deux éléments $x_1, y_1 \in [x_1^0, x_1^1]$ tels que $x_1 \prec_1 y_1$. Supposons qu'il n'existe aucun $z_1, t_1 \in Y_1$ tels que

$$x_1 \precsim_1 z_1 \prec_1 t_1 \precsim_1 y_1,$$

c'est-à-dire que $([x_1^0, x_1^1], Y_1, \succsim_1)$ ne vérifie pas la condition de représentabilité de Debreu. Dans ce cas, considérons la séquence standard (z_1^i) admettant x_1, y_1 comme éléments consécutifs ; nous supposerons qu'elle admet pour base $\{x_2^0, z_2\}$. D'après l'axiome archimédien, cette séquence est de cardinal fini, disons m ; on supposera les indices variant de 0 à $m-1$. Posons $x_1 = z_1^p$ et $y_1 = z_1^{p+1}$. Or on sait qu'il existe dans Y_1 une séquence standard $(t_1^i)_{i=0}^{q-1}$, de base $\{x_2^0, t_2\}$ et de cardinal q supérieur ou égal à $m+2$. Soit r l'indice tel que

$$t_1^r \prec_1 z_1^p = x_1 \prec z_1^{p+1} = y_1 \prec_1 t_1^{r+1}.$$

On a alors

$$(t_1^r, z_2) \prec (z_1^p, z_2) \sim (z_1^{p+1}, x_2^0) \prec (t_1^{r+1}, x_2^0) \sim (t_1^r, t_2),$$

ce qui implique par transitivité que $z_2 \prec_2 t_2$. Supposons qu'il existe des indices i, j tels que

$$z_1^i \precsim_1 t_1^j \prec_1 t_1^{j+1} \precsim_1 z_1^{i+1}.$$

Alors, puisque (t_1^i) est une séquence standard de base $\{x_2^0, t_2\}$,

$$(z_1^i, z_2) \precsim (t_1^j, z_2) \prec (t_1^j, t_2) \sim (t_1^{j+1}, x_2^0) \precsim (z_1^{i+1}, x_2^0),$$

ce qui entraîne par transitivité que $(z_1^i, z_2) \prec (z_1^{i+1}, x_2^0)$, et donc que z_1^i et z_1^{i+1} n'appartiennent pas à une séquence standard de base $\{x_2^0, z_2\}$, d'où une contradiction avec les hypothèses. Autrement dit, $\forall i$, entre z_1^i et z_1^{i+1} il y a au plus un élément t_1^j. Par conséquent, puisqu'il n'y a aucun t_1^j entre z_1^p et z_1^{p+1}, il y a entre z_1^0 et z_1^m au plus $m-2$ éléments t_1^i.

Supposons maintenant qu'il y ait au moins deux éléments consécutifs t_1^i et t_1^{i+1} dans $[x_1^0, z_1^0]$. Si $(x_1^0, z_2) \precsim (z_1^0, x_2^0)$ alors, puisque $(z_1^0, x_2^0) \prec (z_1^0, z_2)$, par solvabilité restreinte par rapport au premier composant, il existerait $z_1^{-1} \in [x_1^0, z_1^0]$ tel que $(z_1^{-1}, z_2) \sim (z_1^0, x_2^0)$, et donc la suite (z_1^k) ne serait pas de cardinal m. Par conséquent,

$$(x_1^0, z_2) \succsim (z_1^0, x_2^0). \tag{7.8}$$

Puisqu'il existe t_1^i et t_1^{i+1} entre x_1^0 et z_1^0,

$$(x_1^0, z_2) \precsim (t_1^i, z_2) \prec (t_1^i, t_2) \sim (t_1^{i+1}, x_2^0) \precsim (z_1^0, x_2^0),$$

ce qui implique par transitivité que $(x_1^0, z_2) \prec (z_1^0, x_2^0)$, contredisant ainsi (7.8). Par conséquent, il peut y avoir au plus 1 élément t_1^i dans $[x_1^0, z_1^0]$. On montrerait de la même manière qu'il ne peut y avoir deux éléments t_1^i dans $[z_1^{m-1}, x_1^1]$. En conclusion, (t_1^i) et une séquence standard de cardinal inférieur ou égal à $m+1$, ce qui contredit notre hypothèse de départ qui était que (t_1^i) est de cardinal supérieur ou égal à $m+2$. En conclusion, il est impossible qu'il n'existe aucun élément Y_1 entre x_1 et y_1.

Par conséquent $([x_1^0, x_1^1], Y_1, \succsim_1)$ vérifie la condition de représentabilité de Debreu, et donc il existe un ensemble dénombrable $Y \subset [x_1^0, x_1^1] \times [x_2^0, x_2^1]$ tel que $([x_1^0, x_1^1] \times [x_2^0, x_2^1], Y, \succsim)$ vérifie la condition de représentabilité de Debreu. Ceci clôt la première étape. Il s'agit maintenant d'étendre cette propriété à la totalité de X.

2ème étape :

On a vu qu'il existe un ensemble dénombrable $Y_1 \subset [x_1^0, x_1^1]$ tel que $([x_1^0, x_1^1], Y_1, \succsim_1)$ vérifie la condition de représentabilité de Debreu. De plus, d'après leur définition, les éléments x_2^0 et x_2^1 sont des éléments consécutifs d'une séquence standard de base $\{x_1^0, x_1^1\}$. Supposons qu'il existe x_2^2 tel que $(x_1^0, x_2^2) \sim (x_1^1, x_2^1)$. Considérons alors l'ensemble $[x_1^0, x_1^1] \times [x_1^1, x_1^2]$.

$\forall a \in [x_1^0, x_1^1] \times [x_2^1, x_2^2]$ tel que $a \precsim (x_1^1, x_2^1)$, on a

$$(x_1^0, x_2^1) \precsim a \precsim (x_1^1, x_2^1),$$

ce qui implique par solvabilité restreinte par rapport au premier composant qu'il existe $y_1 \in [x_1^0, x_1^1]$ tel que $a \sim (y_1, x_2^1)$. De même, $\forall b \in [x_1^0, x_1^1] \times [x_2^1, x_2^2]$ tel que $b \succsim (x_1^1, x_2^1)$, on a

$$(x_1^0, x_2^2) \sim (x_1^1, x_2^1) \precsim b \precsim (x_1^1, x_2^2),$$

ce qui implique par solvabilité restreinte par rapport au premier composant qu'il existe $z_1 \in [x_1^0, x_1^1]$ tel que $b \sim (z_1, x_2^2)$. Par conséquent, puisque $([x_1^0, x_1^1], Y_1, \succsim_1)$ vérifie la condition de représentabilité de Debreu, il existe un ensemble Y' tel que $([x_1^0, x_1^1] \times [x_2^1, x_2^2], Y', \succsim)$ vérifie la condition de représentabilité de Debreu.

De même, s'il existe x_1^2 tel que $(x_1^2, x_2^0) \sim (x_1^1, x_2^1)$, considérons l'ensemble $[x_1^1, x_1^2] \times [x_2^0, x_2^1]$. $\forall a \in [x_1^1, x_1^2] \times [x_2^0, x_2^1]$ tel que $a \precsim (x_1^1, x_2^1)$, on a

$$(x_1^1, x_2^0) \precsim a \precsim (x_1^1, x_2^1),$$

ce qui implique par solvabilité restreinte par rapport au deuxième composant qu'il existe $y_2 \in [x_2^0, x_2^1]$ tel que $a \sim (x_1^1, y_2)$. Or

$$(x_1^0, x_2^1) \sim (x_1^1, x_2^0) \precsim (x_1^1, y_2) \precsim (x_1^1, x_2^1),$$

ce qui implique par solvabilité restreinte qu'il existe $y_1 \in [x_1^0, x_1^1]$ tel que $a \sim (y_1, x_2^1)$. De même, $\forall y_1 \in [x_1^0, x_1^1]$, $\exists\, x_1 \in [x_1^1, x_1^2]$ tel que $(y_1, x_2^1) \sim (x_1, x_2^0)$. Soit $Y_1' = \{x_1 \in [x_1^1, x_1^2]$ tels que $\exists\, y_1 \in Y_1$ tel que $(y_1, x_2^1) \sim (x_1, x_2^0)\}$. Y_1' étant en bijection avec Y_1, il est dénombrable. Maintenant, $\forall a, b \in [x_1^1, x_1^2] \times [x_2^0, x_2^1]$ tels que $a \prec b \precsim (x_1^1, x_2^1)$, $\exists\, z_1, t_1 \in Y_1$ tels que $a \precsim (z_1, x_2^1) \prec (t_1, x_2^1) \precsim b$. Donc $\forall a, b \in [x_1^1, x_1^2] \times [x_2^0, x_2^1]$ tels que $a \prec b \precsim (x_1^1, x_2^1)$, $\exists\, z_1, t_1 \in Y_1'$ tels que $a \precsim (z_1, x_2^0) \prec (t_1, x_2^0) \precsim b$. De même, $\forall b \in [x_1^1, x_1^2] \times [x_2^0, x_2^1]$ tel que $b \succsim (x_1^1, x_2^1)$, on a

$$(x_1^2, x_2^0) \precsim b \precsim (x_1^2, x_2^1),$$

ce qui implique par solvabilité restreinte par rapport au deuxième composant qu'il existe $z_2 \in [x_2^0, x_2^1]$ tel que $b \sim (x_1^2, z_2)$; et puisque

$$(x_1^1, x_2^1) \sim (x_1^2, x_2^0) \precsim (x_1^2, z_2) \precsim (x_1^2, x_2^2),$$

il existe $z_1 \in [x_1^1, x_1^2]$ tel que $b \sim (z_1, x_2^0)$. Donc, puisque $([x_1^1, x_1^2], Y_1', \succsim_1)$ vérifie la condition de représentabilité de Debreu, il existe un ensemble Y' tel que $([x_1^1, x_1^2] \times [x_2^0, x_2^1], Y', \succsim)$ vérifie la condition de représentabilité de Debreu.

On peut réutiliser le processus décrit ci-dessus pour déduire que pour tout ensemble $[x_1^i, x_1^{i+1}] \times [x_2^j, x_2^{j+1}]$ il existe un ensemble dénombrable $Y_{[i,j]}$ tel que $([x_1^i, x_1^{i+1}] \times [x_2^j, x_2^{j+1}], Y_{[i,j]}, \succsim)$ vérifie la condition de représentabilité de Debreu. De plus, le processus de construction garantit que tous les $Y_{[i,j]}$ sont idempotents à l'ensemble Y trouvé dans la première étape, c'est-à-dire qu'il existe une bijection entre Y et $Y_{[i,j]}$. Il se peut que les séquences standards (x_1^i) et (x_2^j) soient bornées ; dans ce cas, par abus de notation, on va encore désigner les ensembles dénombrables correspondants par $Y_{[i,j]}$. Il est assez aisé de voir que, dans ce cas, il existe, non plus une bijection, mais une surjection de Y dans $Y_{[i,j]}$. En fait, dans tous les cas, quel que soient i, j, il existe une surjection de Y vers $Y_{[i,j]}$. On peut donc construire une fonction

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times Y \to X$$
$$f(i, j, x) = y \in Y_{[i,j]}$$

Considérons maintenant l'ensemble $T = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times Y$. Etant un produit fini d'ensembles dénombrables, T est dénombrable. Or f est une surjection de T dans $\bigcup_{i,j} Y_{[i,j]}$; il est donc clair que $\bigcup_{i,j} Y_{[i,j]}$ est dénombrable. Il reste tout de même encore un petit problème à régler avant de conclure que $(X, \bigcup_{i,j} Y_{[i,j]}, \succsim)$ vérifie la condition de représentabilité de Debreu : se peut-il que le processus de construction n'ait pas pris en compte certaines régions de X ? En termes plus mathématiques, se peut-il qu'il existe par exemple $z \in X$ tel que $\forall i, j,\ (x_1^i, x_2^j) \prec z$? L'axiome archimédien nous dit qu'un tel cas est impossible; de même, il est impossible qu'il existe $z \in X$ tel que $\forall i, j,\ (x_1^i, x_2^j) \succ z$. Ainsi, on peut réellement conclure que $(X, \bigcup_{i,j} Y_{[i,j]}, \succsim)$ vérifie la condition de représentabilité de Debreu. $\succsim$ est donc représentable par une fonction d'utilité sur X. ♦

Démonstration du théorème 7.2 : D'après les théorèmes classiques d'existence d'utilités additives (cf. Krantz, Luce, Suppes, et Tversky (1971)), on sait que, $\forall i$, il existe des utilités additives uniques à une transformation affine strictement positives près sur les $X_1 \times [x_2^i, y_2^i]$. Ainsi, soient $f_1 + f_2$ et $g_1 + g_2$ les fonctions d'utilité additives représentant $\succsim$ respectivement sur $X_1 \times [x_2^i, y_2^i]$ et $X_1 \times [x_2^{i+1}, y_2^{i+1}]$. Puisque f_1 et g_1 représentent $\succsim_1$ sur X_1, g_1 est une transformée strictement croissante de f_1 et donc, pour toute constante α, il existe une fonction strictement croissante φ telle que

$$\varphi \circ (g_1(x_1) + g_2(x_2^{i+1})) = f_1(x_1) + f_2(x_2^i) + \alpha,\ \forall x_1 \in X_1. \tag{7.9}$$

Première étape : $\varphi \circ g$ est additive sur $X_1 \times [x_2^{i+1}, y_2^{i+1}]$:

Soit α une constante arbitraire. Montrons que $\varphi \circ g$ est une utilité additive sur $X_1 \times [x_2^{i+1}, y_2^{i+1}]$. Le fait que ce soit une utilité est évident puisque g est une utilité et φ une fonction strictement croissante. Le premier composant est essentiel, donc il existe $x_1 \prec_1 x_1'$. Si $(x_1, y_2^{i+1}) \succsim (x_1', x_2^{i+1})$, alors par solvabilité restreinte, il existe $x_2 \in [x_2^{i+1}, y_2^{i+1}]$ tel que $(x_1, x_2) \sim (x_1', x_2^{i+1})$; sinon, $(x_1, y_2^{i+1}) \prec (x_1', x_2^{i+1}) \prec (x_1', y_2^{i+1})$, auquel cas il existe $z_1 \in X_1$ tel que $(z_1, y_2^{i+1}) \sim (x_1', x_2^{i+1})$. Dans les deux cas, on a montré qu'il existe $(y_1, y_2) \in]x_1, x_1'[\times [x_2^{i+1}, y_2^{i+1}]$ tel que $(y_1, y_2) \sim (x_1', x_2^{i+1})$ et $y_1 \prec_1 x_1'$.

S'il n'existe pas $x_2 \in [x_2^i, y_2^i]$ tel que $(y_1, x_2) \sim (x_1', x_2^i)$, alors, d'après la solvabilité restreinte par rapport au deuxième composant sur $[x_2^i, y_2^i]$, $(x_1', x_2^i) \succ (y_1, y_2^i)$, mais

dans ce cas, par solvabilité restreinte par rapport au premier composant, il existe z_1 tel que $y_1 \prec_1 z_1 \prec_1 x'_1$ et $(x'_1, x^i_2) \sim (z_1, y^i_2)$. Dans tous les cas, on a montré qu'il existe $(y'_1, y'_2) \in X_1 \times [x^i_2, y^i_2]$ tel que $(y'_1, y'_2) \sim (x'_1, x^i_2)$ et $y_1 \precsim_1 y'_1 \prec_1 x'_1$. Si $\mathrm{Non}(y'_1 \sim y_1)$, par solvabilité restreinte par rapport au deuxième composant sur $[x^{i+1}_2, y^{i+1}_2]$, il existe y''_2 tel que $(y'_1, y''_2) \sim (x'_1, x^{i+1}_2)$.

En résumé, dans les deux paragraphes précédents, on a montré qu'il existe $x_1, y_1 \in X_1$, $x_2 \in [x^i_2, y^i_2]$ et $y_2 \in [x^{i+1}_2, y^{i+1}_2]$ tels que

$$\begin{array}{lclcll}
(y_1, x_2) & \sim & (x_1, x^i_2) & \text{et} & f_1(y_1) + f_2(x_2) & = f_1(x_1) + f_2(x^i_2), \\
(y_1, y_2) & \sim & (x_1, x^{i+1}_2) & \text{et} & \varphi \circ (g_1(y_1) + g_2(y_2)) & = \varphi \circ (g_1(x_1) + g_2(x^{i+1}_2)) \\
 & & & & & = f_1(x_1) + f_2(x^i_2) + \alpha, \\
 & & & & & = f_1(y_1) + f_2(x_2) + \alpha.
\end{array}$$

Maintenant, d'après la condition de Reidemeister, $\forall x'_1, y'_1$ tels que $(y'_1, x_2) \sim (x'_1, x^i_2)$, on a

$$\begin{aligned}
(y'_1, y_2) \sim (x'_1, x^{i+1}_2) \text{ et } \varphi \circ (g_1(y'_1) + g_2(y_2)) &= \varphi \circ (g_1(x'_1) + g_2(x^{i+1}_2)) \\
&= f_1(x'_1) + f_2(x^i_2) + \alpha \\
&= f_1(y'_1) + f_2(x_2) + \alpha.
\end{aligned}$$

Autrement dit, grâce à la condition Reidemeister, φ est telle que $\varphi \circ g$ est additive sur l'ensemble

$$\{(y_1, y_2) : y_1 \in X_1,\ y_2 \in [x^{i+1}_2, y^{i+1}_2], \text{ tels que } \exists\, x_1 \in X_1 \text{ tel que } (y_1, y_2) \sim (x_1, x^{i+1}_2)\}.$$

Il est facile d'étendre cette propriété à tout $X_1 \times [x^{i+1}_2, y^{i+1}_2]$; en effet, à partir du moment où (y_1, y_2) n'appartient pas à l'ensemble ci-dessus, il n'existe aucun x_1 tel que $(y_1, y_2) \sim (x_1, x^{i+1}_2)$; mais alors, en termes de fonctions d'utilité, cela veut dire que

$$g_1(y_1) + g_2(y_2) \geq \sup_{x_1 \in X_1} \{g_1(x_1) + g_2(x^{i+1}_2)\},$$

et donc φ n'a pas encore été définie sur cette région de $\mathbb{R}$ par (7.9). Ceci dit, il n'est pas difficile de voir comment étendre φ ; il suffit de redéfinir φ de la manière suivante : pour x_2 tel que $(x'_1, x_2) \sim (x''_1, x^{i+1}_2)$,

$$\varphi \circ (g_1(x_1) + g_2(x_2)) = f_1(x_1) + f_2(x^i_2) + \beta,\ \forall x_1 \in X_1,$$

où $\beta = \alpha + f_1(x''_1) - f_1(x'_1)$. Il est aisé de voir que cette nouvelle définition de φ est compatible avec l'ancienne et l'étend de manière à ce que, sur l'ensemble où elle est maintenant définie, $\varphi \circ g$ soit encore additive. On peut alors constituer la séquence standard croissante ayant pour éléments consécutifs x^{i+1}_2 et x_2 et recommencer le processus sur tous ses éléments. L'axiome archimédien garantit que le processus décrit ci-dessus forme une utilité additive sur $X_1 \times [x^{i+1}_2, y^{i+1}_2]$. On voit ainsi qu'on a réussi à étendre la définition de $f_1 + f_2$ pour que $f_1 + f_2$ soit une utilité additive sur $X_1 \times [x^i_2, y^i_2]$ et sur $X_1 \times [x^{i+1}_2, y^{i+1}_2]$. Il reste maintenant à montrer que c'est aussi une utilité sur $X_1 \times \Big([x^i_2, y^i_2] \cup [x^{i+1}_2, y^{i+1}_2]\Big)$.

f est une utilité sur $X_1 \times \left([x_2^i, y_2^i] \cup [x_2^{i+1}, y_2^{i+1}]\right)$:

Par hypothèse, $\nexists\, x_1, y_1 \in X_1$ tels que $(x_1, x_2^{i+1}) \sim (y_1, y_2^i)$:
Dans ce cas, puisque $(x_1, y_2^i) \prec (x_1, x_2^{i+1})$, et d'après la solvabilité restreinte,

$$\forall x_1, y_1 \in X_1,\ (x_1, y_2^i) \prec (y_1, x_2^{i+1}).$$

Supposons que f_1 n'admette pas de borne supérieure. Dans ce cas, $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists x_1 \in X_1$ tel que $f_1(x_1) \geq y$. Soit x_1^0 un élément arbitraire de X_1. Puisque f n'admet pas de borne supérieure, on sait qu'il existe $x_1 \in X_1$ tel que

$$f_1(x_1) + f_2(x_2^i) \geq f_1(x_1^0) + f_2(y_2^i).$$

Or on sait, d'après l'axiome d'indépendance que

$$f_1(x_1^0) + f_2(y_2^i) > f_1(x_1^0) + f_2(x_2^i).$$

Donc, d'après la solvabilité restreinte par rapport au premier composant, il existe $x_1^1 \in X_1$ tel que

$$f_1(x_1^1) + f_2(x_2^i) = f_1(x_1^0) + f_2(y_2^i).$$

Remarquons que, puisque f est une utilité sur $X_1 \times [x_2^i, y_2^i]$, l'égalité ci-dessus est équivalente à $(x_1^1, x_2^i) \sim (x_1^0, y_2^i)$. On peut recommencer ce processus et trouver $x_1^2 \in X_1$ tel que

$$f_1(x_1^2) + f_2(x_2^i) = f_1(x_1^1) + f_2(y_2^i).$$

On peut alors réitérer le processus et créer une séquence $(x_1^k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $(x_1^{k+1}, x_2^i) \sim (x_1^k, y_2^i)$. On a donc créé une séquence standard croissante et infinie. Or, par hypothèse, cette séquence est bornée par (x_1^0, x_2^{i+1}), d'où une contradiction avec l'axiome archimédien. Par conséquent, f_1 admet forcément une borne supérieure : $f_{\max}$, c'est-à-dire

$$\forall x_1 \in X_1,\ f_1(x_1) \leq f_{\max}.$$

De même, si f n'admet pas de borne inférieure, on peut créer une séquence standard décroissante infinie de base $\{x_2^{i+1}, x_2^i\}$. Autrement dit,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ (x_1^{k+1}, x_2^i) \sim (x_1^k, x_2^{i+1}), \text{ ou encore } f_1(x_1^{k+1}) + f_2(x_2^i) = f_1(x_1^k) + f_2(x_2^{i+1}).$$

ce qui entraîne qu'il existe une séquence standard (x_1^k) décroissante, infinie et bornée : $(x_1^0, y_2^i) \prec (x_1^k, x_2^{i+1})$, ce qui contredit l'axiome archimédien. Par conséquent, f doit bien admettre une borne inférieure $f_{\min}$.

Maintenant, il est clair que les deux inégalités suivantes sont des conditions nécessaires et suffisantes pour que f représente $\succsim$ sur $X_1 \times \left([x_2^i, y_2^i] \cup [x_2^{i+1}, y_2^{i+1}]\right)$:

$$\begin{array}{ll} f_2(x_2^{i+1}) > f_2(y_2^i) + f_{\max} - f_{\min} & \text{si } f_{\min} \text{ et } f_{\max} \text{ sont atteints.} \\ f_2(x_2^{i+1}) \geq f_2(y_2^i) + f_{\max} - f_{\min} & \text{sinon.} \end{array} \tag{7.10}$$

Enfin, pour finir, puisque f_2 est forcément bornée sur tous les ensembles $[x_2^i, y_2^i]$, par récurrence, on obtient bien une utilité additive sur X. L'unicité de cette fonction provient directement de (7.10) et du fait que les utilités additives sont cardinales sur les ensembles $X_1 \times [x_2^i, y_2^i]$. ♦

7.5 Résumé

Dans ce chapitre, nous avons étudié des théorèmes d'existence d'utilités additives sur des produits cartésiens de dimension 2 ayant des hypothèses de solvabilité plus ou moins fortes. D'une manière générale, il est illusoire de vouloir trouver une axiomatique testable assurant l'existence de telles fonctions lorsque moins de deux composants vérifient la solvabilité. Cependant, cette axiomatique existe dans certains cas particuliers, dont celui ci-dessous :
Si

- $X = X_1 \times X_2$, où $X_2 = \{x_2^i, i \in N\}$ et N est un ensemble d'entiers consécutifs, fini ou infini mais de cardinal supérieur ou égal à 2, et où, $\forall i, i+1 \in N$, $x_2^{i+1} \succ_2 x_2^i$,
- si $\mathrm{Card}(N) \geq 3$ alors $\forall x_1, y_1 \in X_1$, $(x_1, x_2^i) \sim (y_1, x_2^{i+1}) \Leftrightarrow (x_1, x_2^{i+1}) \sim (y_1, x_2^{i+2})$,
- X_1 vérifie la solvabilité restreinte,
- tous les composants sont essentiels et vérifient l'axiome archimédien,
- $\succsim$ est représentable par une fonction d'utilité,

alors

- $\succsim$ est représentable par une fonction d'utilité additive ;
- l'unicité de cette fonction se situe entre une propriété ordinale et une propriété cardinale.

Lorsque deux composants vérifient la solvabilité, on peut montrer sans utiliser ni algèbre, ni topologie, que :
Si

- $X = X_1 \times X_2$ est muni d'un préordre large total $\succsim$,
- $\succsim$ vérifie l'indépendance et la condition de Thomsen,
- les 2 composants de X vérifient la solvabilité restreinte et l'axiome archimédien,

alors

- $\succsim$ est représentable par une fonction d'utilité additive ;
- cette fonction est cardinale.

En fait, on peut généraliser ces théorèmes car en rajoutant la condition de Reidemeister, une sous partie de l'axiome d'élimination d'ordre 3, on peut obtenir des théorèmes d'existence sur des produits cartésiens (et, pourquoi pas, sur des sous-ensembles de produits cartésiens ?) ayant des "trous", c'est-à-dire des ruptures de solvabilité sur certaines régions.

7.6 Bibliographie

DEBREU, G. (1954) : "Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function," in *Decision Pocesses*, ed. by R. Thrall, C. Coombs, and R. Davis, pp. 159–165. Wiley, New York.

——— (1964) : "Continuity Properties of Paretian Utility," *International Economic Review*, 5(3), 285–293.

FISHBURN, P. C. (1970) : *Utility Theory for Decision Making*. Wiley, NewYork.

——— (1981) : "Uniqueness Properties in Finite-Continuous Additive Measurement," *Mathematical Social Sciences*, 1, 145–153.

KRANTZ, D. H., R. D. LUCE, P. SUPPES, ET A. TVERSKY (1971) : *Foundations of Measurement (Additive and Polynomial Representations)*, vol. 1. Academic Press, New York.

Chapitre 8

Préférences en dimensions supérieures ou égales à 3

J'espère que vous n'avez pas pris ma théorie pour de l'argent comptant. Je ne suis pas en train de mettre l'univers en ordre.

Umberto Eco

Ce chapitre se propose d'étudier des ensembles X de dimensions supérieures à 3. Nous avons vu en détail dans les chapitres précédents qu'afin d'éviter de tester tous les axiomes d'élimination, on est obligé de poser des hypothèses structurelles sur X. Dans le chapitre 3, on avait ainsi supposé que $\succsim$ vérifiait la solvabilité (restreinte ou non) par rapport à tous les composants de X ; cette supposition est toutefois particulièrement restrictive ; considérons en effet l'exemple suivant :

Exemple 8.1 Ayant eu un accident dernièrement, monsieur Guy Nipigue doit remplacer son ancienne voiture, désormais impropre à la circulation, par un véhicule en état de marche. Après une brève introspection, il décide de fonder son choix sur les critères suivants :

- le prix du véhicule,
- sa qualité (performances, sécurité (freins ABS,...)),
- son confort,
- sa marque,
- sa couleur,
- le fait qu'il soit neuf ou d'occasion.

Le prix peut assurément être assimilé à une variable continue ; il en est de même pour la qualité et le confort (que l'on peut évaluer sur une échelle continue), ainsi

que de la couleur (son spectre est aussi continu). Cependant, il semble difficile d'assimiler la marque, ou le fait que la voiture soit neuve ou d'occasion, à une variable continue ; cela n'aurait absolument aucun sens. Il semblerait plus logique que ces variables soient discrètes, voire même finies. Et dans ce cas, la solvabilité, même restreinte, ne peut être vérifiée par tous les composants. ♦

Il semble donc que les limites imposées par la solvabilité restreinte et, plus encore, par la solvabilité non restreinte, soient particulièrement drastiques et empêchent l'utilisation des utilités additives, et ce même dans des cas très simples comme celui décrit ci-dessus. C'est pourquoi, dans ce chapitre, nous allons, si vous le voulez bien, essayer d'affaiblir les hypothèses de solvabilité (restreinte et non restreinte) en ne les supposant vérifiées que par deux, voire trois composants.

Le chapitre est séparé en 5 sections. Dans la première, l'étude porte sur des produits cartésiens de dimensions quelconques dont au moins deux composants vérifient la solvabilité non restreinte. On montre alors que la représentabilité additive sur le produit cartésien des composants solvables s'étend à la totalité de X. A l'instar des théorèmes d'existence classiques (cf. chapitres 3 et 4), la représentation ainsi créée est unique à une transformation affine strictement positive près.

Dans la deuxième section, nous nous penchons sur le cas de produits cartésiens dont au moins deux composants vérifient la solvabilité restreinte. Là, les résultats sont moins idylliques. En effet, lorsque X possède 3 composants, l'obtention de théorèmes d'existence d'utilités additives nécessite, outre les axiomes nécessaires classiques (indépendance, condition de Thomsen, axiome archimédien), un axiome, dit "de conservation d'échelle", qui est en fait une sous-partie de (C_2). Pour dériver des théorèmes sur des produits cartésiens de dimensions supérieures à 3, on verra que l'on doit encore rajouter quelques conditions. Quant à l'unicité des utilités, elle est assez surprenante puisque, contrairement aux utilités additives des théorèmes classiques, elle n'est plus à une transformation affine strictement positive près. Pour être exact, l'unicité se situe entre une propriété ordinale et une propriété cardinale.

Les troisième, quatrième et cinquième section sont respectivement réservées aux démonstrations, à un résumé et à la bibliographie du chapitre.

8.1 Solvabilité non restreinte

Dans toute cette section, on se place dans le cadre de produits cartésiens à n composants ($n \geq 3$) dont au moins deux vérifient la solvabilité non restreinte. Sans perte de généralité et dans le but d'alléger les notations, on suppose que les composants X_i sont classés de telle sorte que ceux vérifiant la solvabilité non restreinte sont les premiers.

Le but que nous recherchons ici est de montrer que, pour structurer l'espace X afin de ne plus utiliser les axiomes d'élimination d'ordre supérieur à 2, il n'est nullement besoin de requérir la propriété de solvabilité non restreinte sur tous les composants. En effet, d'après Gonzales (1996a) et Gonzales (1997), le produit cartésien engendré par deux composants solvables est suffisamment riche pour que la représentabilité additive s'étende sur tout produit cartésien le contenant. Cette propriété est énoncée d'une

manière un peu plus rigoureuse dans le théorème 8.1.

Théorème 8.1 *Soient X un produit cartésien de dimension n et $\succsim$ un préordre large total sur X vérifiant l'indépendance (cf. page 23). Supposons que les deux premiers composants X_i vérifient la solvabilité non restreinte (cf. page 41) et que $\succsim_{12}$ soit représentable par une fonction d'utilité additive. Alors $\succsim$ admet aussi une représentation additive. De plus, celle-ci est unique à une transformation affine strictement positive près.*

Ceci suggère le principe de construction d'une telle utilité :

- d'abord, fixer les composants non solvables à une valeur arbitraire x_i^0, et considérer le sous-ensemble de X : $Y = X_1 \times X_2 \times \prod_{i=3}^n \{x_i^0\}$;
- construire une fonction d'utilité additive sur Y — c'est une construction classique puisque, dans cet espace, tous les composants sont solvables ;
- enfin, étendre la construction en restaurant, un par un, les domaines initiaux des composants non solvables, c'est-à-dire étendre la fonction d'utilité sur $X_1 \times X_2 \times X_3 \times \prod_{i=4}^n \{x_i^0\}$, puis sur $X_1 \times X_2 \times X_3 \times X_4 \times \prod_{i=5}^n \{x_i^0\}$, et ainsi de suite.

Les deux premières étapes sont relativement classiques et ne posent donc pas de problème majeur. La dernière quant à elle mérite qu'on lui accorde quelques instants et la figure 8.1. Considérons que l'on a construit une fonction d'utilité additive f sur $X_1 \times X_2$.

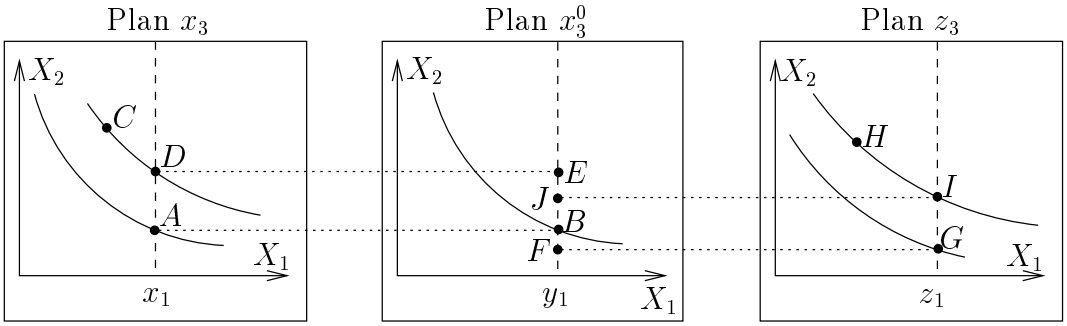


FIG. 8.1: Extension de la fonction d'utilité représentant $\succsim_{12}$.

Il est clair que la fonction $g : X_1 \times X_2 \times \{x_3^0\} \to \mathbb{R}$ telle que $g(x_1, x_2, x_3^0) = f(x_1, x_2)$ est une fonction d'utilité additive sur $X_1 \times X_2 \times \{x_3^0\}$ (ensemble qui correspond au carré au centre de la figure 8.1). Choisissons maintenant un élément quelconque x_3 de X_3. Si l'on définit $g(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2, x_3^0) +$ constante, d'après l'indépendance, g est additive et représente $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times \{x_3^0\}$ et sur $X_1 \times X_2 \times \{x_3\}$. Le problème est de savoir si g représente aussi $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times \{x_3^0, x_3\}$. Or, par solvabilité non restreinte par rapport au premier composant, on sait qu'il existe $y_1 \in X_1$ tel que $A = (x_1, x_2, x_3) \sim B = (y_1, x_2, x_3^0)$. La constante à rajouter est donc maintenant imposée :

$$g(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2, x_3^0) + \Big(g(y_1, x_2, x_3^0) - g(x_1, x_2, x_3^0)\Big) \ ;$$

mais, d'après l'axiome d'indépendance, tout élément sur la droite verticale d'abscisse x_1, par exemple $D = (x_1, y_2, x_3)$, est indifférent à l'élément intersection de la droite horizontale issue de ce point et de la droite verticale d'abscisse y_1, ici $E = (y_1, y_2, x_3^0)$. Puisque g est additive sur $X_1 \times X_2 \times \{x_3^0\}$ et sur $X_1 \times X_2 \times \{x_3\}$, on a

$$\begin{aligned} g(x_1, y_2, x_3) &= g_1(x_1) + g_2(y_2) + g_3(x_3) \\ &= g(x_1, x_2, x_3) + g_2(y_2) - g_2(x_2) \\ &= g(y_1, x_2, x_3^0) + g_2(y_2) - g_2(x_2) \\ &= g(y_1, y_2, x_3^0). \end{aligned}$$

Maintenant, par solvabilité non restreinte par rapport au deuxième composant, tout point du plan x_3, disons par exemple C, est indifférent à un point de la droite verticale d'abscisse x_1 ; ainsi $C \sim D$, et puisque g représente $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times \{x_3\}$, on a $g(C) = g(D)$. D'après ce qui précède on a aussi $D \sim E$ et $g(D) = g(E)$; par conséquent $C \sim E$ et $g(C) = g(E)$.

On peut recommencer la même opération avec le plan z_3 : tout point de la droite verticale d'abscisse y_1, par exemple F, est indifférent à un point d'abscisse z_1 et de même ordonnée, ici G. Pour tout point H du plan z_3, il existe alors un point I qui lui est indifférent sur la droite verticale d'abscisse z_1, et $g(H) = g(I)$. Or par un procédé similaire au paragraphe précédent, $I \sim J$ et $g(I) = g(J)$. Par conséquent, $H \sim J$ et $g(H) = g(J)$.

Lorsque l'on veut comparer deux points quelconques, C et H, de deux plans quelconques, x_3 et z_3, on sait trouver deux points E et J du même plan x_3^0 qui leur sont indifférents et tels que $g(C) = g(E)$ et $g(H) = g(J)$. Mais comme g représente $\succsim$ dans le plan x_3^0, $g(E) \geq g(J) \Leftrightarrow E \succsim J$ et $g(E) \leq g(J) \Leftrightarrow E \precsim J$. autrement dit,

$$g(C) \geq g(H) \Leftrightarrow C \succsim H \quad \text{et} \quad g(C) \leq g(H) \Leftrightarrow C \precsim H.$$

Par conséquent, g représente bien $X_1 \times X_2 \times \{x_3, x_3^0\}$. x_3 et z_3 étant arbitraires, en utilisant le même procédé avec tous les autres plans, on voit bien qu'on obtient une fonction additive et représentant $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times X_3$. En fait, le procédé reste encore valable lorsque l'on travaille sur des espaces de dimensions supérieures à 3.

Le théorème 8.1 généralise les théorèmes classiques dans la mesure où il affaiblit l'hypothèse très forte selon laquelle tous les composants vérifient la solvabilité non restreinte. Il est particulièrement intéressant pour dériver des utilités additives lorsque certains composants du produit cartésien appartiennent à des ensembles finis ne pouvant être étendus à des intervalles.

Toutefois, sous sa forme actuelle, le théorème 8.1 n'est pas très pratique à utiliser car il suppose l'existence d'une utilité additive représentant $\succsim_{12}$. Aussi, nous allons le "raccrocher" aux théorèmes de la partie précédente. Plus spécifiquement, nous allons inclure des conditions sous lesquelles nous connaissons l'existence d'une utilité additivement séparable représentant $\succsim_{12}$. Ceci nous amène à formuler les corollaires 8.1 et 8.2.

Corollaire 8.1 *Soient X un produit cartésien de dimension n et $\succsim$ un préordre large total vérifiant l'indépendance (cf. page 23). Supposons que les deux premiers composants de X vérifient la solvabilité non restreinte (cf. page 35), l'axiome archimédien (cf. page 38) ainsi que la condition de Thomsen (cf. page 24). Alors, $\succsim$ est représentable par une fonction d'utilité additivement séparable. De plus, cette représentation est unique à une transformation affine strictement positive près.*

D'un point de vue opérationnel, la condition de Thomsen est beaucoup plus difficile à tester que l'axiome d'indépendance. Or, dans les théorèmes classiques, pour des produits cartésiens de dimensions supérieures ou égales à 3, la condition de Thomsen est engendrée par l'indépendance et la solvabilité non restreinte. Nous pouvons donc en déduire le corollaire suivant :

Corollaire 8.2 *Soient X un produit cartésien de dimension n et $\succsim$ un préordre large total vérifiant l'indépendance (cf. page 23). Supposons que les trois premiers composants de X vérifient la solvabilité non restreinte (cf. page 35) et l'axiome archimédien (cf. page 38). Alors, $\succsim$ est représentable par une fonction d'utilité additivement séparable. De plus, cette représentation est unique à une transformation affine strictement positive près.*

Notons que dans le corollaire 8.1, la condition de Thomsen ne peut être déduite des autres axiomes, comme nous l'avions vu dans la section 6.3.

8.2 Solvabilité restreinte

La section précédente, bien que généralisant certains théorèmes d'existence, a toutefois un inconvénient majeur : toutes les fonctions d'utilité additives définies sur des espaces ayant des composants vérifiant la solvabilité non restreinte varient de $-\infty$ à $+\infty$ (sauf bien sûr le cas trivial où aucun composant n'est essentiel, mais, dans un tel cas la Théorie de la Décision n'est pas utile à proprement parler). Cette propriété est évidemment très restrictive ; pour pallier ce manque de souplesse, nous allons nous intéresser dans cette section à des produits cartésiens de dimensions quelconques dont au moins 2 composants vérifient la solvabilité restreinte. Dans un premier temps, nous allons étudier un certain nombre d'axiomes qui nous permettront, dans la deuxième sous-section, d'en déduire des théorèmes d'existence d'utilités additives sur des produits cartésiens dans lesquels certains composants ne vérifient pas la solvabilité restreinte. Cette section s'inspire surtout de Gonzales (1996b).

8.2.1 Axiomatique

L'axiomatique développée ici est de deux types : d'une part, on va enrichir l'indépendance et la condition de Thomsen grâce à l'axiome de conservation d'échelle, une sous-partie de l'axiome d'élimination du second ordre, et l'on va modifier l'axiome archimédien pour prendre en compte les composants non solvables ; autrement dit, on va adapter les axiomes nécessaires à l'existence d'utilités additives. D'autre part, on va

affaiblir l'hypothèse structurelle de solvabilité restreinte en introduisant les i-liens. Cet affaiblissement nous permettra d'étendre le champ d'application des utilités additives, tout en conservant un minimum de structure.

i-liens

La solvabilité restreinte et l'essentialité par rapport à deux composants de X permet indubitablement de structurer l'espace X ; mais cette structure est-elle suffisamment forte pour garantir que l'axiome d'élimination globale, (C), est induit par des axiomes d'élimination d'ordre faible (rappelons que (C) est un axiome nécessaire à l'existence de toute fonction d'utilité additive) ? La réponse à cette question est fournie par l'exemple suivant, qui est une variation de l'exemple 6.6, page 89.

Exemple 8.2 Soit m un nombre impair supérieur ou égal à 3. Considérons la relation de préférence $\succsim$ sur $X = [0, \frac{1}{8}] \times [0, \frac{1}{8}] \times \{0, 1, \ldots, m^2\} \times \{0, 2(m-1), 2m\}$, représentable par la fonction d'utilité suivante :

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & \text{si } x_4 < 2m, \\ x_1 + x_2 + x_3 + m^2 + 2m - 2.5 & \text{si } x_4 = 2m \text{ et } x_3 \text{ est pair}, \\ x_1 + x_2 + x_3 + m^2 + 2m - 3 & \text{si } x_4 = 2m \text{ et } x_3 \text{ est impair}. \end{cases}$$

La solvabilité restreinte et l'essentialité par rapport aux deux premiers composants sont vérifiées. L'indépendance et la condition de Thomsen par rapport aux deux premiers composants sont aussi vérifiées car $\succsim_{12}$ est visiblement représentable par la fonction additive $x_1 + x_2$. Plus généralement, on peut montrer le lemme suivant :

Lemme 8.1 *$\succsim$ vérifie l'axiome d'élimination symétrique d'ordre $(m+1)$.*

Cependant, $\succsim$ ne vérifie pas l'axiome symétrique d'ordre $(m+2)$ car

$$\begin{pmatrix} (0,0,2(m-1)+1,0) & \sim & (0,0,1,2(m-1)) \\ (0,0,4(m-1)+1,0) & \sim & (0,0,2(m-1)+1,2(m-1)) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (0,0,(m+1)(m-1)+1,0) & \sim & (0,0,(m-1)(m-1)+1,2(m-1)) \\ (0,0,1,2m) & \sim & (0,0,(m+1)(m-1)+1,2(m-1)) \\ (0,0,0,2(m-1)) & \sim & (0,0,2(m-1),0) \\ (0,0,2(m-1),2(m-1)) & \sim & (0,0,4(m-1),0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (0,0,(m-1)(m-1),2(m-1)) & \sim & (0,0,(m+1)(m-1),0) \\ (0,0,(m+1)(m-1),2(m-1)) & \prec & (0,0,0,2m) \end{pmatrix}$$

♦

Notons que l'exemple ci-dessus est générique : pour tout entier impair m, on peut trouver des relations de préférence satisfaisant l'axiome d'élimination d'ordre $(m+1)$ mais pas l'axiome d'élimination d'ordre $(m+2)$. Par conséquent, la solvabilité restreinte

pas rapport à deux composants n'est pas suffisamment forte pour nous éviter de tester une multitude d'axiomes d'élimination (tout du moins dans le cas où le produit cartésien X est de dimension supérieure ou égale à 4). On peut se demander pourquoi $\prod_{i=1}^{4} X_i$ n'est pas proprement structuré quand $X_1 \times X_2$ l'est si bien. L'explication peut être dérivée directement de la remarque suivante : dans l'exemple ci-dessus, on ne peut pas compenser une variation sur les deux derniers composants grâce à une variation sur les composants solvables (c'est-à-dire que si $(x_3, x_4) \succ_{34} (y_3, y_4)$, alors $f(x_1, x_2, x_3, x_4) - f(x_1, x_2, y_3, y_4) \geq .5$ $\forall x_1, x_2$, de telle sorte que $(x_1, x_2, x_3, x_4) \succ (y_1, y_2, y_3, y_4)$ $\forall x_1, y_1, x_2, y_2$). Ceci signifie que $\succsim$ est un ordre lexicographique dans lequel les composants non solvables (c'est-à-dire les deux derniers composants) sont discriminants, et les composants solvables sont pris en compte uniquement lorsque les composants non solvables sont indifférents. Ainsi, les composants solvables sont trop "faibles" pour propager leur structure à X tout entier.

Est-ce que la recherche d'hypothèses structurelles plus faibles que la solvabilité restreinte, mais néanmoins suffisamment fortes pour que (C) puisse être déduit d'axiomes d'élimination d'ordres peu élevés, est alors sans espoir ? L'analyse de l'exemple précédent suggère que les variations des composants non solvables puissent être compensées par des variations sur les composants solvables ; d'où la définition suivante :

Définition 8.1 (i-relié) *Soit $i \in \{3, \ldots, n\}$. x_i et z_i sont i-reliés, ce que l'on notera de la manière suivante : $x_i \, \mathcal{O}_i \, z_i$, s'il existe une suite $(y_i^k)_{k=0}^{p}$ d'éléments de X_i telle que*

- $y_i^0 = x_i$,
- $y_i^p = z_i$,
- $\forall k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, $\exists \, a^{k+1}, b^k \in \prod_{j=1}^{i-1} X_j$ *tels que* $(a^{k+1}, y_i^{k+1}) \sim_{1\ldots i} (b^k, y_i^k)$.

Remarquons que, $\forall i \in \{3, \ldots, n\}$, $\mathcal{O}_i$ est une relation d'équivalence ; en effet, $\forall x_i \in X_i$, $x_i \, \mathcal{O}_i \, x_i$ — x_i est i-relié avec lui-même — la relation est symétrique (si x_i est i-relié avec z_i grâce à une suite $(y_i^k)_{k=0}^{p}$, alors $(y_i^k)_{k=p}^{0}$, la suite obtenue à partir de la précédente en inversant l'ordre des indices, i-relie z_i et x_i) et transitive (si $(y_i^k)_{k=0}^{p}$ i-relie x_i et z_i, et si $(y_i^k)_{k=p+1}^{q}$ i-relie z_i et t_i, alors $(y_i^k)_{k=0}^{q}$ i-relie x_i et t_i).

La relation de "i-lien" est illustrée par la figure 8.2, dans laquelle les i-liens sont représentés par des flèches : soit $X = [0,1]^2 \times \{1, 2, 3, 4\} \times \{0, 78\}$, muni d'une relation de préférence $\succsim$ représentable par la fonction d'utilité suivante :

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = [2 + x_1 + x_2]^{x_3} + x_4.$$

Alors tous les x_3, y_3 sont i-reliés car :

$$A = (1,1,1,0) \sim B = (0,0,2,0),$$
$$C = (1,1,2,0) \sim D = (\tfrac{1}{4}, 2\sqrt[3]{2} - \tfrac{9}{4}, 3, 0) \sim E = (0,0,4,0),$$

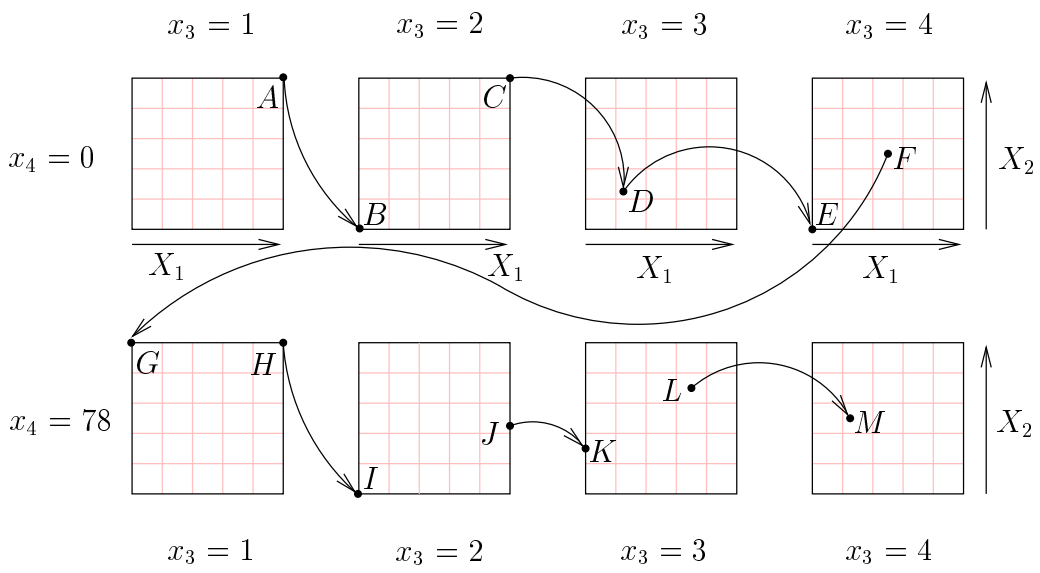


FIG. 8.2: Les i-liens.

ou parce que

$$\begin{aligned} H = (1,1,1,1) &\sim I = (0,0,2,1), \\ J = (1, 2\sqrt{3}-3, 2, 1) &\sim K = (0, \sqrt[3]{12}-2, 3, 1), \\ L = (\tfrac{3}{4}, \tfrac{3}{4}, 3, 1) &\sim M = (\tfrac{1}{4}, \sqrt[4]{\tfrac{343}{8}} - \tfrac{9}{4}, 4, 1). \end{aligned}$$

$x_4 = 0$ et $x_4 = 78$ sont aussi i-reliés car $F = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 4, 0) \sim G = (0, 1, 1, 78)$.

Les i-liens peuvent aussi être explicités en termes de fonctions d'utilité : considérons, dans l'exemple ci-dessus, les images des hyperplans $\{x_3 = \text{constante}, x_4 = \text{constante}\}$ par la fonction d'utilité f, c'est-à-dire $\{f(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 \in [0,1], x_2 \in [0,1], x_3 = \text{constante}, x_4 = \text{constante}\}$. Ces ensembles — qui sont bien entendu des intervalles de la droite réelle puisque x_1 et x_2 appartiennent à $[0,1]$ — sont représentés dans la figure 8.3 par des droites horizontales. Par exemple, $\{f(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 \in [0,1], x_2 \in [0,1], x_3 = 1, x_4 = 0\} = \{2 + x_1 + x_2 : x_1 \in [0,1], x_2 \in [0,1]\} = [2,4]$ est représenté par la droite horizontale la plus basse. Deux points sont alors i-reliés s'ils peuvent être joints par un chemin en forme d'escalier (par exemple, $A \to B \to C \to E \to G$) : les parties horizontales de cet escalier représentent des déplacements à l'intérieur des hyperplans $\{x_3 = \text{constante}, x_4 = \text{constante}\}$, tandis que les parties verticales de l'escalier représentent des déplacements sur les liens ; en d'autres termes, la suite $(H^k)_{k=0}^p$ composée des hyperplans $\{x_3 = \text{constante}, x_4 = \text{constante}\}$ contenant chacun un des points y_i^k de la définition 8.1 est telle que, $\forall k$, $f(H^k) \cap f(H^{k+1}) \neq \emptyset$, où $f(H^k) = \{f(x) : x \in H^k\}$.

Remarquons que si $\succsim$ vérifie l'axiome d'indépendance, les i-liens par rapport au $i^{\text{ème}}$ composant ne dépendent pas des composants $i+1$ à n. L'intérêt des i-liens est qu'ils forment des sortes de canalisations par lesquelles la structure induite par les composants solvables peut se propager sur tout l'espace X. Si n'importe quel couple d'éléments non solvables est i-relié, et si l'indépendance est vérifiée, ainsi que la solvabilité restreinte,

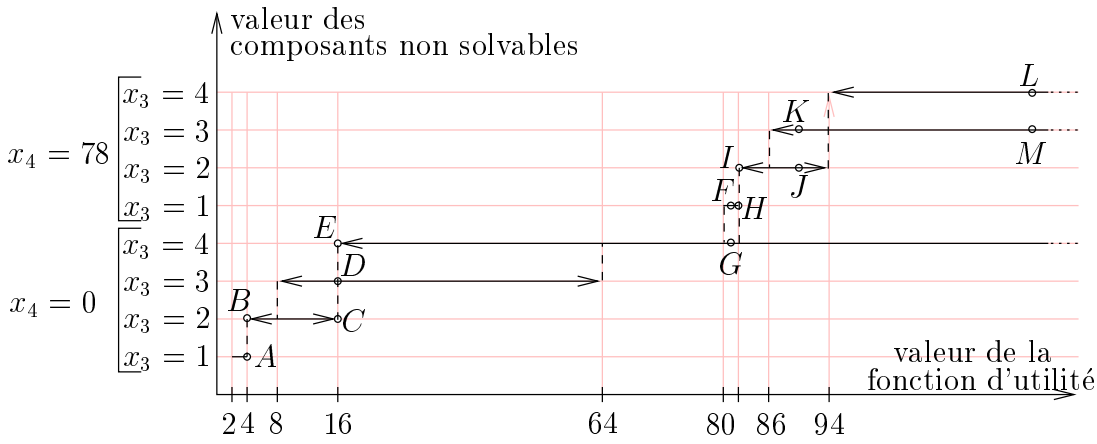


FIG. 8.3: Les i-liens en termes de fonctions d'utilité.

l'essentialité et la condition de Thomsen par rapport à deux composants, on peut montrer que l'axiome d'élimination du second ordre implique l'axiome d'élimination globale. Par conséquent, pour prouver l'existence d'utilités additives, il paraît relativement logique de recourir à l'hypothèse structurelle suivante :

Axiome 8.1 (I-lien) *$\forall x_i, z_i \in X_i$, $i \in \{3, \ldots, n-1\}$, x_i et z_i sont i-reliés, c'est-à-dire que $x_i \, \mathcal{O}_i \, z_i$.*

La solvabilité restreinte par rapport aux deux premiers composants implique que s'il existe une utilité additive représentant $\succsim_{12}$, alors celle-ci est cardinale, c'est-à-dire que toute autre utilité additive en est une transformée affine strictement positive. Par conséquent, si l'axiome 8.1 est vérifié, et s'il existe une fonction d'utilité additive représentant $\succsim_{123}$, alors celle-ci est cardinale ; cette propriété est relativement immédiate : si $f_1(\cdot) + f_2(\cdot) + f_3(\cdot)$ et $g_1(\cdot) + g_2(\cdot) + g_3(\cdot)$ représentent $\succsim_{123}$, alors $f_1(\cdot) + f_2(\cdot)$ et $g_1(\cdot) + g_2(\cdot)$ représentent $\succsim_{12}$, de telle sorte qu'il existe des constantes $\alpha > 0$ et $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ telles que $g_1(\cdot) = \alpha f_1(\cdot) + \beta_1$ et $g_2(\cdot) = \alpha f_2(\cdot) + \beta_2$; pour un élément arbitraire $x_3^0 \in X_3$, il existe aussi une constante β_3 telle que $g_3(x_3^0) = \alpha f_3(x_3^0) + \beta_3$; d'après l'axiome 8.1, pour tout $x_3 \in X_3$, x_3^0 et x_3 sont i-reliés par une suite $(y_3^k)_{k=0}^p$; par définition, pour tout indice k de cette suite, il existe $(a_1^{k+1}, a_2^{k+1}), (b_1^k, b_2^k) \in X_1 \times X_2$ tel que $(a_1^{k+1}, a_2^{k+1}, y_3^{k+1}) \sim_{123} (b_1^k, b_2^k, y_3^k)$, ou, d'une manière tout à fait équivalente,

$$\begin{aligned} f_1(a_1^{k+1}) + f_2(a_2^{k+1}) + f_3(y_3^{k+1}) &= f_1(b_1^k) + f_2(b_2^k) + f_3(y_3^k), \\ g_1(a_1^{k+1}) + g_2(a_2^{k+1}) + g_3(y_3^{k+1}) &= g_1(b_1^k) + g_2(b_2^k) + g_3(y_3^k). \end{aligned}$$

La combinaison de ces deux égalités nous amène à celle ci-dessous :

$$g_3(y_3^{k+1}) - g_3(y_3^k) = \alpha \left[f_3(y_3^{k+1}) - f_3(y_3^k) \right],$$

ce qui, par récurrence, et d'après $g_3(x_3^0) = \alpha f_3(x_3^0) + \beta_3$, implique que $g_3(x_3) = \alpha f_3(x_3) + \beta_3$. En fait, l'axiome 8.1 garantit par récurrence que s'il existe une utilité additive représentant $\succsim_{1 \ldots n-1}$, alors celle-ci est cardinale.

Avez vous remarqué ? J'ai bien dit "s'il existe une utilité additive représentant $\succsim_{1\ldots n-1}$" ; eh oui, l'axiome d'i-lien ne concerne que les $n-1$ premiers composants, de telle sorte que rien ne garantit que la fonction f_n soit cardinale. Et en effet, l'exemple suivant illustre bien cette particularité :

Exemple 8.3 Soit $X = [0,1] \times [0,1] \times \{0,4,9\}$ muni d'un préordre total $\succsim$ représentable sur X par la fonction $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$. Cette utilité est additive, mais

$$g(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_1 + x_2 & \text{si } x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 10 & \text{si } x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + 100 & \text{si } x_3 = 9, \end{cases}$$

est aussi une fonction d'utilité additive représentant $\succsim$; pourtant g n'est pas une transformée affine de f. Cette propriété résulte de l'impossibilité de compenser une variation sur le troisième composant par une variation sur les deux premiers. Par conséquent, tant que $g(1,1,0) < g(0,0,4)$ et $g(1,1,4) < g(0,0,9)$, g n'a pas besoin d'être une transformée affine de f pour représenter $\succsim$. Au contraire, si l'on avait $(0,0,4) \precsim (1,1,0)$ et $(0,0,9) \precsim (1,1,4)$, alors la solvabilité restreinte des deux premiers composants imposerait que tout couple d'éléments du troisième composant soient i-reliés, et, ainsi, toute utilité additive serait obligatoirement une transformée affine de f. ♦

Conservation d'échelle

J'ai mentionné plus haut que si deux composants vérifient la solvabilité restreinte ainsi que l'essentialité, on peut déduire l'axiome d'élimination globale, (C), de l'axiome d'élimination du second ordre. Or, dans le contexte classique où la solvabilité restreinte est vérifiée par tous les composants, il est bien connu que (C) est entraîné par l'indépendance et la condition de Thomsen. Il est donc légitime de se demander si ces deux derniers axiomes sont encore suffisants pour induire (C) dans le contexte actuel, c'est-à-dire lorsque deux composants seulement vérifient la solvabilité restreinte. Cette question revient à savoir si la condition de Thomsen par rapport à deux composants solvables et l'indépendance impliquent l'axiome d'élimination du second ordre. Malheureusement, l'exemple suivant montre que cette propriété n'est pas vraie :

Exemple 8.4 Soit $X = [1,2] \times [1,2] \times \{1,2\}$ muni du préordre large total $\succsim$ représentable par la fonction d'utilité suivante :

$$f(x_1, x_2, x_3) = [\frac{7}{8}(x_1 + x_2)]^{x_3}.$$

L'indépendance est visiblement vérifiée. $\succsim_{12}$ est représentable par une fonction d'utilité $f_1 + f_2$, de telle sorte que la condition de Thomsen est vérifiée par rapport aux deux premiers composants. Cependant, l'axiome d'élimination du second

ordre n'est pas vérifié car

$$\begin{aligned} (1.5, 2, 1) &\sim (1, 1, 2), \\ (1, 4\sqrt{\tfrac{2}{7}} - 1, 2) &\sim (2, 2, 1), \\ \text{mais} \qquad \text{Non}((2, 2, 1) &\sim (1.5, 4\sqrt{\tfrac{2}{7}} - 1, 1)). \end{aligned} \tag{8.1}$$

La figure 8.4 peut contribuer à comprendre pourquoi une telle violation de l'axiome d'élimination du second ordre peut exister. Sur les espaces où la solvabilité restreinte est vérifiée c'est-à-dire $[1, 2] \times [1, 2] \times \{1\}$ et $[1, 2] \times [1, 2] \times \{2\}$, l'axiome d'élimination globale est entraîné par l'indépendance et la condition de Thomsen. Donc une violation d'un axiome d'élimination ne peut arriver que lorsque l'on compare des éléments dont les composants non solvables sont distincts (dans notre exemple, on a comparé des éléments du plan $\{x_3 = 1\}$ avec des éléments du plan $\{x_3 = 2\}$). Remarquons que, dans ce cas, la condition de Thomsen par rapport aux composants solvables ne nous est d'aucune utilité puisqu'elle est définie pour les composants 3 à n fixés. Donc seule l'indépendance pourrait empêcher (8.1).

La figure 8.4 représente les courbes d'indifférence dans les plans$\{x_3 = 1\}$ et

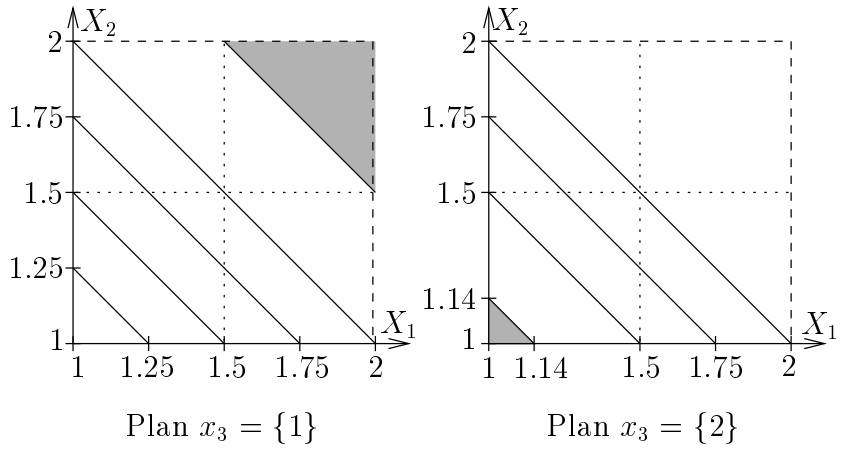


FIG. 8.4: L'inefficacité de l'axiome d'indépendance.

$\{x_3 = 2\}$; les parties grisées représentent les éléments de chaque plan indifférents à certains éléments de l'autre plan. On remarque que lorsque $(x_1, x_2, 0) \sim (y_1, y_2, 1)$, x_1 et x_2 sont supérieurs ou égaux à 1.5 tandis que y_1 et y_2 sont inférieurs ou égaux à $4\sqrt{\frac{2}{7}} - 1 \approx 1.14$, de telle sorte que l'indépendance ne peut être utilisée avec des relations d'indifférence. Or les déductions engendrées par l'indépendance à travers des préférences strictes sont beaucoup plus faibles que celles induites à travers des relations d'indifférence car elles autorisent un certain degré de liberté : par exemple, les relations d'indépendance déduites de $(x_1, x_2, 1) \prec (x_1, y_2, 2)$ ou de $(x_1, x_2, 1) \prec (y_1, x_2, 2)$, $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in [1, 2]$, ne peuvent en aucun cas donner d'indication sur l'existence éventuelle d'éléments x_1, x_2, y_1, y_2 tels que $(x_1, x_2, 0) \sim (y_1, y_2, 1)$. Ce degré de liberté est responsable, dans le présent exemple, de la violation de l'axiome d'élimination du second ordre. ♦

Par conséquent, afin d'éviter de tester l'axiome d'élimination du second ordre, il est intéressant d'étudier quand l'indépendance peut être utilisée à travers des relations d'indifférence, c'est-à-dire quand, pour $(x_3, \ldots, x_n)$ et $(y_3, \ldots, y_n)$ fixés, il existe

- soit c_1, x_2, y_2 tels que $(c_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \sim (c_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$,
- soit x_1, y_1, c_2 tels que $(x_1, c_2, x_3, \ldots, x_n) \sim (y_1, c_2, y_3, \ldots, y_n)$.

Dans de tels cas, on dira que $(x_3, \ldots, x_n)$ et $(y_3, \ldots, y_n)$ sont des éléments directement-unidimensionnellement-joignables ; néologisme certes très peu esthétique (que l'Académie Française me pardonne) et nettement moins savoureux que son équivalent anglais (directly-single-dimensionally-matched elements), mais qui permet de bien illustrer la propriété ci-dessus.

Définition 8.2 (directement-unidimensionnellement-joignable) *Soient $a, b \in \prod_{j=3}^{n} X_j$. S'il existe $x_1, y_1 \in X_1$ et $c_2 \in X_2$ tels que $(x_1, c_2, a) \sim (y_1, c_2, b)$, ou bien s'il existe $x_2, y_2 \in X_2$ et $c_1 \in X_1$ tels que $(c_1, x_2, a) \sim (c_1, y_2, b)$, alors a et b sont dits directement-unidimensionnellement-joignables.*

En d'autres termes, une variation du premier composant de x_1 jusqu'à y_1, ou bien une variation du deuxième composant de x_2 jusqu'à y_2, compense une variation a à b. Lorsque a et b sont directement-unidimensionnellement-joignables, une variation de a jusqu'à b, ou de b jusqu'à a, peut être compensée par les composants solvables.

La définition 8.2 est assez attractive car on peut montrer que si tous les composants non solvables sont directement-unidimensionnellement-joignables, si la solvabilité restreinte est vérifiée par au moins deux composants, si la condition de Thomsen est vérifiée par ces composants, et si l'indépendance est vérifiée, alors l'axiome d'élimination globale est aussi vérifié. De plus, à première vue, le fait que tous les composants non solvables soient directement-unidimensionnellement-joignables paraît plus général que la solvabilité restreinte par rapport à tous les composants, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 8.5 Soit $\succsim$ une relation de préférence sur $X = [0,2] \times [0,2] \times \{0,1\}$, représentable par la fonction d'utilité $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$. Alors tous les $x_3, y_3 \in X_3$ sont directement-unidimensionnellement-joignables ; mais la solvabilité restreinte n'est pas vérifiée par rapport au troisième composant. ♦

Considérons maintenant l'exemple suivant :

Exemple 8.6 Soit $\succsim$ la relation de préférence sur $X = [0,1] \times [0,1] \times [0,3]$ représentable par la fonction d'utilité $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$. Alors la solvabilité restreinte est vérifiée par rapport au troisième composant, mais tous les éléments de X_3 ne sont pas directement-unidimensionnellement-joignables ; en effet, il n'existe pas d'éléments x_1, x_2, y_1, y_2 tels que $(x_1, x_2, 0) \sim (y_1, y_2, 3)$. ♦

La notion de "directement-unidimensionnellement-joignable" est donc trop restrictive pour permettre une généralisation intéressante des théorèmes classiques d'existence

d'utilités additives. Cependant, les arguments ci-dessus suggèrent une extension naturelle de la notion de "directement-unidimensionnellement-joignable" : celle-ci est trop restrictive car elle requiert que n'importe quelle variation des composants non solvables puisse être compensée par les composants solvables, tandis que si les composants non solvables ne peuvent prendre que deux valeurs, c'est une condition très attractive car elle représente une relaxation de la solvabilité restreinte. Il paraît donc naturel d'étendre cette notion par la notion d'"unidimensionnellement-joignable".

Définition 8.3 (unidimensionnellement-joignable) *Soient $a, b \in \prod_{j=3}^{n} X_j$. a et b sont dits unidimensionnellement-joignables s'il existe une suite $(y^k)_{k=0}^{p}$ d'éléments de $\prod_{j=3}^{n} X_j$ telle que $y^0 = a$, $y^p = b$ et, $\forall k \in \{0, \ldots, p-1\}$, y^k et y^{k+1} sont directement-unidimensionnellement-joignables.*

La figure 8.5 fournit une interprétation graphique de cette définition : considérons une relation de préférence $\succsim$ sur $X = [0, 10] \times [0, 10] \times \{0, 6, 14, 17\}$ représentable par la fonction d'utilité $x_1 + x_2 + x_3$. $x_3 = 0$ et $x_3 = 17$ ne sont pas directement-

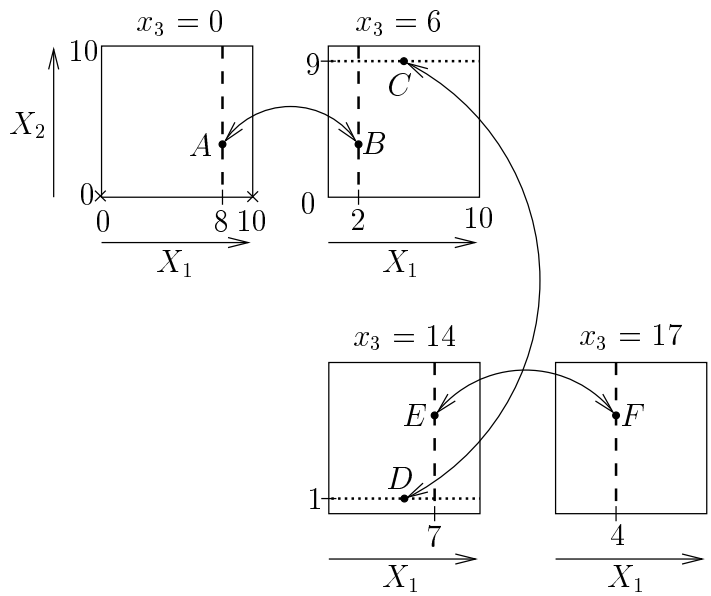


FIG. 8.5: 0 et 17 sont unidimensionnellement-joignables.

unidimensionnellement-joignables. Cependant, ces points sont unidimensionnellement-joignables car la suite $y^0 = 0$, $y^1 = 6$, $y^2 = 14$ et $y^3 = 17$ vérifie les exigences de la définition 8.3 ; en effet, $(8, x_2, 0) \sim (2, x_2, 6)$, et ce quelque soit $x_2 \in [0, 10]$; cette propriété est illustrée sur la figure 8.5 par le fait que les points d'intersection de n'importe quelle droite horizontale avec les droites en pointillés — tels que A et B — appartiennent à la même classe d'indifférence. De même, $(x_1, 9, 6) \sim (x_1, 1, 14)$ $\forall x_1 \in [0, 10]$ — par exemple $C \sim D$ — et $(7, x_2, 14) \sim (4, x_2, 17)$ — par exemple $E \sim F$.

La définition 8.3 peut être perçue comme une relaxation de la solvabilité restreinte : en effet, soit $\succsim$ une relation de préférence sur $X = X_1 \times X_2 \times X_3$ satisfaisant la solvabilité restreinte par rapport à tous les composants. Considérons deux éléments quelconques

de X_3 : x_3, y_3. S'il existe x_1, x_2, y_2 tels que $(x_1, x_2, x_3) \sim (x_1, y_2, y_3)$, alors x_3 et y_3 sont unidimensionnellement-joignables. Sinon, sans perte de généralité, supposons que $x_3 \prec_3 y_3$; d'après l'essentialité, il existe $x_2 \prec_2 y_2$; mais alors, quel que soit $x_1 \in X_1$, $(x_1, x_2, x_3) \prec (x_1, y_2, x_3) \prec (x_1, x_2, y_3)$. La séquence standard par rapport au troisième composant de base $\{(x_1, x_2), (x_1, y_2)\}$ est croissante et bornée par (x_1, x_2, y_3) ; donc, d'après l'axiome archimédien, cette séquence est finie ; elle satisfait donc aux exigences de la définition 8.3 ; donc x_3 et y_3 sont unidimensionnellement-joignables.

Comme on le montrera dans les démonstrations, si, $\forall a, b \in \prod_{j=3}^{n} X_j$, a et b sont unidimensionnellement-joignables, alors l'indépendance et la condition de Thomsen par rapport aux deux premiers composants solvables impliquent l'axiome d'élimination du second ordre. Remarquons que si a et b sont unidimensionnellement-joignables, alors ils sont aussi i-reliés ; par conséquent, si, $\forall a, b \in \prod_{j=3}^{n} X_j$, a et b sont unidimensionnellement-joignables, alors l'indépendance et la condition de Thomsen par rapport aux deux premiers composants solvables impliquent l'axiome d'élimination globale.

Mais qu'arriverait-il s'il existait deux éléments a et b non unidimensionnellement-joignables ? Aurait-on absolument besoin de tester l'axiome d'élimination du second ordre sur tout X ? Et bien, en fait non : on peut montrer que l'axiome suivant (qui représente un gros affaiblissement de l'axiome d'élimination du second ordre) , l'indépendance et la condition de Thomsen induisent l'axiome d'élimination du second ordre.

Axiome 8.2 (conservation d'échelle) *Soient $a, b \in \prod_{j=3}^{n} X_j$. Si a et b ne sont pas unidimensionnellement-joignables, alors, $\forall x_1, y_1, z_1 \in X_1$ et $\forall x_2, y_2, z_2 \in X_2$, la propriété suivante doit être vraie :*

$$\left.\begin{array}{l}(z_1, x_2, a) \sim (x_1, z_2, b)\\ (z_1, y_2, a) \sim (y_1, z_2, b)\end{array}\right\} \Rightarrow (x_1, y_2, a) \sim (y_1, x_2, a). \tag{8.2}$$

L'équation (8.2) représente une petite sous-partie de l'axiome d'élimination du second ordre. Elle est illustrée par la figure 8.6 : si $D \sim C$ et $B \sim A$, alors $E \sim F$. $(z_1, x_2, a) \sim (x_1, z_2, b)$ et $(z_1, y_2, a) \sim (y_1, z_2, b)$ peuvent être interprétés (voir figure 8.7)

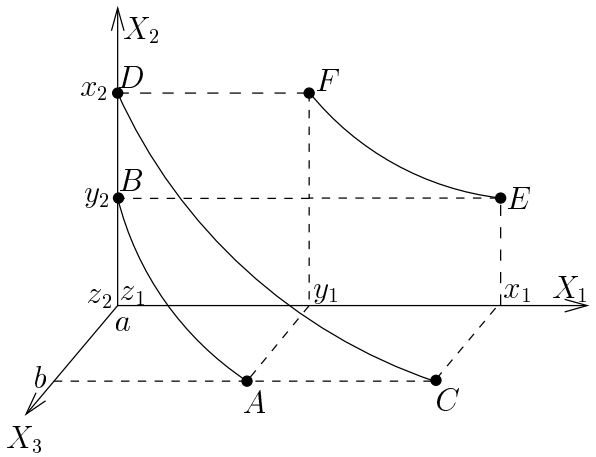


FIG. 8.6: L'axiome de conservation d'échelle.

de la manière suivante : varier de x_2 jusqu'à y_2 dans l'hyperplan a est tout à fait équi-

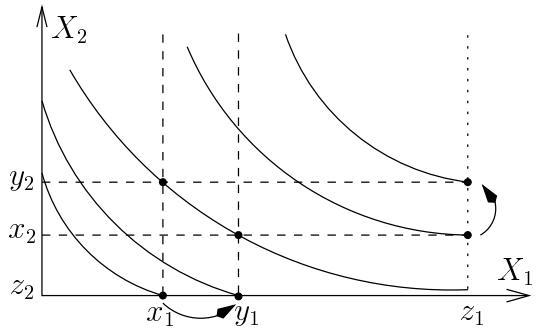


FIG. 8.7: Une variation de x_1 jusqu'à y_1 est équivalente à une variation de x_2 jusqu'à y_2.

valent à varier de x_1 jusqu'à y_1 dans l'hyperplan b. L'axiome de conservation d'échelle suggère que cette dernière variation est équivalente à la variation de x_1 jusqu'à y_1 dans l'hyperplan a ; en d'autres termes, lorsqu'il compare des variations sur les composants solvables, le décideur ne prend pas en compte le niveau des composants non solvables.

Si les deux premiers composants vérifient la solvabilité restreinte, tous les composants des ensembles $X_1 \times X_2 \times \{a\}$ et $X_1 \times X_2 \times \{b\}$ la vérifient aussi, si bien que les théorèmes d'existence classiques tels que Krantz, Luce, Suppes, et Tversky (1971) garantissent l'existence de fonctions d'utilité additives cardinales représentant $\succsim$ sur ces ensembles. Par conséquent, s'il existe une fonction d'utilité représentant $\succsim$ sur $X = X_1 \times X_2 \times \{a, b\}$, il existe des fonctions $F : X \to \mathbb{R}$, $f_1 : X_1 \to \mathbb{R}$, $f_2 : X_2 \to \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que F représente $\succsim$ sur X et

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, a) &= f_1(x_1) + f_2(x_2), \\ F(x_1, x_2, b) &= \varphi\left(f_1(x_1) + f_2(x_2)\right). \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation (8.2) se traduit-elle de la manière suivante :

$$\left.\begin{array}{l} F(z_1, x_2, a) = F(x_1, z_2, b) \\ F(z_1, y_2, a) = F(y_1, z_2, b) \end{array}\right\} \Rightarrow F(x_1, y_2, a) = F(y_1, x_2, a),$$

ou encore :

$$\begin{array}{ll} f_1(z_1) + f_2(x_2) = \varphi\left(f_1(x_1) + f_2(z_2)\right) & (i) \\ \underbrace{f_1(z_1) + f_2(y_2) = \varphi\left(f_1(y_1) + f_2(z_2)\right)}_{\Downarrow} & (ii) \\ f_1(x_1) + f_2(y_2) = f_1(y_1) + f_2(x_2) & (iii) \end{array}$$

En soustrayant la première égalité à la deuxième, on obtient :

$$(ii) - (i) \ : \quad f_2(y_2) - f_2(x_2) = \varphi(f_1(y_1) + f_2(z_2)) - \varphi(f_1(x_1) + f_2(z_2)).$$

De plus, la troisième égalité pouvait s'écrire :

$$f_1(y_1) - f_1(x_1) = f_2(y_2) - f_2(x_2).$$

L'équation (8.2) implique donc que

$$f_2(y_2)-f_2(x_2) = \varphi(f_1(y_1)+f_2(z_2))-\varphi(f_1(x_1)+f_2(z_2)) \Rightarrow f_1(y_1)-f_1(x_1) = f_2(y_2)-f_2(x_2)$$

Par conséquent,

$$\varphi(f_1(y_1) + f_2(z_2)) - \varphi(f_1(x_1) + f_2(z_2)) = (f_1(y_1) + f_2(z_2)) - (f_1(x_1) + f_2(z_2)). \quad (8.3)$$

En utilisant des séquences standards, il n'est pas très difficile de montrer que la dernière égalité ne dépend pas de z_2, x_1 ou y_1. Par conséquent, φ, qui peut être assimilée à une mesure de comparaison de la force des préférences entre les hyperplans a et b, doit être égale, à une constante près, à la fonction identité. A cet égard, l'axiome 8.2 peut être appelé axiome de "conservation d'échelle" car si $F(x,a) - F(y,a) = \delta$ dans l'hyperplan a, alors $F(x,b) - F(y,b) = \delta$ dans l'hyperplan b : le taux de variation de F est identique dans tous les hyperplans.

Exemple 8.7 Considérons deux relations de préférence $\succsim$ et $\succsim^*$ sur $X = [1,2] \times [1,2] \times \{1,2\}$, respectivement représentables par

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 + x_3 \quad \text{et} \quad f^*(x_1,x_2,x_3) = [\frac{7}{8}(x_1+x_2)]^{x_3}.$$

Etant représentable par une fonction d'utilité additive, $\succsim$ vérifie l'axiome d'élimination globale, et, par conséquent, l'axiome de conservation d'échelle. Remarquons que, comme expliqué ci-dessus, $\forall x_1, x_2, y_1, y_2$,

$$f(x_1,x_2,1) - f(y_1,y_2,1) = f(x_1,x_2,2) - f(y_1,y_2,2).$$

Au contraire, $\succsim^*$ — qui correspond à l'exemple de la page 166 — ne vérifie pas l'axiome de conservation d'échelle car $x_3 = 1$ et $x_3 = 2$ ne sont pas unidimensionnellement-joignables et $(1.5,2,1) \sim (1,1,2)$, $(1, 4\sqrt{\frac{2}{7}}-1, 2) \sim (2,2,1)$ et cependant $\text{Non}((2,2,1) \sim (1.5, 4\sqrt{\frac{2}{7}}-1, 1))$. Une autre explication est que le taux de variation de la fonction d'utilité n'est pas le même dans tous les plans $\{x_3 = \text{constante}\}$: il est en effet linéaire pour $x_3 = 1$, c'est-à-dire que $f^*(x_1,x_2,x_3) = \frac{7}{8}(x_1+x_2)$, et quadratique pour $x_3 = 2$, c'est-à-dire que $f^*(x_1,x_2,x_3) = [\frac{7}{8}(x_1+x_2)]^2$. ♦

A première vue, l'axiome de conservation d'échelle semble difficile à tester car on doit vérifier si a et b sont unidimensionnellement-joignables (c'est-à-dire qu'on doit rechercher l'existence d'une suite (y^k) de la définition 8.3), et, s'il s'avère qu'aucune suite n'existe, on doit examiner si l'équation (8.2) est vérifiée ou non. Pour le dernier argument, je mentionnerais juste le fait que cette équation est une sous-partie de l'axiome d'élimination du second ordre, et donc, qu'elle n'est pas extrêmement difficile à tester (bien qu'elle soit pourtant plus difficile à tester que l'axiome d'indépendance). Quant au premier argument, l'existence de la suite est étudiée durant le processus de construction de la fonction d'utilité. Par exemple, supposons que l'utilité a été construite sur $X_1 \times X_2 \times \{a\}$. Maintenant, pour essayer d'étendre cette fonction à $X_1 \times X_2 \times \{a,b\}$, on commence par étudier si a et b sont directement-unidimensionnellement-joignables. Si

c'est le cas, a et b sont aussi unidimensionnellement-joignables. Sinon, on doit essayer de construire une suite y^k d'éléments directement-unidimensionnellement-joignables, en partant de $y^0 = a$. On essaye alors de trouver un élément y^1 dans $\prod_{i=3}^{n} X_i$ tel que y^0 et y^1 sont directement-unidimensionnellement-joignables. S'il n'existe pas un tel élément, a et b ne sont pas unidimensionnellement-joignables. Sinon, on poursuit le processus de construction de la suite jusqu'à ce que l'on atteigne b ou que l'on ait prouvé que a et b ne sont pas unidimensionnellement-joignables. Ainsi, pendant que l'on teste si l'axiome de conservation d'échelle est vérifié, on construit la fonction d'utilité ; la vérification n'est donc pas une perte de temps.

Propriété archimédienne

Lorsque certains composants ne vérifient pas la solvabilité restreinte, l'axiome archimédien classique n'est pas très puissant car les séquences standards qu'il utilise sont définies en termes de relations d'indifférence, définition en étroite relation avec la solvabilité restreinte. C'est pourquoi cet axiome ne garantit pas forcément l'existence d'utilités additives lorsque la solvabilité restreinte n'est pas vérifiée par tous les composants. L'exemple suivant en est d'ailleurs une bonne illustration :

Exemple 8.8 Soit $X = [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{N}$ un produit cartésien muni d'une relation de préférence $\succsim$ tel que

$\succsim$ est représentable par $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + 2^{x_3}$ sur $[0,1] \times [0,1] \times \mathbb{N}^*$,
$\succsim$ est représentable par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ sur $[0,1] \times [0,1] \times \{0\}$,
$(x_1, x_2, 0) \succ (y_1, y_2, y_3)$ $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0,1]$ et $\forall y_3 \neq 0$.

Il est clair que $\succsim$ est un préordre large total vérifiant l'indépendance. La condition de Thomsen est vérifiée sur $X_1 \times X_2$ car $\succsim_{12}$ est représentable par $f_1 + f_2$. Pour la même raison, l'axiome archimédien classique (celui défini page 38) est vérifié par les deux premiers composants. Il est aussi vérifié par rapport au troisième composant parce qu'étant donné que $\forall (x_3, y_3) \neq (1,2)$, il n'existe aucun $x_1, y_1, x_2, y_2 \in [0,1]$ tels que $(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3)$, toute séquence standard par rapport au troisième composant est finie. Cependant, l'axiome archimédien ne permet pas de garantir l'existence d'une utilité additive car si une telle utilité existait, appelons la g, alors, il est clair que l'inégalité suivante serait vraie :

$$g_3(k+1) \geq g_3(k) + [g_1(1) - g_1(0) + g_2(1) - g_2(0)] \ \forall k \neq 0,$$

ce qui impliquerait que

$$g_3(k+1) \geq g_3(1) + k[g_1(1) - g_1(0) + g_2(1) - g_2(0)] \ \forall k \neq 0,$$

ce qui, à son tour, imposerait $g_3(0) = +\infty$, empêchant ainsi g d'être bien définie sur la totalité de l'ensemble X. ♦

A la lumière de cet exemple, l'axiome archimédien classique n'est pas suffisamment puissant pour induire l'existence d'une utilité additive car il ne parvient pas à capter la

topologie des espaces non solvables : étant défini en termes de séquences standards, il ne peut être utilisé que si des suites de relations d'indifférence du type $(x_1^{k+1}, x_2^0) \sim (x_1^k, x_2^0)$ existent ; cependant, dans les espaces non solvables, $\sim$ n'est pas assez flexible pour permettre l'existence de telles suites. Donc, pour prendre en compte les composants non solvables, l'axiome archimédien doit être redéfini d'une manière plus flexible, par exemple en remplaçant les $\sim$ par des $\succsim$ (ce qui laisserait un certain degré de liberté dans la constitution des séquences).

Par exemple, soit $X = X_1 \times \mathbb{R}$, où $X_1 \subset \mathbb{R}$. Supposons que $\succsim$ est représentable sur X par une fonction d'utilité additive f, et considérons des éléments arbitraires $x_1^0 \in X_1$ et $x_2^0, x_2^1 \in \mathbb{R}$ tels que $x_2^1 \succ_2 x_2^0$. Posons $\alpha = f_2(x_2^1) - f_2(x_2^0)$. S'il existait une séquence standard croissante, (x_1^k), on aurait, $\forall k$, $(x_1^{k+1}, x_2^0) \sim (x_1^k, x_2^1)$, ou, d'une manière équivalente,

$$f_1(x_1^{k+1}) = f_1(x_1^k) + \alpha, \tag{8.4}$$

ce qui impliquerait que $f_1(x_1^k) = f_1(x_1^0) + k\alpha$, qui, à son tour, impliquerait que lorsque k tend vers $+\infty$, $f_1(x_1^k)$ tend aussi vers $+\infty$ car $\alpha > 0$. Ce qui est important pour atteindre cette conclusion n'est pas vraiment que (8.4) soit une égalité, mais plutôt que $f_1(x_1^{k+1})$ est supérieur ou égal à $f_1(x_1^k)$ + une constante strictement positive. Donc, si l'on remplaçait la séquence satisfaisant (8.4), par une séquence (y_1^k) telle que $y_1^0 = x_1^0$, et $\forall k$,

$$f_1(y_1^{k+1}) \geq f_1(y_1^k) + \alpha, \tag{8.5}$$

on obtiendrait exactement la même conclusion : lorsque k tend vers $+\infty$, $f_1(y_1^k)$ tend aussi vers $+\infty$. Mais (8.5) est équivalent à $(y_1^{k+1}, x_2^0) \succsim (y_1^k, x_2^1)$. Donc, en conservant l'esprit de l'axiome archimédien classique, on peut conclure que toute séquence (y_1^k) telle que $(y_1^{k+1}, x_2^0) \succsim (y_1^k, x_2^1)$ $\forall k$, et telle que $x_2^1 \succ_2 x_2^0$, si elle est en plus bornée (c'est-à-dire s'il existe $z, t \in X$ tels que z est préféré à tout élément de la séquence, qui, à son tour est préféré à t), est finie. Dorénavant, j'appellerai ce type de séquence une séquence sur-standard. C'est ce qu'illustre la figure 8.8.

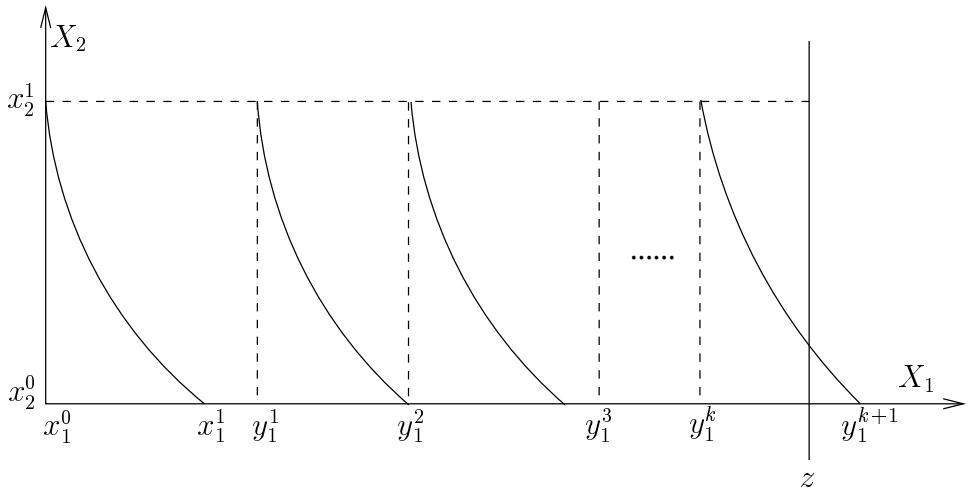


FIG. 8.8: Le nouvel axiome archimédien.

Définition 8.4 (séquence sur-standard par rapport au 1er composant) *Pour tout ensemble N d'entiers consécutifs, l'ensemble $\{x_1^k$ tel que $x_1^k \in X_1, k \in N\}$ est une séquence sur-standard par rapport au premier composant si et seulement si l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée :*

- $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \prec (x_1^0, x_2^1, \ldots, x_n^1)$ *et* $(x_1^{k+1}, x_2^0, \ldots, x_n^0) \succsim (x_1^k, x_2^1, \ldots, x_n^1)\ \forall k, k+1 \in N$;
- $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \succ (x_1^0, x_2^1, \ldots, x_n^1)$ *et* $(x_1^{k+1}, x_2^0, \ldots, x_n^0) \precsim (x_1^k, x_2^1, \ldots, x_n^1)\ \forall k, k+1 \in N$.

Des définitions similaires seraient valables pour les autres composants.

Axiome 8.3 (Nouvel axiome archimédien par rapport au $i^{\text{ème}}$ composant) *Toute séquence sur-standard par rapport au $i^{ème}$ composant bornée est finie ; c'est-à-dire que si $\{x_i^k \in X_i, k \in N\}$ est une séquence sur-standard de base $\{(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0), (x_1^1, \ldots, x_{i-1}^1, x_{i+1}^1, \ldots, x_n^1)\}$, et s'il existe $y, z \in X$ tels que, $\forall k \in N$, $y \precsim (x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^k, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0) \precsim z$, alors N est fini.*

Notons qu'une séquence standard est un cas particulier de séquence sur-standard. Par conséquent, l'axiome ci-dessus peut paraître plus restrictif que l'axiome archimédien classique. Cependant, lorsque la solvabilité restreinte est vérifiée par tous les composants, pour toute séquence sur-standard, on peut créer une séquence standard croissant ou décroissant de la même manière. Il est alors relativement aisé de montrer que la finitude de la séquence standard implique celle de la séquence sur-standard, et réciproquement. Ainsi, dans le contexte traditionnel où tous les composants vérifient la solvabilité restreinte, l'axiome archimédien ci-dessus n'est pas plus restrictif que l'axiome classique.

8.2.2 Théorèmes d'existence

représentation sur des produits cartésiens de dimension 3

Il est maintenant grand temps d'exploiter les axiomes décrits avec moulte détails dans la sous-section précédente. Le théorème ci-dessous, par exemple, montre comment le théorème classique d'existence d'utilités additives de Krantz, Luce, Suppes, et Tversky (1971) peut être étendu à des espaces tridimensionnels dont le troisième composant ne vérifie pas la solvabilité restreinte.

Théorème 8.2 *Soit $X = X_1 \times X_2 \times X_3$ un produit cartésien muni d'un préordre large total $\succsim$ satisfaisant l'indépendance (cf. page 23), l'axiome de conservation d'échelle (cf. page 170) et le nouvel axiome archimédien. Supposons que les deux premiers composants de X vérifient la solvabilité restreinte et l'essentialité, et que la condition de Thomsen soit vérifiée sur $X_1 \times X_2$. Alors il existe des fonctions $f_1 : X_1 \to \mathbb{R}$, $f_2 : X_2 \to \mathbb{R}$ et $f_3 : X_3 \to \mathbb{R}$ telles que :*

$$\forall x, y \in X,\ x \precsim y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{3} f_i(x_i) \leq \sum_{i=1}^{3} f_i(y_i). \tag{8.6}$$

Ce théorème énonce simplement le fait que la représentabilité additive sur l'espace où la solvabilité restreinte est vérifiée, c'est-à-dire $X_1 \times X_2$, peut être étendue à l'ensemble de X. Remarquons que l'axiome 8.1 (i-lien) n'est pas requis — cet axiome n'est utile que pour des espaces de dimensions strictement supérieures à 3. Lorsque la solvabilité restreinte est vérifiée par les trois composants, l'indépendance implique l'axiome d'élimination du second ordre ; par conséquent, dans ce cas, la condition de Thomsen et l'axiome de conservation d'échelle n'ont pas besoin d'être requis.

intuitions du théorème

L'intuition du théorème est similaire à celle du théorème 8.1 : d'après les hypothèses, $\succsim_{12}$ est représentable par une fonction d'utilité f. Il ne reste plus maintenant qu'à étendre cette propriété au troisième composant de X. Soient a_3 et b_3 deux éléments quelconques de X_3 ; sans perte de généralité, on supposera dans la suite que $a_3 \prec_3 b_3$. Il est clair que pour n'importe quels réels $f_3(a_3)$ et $f_3(b_3)$, $f_1 + f_2 + f_3$ est une utilité additive sur $X_1 \times X_2 \times \{a_3\}$ et sur $X_1 \times X_2 \times \{b_3\}$. Mais peut-on trouver des réels $f_3(a_3)$ et $f_3(b_3)$ tels que ce soit aussi une utilité additive sur $X_1 \times X_2 \times \{a_3, b_3\}$? Contrairement au théorème 8.1, ici l'on n'est pas certain qu'il existe $A = (a_1^1, a_2, a_3) \sim B = (b_1^1, a_2, b_3)$. Cependant, lorsque ces deux éléments existent, ils imposent une relation sur f_3 :

$$f_3(b_3) = f_3(a_3) + \left[f_1(a_1^1) - f_1(b_1^1)\right]. \tag{8.7}$$

Lorsque cette relation est vérifiée, f est une utilité sur la région ▭ de la figure 8.9. En

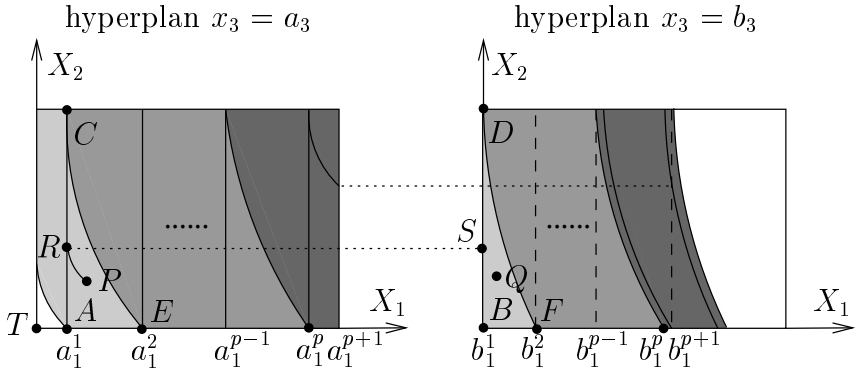


FIG. 8.9: Construction lorsque A et B existent.

effet, tous les points de cette région de l'hyperplan a_3 ont un point qui leur est indifférent sur la droite verticale d'abscisse a_1^1 et tous les points de cette région de l'hyperplan b_3 ont un point qui leur est indifférent sur la droite verticale d'abscisse b_1^1. Or, d'après l'axiome d'indépendance, tout point (a_1^1, x_2, a_3) est indifférent à (b_1^1, x_2, b_3), et, d'après (8.7), on a bien

$$f_1(a_1^1) + f_2(x_2) + f_3(a_3) = f_1(b_1^1) + f_2(x_2) + f_3(b_3).$$

Pour comparer deux points quelconques P et Q, il suffit donc de trouver l'élément R indifférent à P sur la droite verticale d'abscisse a_1^1 de l'hyperplan a_3. On sait que, par

définition, $f(P) = f(R)$. D'après ce qui précède, $R \sim S$ et $f(R) = f(S)$. Donc $P \sim S$ et $f(P) = f(S)$. Or, dans l'hyperplan b_3, f représente $\succsim$; par conséquent, $S \succsim Q \Leftrightarrow f(S) \geq f(Q)$ et $S \precsim Q \Leftrightarrow f(S) \leq f(Q)$. On a donc bien $P \succsim Q \Leftrightarrow f(P) \geq f(Q)$ et $P \precsim Q \Leftrightarrow f(P) \leq f(Q)$. Donc f représente bien $\succsim$ dans la zone ▭.

Mais, sur ce dessin, et d'après l'axiome d'indépendance, si $A \sim B$, alors $C \sim D$; en se déplaçant sur les courbes d'indifférence passant par C et D, on déduit que $E \sim F$. On peut alors recommencer le processus décrit ci-dessus. Par récurrence on montre que f représente bien les zones ▭ et ▭. Il se peut que le produit cartésien soit borné ; par exemple, sur la figure 8.9, il se peut que a_1^{p+1} soit l'élément préféré de X_1. La figure montre que le processus est encore valable dans ce cas ; cela correspond à la zone ▭.

Remarquons que les suites $a_1^1, a_1^2, \ldots, a_1^p$ et $b_1^1, b_1^2, \ldots, b_1^p$ sont des séquences standards. L'axiome archimédien suffit alors pour déduire que tous les points de $X_1 \times X_2 \times \{a_3\}$ indifférents à des points de $X_1 \times X_2 \times \{b_3\}$ peuvent être atteints par le processus. Quant aux points de $X_1 \times X_2 \times \{a_3\}$ qui ne sont indifférents à aucun point de $X_1 \times X_2 \times \{b_3\}$, comme le point T, ils sont forcément non préférés aux éléments des zones grisées de l'hyperplan a_3, et, donc leur image par f est strictement inférieure à celle des points des zones grisées. De même, l'image par f des points de $X_1 \times X_2 \times \{b_3\}$ qui ne sont indifférents à aucun point de $X_1 \times X_2 \times \{a_3\}$ est forcément strictement supérieure à celle des points des zones grisées de l'hyperplan $X_1 \times X_2 \times \{b_3\}$. En conclusion, l'équation (8.7) garantit que f représente $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times \{a_3, b_3\}$.

Cependant, il se peut qu'il n'existe aucun point $A = (a_1^1, a_2, a_3)$ indifférent à un point $B = (b_1^1, a_2, b_3)$. Dans ce cas, s'il existe $(a_1, a_2^1, a_3) \sim (a_1, b_2^1, b_3)$, on peut recommencer le travail décrit ci-dessus en inversant les rôles des deux premiers composants. Le cas contraire a deux causes possibles :

1. il existe $(a_1, a_2, a_3) \sim (b_1, b_2, b_3)$ mais, malheureusement, $a_1 \succ_1 b_1$ et $a_2 \succ_2 b_2$.

2. aucun élément de $X_1 \times X_2 \times \{a_3\}$ n'est indifférent à un élément de $X_1 \times X_2 \times \{b_3\}$.

Dans le premier cas, l'égalité suivante est une condition nécessaire pour que f représente la relation de préférence $\succsim$:

$$f_3(b_3) = f_3(a_3) + [f_1(a_1) - f_1(b_1)] + [f_2(a_2) - f_2(b_2)]\,. \tag{8.8}$$

La figure 8.10 illustre grâce aux zones grisées les éléments de $X_1 \times X_2 \times \{a_3\}$ indifférents à des éléments de $X_1 \times X_2 \times \{b_3\}$. On remarque la ressemblance avec la figure 8.4 de la page 167. Eh oui, c'est bien l'axiome de conservation d'échelle qui permet d'affirmer ici que l'équation (8.8) est suffisante pour que f soit additive.

Le deuxième cas est lui-même subdivisé en deux sous cas :

2.1. soit il existe une suite d'éléments de X_3, appelons-la $(y_3^k)_{k=0}^p$, i-reliant a_3 et b_3,

2.2. soit a_3 et b_3 ne sont pas i-reliés.

Dans le premier sous-cas, par définition des suites i-reliantes, $\forall k$, $\exists\, a_1^k, a_2^k, b_1^{k+1}, b_2^{k+1}$ tels que $(a_1^k, a_2^k, y_3^k) \sim (b_1^{k+1}, b_2^{k+1}, y_3^{k+1})$; par conséquent, le travail décrit ci-dessus s'applique à y_3^k et y_3^{k+1}. On peut alors calculer des valeurs de $f_3(y_3^k)$ et de $f_3(y_3^{k+1})$ de

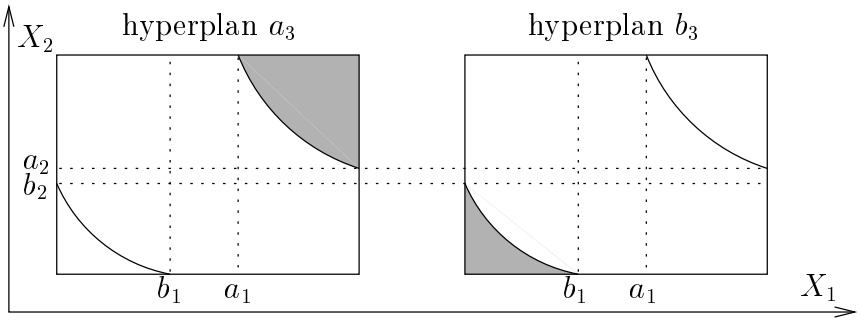


FIG. 8.10: Les éléments de $X_1 \times X_2 \times \{a_3\}$ indifférents à des éléments de $X_1 \times X_2 \times \{b_3\}$.

manière à ce que f représente $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times \{y_3^k, y_3^{k+1}\}$. En fait, il est alors relativement aisé de voir que la construction assure, par transitivité, que f représente $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times \{y_3^0 = a_3, y_3^1, \ldots, y_3^p = b_3\}$. Le sous-cas 2.1 montre donc qu'à l'intérieur d'une même classe d'équivalence de $\mathcal{O}_3$, une fonction f additive existe, qui représente $\succsim$.

Dans le sous-cas 2.2, par définition des i-liens, les classes d'équivalence de $\mathcal{O}_3$ contenant a_3 et b_3 sont distinctes. Il existe alors un nombre fini de classes d'équivalence de $\mathcal{O}_3$ entre celle contenant a_3 et celle contenant b_3 ; en effet, dans le cas contraire, on peut construire une suite (z_3^k) infinie, croissante ou décroissante, constituée d'éléments de X_3 appartenant chacun à une classe d'équivalence de $\mathcal{O}_3$ distincte. Supposons la suite croissante. Par définition de $\mathcal{O}_3$, quels que soient $x_1 \prec_1 y_1$ et $x_2 \prec_2 y_2$, on a $(y_1, y_2, z_3^k) \prec (x_1, x_2, z_3^{k+1})$. Par conséquent, (z_3^k) est une séquence sur-standard infinie et bornée par a_3 et b_3, ce qui contredit le nouvel axiome archimédien. Conclusion : entre la classe d'équivalence contenant a_3 et celle contenant b_3, il y a un nombre fini, $m-1$, de classes d'équivalence de $\mathcal{O}_3$. On peut donc constituer une suite finie $(z_3^k)_{i=0}^m$ telle que $z_3^0 = a_3$, $z_3^m = b_3$ et telle que, $\forall k \in \{0, \ldots, m-1\}$, $\mathrm{Non}(z_3^k \; \mathcal{O}_3 \; z_3^{k+1})$ et $z_3^k \prec_3 z_3^{k+1}$.

Il est alors facile de montrer que f_1 et f_2 doivent être bornées ; dans le cas contraire, on peut constituer une séquence standard infinie par rapport au premier ou au deuxième composant. Si cette séquence est croissante, elle l'est en particulier dans l'hyperplan z_3^0, hyperplan dans lequel elle est bornée supérieurement par n'importe quel élément (x_1, x_2, z_3^m) ; si la séquence est décroissante, elle l'est en particulier dans l'hyperplan z_3^m, hyperplan dans lequel elle est bornée inférieurement par n'importe quel élément (x_1, x_2, z_3^0). Dans les deux cas, cela contredit le nouvel axiome archimédien. De même, en utilisant des séquences sur-standards, on montre aisément que la fonction f_3 est

- bornée supérieurement sur la classe d'équivalence de $\mathcal{O}_3$ contenant $z_3^0 = a_3$;
- bornée sur les classes d'équivalence de $\mathcal{O}_3$ contenant les z_3^k, $k \in \{1, \ldots, m-1\}$,
- bornée inférieurement sur la classe d'équivalence de $\mathcal{O}_3$ contenant $z_3^m = b_3$.

Il devient alors clair qu'une condition nécessaire et suffisante pour que f représente $\succsim$

est que, $\forall k \in \{0, \ldots, m-1\}$

$$\sup_{x_1 \in X_1} f_1(x_1) + \sup_{x_2 \in X_2} f_2(x_2) + \sup_{x_3 \, \mathcal{O}_3 \, z_3^k} f_3(x_3) \leq \inf_{x_1 \in X_1} f_1(x_1) + \inf_{x_2 \in X_2} f_2(x_2) + \inf_{x_3 \, \mathcal{O}_3 \, z_3^{k+1}} f_3(x_3) \tag{8.9}$$

lorsqu'au moins un des inf ou des sup n'est pas atteint, et que

$$\sup_{x_1 \in X_1} f_1(x_1) + \sup_{x_2 \in X_2} f_2(x_2) + \sup_{x_3 \, \mathcal{O}_3 \, z_3^k} f_3(x_3) < \inf_{x_1 \in X_1} f_1(x_1) + \inf_{x_2 \in X_2} f_2(x_2) + \inf_{x_3 \, \mathcal{O}_3 \, z_3^{k+1}} f_3(x_3) \tag{8.10}$$

lorsque tous les inf et tous les sup sont atteints. Par conséquent, on peut bien construire une fonction d'utilité additive représentant $\succsim$.

représentation sur des produits cartésiens de dimension n

Le théorème 8.2 ne peut pas être étendu directement à des ensembles de dimensions quelconques ; en effet, considérons l'exemple suivant :

Exemple 8.9 Soit $X = [0,1] \times [0,1] \times \{0,1,2,3\} \times \{0,1,2,3\}$ un produit cartésien muni d'une relation de préférence $\succsim$ représentée par la fonction $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + g(x_3, x_4)$, où g est définie d'après le tableau suivant :

$x_1 \backslash x_2$	0	1	2	3
0	0	3	6	9
1	6	9	12	18
2	15	21	24	27
3	24	30	33	36

Le nouvel axiome archimédien est vérifié pour les deux premiers composants puisque $x_1 + x_2$ est additif, et par rapport aux autres composants car x_3 et x_4 ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs. La solvabilité restreinte ne permet pas de compenser des changements en x_3 et en x_4 par des changements en x_1 et x_2. Par conséquent, on n'a besoin de s'assurer que l'axiome d'indépendance est vérifié que par rapport aux composants x_3 et x_4.

Dans le tableau ci-dessus, on remarque que les nombres augmentent strictement de la gauche vers la droite, et du haut vers le bas. Par conséquent, l'axiome d'indépendance est vérifié. Même l'axiome d'élimination du second ordre est satisfait ; pour s'en rendre compte, il suffit, grâce au théorème 6.1, de vérifier que la condition de Thomsen est satisfaite. Or c'est évident d'après la figure 8.11. Dans cette dernière, j'ai tracé des courbes d'indifférences pour que le lecteur puisse mieux repérer les hexagones de la condition de Thomsen.

Puisque l'axiome de conservation d'échelle est un cas particulier de (C_2), il est aussi vérifié. Bien entendu, chaque composant est essentiel, et $\succsim$ est un préordre large total puisque f le représente. Par conséquent, nous sommes dans les conditions d'application du théorème 8.1. Cependant, il n'existe pas de représentation

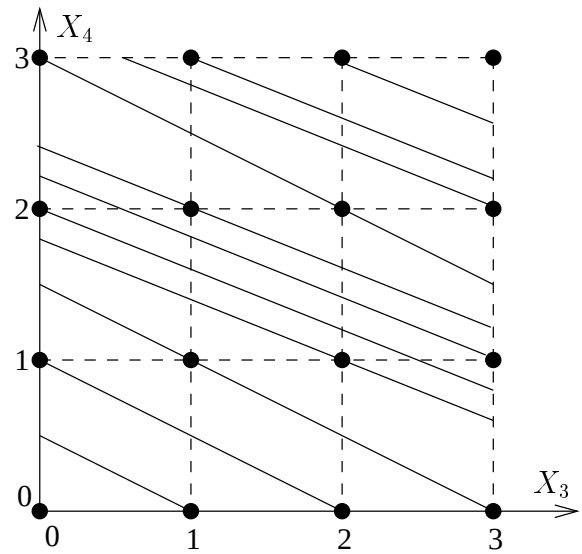


FIG. 8.11: Le plan $\{x_3 \times x_4\}$

additive sur X car

$$\begin{array}{rcl} f(0,0,0,3) & = & f(0,0,1,1) = 9, \\ f(0,0,1,0) & = & (0,0,0,2) = 6, \\ f(0,0,2,2) & = & f(0,0,3,0) = 24, \\ f(0,0,3,1) = 30 & > & f(0,0,2,3) = 27, \end{array}$$

contredisant ainsi l'axiome d'élimination d'ordre 3. ♦

Les violations possibles de certains axiomes d'élimination nous obligent donc à utiliser l'axiome d'i-lien dans les théorèmes d'existence d'utilités additives en dimensions strictement supérieures à 3. Ceci nous amène à formuler le théorème suivant :

Théorème 8.3 *Soit X un produit cartésien de dimension n muni d'un préordre large total $\succsim$ satisfaisant l'indépendance (cf. page 23), l'axiome de conservation d'échelle (cf. page 170), l'axiome d'i-lien (cf. page 165) et le nouvel axiome archimédien (cf. page 175). Supposons que les deux premiers composants de X vérifient l'essentialité et la solvabilité restreinte, et que la condition de Thomsen soit vérifiée sur $X_1 \times X_2$. Alors il existe des fonctions $f_i : X_i \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, telles que :*

$$\forall x, y \in X,\ x \precsim y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} f_i(y_i). \tag{8.11}$$

L'intuition du théorème ci-dessus est identique à celle du théorème 8.2. En fait, sa démonstration est relativement simple car l'axiome d'i-lien garantit que les relations d'équivalence $\mathcal{O}_3, \ldots, \mathcal{O}_{n-1}$ n'ont qu'une seule classe, c'est-à-dire que l'on se retrouve toujours dans le cas traité par les figures 8.9 ou 8.10. Seule $\mathcal{O}_n$ possède plusieurs classes d'équivalence. La construction d'une fonction d'utilité additive f représentant $\succsim$ s'effectue alors séparément sur chacune des classes d'équivalence de $\mathcal{O}_n$; on peut alors montrer

que sur chacune des classes, f est unique à une transformation affine strictement positive près. Il ne reste plus qu'à raccorder les fonctions de chacune des classes par des équations similaires à (8.9) et (8.10).

8.2.3 Propriétés d'unicité

Dans un premier temps, considérons que X est un ensemble de dimension trois. L'exemple suivant devrait permettre de comprendre les mécanismes sous-jacents des propriétés d'unicité :

Exemple 8.10 Soit $X = [0,1] \times [0,1] \times \{0,1,2,5,10\}$ un produit cartésien tridimensionnel muni du préordre large total $\succsim$ représentable sur X par la fonction d'utilité $f(x_1,x_2,x_3) = x_1+x_2+x_3$. Soit $g = g_1+g_2+g_3$ une autre fonction d'utilité additive représentant $\succsim$. Par définition, f_1+f_2 et g_1+g_2 sont des utilités additives représentant $\succsim_{12}$ sur $[0,1] \times [0,1]$. Or la solvabilité restreinte est vérifiée par rapport aux deux premiers composants ; ainsi, d'après Krantz, Luce, Suppes, et Tversky (1971), il existe des constantes $\alpha > 0$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ telles que, $\forall x_1, x_2 \in [0,1]$, $g_1(x_1) = \alpha f_1(x_1)+\alpha_1 = \alpha x_1+\alpha_1$ et $g_2(x_2) = \alpha f_2(x_2)+\alpha_2 = \alpha x_2+\alpha_2$. Par conséquent, les fonctions d'utilité correspondant aux composants solvables sont uniques à une transformation affine strictement positive près (propriété cardinale).

Quant au troisième composant, l'unicité est moins évidente. La figure 8.12 montre l'image par f de $[0,1] \times [0,1]$ en fonction de x_3 (par exemple, la droite horizontale la plus basse correspond à l'ensemble $\{f(x_1,x_2,0) : x_1,x_2 \in [0,1]\} = [0,2]$). Sur cette figure, il est notable que l'étendue de $f(X_1,X_2,0)$, c'est-à-dire

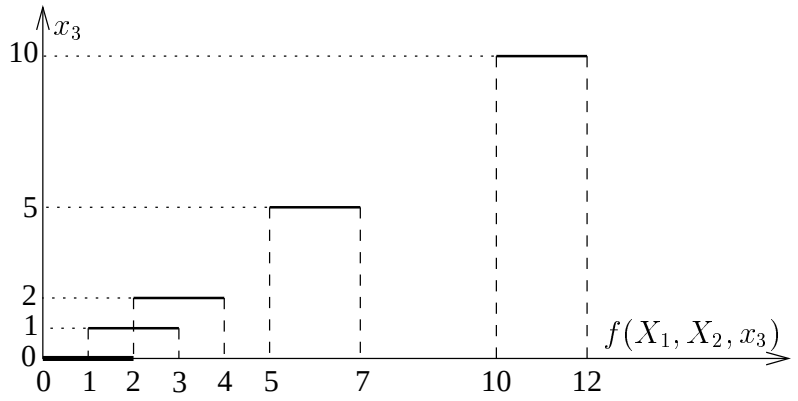


FIG. 8.12: Etendue de $f(X_1,X_2,x_3)$ en fonction de x_3.

$[0,2]$, est d'intersection non nulle avec celle de $f(X_1,X_2,1)$, c'est-à-dire $[1,3]$. Ceci signifie qu'il existe $y_1, z_1 \in X_1$ et $y_2, z_2 \in X_2$ tels que

$$f(y_1,y_2,0) = f(z_1,z_2,1).$$

Puisque g représente aussi $\succsim$, l'égalité suivante doit être vraie :

$$g_1(y_1)+g_2(y_2)+g_3(0) = g_1(z_1)+g_2(z_2)+g_3(1).$$

L'unicité de g_1 et de g_2 implique clairement que si β_0 est tel que $g_3(0) = \alpha f_3(0) + \beta_0$, alors

$$g_3(1) = \alpha f_3(1) + \beta_0.$$

La même propriété est vraie entre $(x_3 = 1)$ et $(x_3 = 2)$, c'est-à-dire que $g_3(2) = \alpha f_3(2) + \beta_0$. Remarquons que, par définition, $(x_3 = 0)\ \mathcal{O}_3\ (x_3 = 1)\ \mathcal{O}_3\ (x_3 = 2)$. Par conséquent, à l'intérieur des classes d'équivalence de $\mathcal{O}_3$, f_3 est cardinale.

Considérons maintenant $x_3 = 2$ et $x_3 = 5$. Il est clair que $f(X_1, X_2, 2)$ n'intersecte pas $f(X_1, X_2, 5)$. En termes de relations de préférence, cela signifie que $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0, 1]$, $(x_1, x_2, 2) \prec (y_1, y_2, 5)$, ou encore, que $\mathrm{Non}((x_3 = 2)\mathcal{O}_3(x_3 = 5))$. Pour que g représente $\succsim$, il suffit que $g(1, 1, 2) < g(0, 0, 5)$. En d'autres termes, seule l'inégalité suivante doit être vérifiée :

$$g_3(5) > \alpha f_3(2) + \beta_0 + \alpha[f_1(1) + f_2(1)] - \alpha[f_1(0) + f_2(0)].$$

Par conséquent, pour avoir $g_3(5) = \alpha f_3(5) + \beta_1$, tout

$$\beta_1 > \beta_0 + \alpha[f_1(1) + f_2(1) + f_3(2)] - \alpha[f_1(0) + f_2(0) + f_3(5)]$$

convient. Un argument similaire s'appliquerait au couple $(x_3 = 5, x_3 = 10)$. ♦

Cet exemple suggère la propriété d'unicité décrite dans le théorème ci-dessous :

Théorème 8.4 *Soit $X = X_1 \times X_2 \times X_3$ muni d'un préordre large total $\succsim$ représentable par une fonction d'utilité additive $\sum_{i=1}^{3} f_i$, et tel que la solvabilité restreinte soit vérifiée par rapport aux deux premiers composants. Alors il existe un ensemble N d'entiers consécutifs — fini ou infini — et une suite d'éléments de X_3, $(x_3^i)_{i \in N}$, tels que*

- *$\forall x_3 \in X_3$, $\exists\, i \in N$ tel que $x_3\ \mathcal{O}_3\ x_3^i$,*
- *$\forall i, i+1 \in N$ (si $\mathrm{Card}(N) > 1$), $x_3^{i+1} \succ_3 x_3^i$ et Non$(x_3^i\ \mathcal{O}_3\ x_3^{i+1})$.*

Si $g = g_1 + g_2 + g_3$ représente aussi $\succsim$, alors il existe des constantes $\alpha > 0$, α_1, α_2 et β_i, $i \in N$, telles que :

$$\begin{cases} \forall x \in X_1, \quad g_1(x_1) = \alpha \cdot f_1(x_1) + \alpha_1 \\ \forall x \in X_2, \quad g_2(x_2) = \alpha \cdot f_2(x_2) + \alpha_2 \\ \forall x_3\ \mathcal{O}_3\ x_3^i, \quad g_3(x_3) = \alpha \cdot f_3(x_3) + \beta_i \text{ où} \\ \qquad \beta_{i+1} \geq \beta_i + \alpha \cdot [\sup_{x_1,x_2}\{f_1(x_1) + f_2(x_2)\} + \sup_{y_3\ \mathcal{O}_3\ x_3^i} f_3(y_3)] \\ \qquad\qquad - \alpha \cdot [\inf_{x_1,x_2}\{f_1(x_1) + f_2(x_2)\} + \inf_{y_3\ \mathcal{O}_3\ x_3^{i+1}} f_3(y_3)] \\ \qquad \text{avec une égalité seulement si l'inf et/ou le sup n'est pas atteint.} \end{cases}$$

De plus, si $\mathrm{Card}(N) > 1$, alors f_1 et f_2 sont bornées.

Dans le dernier exemple, la suite x_3^i du théorème 8.4 serait $x_3^0 = 0$, 1 ou 2 — car 0 est i-relié avec 1, et 1 avec 2 — $x_3^1 = 5$ et $x_3^2 = 10$.

L'intuition de ce théorème est intimement liée à celle du théorème 8.2 ; en effet, dans les page 176 à 179, on a montré qu'une fonction d'utilité additive existait en la construisant. Dans le processus de construction, on s'est aperçu qu'à l'intérieur des classes d'équivalence de $\mathcal{O}_3$, les suites i-reliant les différents éléments imposent des relations d'égalité sur f_3 (cf. les équations (8.7) et (8.8)) ; celles-ci, conjuguées à la "classique" unicité cardinale de f_1 et f_2, impliquent une unicité cardinale à l'intérieur des classes d'équivalence de $\mathcal{O}_3$. Par contre, comme le montrent les inégalités (8.9) et (8.10), entre deux classes d'équivalence distinctes, il n'y a plus unicité à une transformation affine strictement positive près.

Passons maintenant à des produits cartésiens de dimensions quelconques. On va alors décrire l'unicité des utilités additives du théorème 8.3. Ici, l'axiome d'i-lien assure que les fonctions f_i, pour $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, sont uniques à une transformation affine strictement positive près. En fait, seule f_n peut ne pas être cardinale. Ceci nous amène à formuler le dernier théorème de ce chapitre :

Théorème 8.5 *Soit X un produit cartésien de dimension n supérieure ou égale à 3 muni d'une relation de préférence $\succsim$ représentable par une fonction d'utilité additive $\sum_{i=1}^{n} f_i$. Supposons que l'axiome d'i-lien (cf. page 165) est vérifié, ainsi que la solvabilité restreinte par rapport aux deux premiers composants. Alors il existe un ensemble N d'entiers consécutifs — fini ou infini — et une suite d'éléments de X_n, $(x_n^i)_{i \in N}$, telle que*

- $\forall x_n \in X_n$, $\exists\, i \in N$ *tel que* $x_n \,\mathcal{O}_n\, x_n^i$,
- $\forall i, i+1 \in N$ (*si* $\mathrm{Card}(N) > 1$), $x_n^{i+1} \succ_n x_n^i$ *et* $Non(x_n^i \,\mathcal{O}_n\, x_n^{i+1})$.

Si $g = g_1 + \cdots + g_n$ représente aussi $\succsim$, alors il existe des constantes $\alpha > 0$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ et $\beta_i \in \mathbb{R}$, $i \in N$, telles que :

$$\begin{cases} \forall x \in X_i,\ i < n,\ g_i(x_i) \ = \alpha \cdot f_i(x_i) \ + \alpha_i \\ \forall x_n \,\mathcal{O}_n\, x_n^i, \qquad g_n(x_n) = \alpha \cdot f_n(x_n) + \beta_i \ \text{où} \\ \qquad \beta_{i+1} \geq \beta_i \ + \alpha \cdot \left[\sup\limits_{x_1,\ldots,x_{n-1}} \left\{ \sum\limits_{i=1}^{n-1} f_i(x_i) \right\} + \sup\limits_{y_n \,\mathcal{O}_n\, x_n^i} f_n(y_n) \right] \\ \qquad\qquad - \alpha \cdot \left[\inf\limits_{x_1,\ldots,x_{n-1}} \left\{ \sum\limits_{i=1}^{n-1} f_i(x_i) \right\} + \inf\limits_{y_n \,\mathcal{O}_n\, x_n^{i+1}} f_n(y_n) \right] \\ \qquad \textit{avec une égalité seulement si l'}\inf \textit{ et/ou le } \sup \textit{ n'est pas atteint.} \end{cases}$$

De plus, si $\mathrm{Card}(N) > 1$, *alors les fonctions f_i, $i = 1, \ldots, n-1$, sont bornées.*

8.3 Démonstrations

Démonstration du théorème 8.1 : Considérons un élément arbitraire de $\prod_{i=3}^{n} X_i$, $(x_3^0, \ldots, x_n^0)$. On sait que pour tous $x_1, y_1 \in X_1$, $x_2, y_2 \in X_2$

$$(x_1, x_2) \precsim_{12} (y_1, y_2) \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3^0, \ldots, x_n^0) \precsim (y_1, y_2, x_3^0, \ldots, x_n^0).$$

Or par hypothèse, $\succsim_{12}$ est représentable par une fonction d'utilité additive ; il existe donc des fonctions, $f_1 : X_1 \to \mathbb{R}$ et $f_2 : X_2 \to \mathbb{R}$, telles que :

$$(x_1, x_2, x_3^0, \ldots, x_n^0) \precsim (y_1, y_2, x_3^0, \ldots, x_n^0) \Leftrightarrow f_1(x_1) + f_2(x_2) \leq f_1(y_1) + f_2(y_2). \quad (8.12)$$

Maintenant, pour tout $i = 3, 4, \ldots, n$, soient $f_i(x_i^0)$ des nombres réels arbitraires. Il est clair que

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3^0, \ldots, x_n^0) &\precsim (y_1, y_2, x_3^0, \ldots, x_n^0) \\ \Leftrightarrow f_1(x_1) + f_2(x_2) + \sum_{i=3}^{n} f_i(x_i^0) &\leq f_1(y_1) + f_2(y_2) + \sum_{i=3}^{n} f_i(x_i^0). \end{aligned}$$

Par solvabilité non restreinte par rapport au premier composant,

$$\forall y_i \in X_i,\ \exists\, x_1(y_i) \in X_1 \text{ tel que } (x_1(y_i), x_2^0, \ldots, x_n^0) \sim (x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, y_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0).$$

On définit

$$f_i(y_i) = f_1(x_1(y_i)) - f_1(x_1^0) + f_i(x_i^0) \quad (8.13)$$

Remarquons que $x_1(x_i^0) = x_1^0$, et, donc, $f_i(x_i^0)$ est bien défini. Nous allons montrer par récurrence que les fonctions f_i, définies par (8.13), forment une fonction d'utilité additive.

Les f_i étant définis comme dans (8.13), supposons que dans $\prod_{i=1}^{k} X_i \times \prod_{i=k+1}^{n} \{x_i^0\}$,

$$\begin{aligned} (x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0) &\precsim (y_1, \ldots, y_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0) \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i) + \sum_{i=k+1}^{n} f_i(x_i^0) &\leq \sum_{i=1}^{k} f_i(y_i) + \sum_{i=k+1}^{n} f_i(x_i^0). \end{aligned} \quad (8.14)$$

Considérons un élément arbitraire $y = (y_1, \ldots, y_{k+1}, x_{k+2}^0, \ldots, x_n^0)$ du produit cartésien $\prod_{i=1}^{k+1} X_i \times \prod_{i=k+2}^{n} \{x_i^0\}$. Par solvabilité non restreinte par rapport au second composant,

$$\exists\, y_2' \in X_2 \text{ tel que } (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0) \sim (x_1^0, y_2', x_3^0, \ldots, x_n^0)\ ;$$

or, d'après (8.14),

$$\sum_{i=1}^{k} f_i(y_i) = f_1(x_1^0) + f_2(y_2') + \sum_{i=3}^{k} f_i(x_i^0).$$

On a donc forcément

$$y \sim (x_1^0, y_2', x_3^0, \ldots, x_k^0, y_{k+1}, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0).$$

Mais, d'après (8.13), il existe $x_1(y_{k+1})$ dans X_1 tel que

$$\begin{aligned} &(x_1(y_{k+1}), x_2^0, \ldots, x_n^0) \sim (x_1^0, ..., x_k^0, y_{k+1}, x_{k+2}^0, ..., x_n^0) \text{ et} \\ &f_{k+1}(y_{k+1}) = f_1(x_1(y_{k+1})) - f_1(x_1^0) + f_{k+1}(x_{k+1}^0). \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après l'axiome d'indépendance,

$$\begin{aligned} &y \sim (x_1(y_{k+1}), y_2', x_3^0, \ldots, x_n^0) \text{ et} \\ &\sum_{i=1}^{k+1} f_i(y_i) = f_1(x_1(y_1)) + f_2(y_2') + \sum_{i=3}^{k+1} f_i(x_i^0). \end{aligned}$$

Donc, tout élément de $\prod_{i=1}^{k+1} X_i \times \prod_{i=k+2}^{n}\{x_i^0\}$ possède un équivalent dans $X_1 \times X_2 \times \prod_{i=3}^{n}\{x_i^0\}$, et leurs utilités sont égales. Ainsi, dans $\prod_{i=1}^{k+1} X_i \times \prod_{i=k+2}^{n}\{x_i^0\}$,

$$\begin{aligned}(x_1,\ldots,x_{k+1},x_{k+2}^0,\ldots,x_n^0) &\precsim (y_1,\ldots,y_{k+1},x_{k+2}^0,\ldots,x_n^0)\\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k+1} f_i(x_i) + \sum_{i=k+2}^{n} f_i(x_i^0) &\leq \sum_{i=1}^{k+1} f_i(y_i) + \sum_{i=k+2}^{n} f_i(x_i^0).\end{aligned}$$

Puisque cette propriété est vraie pour $k = 2$, par récurrence, c'est aussi vrai pour tout $k \in \{2,\ldots,n\}$. Il existe Donc une fonction d'utilité additive représentant $\succsim$.

Pour achever la démonstration, montrons l'unicité à une transformation affine strictement positive près. Tout d'abord, f_1 et f_2 sont uniques à une transformation affine strictement positive près. En effet, leur existence, combinée avec la solvabilité non restreinte assure le fait que, sur $X_1 \times X_2$, la condition de Thomsen et l'axiome archimédien, et, plus généralement toutes les hypothèses des théorèmes classiques sont vérifiées. En utilisant ces derniers, on conclut à l'unicité de f_1 et f_2 à une transformation affine strictement positive près.

Supposons maintenant que g_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, sont des fonctions représentant $\succsim$, et considérons un élément arbitraire y_k de X_k, pour $k \in \{3,\ldots,n\}$. Soit $x_1(y_k)$ l'élément tel que $(x_1(y_k), x_2^0, \ldots, x_n^0) \sim (x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, y_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0)$. Alors

$$g_k(y_k) = g_1(x_1(y_k)) - g_1(x_1^0) + g_k(x_k^0) \quad \text{et} \quad f_k(y_k) = f_1(x_1(y_k)) - f_1(x_1^0) + f_k(x_k^0).$$

Or on sait qu'il existe des constantes $a > 0$, b_1, b_2 telles que $g_1(\cdot) = a \cdot f_1(\cdot) + b_1$ et $g_2(\cdot) = a \cdot f_2(\cdot) + b_2$. Donc

$$\begin{aligned} g_k(y_k) &= a \cdot f_1(x_1(y_k)) + b_1 - a \cdot f_1(x_1^0) - b_1 + g_k(x_k^0)\\ &= a[f_1(x_1(y_k)) - f_1(x_1^0)] + g_k(x_k^0)\\ &= a \cdot f_k(y_k) + g_k(x_k^0) - a \cdot f_k(x_k^0).\end{aligned}$$

Mais x_k^0 est une constante, donc $g_k(x_k^0) - a \cdot f_k(x_k^0)$ est aussi une constante. Par conséquent, les fonctions f_k sont aussi uniques à une transformation affine strictement positive près. ♦

Démonstration du corollaires 8.1 et 8.2 : Ces corollaires sont évidents car les axiomes 2.3, 3.3 et 3.1 garantissent l'existence de représentations additives sur $X_1 \times X_2$, ce qui permet d'utiliser le théorème 8.1. ♦

Démonstration du lemme 8.1 : Cette démonstration est organisée en 4 étapes. La première montre que l'axiome d'indépendance est vérifié ; les trois autres étapes sont consacrées à la condition d'élimination d'ordre $(m+1)$; dans la deuxième, on dérive à partir d'une violation de (C_{m+1}) une condition sur les troisième et quatrième composants de X ; celle-ci implique que soit $\succsim_{12}$ viole (C_{m+1}) sur l'espace $X_1 \times X_2$, ce que l'on montre être impossible dans la troisième étape, soit $\succsim_{34}$ viole (C_{m+1}) sur l'espace $X_3 \times X_4$, ce qui se révèle impossible d'après la quatrième étape.

Première étape : l'indépendance

$\succsim$ est représentable par la fonction d'utilité suivante :

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & \text{si } x_4 < 2m, \\ x_1 + x_2 + x_3 + m^2 + 2m - 2.5 & \text{si } x_4 = 2m \text{ et } x_3 \text{ pair}, \\ x_1 + x_2 + x_3 + m^2 + 2m - 3 & \text{si } x_4 = 2m \text{ et } x_3 \text{ impair}. \end{cases}$$

Par conséquent, il est clair que les deux premiers composants vérifient l'axiome d'indépendance. Soit $g : X_3 \times X_4 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$g(x_3, x_4) = \begin{cases} x_3 + x_4 & \text{si } x_4 < 2m, \\ x_3 + m^2 + 2m - 2.5 & \text{si } x_4 = 2m \text{ et } x_3 \text{ pair}, \\ x_3 + m^2 + 2m - 3 & \text{si } x_4 = 2m \text{ et } x_3 \text{ impair}; \end{cases}$$

alors $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + g(x_3, x_4)$. Le troisième composant vérifie lui aussi l'indépendance ; en effet, supposons que

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \succsim (y_1, y_2, x_3, y_4). \tag{8.15}$$

Alors $x_4 \geq y_4$; en effet, si l'on examine le tableau 8.1, dans lequel on trouve les images par la fonction g de quelques couples (x_3, x_4), on peut remarquer que les chiffres croissent

$x_3 \backslash x_4$	0	$2(m-1)$	$2m$
0	0	$2m-2$	$m^2+2m-2.5$
1	1	$2m-1$	m^2+2m-2
2	2	$2m$	$m^2+2m-.5$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m^2-1	m^2-1	m^2+2m-3	$2m^2+2m-3.5$
m^2	m^2	m^2+2m-2	$2m^2+2m-3$

TAB. 8.1: Images des couples (x_3, x_4) par g.

de la gauche vers la droite, et que la différence (en valeur absolue) entre n'importe quel couple d'éléments d'une même ligne est supérieure à 1 ; par conséquent, si $y_4 > x_4$, alors

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2, x_3, y_4) \geq f(0, 0, x_3, y_4) &= g(x_3, y_4) \\ &> g(x_3, x_4) + 1 \\ &> g(x_3, x_4) + \tfrac{1}{4} = g(\tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{8}, x_3, x_4) \\ &\geq g(x_1, x_2, x_3, x_4), \end{aligned}$$

ce qui serait en contradiction avec (8.15). Maintenant, si $x_4 > y_4$, alors, pour une raison similaire,

$$f(x_1, x_2, y_3, x_4) > f(y_1, y_2, y_3, y_4) + \frac{3}{4}, \ \forall y_3 \in X_3,$$

de telle sorte que (8.15) implique

$$(x_1, x_2, y_3, x_4) \succsim (y_1, y_2, y_3, y_4),\ \forall y_3 \in X_3.$$

Puisque x_3 est arbitraire, (8.15) est donc équivalent à

$$(x_1, x_2, y_3, x_4) \succsim (y_1, y_2, y_3, y_4),\ \forall y_3 \in X_3.$$

Si $x_4 = y_4$, alors (8.15) est équivalent à :

$$\begin{array}{lll} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & \geq y_1 + y_2 + x_3 + x_4 & \text{si } x_4 < 2m, \\ x_1 + x_2 + x_3 + m^2 + 2m - \frac{5}{2} & \geq y_1 + y_2 + x_3 + m^2 + 2m - \frac{5}{2} & \text{si } x_4 = 2m \text{ et } x_3 \text{ pair}, \\ x_1 + x_2 + x_3 + m^2 + 2m - 3 & \geq y_1 + y_2 + x_3 + m^2 + 2m - 3 & \text{si } x_4 = 2m \text{ et } x_3 \text{ impair}. \end{array}$$

Quels que soient x_3 et x_4, il est clair que les égalités ci-dessus sont équivalentes à $x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2$. Cette dernière égalité ne dépendant pas de x_3, (8.15) est donc équivalent à

$$(x_1, x_2, y_3, x_4) \succsim (y_1, y_2, y_3, x_4),\ \forall y_3 \in X_3.$$

Par conséquent, le troisième composant vérifie l'axiome d'indépendance. Mais cet axiome est aussi vérifié par le quatrième composant, en effet, supposons que :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \succsim (y_1, y_2, y_3, x_4). \tag{8.16}$$

Comme précédemment, puisque les chiffres du tableau 8.1 sont croissants du haut vers le bas, et puisque la différence entre deux chiffres d'une même colonne est toujours supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$, (8.16) implique que $x_3 \geq y_3$. Le cas $x_3 = y_3$ a déjà été discuté ci-dessus ; considérons donc que $x_3 > y_3$; dans ce cas,

$$\forall y_4,\ g(x_3, y_4) \geq g(y_3, y_4) + \frac{1}{2},$$

de telle sorte que

$$\forall x_1, y_1 \in X_1 \text{ et } x_2, y_2 \in X_2,\ f(x_1, x_2, x_3, y_4) \geq f(y_1, y_2, y_3, y_4),$$

ce qui confirme que l'axiome d'indépendance est vérifié par le quatrième composant.

Deuxième étape : condition sur les troisième et quatrième composants

Soient $(x_1^i, x_2^i, x_3^i, x_4^i)$ et $(y_1^i, y_2^i, y_3^i, y_4^i)$, $i \in \{1, \ldots, m+2\}$, des éléments de X tels que

- $\forall j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $(y_j^1, \ldots, y_j^{m+2})$ est une permutation de $(x_j^1, \ldots, x_j^{m+2})$,
- $\forall k < m+2$, $(x_1^k, x_2^k, x_3^k, x_4^k) \succsim (y_1^k, y_2^k, y_3^k, y_4^k)$.

Si ces éléments entraînent une violation de la condition d'élimination d'ordre $(m+1)$, alors

$$(x_1^{m+2}, x_2^{m+2}, x_3^{m+2}, x_4^{m+2}) \succsim (y_1^{m+2}, y_2^{m+2}, y_3^{m+2}, y_4^{m+2}),$$

et il existe au moins un indice i dans $\{1, \ldots, m+2\}$ tel que

$$(x_1^i, x_2^i, x_3^i, x_4^i) \succ (y_1^i, y_2^i, y_3^i, y_4^i).$$

On peut supposer sans perte de généralité que cet indice est le dernier (si d'aventure ce n'était pas le cas, on pourrait toujours permuter les relations correspondant aux indices i et $m+2$). Le but de cette supposition est juste de simplifier les notations. Maintenant, d'après l'axiome d'indépendance, $\succsim_{34}$ est bien défini et

$$\forall k \in \{1, \ldots, m+2\},\ (x_3^k, x_4^k) \succsim_{34} (y_3^k, y_4^k)\ ; \tag{8.17}$$

si tel n'était pas le cas, puisque dès que deux éléments du tableau 8.1 ne sont pas égaux, leur différence (en valeur absolue) est supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$, on aurait :

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2, y_3^k, y_4^k) \geq f(0, 0, y_3^k, y_4^k) &= g(y_3^k, y_4^k) \\ &\geq g(x_3^k, x_4^k) + \tfrac{1}{2} = f(0, 0, x_3^k, x_4^k) + \tfrac{1}{2} \\ &= f(\tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{8}, x_3^k, x_4^k) + \tfrac{1}{4} \\ &\geq f(x_1, x_2, x_3^k, x_4^k) + \tfrac{1}{4}, \end{aligned}$$

ce qui rendrait $(x_1^k, x_2^k, x_3^k, x_4^k) \succsim (y_1^k, y_2^k, y_3^k, y_4^k)$ impossible.

Troisième étape : si $(x_3^k, x_4^k) \sim_{34} (y_3^k, y_4^k)\ \forall k \in \{1, \ldots, m+2\}$

Alors, en substituant (y_3^k, y_4^k) par (x_3^k, x_4^k) pour tout $k \in \{1, \ldots, m+2\}$, on obtient $m+2$ éléments de X, $(x_1^k, x_2^k, x_3^k, x_4^k)$, et $m+2$ autres éléments, $(y_1^k, y_2^k, x_3^k, x_4^k)$, tels que

- $\forall j \in \{1, 2\}$, $(y_j^1, \ldots, y_j^{m+2})$ est une permutation de $(x_j^1, \ldots, x_j^{m+2})$,
- $\forall k < m+2$, $(x_1^k, x_2^k, x_3^k, x_4^k) \succsim (y_1^k, y_2^k, x_3^k, x_4^k)$,
- $(x_1^{m+2}, x_2^{m+2}, x_3^{m+2}, x_4^{m+2}) \succ (y_1^{m+2}, y_2^{m+2}, x_3^{m+2}, x_4^{m+2})$,

ou, en l'exprimant différemment, $m+2$ éléments (x_1^k, x_2^k) et $m+2$ éléments (y_1^k, y_2^k) tels que

- $\forall j \in \{1, 2\}$, $(y_j^1, \ldots, y_j^{m+2})$ est une permutation de $(x_j^1, \ldots, x_j^{m+2})$,
- $\forall k < m+2$, $(x_1^k, x_2^k) \succsim_{12} (y_1^k, y_2^k)$,
- $(x_1^{m+2}, x_2^{m+2}) \succ_{12} (y_1^{m+2}, y_2^{m+2})$.

Par conséquent, l'axiome d'élimination d'ordre $(m+1)$ est violé par $\succsim_{12}$ sur $X_1 \times X_2$. Or c'est impossible car $\succsim_{12}$ est manifestement représentable par la fonction d'utilité additive $x_1 + x_2$, et parce que, pour qu'une telle fonction existe, les conditions d'élimination de tous ordres doivent être vérifiées.

Quatrième étape : s'il existe k tel que $(x_3^k, x_4^k) \succ_{34} (y_3^k, y_4^k)$

D'après (8.17), les x_3^i et les x_4^i sont tels que

- $\forall j \in \{3,4\}$, $(y_j^1, \ldots, y_j^{m+2})$ est une permutation de $(x_j^1, \ldots, x_j^{m+2})$,
- $\forall k < m+2$, $(x_3^k, x_4^k) \succsim_{34} (y_3^k, y_4^k)$,
- $(x_3^{m+2}, x_4^{m+2}) \succ_{34} (y_3^{m+2}, y_4^{m+2})$,

ce qui caractérise une violation de la condition d'élimination d'ordre $(m+1)$ par la relation de préférence $\succsim_{34}$.

Soient $Y = \mathbb{R} \times \{0, 2, 4, \ldots, 2m\}$ et $\succsim^*$ la relation de préférence représentable sur Y par la fonction d'utilité suivante :

$$h(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2 & si \quad x_2 < 2m, \\ 0.5(x_1 \bmod 2)^2 + 2(x_1 \operatorname{div} 2) + m^2 + 2m - 2.5 & si \quad x_2 = 2m. \end{cases}$$

Ainsi, la relation $\succsim^*$ correspond à celle de la page 89, dont on sait d'après le lemme 6.1 qu'elle vérifie (C_{m+1}).

Remarquons que $X_3 = \{0, \ldots, m^2\} \subset \mathbb{R}$ et $X_4 = \{0, 2(m-1), 2m\} \subset \{0, 2, \ldots, 2m\}$, de telle sorte que

$$X_3 \times X_4 \subset Y.$$

De plus,

$$\forall (x_3, x_4) \in X_3 \times X_4,\ g(x_3, x_4) = h(x_3, x_4)\ ;$$

en effet,

- si $x_4 < 2m$, la définition de g est identique à celle de h ;
- si $x_4 = 2m$ et x_3 est pair, alors $\frac{1}{2}(x_3 \bmod 2)^2 + 2(x_3 \operatorname{div} 2) = x_3$, et, par voie de conséquence,

$$\begin{aligned} h(x_3, x_4) &= \frac{1}{2}(x_3 \bmod 2)^2 + 2(x_3 \operatorname{div} 2) + m^2 + 2m - 2.5 \\ &= x_3 + m^2 + 2m - 2.5 \\ &= g(x_3, x_4)\ ; \end{aligned}$$

- si $x_4 = 2m$ et x_3 est impair, alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x_3 \bmod 2)^2 + 2(x_3 \operatorname{div} 2) &= \frac{1}{2} + x_3 - 1 \\ &= x_3 - \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

  de telle sorte que

$$\begin{aligned} h(x_3, x_4) &= x_3 - \frac{1}{2} + m^2 + 2m - 2.5 \\ &= x_3 + m^2 + 2m - 3 \\ &= g(x_3, x_4). \end{aligned}$$

Par conséquent, une violation de la condition d'élimination d'ordre $(m+1)$ par $\succsim_{34}$ entraîne une violation de la même condition par $\succsim^*$ sur Y, ce qui contredit le lemme 6.1.

Ainsi $\succsim$ doit nécessairement vérifier l'axiome d'élimination d'ordre $(m+1)$, et, par conséquent, le lemme 8.1 est bien vérifié. ♦

Lemme 8.2 *Soient $X = X_1 \times X_2 \times X_3$ et $\succsim$ un préordre large total sur X tels que $\succsim$ vérifie l'axiome d'indépendance (voir page 23) et tels que les deux premiers composants de X vérifient la solvabilité restreinte (voir page 41). Si*

$$(x_1, x_2, x_3) \precsim (y_1, y_2, y_3) \precsim (z_1, z_2, x_3),$$

alors il existe $(a_1, a_2, x_3) \in X$ tel que $(a_1, a_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3)$.

Démonstration du lemme 8.2 : Supposons que

$$(x_1, x_2, x_3) \precsim (y_1, y_2, y_3) \precsim (z_1, z_2, x_3).$$

$\succsim_1$ et $\succsim_2$ sont des préordres larges totaux bien définis puisque l'axiome d'indépendance est vérifié. Donc, puisque $(x_1, x_2, x_3) \precsim (z_1, z_2, x_3)$, soit $x_1 \precsim_1 z_1$, soit $x_2 \precsim_2 z_2$.

- Si $x_1 \precsim_1 z_1$, alors
  - soit $(x_1, z_2, x_3) \precsim (y_1, y_2, y_3)$:
    auquel cas $(x_1, z_2, x_3) \precsim (y_1, y_2, y_3) \precsim (z_1, z_2, x_3)$, ce qui, d'après la solvabilité restreinte par rapport au premier composant, implique qu'il existe $a_1 \in X_1$ tel que $(y_1, y_2, y_3) \sim (a_1, z_2, x_3)$,
  - soit $(x_1, z_2, x_3) \succsim (y_1, y_2, y_3)$:
    auquel cas $(x_1, x_2, x_3) \precsim (y_1, y_2, y_3) \precsim (x_1, z_2, x_3)$, ce qui implique, d'après la solvabilité restreinte par rapport au second composant, qu'il existe $a_2 \in X_2$ tel que $(y_1, y_2, y_3) \sim (x_1, a_2, x_3)$.
- Si $x_2 \precsim_2 z_2$, alors
  - soit $(z_1, x_2, x_3) \precsim (y_1, y_2, y_3)$:
    auquel cas $(z_1, x_2, x_3) \precsim (y_1, y_2, y_3) \precsim (z_1, z_2, x_3)$, ce qui, d'après la solvabilité restreinte par rapport au second composant, implique qu'il existe $a_2 \in X_2$ tel que $(y_1, y_2, y_3) \sim (z_1, a_2, x_3)$,
  - soit $(z_1, x_2, x_3) \succsim (y_1, y_2, y_3)$:
    auquel cas $(x_1, x_2, x_3) \precsim (y_1, y_2, y_3) \precsim (z_1, x_2, x_3)$, ce qui implique, d'après la solvabilité restreinte par rapport au premier composant, qu'il existe $a_1 \in X_1$ tel que $(y_1, y_2, y_3) \sim (a_1, x_2, x_3)$.

♦

Lemme 8.3 *Soient $X = X_1 \times X_2 \times \{a_3, b_3\}$ et $\succsim$ un préordre large total sur X tels que $\succsim$ vérifie l'axiome d'indépendance (voir page 23), tels que les deux premiers composants vérifient la solvabilité restreinte (voir page 41), et tels que $a_3 \prec_3 b_3$. Soit*

$Y = \{(y_1, y_2, y_3) \in X : \exists (x_1, x_2, x_3) \in X$ *tel que* $(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3)$ *et* $y_3 \neq x_3\}$.

Si $Y \neq \emptyset$ et $X \backslash Y \neq \emptyset$, alors pour tout $(y_1, y_2, y_3) \in Y$,

$$\begin{array}{l} (x_1, x_2, a_3) \prec (y_1, y_2, y_3) \ , \ \forall (x_1, x_2, a_3) \in X \backslash Y \\ (y_1, y_2, y_3) \prec (x_1, x_2, b_3) \ , \ \forall (x_1, x_2, b_3) \in X \backslash Y. \end{array} \tag{8.18}$$

Démonstration du lemme 8.3 : Si $Y = \emptyset$, le lemme est trivialement vérifié. Supposons donc que $Y \neq \emptyset$. Nous allons utiliser une démonstration par l'absurde. Soient $(x_1, x_2, a_3) \in X \backslash Y$ et $(y_1, y_2, y_3) \in Y$ tels que

$$(y_1, y_2, y_3) \precsim (x_1, x_2, a_3), \tag{8.19}$$

contredisant ainsi (8.18). Puisque $(y_1, y_2, y_3) \in Y$, et d'après la définition de Y, il existe $(z_1, z_2, b_3) \in Y$ tel que $(z_1, z_2, b_3) \sim (y_1, y_2, y_3)$. ainsi (8.19) est équivalent à

$$(z_1, z_2, b_3) \precsim (x_1, x_2, a_3). \tag{8.20}$$

D'après la définition de $\prec_3$ et l'axiome d'indépendance, et puisque $a_3 \prec_3 b_3$, $(x_1, x_2, a_3) \prec (x_1, x_2, b_3)$; donc, d'après (8.20), l'équation suivante est vraie :

$$(z_1, z_2, b_3) \precsim (x_1, x_2, a_3) \prec (x_1, x_2, b_3). \tag{8.21}$$

Mais alors, d'après le lemme 8.2, il existe b_1, b_2 tels que $(x_1, x_2, a_3) \sim (b_1, b_2, b_3)$, ce qui contredit l'hypothèse que $(x_1, x_2, a_3) \in X \backslash Y$. Par conséquent, si $(x_1, x_2, a_3) \in X \backslash Y$, (8.19) ne peut être vérifiée, et réciproquement. Une démonstration similaire montrerait que $(y_1, y_2, y_3) \prec (x_1, x_2, b_3)$. ♦

Lemme 8.4 *Soient $X = X_1 \times X_2 \times \{a_3, b_3\}$ et $\succsim$ un préordre large total sur X. Supposons que $\succsim$ vérifie l'axiome d'indépendance (voir page 23), que les deux premiers composants de X soient essentiels (voir page 43) et vérifient la solvabilité restreinte ainsi que la condition de Thomsen (voir page 24). Supposons en outre que le nouvel axiome archimédien (voir page 175) et l'axiome de conservation d'échelle (voir page 170) soient vérifiés, et que $a_3 \precsim_3 b_3$. Alors, il existe des fonctions $f_1 : X_1 \to \mathbb{R}$, $f_2 : X_2 \to \mathbb{R}$ et $f_3 : \{a_3, b_3\} \to \mathbb{R}$ telles que :*

$$\forall x, y \in X_1 \times X_2 \times \{a_3, b_3\},\ x \precsim y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{3} f_i(x_i) \leq \sum_{i=1}^{3} f_i(y_i).$$

De plus, si $g_1 : X_1 \to \mathbb{R}$, $g_2 : X_2 \to \mathbb{R}$ et $g_3 : \{a_3, b_3\} \to \mathbb{R}$ satisfont aussi l'équivalence ci-dessus, alors il existe des constantes réelles $\alpha > 0$, α_1, α_2, α_3 et α_4 telles que :

$$\begin{cases} \forall x_1 \in X_1,\ \ g_1(x_1) = \alpha \cdot f_1(x_1) + \alpha_1 \\ \forall x_2 \in X_2,\ \ g_2(x_2) = \alpha \cdot f_2(x_2) + \alpha_2 \\ \textit{si } \exists\, x_1, y_1 \in X_1 \textit{ et si } \exists\, x_2, y_2 \in X_2 \textit{ tels que } (x_1, x_2, a_3) \sim (y_1, y_2, b_3) \\ \quad \textit{alors} \quad g_3(x_3) = \alpha \cdot f_3(x_3) + \alpha_3,\ \forall x_3 \in \{a_3, b_3\} \\ \quad \textit{sinon} \quad g_3(a_3) = \alpha \cdot f_3(a_3) + \alpha_3 \textit{ et } g_3(b_3) = \alpha \cdot f_3(b_3) + \alpha_4 \\ \qquad\qquad \textit{où } \alpha_4 \geq \alpha_3 + \alpha \cdot [f_3(a_3) + \sup_{x_1,x_2}\{f_1(x_1) + f_2(x_2)\}] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - \alpha \cdot [f_3(b_3) + \inf_{x_1,x_2}\{f_1(x_1) + f_2(x_2)\}] \\ \qquad\qquad \textit{avec une égalité seulement si l'}\inf \textit{ et/ou le} \sup \textit{ n'est pas atteint.} \end{cases}$$

Démonstration du lemme 8.4 : La démonstration est constructive : dans la première étape, on montre en utilisant le théorème classique de représentation de Krantz, Luce, Suppes, et Tversky (1971), ou bien le corollaire 8.1 de la page 161 que $\succsim_{12}$ est représentable par une fonction d'utilité additive. D'après la définition de $\succsim_{12}$, $\succsim$ est alors représentable par une utilité additive sur $X_1 \times X_2 \times \{a_3\}$ et sur $X_1 \times X_2 \times \{b_3\}$.

Dans la seconde étape, la définition de cette utilité est étendue de manière à représenter $\succsim$ sur tout X. A cet effet, on montre que si une utilité additive, f, existe, alors certaines relations doivent exister entre $f_3(a_3)$ et $f_3(b_3)$; ensuite, on montre que ces relations ne sont pas seulement nécessaires, mais qu'elles sont aussi suffisantes pour la représentabilité additive ; pour cela, deux cas principaux sont examinés :

- premier cas : aucun élément de $X_1 \times X_2 \times \{a_3\}$ n'est indifférent à un élément de $X_1 \times X_2 \times \{b_3\}$; dans ce cas, on montre que tous les éléments de $X_1 \times X_2 \times \{a_3\}$ sont strictement non préférés aux éléments de $X_1 \times X_2 \times \{b_3\}$. Ensuite, on montre que f_1 et f_2 sont forcément bornées ; soient γ et δ respectivement les bornes supérieures et inférieures de $\{f_1(x_1) + f_2(x_2) : (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2\}$. Alors, il est relativement facile de voir qu'une condition nécessaire et suffisante pour que f représente $\succsim$ sur X est que $f_3(b_3) - f_3(a_3)$ soit supérieur à $\gamma - \delta$.

- second cas : il existe au moins un élément de $X_1 \times X_2 \times \{a_3\}$ indifférent à un élément de $X_1 \times X_2 \times \{b_3\}$. Le type de démonstration utilisé pour montrer que f représente $\succsim$ sur X nécessite de distinguer le cas où X est borné du cas où il ne l'est pas.

Afin d'éviter de multiplier les sous-cas, on montre dans une première sous-étape qu'il est suffisant de prouver que f représente $\succsim$ sur un certain ensemble borné $Z \subset X$, pour montrer que f représente aussi $\succsim$ sur la totalité de l'ensemble X. Dans la deuxième sous-étape, on restreint encore l'espace de travail en montrant que si f représente $\succsim$ sur Y — où Y est le sous-ensemble de Z tel que tout $(x_1, x_2, a_3) \in Y$ (resp. $(x_1, x_2, b_3) \in Y$) est indifférent à un élément $(y_1, y_2, b_3) \in Z$ (resp. $(y_1, y_2, a_3) \in Z$) — alors f représente aussi $\succsim$ sur Z. La troisième sous-étape est consacrée à montrer que f représente $\succsim$ sur Y. Pour cela, trois sous-cas doivent être étudiés :

- premier sous-cas : a_3 et b_3 sont directement-unidimensionnellement-joignables grâce au premier composant. La démonstration consiste à partitioner $Z_1 \times Z_2 \times \{a_3\} \cap Y$ en une suite de sous-ensembles et à montrer que tout élément de chaque sous-ensemble est indifférent à un élément de $Z_1 \times Z_2 \times \{b_3\}$ et que les images des de ces deux éléments par f sont égales. La démonstration requiert 4 sous-sous-étapes. Dans la première, on montre que la propriété ci-dessus est vérifiée par le premier sous-ensemble. La suite de sous-ensembles est telle que deux sous-ensembles consécutifs sont adjacents ; en utilisant ce fait, on montre dans la deuxième sous-sous-étape que la propriété sur le premier sous-ensemble s'étend tout naturellement au deuxième, et par récurrence, que si la propriété est vérifiée par le $k^{\text{ème}}$ sous-ensemble, elle l'est aussi par le $k+1^{\text{ème}}$. Cette sous-sous-étape s'achève par la démonstration — grâce au nouvel axiome archimédien — que la séquence de sous-ensembles est finie. La troisième sous-sous-étape montre comment la récurrence se termine, c'est-à-dire comment la propriété s'étend sur le dernier sous-ensemble. Enfin la quatrième et dernière sous-sous-étape est consacrée à conclure sur le travail effectué dans les trois premières.
- second sous-cas : a_3 et b_3 sont directement-unidimensionnellement-joignables grâce au second composant. De par la symétrie entre les deux premiers composants, la démonstration est similaire au premier sous-cas.
- troisième sous-cas : a_3 et b_3 ne sont pas directement-unidimensionnellement-joignables. Alors, on montre facilement que l'axiome de conservation d'échelle induit la représentabilité additive.

Première étape : $\succsim_{12}$ est représentable par une utilité additive

L'axiome d'indépendance est vérifié ; donc $\succsim_{12}$ est un préordre large total bien défini. D'après les hypothèses du lemme 8.4, $(X_1 \times X_2, \succsim_{12})$ vérifie donc l'indépendance, la condition de Thomsen, et est tel que tous les composants sont essentiels et vérifient la solvabilité restreinte ainsi que l'axiome archimédien classique (voir page 38). Par conséquent, le (classique) théorème 13 de Krantz, Luce, Suppes, et Tversky (1971, page 302) ou le corollaire 8.1 (voir page 161) sont applicables. Aussi, $\succsim_{12}$ est représentable par une fonction d'utilité additive $f_1 + f_2$, avec $f_1 : X_1 \to \mathbb{R}$ et $f_2 : X_2 \to \mathbb{R}$. En d'autres

termes

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2,\ (x_1, x_2) \succsim_{12} (y_1, y_2) \Leftrightarrow f_1(x_1) + f_2(x_2) \geq f_1(y_1) + f_2(y_2)\ ;$$

de plus, la représentabilité additive est cardinale, c'est-à-dire que les représentations additives sont uniques à une transformation affine strictement positive près.

Maintenant, rappelons que d'après la définition de $\succsim_{12}$ donnée page 23, $(x_1, x_2) \succsim_{12} (y_1, y_2)$ si et seulement si $\exists x_3 \in \{a_3, b_3\}$ tel que $(x_1, x_2, x_3) \succsim (y_1, y_2, x_3)$, ce qui implique, par indépendance par rapport au troisième composant :

$$(x_1, x_2) \succsim_{12} (y_1, y_2) \Leftrightarrow (x_1, x_2, a_3) \succsim (y_1, y_2, a_3) \Leftrightarrow (x_1, x_2, b_3) \succsim (y_1, y_2, b_3).$$

Donc, quels que soient les nombres réels $f_3(a_3)$ et $f_3(b_3)$, et pour tous $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$, on a

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, a_3) \succsim (y_1, y_2, a_3) &\Leftrightarrow f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(a_3) \geq f_1(y_1) + f_2(y_2) + f_3(a_3),\\ (x_1, x_2, b_3) \succsim (y_1, y_2, b_3) &\Leftrightarrow f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(b_3) \geq f_1(y_1) + f_2(y_2) + f_3(b_3),\end{aligned}$$

et, de plus, les fonctions $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$, $f_3(\cdot)$ sur $\{a_3\}$ et $f_3(\cdot)$ sur $\{b_3\}$ sont uniques à une transformation affine strictement positive près. Afin d'obtenir une utilité additive sur X, il est suffisant (et nécessaire) de choisir $f_3(a_3)$ et $f_3(b_3)$ tels que, pour tous $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$, et tous $x_3, y_3 \in \{a_3, b_3\}$ tels que $x_3 \neq y_3$,

$$(x_1, x_2, x_3) \succsim (y_1, y_2, y_3) \Leftrightarrow f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) \geq f_1(y_1) + f_2(y_2) + f_3(y_3). \quad (8.22)$$

La suite de la démonstration consiste à montrer que de telles valeurs de $f_3(a_3)$ et $f_3(b_3)$ existent.

Seconde étape : extension de f afin de représenter $\succsim$ sur la totalité de X

Premier cas : s'il n'existe aucun $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$ tels que $(x_1, x_2, a_3) \sim (y_1, y_2, b_3)$:

première sous-étape : Supposons qu'il existe des éléments $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$ tels que $(x_1, x_2, a_3) \succsim (y_1, y_2, b_3)$. Alors, puisque $a_3 \prec_3 b_3$,

$$(y_1, y_2, a_3) \prec (y_1, y_2, b_3) \precsim (x_1, x_2, a_3),$$

ce qui implique d'après le lemme 8.2 qu'il existe $(a_1, a_2) \in X_1 \times X_2$ tel que $(y_1, y_2, b_3) \sim (a_1, a_2, a_3)$, contredisant ainsi l'hypothèse du cas actuel. C'est pourquoi $(x_1, x_2, a_3) \succsim (y_1, y_2, b_3)$ est impossible et donc

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2,\ (x_1, x_2, a_3) \prec (y_1, y_2, b_3).$$

deuxième sous-étape : Supposons que f_1 ne soit pas bornée supérieurement ; alors, pour tout nombre réel r, il existe un élément $x_1(r) \in X_1$ tel que $f_1(x_1(r)) \geq r$. Par hypothèse du lemme 8.4, le second composant est essentiel ; il existe donc $x_2^0, x_2^1 \in X_2$ tels que $x_2^1 \succ_2 x_2^0$. Aussi,

$$\forall x_1^0 \in X_1,\ (x_1^0, x_2^0, a_3) \prec (x_1^0, x_2^1, a_3).$$

Mais alors, si $r = f_2(x_2^1) - f_2(x_2^0) + f_1(x_1^0)$, on sait qu'il existe $x_1^1 = x_1(r)$ dans X_1 tel que

$$f_1(x_1^1) \geq r = f_2(x_2^1) - f_2(x_2^0) + f_1(x_1^0),$$

ou, d'une manière équivalente, tel que

$$f_1(x_1^1) + f_2(x_2^0) \geq f_1(x_1^0) + f_2(x_2^1).$$

f étant une fonction d'utilité sur $X_1 \times X_2 \times \{a_3\}$, l'inégalité ci-dessus est équivalente à

$$(x_1^0, x_2^1, a_3) \precsim (x_1^1, x_2^0, a_3).$$

X étant un produit cartésien, (x_1^1, x_2^1, a_3) appartient à X. En réitérant le processus ci-dessus avec $r = f_2(x_2^1) - f_2(x_2^0) + f_1(x_1^1)$, on peut obtenir un élément $x_1^2 \in X_1$ tel que

$$(x_1^1, x_2^1, a_3) \precsim (x_1^2, x_2^0, a_3).$$

Par récurrence, on peut trouver une suite infinie $(x_1^k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

- $(x_1^k, x_2^1, a_3) \precsim (x_1^{k+1}, x_2^0, a_3)$, $\forall k \in \mathbb{N}$,
- $x_2^1 \succ_2 x_2^0$.

Par conséquent, d'après la définition 8.4, $(x_1^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une séquence sur-standard. De plus, elle est infinie et bornée par (x_1^0, x_2^0, a_3) et (x_1^0, x_2^0, b_3) (d'après la conclusion de la sous-étape précédente). Mais c'est impossible car cela contredirait le nouvel axiome archimédien (qui est supposé être vérifié selon les hypothèses du lemme 8.4). Par conséquent, f_1 doit être bornée supérieurement. De la même manière, on montre aisément que f_1 est bornée inférieurement. Donc f_1 est bornée. Par symétrie entre les deux premiers composants, f_2 est aussi bornée.

troisième sous-étape : Soient $\gamma = \sup_{x_1,x_2}\{f_1(x_1) + f_2(x_2)\}$ et $\delta = \inf_{x_1,x_2}\{f_1(x_1) + f_2(x_2)\}$.

Supposons que $f_3(b_3) < f_3(a_3)+\gamma-\delta$; soit $\xi \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f_3(b_3) = f_3(a_3)+\gamma-\delta-\xi$. Par définition du sup, pour tout nombre réel strictement positif ϵ, il existe $x_1^\gamma(\epsilon), x_2^\gamma(\epsilon)$ tels que $f_1(x_1^\gamma(\epsilon)) + f_2(x_2^\gamma(\epsilon)) \geq \gamma - \epsilon$. De même, pour tout réel strictement positif ϵ, il existe $x_1^\delta(\epsilon), x_2^\delta(\epsilon)$ tels que $f_1(x_1^\delta(\epsilon)) + f_2(x_2^\delta(\epsilon)) \leq \delta + \epsilon$. Maintenant, pour $\epsilon < \xi/2$,

$$\begin{aligned} &f_1(x_1^\delta(\epsilon)) + f_2(x_2^\delta(\epsilon)) + f_3(b_3) \leq f_3(b_3) + \delta + \epsilon < f_3(b_3) + \delta + \xi/2 = \\ &f_3(a_3) + \gamma - \xi/2 \leq f_3(a_3) + \gamma - \epsilon \leq f_1(x_1^\gamma(\epsilon)) + f_2(x_2^\gamma(\epsilon)) + f_3(a_3). \end{aligned}$$

Par conséquent, f ne peut représenter $\succsim$ parce que, d'après la première sous-étape de ce cas, $(x_1^\gamma(\epsilon), x_2^\gamma(\epsilon), a_3) \prec (x_1^\delta(\epsilon), x_2^\delta(\epsilon), b_3)$. Donc l'inégalité suivante est une condition nécessaire pour que f représente $\succsim$.

$$f_3(a_3) + \gamma - \delta \leq f_3(b_3). \tag{8.23}$$

Si γ et δ peuvent tous les deux être atteints, alors il existe $x_1^\gamma, x_1^\delta \in X_1$ et $x_2^\gamma, x_2^\delta \in X_2$ tels que $f_1(x_1^\gamma) + f_2(x_2^\gamma) = \gamma$ et $f_1(x_1^\delta) + f_2(x_2^\delta) = \delta$. Pour représenter $\succsim$, $f_3(b_3)$

ne peut pas être égal à $f_3(a_3) + \gamma - \delta$ parce que, sinon, $(x_1^\gamma, x_2^\gamma, a_3) \prec (x_1^\delta, x_2^\delta, b_3)$ et $f_1(x_1^\gamma) + f_2(x_2^\gamma) + f_3(a_3) = f_1(x_1^\delta) + f_2(x_2^\delta) + f_3(b_3)$. Donc, dans ce cas, une condition nécessaire pour la représentabilité additive est que

$$f_3(a_3) + \gamma - \delta < f_3(b_3). \tag{8.24}$$

C'est aussi une condition suffisante car, par définition du sup, pour tout $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, $f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(a_3) \leq f_1(x_1^\gamma) + f_2(x_2^\gamma) + f_3(a_3)$; mais f défini selon (8.24) étant une fonction d'utilité additive sur $X_1 \times X_2 \times \{a_3\}$, c'est équivalent à $(x_1, x_2, a_3) \precsim (x_1^\gamma, x_2^\gamma, a_3)$. De même, d'après la définition de l'inf et le fait que f défini selon (8.24) est aussi une fonction d'utilité additive sur $X_1 \times X_2 \times \{b_3\}$, pour tout $(y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$, $(x_1^\delta, x_2^\delta, b_3) \precsim (y_1, y_2, b_3)$. Par conséquent, (8.24) implique l'équation suivante

$$\forall x_1, y_1 \in X_1, x_2, y_2 \in X_2,\ (x_1, x_2, a_3) \precsim (x_1^\gamma, x_2^\gamma, a_3) \prec (x_1^\delta, x_2^\delta, b_3) \precsim (y_1, y_2, b_3),$$

et

$$\begin{array}{l} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(a_3) \leq f_1(x_1^\gamma) + f_2(x_2^\gamma) + f_3(a_3) < \\ f_1(x_1^\delta) + f_2(x_2^\delta) + f_3(b_3) \leq f_1(y_1) + f_2(y_2) + f_3(b_3). \end{array}$$

Si γ ne peut être atteint, alors, pour tout $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, (8.23) implique que

$$f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(a_3) < \gamma + f_3(a_3) \leq \delta + f_3(b_3) \leq f_1(y_1) + f_2(y_2) + f_3(b_3),$$

et donc f représente $\succsim$ sur X. La même démarche est applicable si δ n'est pas atteint.

Pour résumer, une condition nécessaire et suffisante pour que f représente $\succsim$ sur X est que

- $f_3(a_3) + \gamma - \delta < f_3(b_3)$ si γ et δ peuvent tous les deux être atteints,
- $f_3(a_3) + \gamma - \delta \leq f_3(b_3)$ si au moins une des bornes, γ ou δ, ne peut être atteinte.

Second cas : il existe $(x_1^0, x_1^1, x_2^0, x_2^1)$ tel que $(x_1^0, x_2^0, a_3) \sim (x_1^1, x_2^1, b_3)$:

première sous-étape : limitation de l'espace de travail

Par la suite, pour tout ensemble fini $A_1 \subset X_1$, $\min_{\succsim_1} A_1$ représente l'élément x_1 de A_1 tel que, pour tout $y_1 \in A_1$, $x_1 \precsim_1 y_1$. Des définitions similaires existent pour $\max_{\succsim_1}$, $\min_{\succsim_2}$, et $\max_{\succsim_2}$. De plus, pour tous $x_i, y_i \in X_i$, on note $[x_i, y_i]$ l'ensemble $\{z_i \in X_i : x_i \precsim_i z_i \precsim_i y_i\}$.

Il est clair que l'égalité suivante est une condition nécessaire à l'existence d'utilités additives :

$$f_3(b_3) = f_3(a_3) + f_1(x_1^0) - f_1(x_1^1) + f_2(x_2^0) - f_2(x_2^1). \tag{8.25}$$

On sait déjà que f, défini selon (8.25), représente $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times \{a_3\}$ et sur $X_1 \times X_2 \times \{b_3\}$; donc, pour prouver qu'elle représente $\succsim$ sur X, il est suffisant de montrer que, pour tous $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in X$ tels que $x_3 \neq y_3$,

$$(x_1, x_2, x_3) \succsim (y_1, y_2, y_3) \Leftrightarrow f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) \geq f_1(y_1) + f_2(y_2) + f_3(y_3).$$

Puisque $\succsim$ est une relation complète, l'équivalence ci-dessus est équivalente à

$$(x_1, x_2, x_3) \succsim (y_1, y_2, y_3) \Rightarrow f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) \geq f_1(y_1) + f_2(y_2) + f_3(y_3),$$

pour tous $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in X$ tels que $x_3 \neq y_3$.

Si a_3 et b_3 sont unidimensionnellement-joignables dans X, alors soit :

i) il existe $z_1^1, z_1^2 \in X_1$ tels que $z_1^2 \succ_1 z_1^1$ et $(z_1^2, z_2, a_3) \sim (z_1^1, z_2, b_3)$ et, comme le second composant est essentiel, il existe aussi $z_2^1, z_2^2 \in X_2$ tels que $z_2^2 \succ_2 z_2^1$;

ii) il existe $z_2^1, z_2^2 \in X_2$ tels que $z_2^2 \succ_2 z_2^1$ et $(z_1, z_2^2, a_3) \sim (z_1, z_2^1, b_3)$ et, comme le premier composant est essentiel, il existe aussi $z_1^1, z_1^2 \in X_1$ tels que $z_1^2 \succ_1 z_1^1$.

Si a_3 et b_3 ne sont pas unidimensionnellement-joignables dans X, alors puisque les deux premiers composants de X sont essentiels, il existe z_1^1, z_1^2, z_2^1 et z_2^2 tels que $z_1^2 \succ_1 z_1^1$ et $z_2^2 \succ_2 z_2^1$. Maintenant, si, pour tout couple d'éléments arbitraires de X, (x_1^2, x_2^2, a_3) et (x_1^3, x_2^3, b_3), il existe des nombres réels $f_3(a_3)$ et $f_3(b_3)$ tels que f représente $\succsim$ sur $Z = Z_1 \times Z_2 \times \{a_3, b_3\}$, où

$$Z_1 = [\underline{z_1}, \overline{z_1}]\,, \quad \underline{z_1} = \min_{\succsim_1}\{x_1^0, x_1^1, x_1^2, x_1^3, z_1^1, z_1^2\}, \quad \overline{z_1} = \max_{\succsim_1}\{x_1^0, x_1^1, x_1^2, x_1^3, z_1^1, z_1^2\},$$
$$Z_2 = [\underline{z_2}, \overline{z_2}]\,, \quad \underline{z_2} = \min_{\succsim_2}\{x_2^0, x_2^1, x_2^2, x_2^3, z_2^1, z_2^2\}, \quad \overline{z_2} = \max_{\succsim_2}\{x_2^0, x_2^1, x_2^2, x_2^3, z_2^1, z_2^2\},$$

alors on peut prouver que f, défini selon (8.25), représente aussi $\succsim$ sur la totalité de X ; en effet, puisque (x_1^0, x_2^0, a_3) et (x_1^1, x_2^1, b_3) appartiennent à Z, f représente Z seulement si (8.25) est vérifiée, de telle sorte que les nombres réels $f_3(a_3)$ et $f_3(b_3)$ ne dépendent pas de (x_1^2, x_2^2, a_3) et (x_1^3, x_2^3, b_3) ; par conséquent, f est bien défini sur X. De plus, puisque (x_1^2, x_2^2, a_3) et (x_1^3, x_2^3, b_3) sont arbitraires, f représente bien $\succsim$ sur la totalité de X. Z correspond à une partie grisée du type de celle de la figure 8.13. z_1^1, z_1^2, z_2^1 et z_2^2

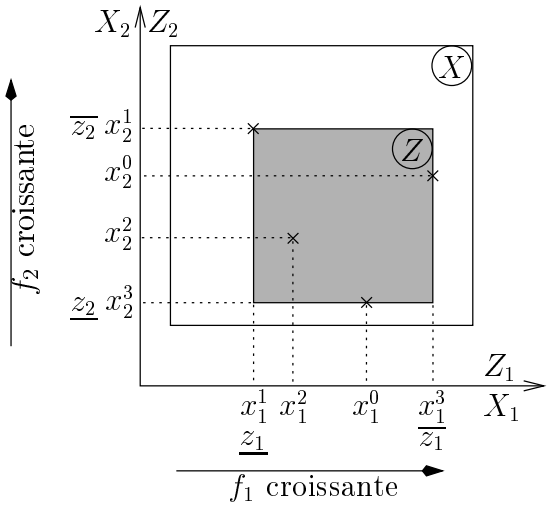


FIG. 8.13: Construction de Z.

sont nécessaires i) pour garantir que $\overline{z_1} \succ_1 \underline{z_1}$ et $\overline{z_2} \succ_2 \underline{z_2}$; ces propriétés seront utilisées seulement à la fin de la deuxième sous-sous-étape du cas 2.1, où l'on aura besoin de

construire des séquences standards de base $(\overline{z_2}, \underline{z_2})$, et, par symétrie, dans le cas 2.2 ; et ii) pour faire en sorte que l'on ne se retrouve dans le cas 2.3 que lorsque a_3 et b_3 ne sont pas unidimensionnellement-joignables dans X.

Donc, pour prouver que f, défini selon (8.25), représente $\succsim$ sur X, il est suffisant de montrer qu'elle représente $\succsim$ sur Z, et ce pour tout couple (x_1^2, x_2^2, a_3), (x_1^3, x_2^3, b_3).

deuxième sous-étape : restriction de l'espace de travail

Soient (x_1^2, x_2^2, a_3) et (x_1^3, x_2^3, b_3) deux éléments arbitraires de X ; considérons l'ensemble Z comme défini par la sous-étape précédente. Soit

$$Y = \{(x_1, x_2, x_3) \in Z : \exists\, (y_1, y_2, y_3) \in Z \text{ tel que } (y_1, y_2, y_3) \sim (x_1, x_2, x_3) \text{ et } y_3 \neq x_3\}.$$

Maintenant, supposons qu'il existe des nombres réels $f_3(a_3)$ et $f_3(b_3)$ tels que f représente $\succsim$ sur Y ; alors, puisque $(x_1^0, x_2^0, a_3), (x_1^1, x_2^1, b_3) \in Y$, (8.25) est vérifiée, de telle sorte que $f_3(a_3)$ et $f_3(b_3)$ ne dépendent pas du choix de (x_1^2, x_2^2, a_3) et de (x_1^3, x_2^3, b_3).

Supposons que f, défini selon (8.25), représente $\succsim$ sur Y. Alors, elle représente aussi $\succsim$ sur Z ; en effet, on sait déjà que f représente $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times \{a_3\}$ et sur $X_1 \times X_2 \times \{b_3\}$; donc il ne reste plus qu'à voir ce qui se passe lorsque l'on compare un élément de $X_1 \times X_2 \times \{a_3\} \cap Z$ avec un élément de $X_1 \times X_2 \times \{b_3\} \cap Z$. En d'autres termes, on doit montrer que, pour tous $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in Z$ tels que $x_3 \neq y_3$,

$$(x_1, x_2, x_3) \succsim (y_1, y_2, y_3) \Leftrightarrow f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) \geq f_1(y_1) + f_2(y_2) + f_3(y_3).$$

En fait, puisque $\succsim$ est une relation complète, il est clair que cela revient à montrer que :

$$(x_1, x_2, x_3) \succsim (y_1, y_2, y_3) \Rightarrow f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) \geq f_1(y_1) + f_2(y_2) + f_3(y_3),$$

pour tous $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in Z$ tels que $x_3 \neq y_3$. Deux sous-cas doivent alors être examinés :

premier sous-cas : si au moins un élément, (x_1, x_2, x_3) ou (y_1, y_2, y_3), appartient à Y :

Supposons que $(x_1, x_2, x_3) \succsim (y_1, y_2, y_3)$ et $x_3 \neq y_3$.

- Si $(x_1, x_2, x_3) \in Y$, alors, d'après la définition de Y, il existe $(z_1, z_2, y_3) \in Y$ tel que $(x_1, x_2, x_3) \sim (z_1, z_2, y_3)$. Mais $f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) = f_1(z_1) + f_2(z_2) + f_3(y_3)$ car, par hypothèse, f représente $\succsim$ sur Y. Par transitivité de $\succsim$, $(z_1, z_2, y_3) \succsim (y_1, y_2, y_3)$; et puisque f représente $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times \{y_3\}$, $f_1(z_1) + f_2(z_2) + f_3(y_3) \geq f_1(y_1) + f_2(y_2) + f_3(y_3)$. En combinant ces résultats, on obtient : $f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) \geq f_1(y_1) + f_2(y_2) + f_3(y_3)$.

- Si $(y_1, y_2, y_3) \in Y$, alors, d'après la définition de Y, il existe $(z_1, z_2, x_3) \in Y$ tel que $(y_1, y_2, y_3) \sim (z_1, z_2, x_3)$. Mais $f_1(y_1) + f_2(y_2) + f_3(y_3) = f_1(z_1) + f_2(z_2) + f_3(x_3)$ car, par hypothèse, f représente $\succsim$ sur Y. Par transitivité de $\succsim$, $(x_1, x_2, x_3) \succsim (z_1, z_2, x_3)$; et puisque f représente $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times \{x_3\}$, $f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) \geq f_1(z_1) + f_2(z_2) + f_3(x_3)$. En combinant ces résultats, on obtient : $f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) \geq f_1(y_1) + f_2(y_2) + f_3(y_3)$.

deuxième sous-cas : les deux éléments, (x_1, x_2, x_3) *et* (y_1, y_2, y_3)*, appartiennent à* $Z \backslash Y$ *:*

Supposons que $(x_1, x_2, x_3) \succsim (y_1, y_2, y_3)$, $x_3 \neq y_3$ et $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in Z \backslash Y$. $Y \neq \emptyset$ car $(x_1^0, x_2^0, a_3), (x_1^1, x_2^1, b_3) \in Y$ et $Z \backslash Y \neq \emptyset$ car $(x_1, x_2, x_3) \in Z \backslash Y$. Donc d'après le lemme 8.3 de la page 191, $x_3 = b_3$, $y_3 = a_3$ et

$$(x_1, x_2, b_3) \succ (x_1^1, x_2^1, b_3) \sim (x_1^0, x_2^0, a_3) \succ (y_1, y_2, a_3).$$

Puisque f représente $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times \{b_3\}$,

$$f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(b_3) > f_1(x_1^1) + f_2(x_2^1) + f_3(b_3) \ ;$$

puisque f représente $\succsim$ sur Y,

$$f_1(x_1^1) + f_2(x_2^1) + f_3(b_3) = f_1(x_1^0) + f_2(x_2^0) + f_3(a_3) \ ;$$

puisque f représente $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times \{a_3\}$,

$$f_1(x_1^0) + f_2(x_2^0) + f_3(a_3) > f_1(y_1) + f_2(y_2) + f_3(a_3).$$

Par transitivité sur tous ces résultats, on obtient : $f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) \geq f_1(y_1) + f_2(y_2) + f_3(y_3)$.

Par conséquent, dans tous les cas, si f, défini selon (8.25), représente $\succsim$ sur Y — ce qui revient à :

$$(x_1, x_2, x_3) \succsim (y_1, y_2, y_3) \Rightarrow f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) \geq f_1(y_1) + f_2(y_2) + f_3(y_3), \quad (8.26)$$

pour tous $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in Y$ — alors, f représente aussi $\succsim$ sur Z. Donc, dans la suite de la démonstration, il est suffisant de montrer que f représente $\succsim$ sur Y, Y étant défini par des éléments (x_1^2, x_2^2, a_3) et (x_1^3, x_2^3, b_3) arbitraires.

troisième sous-étape : f représente $\succsim$ sur Y

Cas 2.1 : si $(\underline{z_1}, \underline{z_2}, b_3) \precsim (\overline{z_1}, \underline{z_2}, a_3)$: (8.27)

Ce cas est illustré par la figure 8.14, dans laquelle les rectangles correspondent aux espaces $Z_1 \times Z_2 \times \{a_3\}$ et $Z_1 \times Z_2 \times \{b_3\}$, et les parties grisées aux éléments de Y. Sur cette figure, j'ai supposé que plus les éléments sont vers la droite ou vers le haut des hyperplans $Z_1 \times Z_2 \times \{a_3\}$ et $Z_1 \times Z_2 \times \{b_3\}$, plus ils sont préférés. La figure 8.15 illustre les différents éléments de Y examinés par chacune des sous-sous-étapes ci-dessous.

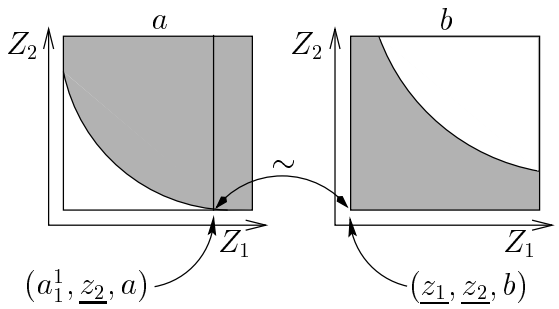


FIG. 8.14: Le cas 2.1.

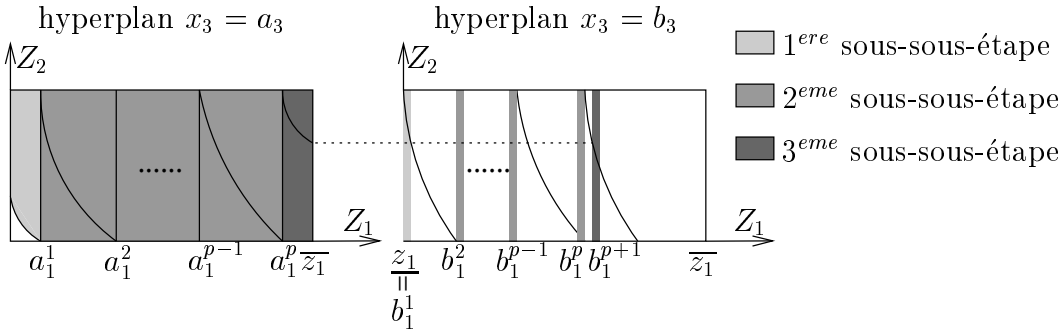


FIG. 8.15: Les régions générées par les sous-sous-étapes du cas 2.1.

première sous-sous-étape : génération de la région ▭

Puisque $a_3 \prec_3 b_3$, $(\underline{z_1}, \underline{z_2}, a_3) \prec (\underline{z_1}, \underline{z_2}, b_3)$, ce qui, combiné avec (8.27), implique que $(\underline{z_1}, \underline{z_2}, a_3) \prec (\underline{z_1}, \underline{z_2}, b_3) \precsim (\overline{z_1}, \underline{z_2}, a_3)$. Par conséquent, par solvabilité restreinte par rapport au premier composant, il existe $a_1^1 \in Z_1$ tel que

$$(a_1^1, \underline{z_2}, a_3) \sim (\underline{z_1}, \underline{z_2}, b_3). \tag{8.28}$$

Supposons que

$$f_3(b_3) = f_3(a_3) + f_1(a_1^1) - f_1(\underline{z_1}) \ ; \tag{8.29}$$

il est clair que (8.29) est une condition nécessaire pour l'existence de fonctions d'utilité additives. Maintenant, d'après l'axiome d'indépendance

$$\forall z_2 \in Z_2,\ (a_1^1, z_2, a_3) \sim (\underline{z_1}, z_2, b_3) \text{ et } f_1(a_1^1) + f_2(z_2) + f_3(a_3) = f_1(\underline{z_1}) + f_2(z_2) + f_3(b_3). \tag{8.30}$$

Considérons un élément arbitraire $(z_1, z_2, a_3) \in Y$ tel que $z_1 \precsim_1 a_1^1$. D'après la définition de $\underline{z_1}$ et de $\underline{z_2}$, $(z_1, z_2, a_3) \succsim (\underline{z_1}, \underline{z_2}, b_3)$; d'après (8.28) et la transitivité de $\succsim$, $(z_1, z_2, a_3) \succsim (a_1^1, \underline{z_2}, a_3)$. Mais puisque $z_1 \precsim_1 a_1^1$, $(z_1, z_2, a_3) \precsim (a_1^1, z_2, a_3)$. En combinant tous ces résultats, on obtient :

$$(a_1^1, \underline{z_2}, a_3) \precsim (z_1, z_2, a_3) \precsim (a_1^1, z_2, a_3),$$

ce qui implique, par solvabilité restreinte par rapport au deuxième composant, qu'il existe $y_2 \in Z_2$ tel que

$$(z_1, z_2, a_3) \sim (a_1^1, y_2, a_3).$$

f représentant $\succsim$ sur $Z_1 \times Z_2 \times \{a_3\}$, la relation d'indifférence ci-dessus implique que

$$f_1(z_1) + f_2(z_2) + f_3(a_3) = f_1(a_1^1) + f_2(y_2) + f_3(a_3).$$

D'après (8.30) et la transitivité de $\succsim$ et de $=$,

$$(z_1, z_2, a_3) \sim (\underline{z_1}, y_2, b_3), \text{ et } f_1(z_1) + f_2(z_2) + f_3(a_3) = f_1(\underline{z_1}) + f_2(y_2) + f_3(b_3). \quad (8.31)$$

Donc, pour résumer, pour tout $(z_1, z_2, a_3) \in Y$ tel que $z_1 \precsim_1 a_1^1$, il existe $y_2 \in Z_2$ tel que (8.31) est vérifiée. Ceci correspond à la région ▭ de la figure 8.15.

deuxième sous-sous-étape : génération de la région ■ par récurrence

Supposons que, pour $k \geq 1$, des séquences $(a_1^1, \ldots, a_1^k)$ et $(b_1^1, \ldots, b_1^k)$ existent telles que

– pour tout r tel que $2 \leq r \leq k$,

$$\begin{aligned}(a_1^{r-1}, \overline{z_2}, a_3) &\sim (a_1^r, \underline{z_2}, a_3)\\ \text{et } \; f_1(a_1^{r-1}) + f_2(\overline{z_2}) + f_3(a_3) &= f_1(a_1^r) + f_2(\underline{z_2}) + f_3(a_3),\end{aligned} \quad (8.32)$$

– pour tout r tel que $1 \leq r \leq k$,

$$\begin{aligned}(a_1^r, \underline{z_2}, a_3) &\sim (b_1^r, \underline{z_2}, b_3)\\ \text{et } \; f_1(a_1^r) + f_2(\underline{z_2}) + f_3(a_3) &= f_1(b_1^r) + f_2(\underline{z_2}) + f_3(b_3),\end{aligned} \quad (8.33)$$

– pour tout $(z_1, z_2, a_3) \in Y$ tel que $z_1 \precsim_1 a_1^k$, il existe $y_1 \in Z_1$ et $y_2 \in Z_2$ tels que

$$(z_1, z_2, a_3) \sim (y_1, y_2, b_3) \text{ et } f(z_1)+f_2(z_2)+f_3(a_3) = f_1(y_1)+f_2(y_2)+f_3(b_3). \quad (8.34)$$

Remarquons qu'en définissant $b_1^1 = \underline{z_1}$, l'existence des séquences (a_1^r) et (b_1^r) a été montrée pour $k = 1$ dans la première sous-sous-étape (la première propriété est trivialement vérifiée puisqu'il n'existe pas de r tel que $2 \leq r \leq 1$).

Maintenant supposons qu'il existe $a_1^{k+1} \in Z_1$ tel que

$$(a_1^k, \overline{z_2}, a_3) \sim (a_1^{k+1}, \underline{z_2}, a_3), \quad (8.35)$$

sinon, on se reportera à la troisième sous-sous-étape. Comme f représente $\succsim$ sur $Z_1 \times Z_2 \times \{a_3\}$,

$$f_1(a_1^k) + f_2(\overline{z_2}) + f_3(a_3) = f_1(a_1^{k+1}) + f_2(\underline{z_2}) + f_3(a_3). \quad (8.36)$$

D'après le fait que $\underline{z_2} \prec_2 \overline{z_2}$, (8.33) et l'axiome d'indépendance, le fait que $a_3 \prec_3 b_3$, et (8.35) et l'indépendance,

$$(b_1^k, \underline{z_2}, b_3) \prec (b_1^k, \overline{z_2}, b_3) \sim (a_1^k, \overline{z_2}, a_3) \prec (a_1^k, \overline{z_2}, b_3) \sim (a_1^{k+1}, \underline{z_2}, b_3),$$

ce qui implique, par solvabilité restreinte par rapport au premier composant, qu'il existe b_1^{k+1} tel que

$$(b_1^k, \overline{z_2}, b_3) \sim (b_1^{k+1}, \underline{z_2}, b_3). \quad (8.37)$$

Comme f représente $\succsim$ sur $Z_1 \times Z_2 \times \{b_3\}$,

$$f_1(b_1^k) + f_2(\overline{z_2}) + f_3(b_3) = f_1(b_1^{k+1}) + f_2(\underline{z_2}) + f_3(b_3). \tag{8.38}$$

En combinant (8.33) et l'indépendance, (8.35) et (8.37), et, ensuite, (8.33), (8.36) et (8.38), on obtient

$$(a_1^{k+1}, \underline{z_2}, a_3) \sim (b_1^{k+1}, \underline{z_2}, b_3) \text{ et } f_1(a_1^{k+1}) + f_2(\underline{z_2}) + f_3(a_3) = f_1(b_1^{k+1}) + f_2(\underline{z_2}) + f_3(b_3). \tag{8.39}$$

Pour résumer, (8.32) et (8.33), c'est-à-dire les deux premières propriétés satisfaites par les séquences $(a_1^r)_{r=1}^k$ et $(b_1^r)_{r=1}^k$, sont aussi vérifiées par a_1^{k+1} et b_1^{k+1}. Maintenant, montrons que la troisième propriété, c'est-à-dire (8.34), est aussi vérifiée par a_1^{k+1} et b_1^{k+1}.

Considérons un élément arbitraire $(z_1, z_2, a_3) \in Y$ tel que $a_1^k \precsim_1 z_1 \precsim_1 a_1^{k+1}$. Deux sous-cas peuvent se présenter :

premier sous-cas : si $(z_1, z_2, a_3) \precsim (a_1^k, \overline{z_2}, a_3)$

Alors puisque $a_1^k \precsim_1 z_1$, l'équation suivante est vraie :

$$(a_1^k, z_2, a_3) \precsim (z_1, z_2, a_3) \precsim (a_1^k, \overline{z_2}, a_3),$$

ce qui implique, par solvabilité restreinte par rapport au second composant, qu'il existe $y_2 \in Z_2$ tel que

$$(z_1, z_2, a_3) \sim (a_1^k, y_2, a_3). \tag{8.40}$$

Mais puisque f représente $\succsim$ sur $Z_1 \times Z_2 \times \{a_3\}$,

$$f(z_1) + f_2(z_2) + f_3(a_3) = f_1(a_1^k) + f_2(y_2) + f_3(a_3). \tag{8.41}$$

En combinant (8.40) avec (8.33), et, ensuite, (8.41) avec (8.33), on obtient

$$(z_1, z_2, a_3) \sim (b_1^k, y_2, b_3) \text{ et } f(z_1) + f_2(z_2) + f_3(a_3) = f_1(b_1^k) + f_2(y_2) + f_3(b_3).$$

deuxième sous-cas : si $(z_1, z_2, a_3) \succ (a_1^k, \overline{z_2}, a_3)$

alors, d'après (8.35) et le fait que $z_1 \precsim_1 a_1^{k+1}$,

$$(a_1^k, \overline{z_2}, a_3) \sim (a_1^{k+1}, \underline{z_2}, a_3) \prec (z_1, z_2, a_3) \precsim (a_1^{k+1}, z_2, a_3),$$

ce qui implique, par solvabilité restreinte par rapport au deuxième composant, qu'il existe $y_2 \in Z_2$ tel que

$$(z_1, z_2, a_3) \sim (a_1^{k+1}, y_2, a_3). \tag{8.42}$$

Mais puisque f représente $\succsim$ sur $Z_1 \times Z_2 \times \{a_3\}$,

$$f(z_1) + f_2(z_2) + f_3(a_3) = f_1(a_1^{k+1}) + f_2(y_2) + f_3(a_3).$$

En combinant (8.42) avec (8.39), et, ensuite, l'égalité ci-dessus avec (8.39), on obtient

$$(z_1, z_2, a_3) \sim (b_1^{k+1}, y_2, b_3) \text{ et } f(z_1) + f_2(z_2) + f_3(a_3) = f_1(b_1^{k+1}) + f_2(y_2) + f_3(b_3).$$

Pour résumer, pour tout $(z_1, z_2, a_3) \in Y$ tel que $a_1^k \precsim_1 z_1 \precsim_1 a_1^{k+1}$, il existe $y_2 \in Z_2$ tel que

– soit $(z_1, z_2, a_3) \sim (b_1^k, y_2, b_3)$ et $f(z_1) + f_2(z_2) + f_3(a_3) = f_1(b_1^k) + f_2(y_2) + f_3(b_3)$,

– soit $(z_1, z_2, a_3) \sim (b_1^{k+1}, y_2, b_3)$ et $f(z_1)+f_2(z_2)+f_3(a_3) = f_1(b_1^{k+1})+f_2(y_2)+f_3(b_3)$.

Combiné avec (8.34), ce résultat implique que, pour tout $(z_1, z_2, a_3) \in Y$ tel que $z_1 \precsim_1 a_1^{k+1}$, il existe $y_1 \in Z_1$ et $y_2 \in Z_2$ tels que

$$(z_1, z_2, a_3) \sim (y_1, y_2, b_3) \text{ et } f(z_1) + f_2(z_2) + f_3(a_3) = f_1(y_1) + f_2(y_2) + f_3(b_3).$$

Pour achever cette sous-sous-étape, nous allons montrer que les séquences (a_1^r) et (b_1^r) ne peuvent être infinies. D'après la définition de $\underline{z_2}$ et de $\overline{z_2}$, et d'après (8.32),

– $\overline{z_2} \succ_2 \underline{z_2}$,

– $\forall r,\ (a_1^r, \overline{z_2}) \sim_{12} (a_1^{r+1}, \underline{z_2})$;

par conséquent, (a_1^r) est une séquence standard par rapport au premier composant, bornée dans Z par $\underline{z_1}$ et $\overline{z_1}$; donc, d'après le nouvel axiome archimédien (voir page 175), cette séquence est nécessairement finie. Il en est de même pour (b_1^r).

troisième sous-sous-étape : génération de la région ■

Lorsque l'on atteint cette sous-sous-étape, on a déjà montré que la séquence (a_1^r) est finie. Soit p l'indice de son dernier élément, c'est-à-dire l'indice tel que $(a_1^p, \overline{z_2}, a_3) \succ (\overline{z_1}, \underline{z_2}, a_3)$.

Considérons un élément arbitraire $(z_1, z_2, a_3) \in Y$ tel que $a_1^p \precsim_1 z_1 \precsim_1 \overline{z_1}$. Deux sous-cas peuvent se présenter :

premier sous-cas : si $(z_1, z_2, a_3) \precsim (a_1^p, \overline{z_2}, a_3)$

Alors, puisque $a_1^p \precsim_1 z_1$, l'équation suivante est vraie :

$$(a_1^p, z_2, a_3) \precsim (z_1, z_2, a_3) \precsim (a_1^p, \overline{z_2}, a_3),$$

ce qui implique, par solvabilité restreinte par rapport au deuxième composant, qu'il existe $y_2 \in Z_2$ tel que

$$(z_1, z_2, a_3) \sim (a_1^p, y_2, a_3). \tag{8.43}$$

Mais puisque f représente $\succsim$ sur $Z_1 \times Z_2 \times \{a_3\}$,

$$f(z_1) + f_2(z_2) + f_3(a_3) = f_1(a_1^p) + f_2(y_2) + f_3(a_3). \tag{8.44}$$

En combinant (8.43) et (8.44) avec le fait que $(a_1^p, \underline{z_2}, a_3) \sim (b_1^p, \underline{z_2}, b_3)$ et $f_1(a_1^p)+f_2(\underline{z_2})+f_3(a_3) = f_1(b_1^p) + f_2(\underline{z_2}) + f_3(b_3)$ — comme on l'avait montré dans les deux premières sous-sous-étapes — on obtient :

$$(z_1, z_2, a_3) \sim (b_1^p, y_2, b_3) \text{ et } f(z_1) + f_2(z_2) + f_3(a_3) = f_1(b_1^p) + f_2(y_2) + f_3(b_3).$$

Donc, pour résumer, pour tout élément $(z_1, z_2, a_3) \in Y$ tel que $a_1^p \precsim_1 z_1 \precsim_1 \overline{z_1}$ et tel que $(z_1, z_2, a_3) \precsim (a_1^p, \overline{z_2}, a_3)$, il existe $y_2 \in Z_2$ tel que

$$(z_1, z_2, a_3) \sim (b_1^p, y_2, b_3) \text{ et } f(z_1) + f_2(z_2) + f_3(a_3) = f_1(b_1^p) + f_2(y_2) + f_3(b_3).$$

deuxième sous-cas : si $(z_1, z_2, a_3) \succ (a_1^p, \overline{z_2}, a_3)$

Puisque $(a_1^p, \overline{z_2}, a_3) \succ (\overline{z_1}, \underline{z_2}, a_3)$ et puisque $a_1^p \precsim_1 \overline{z_1}$, l'équation suivante est vérifiée :

$$(\overline{z_1}, \underline{z_2}, a_3) \prec (a_1^p, \overline{z_2}, a_3) \precsim (\overline{z_1}, \overline{z_2}, a_3),$$

ce qui implique, par solvabilité restreinte par rapport au deuxième composant, qu'il existe $y_2 \in Z_2$ tel que

$$(a_1^p, \overline{z_2}, a_3) \sim (\overline{z_1}, y_2, a_3). \tag{8.45}$$

Puisque f représente $\succsim$ sur $Z_1 \times Z_2 \times \{a_3\}$,

$$f_1(a_1^p) + f_2(\overline{z_2}) + f_3(a_3) = f_1(\overline{z_1}) + f_2(y_2) + f_3(a_3). \tag{8.46}$$

D'après le fait que $y_2 \precsim_2 \overline{z_2}$, d'après (8.33) et l'axiome d'indépendance, d'après le fait que $a_3 \prec_3 b_3$, et d'après (8.45) et l'indépendance,

$$(b_1^p, y_2, b_3) \precsim (b_1^p, \overline{z_2}, b_3) \sim (a_1^p, \overline{z_2}, a_3) \prec (a_1^p, \overline{z_2}, b_3) \sim (\overline{z_1}, y_2, b_3),$$

ce qui implique, par solvabilité restreinte par rapport au premier composant, qu'il existe b_1^{p+1} tel que

$$(b_1^p, \overline{z_2}, b_3) \sim (b_1^{p+1}, y_2, b_3). \tag{8.47}$$

Comme f représente $\succsim$ sur $Z_1 \times Z_2 \times \{b_3\}$,

$$f_1(b_1^p) + f_2(\overline{z_2}) + f_3(b_3) = f_1(b_1^{p+1}) + f_2(y_2) + f_3(b_3). \tag{8.48}$$

En combinant (8.33) et l'indépendance, (8.45), (8.47), et, ensuite, (8.33), (8.46) et (8.48), on obtient :

$$(\overline{z_1}, y_2, a_3) \sim (b_1^{p+1}, y_2, b_3) \text{ et } f_1(\overline{z_1}) + f_2(y_2) + f_3(a_3) = f_1(b_1^{p+1}) + f_2(y_2) + f_3(b_3). \tag{8.49}$$

Maintenant revenons à (z_1, z_2, a_3). Par hypothèse,

$$(z_1, z_2, a_3) \succ (a_1^p, \overline{z_2}, a_3) \sim (\overline{z_1}, y_2, a_3) \ ;$$

et, d'après la définition de $\overline{z_1}$, $(z_1, z_2, a_3) \precsim (\overline{z_1}, z_2, a_3)$; par conséquent,

$$(\overline{z_1}, y_2, a_3) \prec (z_1, z_2, a_3) \precsim (\overline{z_1}, z_2, a_3),$$

ce qui implique, par solvabilité restreinte par rapport au deuxième composant, qu'il existe $t_2 \in Z_2$ tel que

$$(z_1, z_2, a_3) \sim (\overline{z_1}, t_2, a_3), \tag{8.50}$$

et, puisque f représente $\succsim$ sur $Z_1 \times Z_2 \times \{a_3\}$,

$$f_1(z_1) + f_2(z_2) + f_3(a_3) = f_1(\overline{z_1}) + f_2(t_2) + f_3(a_3). \tag{8.51}$$

En combinant (8.49) avec (8.50), et, ensuite, (8.49) avec (8.51), on obtient :

$$(z_1, z_2, a_3) \sim (b_1^{p+1}, t_2, b_3) \text{ et } f_1(z_1) + f_2(z_2) + f_3(a_3) = f_1(b_1^{p+1}) + f_2(t_2) + f_3(b_3).$$

Par conséquent, pour résumer, pour tout élément $(z_1, z_2, a_3) \in Y$ tel que $a_1^p \precsim_1 z_1 \precsim_1 \overline{z_1}$, il existe $y_2 \in Z_2$ tel que

– $(z_1, z_2, a_3) \sim (b_1^p, y_2, b_3)$ et $f(z_1) + f_2(z_2) + f_3(a_3) = f_1(b_1^p) + f_2(y_2) + f_3(b_3)$,

– $(z_1, z_2, a_3) \sim (b_1^{p+1}, y_2, b_3)$ et $f(z_1) + f_2(z_2) + f_3(a_3) = f_1(b_1^{p+1}) + f_2(y_2) + f_3(b_3)$.

quatrième sous-sous-étape : conclusion du cas 2.1

Arrivé ici, on a montré que, pour tout $(z_1, z_2, a_3) \in Y$ tel que $z_1 \precsim_1 \overline{z_1}$ — ce qui comprend en fait tout élément $(z_1, z_2, a_3) \in Y$ — il existe $y_1 \in Z_1$ et $y_2 \in Z_2$ tels que

$$(z_1, z_2, a_3) \sim (y_1, y_2, b_3) \text{ et } f(z_1) + f_2(z_2) + f_3(a_3) = f_1(y_1) + f_2(y_2) + f_3(b_3). \quad (8.52)$$

Nous allons montrer dans cette sous-sous-étape que c'est suffisant pour que f représente $\succsim$ sur Y. En effet, j'avais précisé plus tôt (à la page 199 pour être exact) que l'on doit prouver que pour tous $(z_1, z_2, z_3), (t_1, t_2, t_3) \in Y$ tels que $z_3 \neq t_3$,

$$(z_1, z_2, z_3) \succsim (t_1, t_2, t_3) \Rightarrow f_1(z_1) + f_2(z_2) + f_3(z_3) \geq f_1(t_1) + f_2(t_2) + f_3(t_3).$$

Puisque $z_3 \neq t_3$, soit $z_3 = a_3$ et $t_3 = b_3$, soit $z_3 = b_3$ et $t_3 = a_3$. Supposons que $z_3 = a_3$; alors, d'après (8.52), il existe $y_1 \in Z_1$ et $y_2 \in Z_2$ tels que $(z_1, z_2, z_3) \sim (y_1, y_2, t_3)$ et tels que $f_1(z_1) + f_2(z_2) + f_3(z_3) = f_1(y_1) + f_2(y_2) + f_3(t_3)$. Par transitivité de $\succsim$, $(y_1, y_2, t_3) \succsim (t_1, t_2, t_3)$, et, puisque f représente $\succsim$ sur $Z_1 \times Z_2 \times \{t_3\}$, $f_1(y_1) + f_2(y_2) + f_3(t_3) \geq f_1(t_1) + f_2(t_2) + f_3(t_3)$; par conséquent, $f_1(z_1) + f_2(z_2) + f_3(z_3) \geq f_1(t_1) + f_2(t_2) + f_3(t_3)$. Une démonstration similaire serait valable pour $z_3 = b_3$ et $t_3 = a_3$.

Ainsi, f, défini selon (8.29), représente $\succsim$ sur Y. Et puisque (x_1^0, x_2^0, a_3) et (x_1^1, x_2^1, b_3) appartiennent à Y, f est défini selon (8.25).

Cas 2.2 : si $(\underline{z_1}, \overline{z_2}, a_3) \succsim (\underline{z_1}, \underline{z_2}, b_3)$: (8.53)

$b_3 \succ_3 a_3$; en combinant ceci avec (8.53), on obtient $(\underline{z_1}, \overline{z_2}, a_3) \succsim (\underline{z_1}, \underline{z_2}, b_3) \succsim (\underline{z_1}, \underline{z_2}, a_3)$. Par conséquent, par solvabilité restreinte par rapport au deuxième composant, il existe $a_2^1 \in Z_2$ tel que $(\underline{z_1}, a_2^1, a_3) \sim (\underline{z_1}, \underline{z_2}, b_3)$. En utilisant une démonstration symétrique de celle du cas 2.1 — symétrique par rapport aux composants 1 et 2 — on montre facilement que f, défini selon (8.25), est une fonction d'utilité additive sur Y.

Cas 2.3 : si $(\overline{z_1}, \underline{z_2}, a_3) \prec (\underline{z_1}, \underline{z_2}, b_3)$ et $(\underline{z_1}, \overline{z_2}, a_3) \prec (\underline{z_1}, \underline{z_2}, b_3)$: (8.54)

C'est en fait le cas complémentaire des cas 2.1 et 2.2. D'après la définition de Z, Y est un ensemble non vide ; donc $(\underline{z_1}, \underline{z_2}, b_3) \precsim (\overline{z_1}, \overline{z_2}, a_3)$. Par conséquent, d'après (8.54) et l'axiome d'indépendance,

$$(\overline{z_1}, \underline{z_2}, a_3) \prec (\underline{z_1}, \underline{z_2}, b_3) \precsim (\overline{z_1}, \overline{z_2}, a_3) \prec (\overline{z_1}, \underline{z_2}, b_3). \quad (8.55)$$

D'après la définition de Y, pour tout élément $(z_1, z_2, z_3) \in Y$, il existe $(t_1, t_2, t_3) \in Z$ tel que $(z_1, z_2, z_3) \sim (t_1, t_2, t_3)$ et tel que $z_3 \neq t_3$; par conséquent, $(\underline{z_1}, \underline{z_2}, b_3) \precsim (z_1, z_2, z_3) \precsim (\overline{z_1}, \overline{z_2}, a_3)$, ce qui implique, d'après (8.55), et par solvabilité restreinte par rapport aux deux premiers composants, qu'il existe $y_1 \in Z_1$ et $y_2 \in Z_2$ tels que

$$(z_1, z_2, z_3) \sim (y_1, \underline{z_2}, b_3) \sim (\overline{z_1}, y_2, a_3). \quad (8.56)$$

En particulier, il existe $a_2 \in Z_2$ tel que

$$(\overline{z_1}, a_2, a_3) \sim (\underline{z_1}, \underline{z_2}, b_3). \tag{8.57}$$

Donc l'égalité suivante est clairement une condition nécessaire pour que f puisse représenter $\succsim$ sur Y :

$$f_3(b_3) = f_3(a_3) + f_1(\overline{z_1}) - f_1(\underline{z_1}) + f_2(a_2) - f_2(\underline{z_2}). \tag{8.58}$$

Considérons maintenant une élément quelconque de Y : (z_1, z_2, a_3). D'après (8.56), il existe $y_1 \in Z_1$ et $y_2 \in Z_2$ tels que $(z_1, z_2, a_3) \sim (y_1, \underline{z_2}, b_3) \sim (\overline{z_1}, y_2, a_3)$. D'après (8.57) et l'axiome de conservation d'échelle (voir page 170),

$$\left.\begin{array}{l}(y_1, \underline{z_2}, b_3) \sim (\overline{z_1}, y_2, a_3)\\ (\overline{z_1}, a_2, a_3) \sim (\underline{z_1}, \underline{z_2}, b_3)\end{array}\right\} \Rightarrow (\underline{z_1}, y_2, a_3) \sim (y_1, a_2, a_3).$$

En effet, l'équation (8.2) de l'axiome de conservation d'échelle peut être utilisée ici car, par définition de $\underline{z_1}$, $\overline{z_1}$, $\underline{z_2}$ et $\overline{z_2}$ (cf. page 197), quand on arrive au cas 2.3, alors a_3 et b_3 sont forcément non unidimensionnellement-joignables dans X. Mais f, défini selon (8.58), représente $\succsim$ sur $Z_1 \times Z_2 \times \{a_3\}$; donc

$$f_1(\underline{z_1}) + f_2(y_2) + f_3(a_3) = f_1(y_1) + f_2(a_2) + f_3(a_3). \tag{8.59}$$

Maintenant (8.58) et (8.59) impliquent que

$$f_1(y_1) + f_2(\underline{z_2}) + f_3(b_3) = f_1(\overline{z_1}) + f_2(y_2) + f_3(a_3).$$

Puisque f représente $\succsim$ sur $Z_1 \times Z_2 \times \{a_3\}$,

$$f_1(z_1) + f_2(z_2) + f_3(a_3) = f_1(\overline{z_1}) + f_2(y_2) + f_3(a_3).$$

Donc, pour résumer, pour tout $(z_1, z_2, a_3) \in Y$, il existe $y_1 \in Z_1$ tel que

$$(z_1, z_2, a_3) \sim (y_1, \underline{z_2}, b_3) \text{ et } f_1(z_1) + f_2(z_2) + f_3(a_3) = f_1(y_1) + f_2(\underline{z_2}) + f_3(b_3).$$

Par conséquent, (8.58) est une condition suffisante pour que f représente $\succsim$ sur Y ; et puisque (x_1^0, x_2^0, a_3) et (x_1^1, x_2^1, b_3) appartiennent à Y, (8.25) est vérifiée, de telle sorte que f, définie selon (8.25), représente $\succsim$ sur Y.

Jusqu'à maintenant, nous n'avons montré que l'existence d'utilités additives sur $X_1 \times X_2 \times \{a_3, b_3\}$. Il reste encore à montrer leur unicité. Mais on a prouvé que (8.25) est une condition nécessaire et suffisante pour que f représente $\succsim$ sur X. Puisque Krantz, Luce, Suppes, et Tversky (1971) garantit l'unicité de f_1 et de f_2 à une transformation affine strictement positive près, (8.25) garantit que f_3 est aussi unique à une transformation affine strictement positive près. ♦

Lemme 8.5 *Soient $X = X_1 \times X_2 \times X_3$ et $\succsim$ un préordre large total sur X. Supposons que $\succsim$ vérifie l'axiome d'indépendance (voir page 23) et que les deux premiers composants de X vérifient la solvabilité restreinte (voir page 41). Soient $x_3, z_3 \in X_3$ tels que x_3 et z_3 sont i-reliés, c'est-à-dire $x_3 \mathcal{O}_3 z_3$. Alors x_3 et z_3 peuvent être reliés par une suite strictement monotone, c'est-à-dire par une suite $(y_3^k)_{k=0}^p$ d'éléments de X_3 tels que*

- $y_3^0 = x_3$, $y_3^p = z_3$,
- $\forall k \in \{0, \ldots, p-1\}$, $\exists\, a^{k+1}, b^k \in X_1 \times X_2$ *tels que* $(b^k, y_3^k) \sim (a^{k+1}, y_3^{k+1})$,
- *soit* $y_3^{k+1} \succ_3 y_3^k$ $\forall k \in \{0, \ldots, p-1\}$, *soit* $y_3^{k+1} \prec_3 y_3^k$ $\forall k \in \{0, \ldots, p-1\}$.

De plus, si x_3 et z_3 sont unidimensionnellement-joignables, alors ils peuvent être unidimensionnellement-joints par une suite strictement monotone.

Démonstration du lemme 8.5 : Supposons que x_3 et z_3 soient i-reliés. Sans perte de généralité, on peut supposer que $x_3 \precsim_3 z_3$ — puisque, comme on l'avait montré, $x_3 \mathcal{O}_3 z_3 \Leftrightarrow z_3 \mathcal{O}_3 x_3$. Par définition des i-liens (voir page 163), il existe une suite finie $(t_3^k)_{k=0}^r$ telle que $t_3^0 = x_3$, $t_3^r = z_3$, et, pour tout $k \in \{0, \ldots, r-1\}$, il existe $a^{k+1}, b^k \in X_1 \times X_2$ tels que $(b^k, t_3^k) \sim (a^{k+1}, t_3^{k+1})$. Si, de plus, x_3 et z_3 sont unidimensionnellement-joignables, alors a^{k+1} et b^k ont un composant en commun.

La démonstration est organisée en deux étapes : dans la première, une suite i-reliant x_3 et z_3, et telle que tous ses éléments se trouvent "entre" x_3 et z_3, est extraite de (t_3^k) ; dans la second étape, un algorithme est décrit, qui permet d'extraire des sous-suites ayant de moins en moins d'éléments consécutifs décroissants ; en répétant cet algorithme un nombre fini de fois, on peut obtenir une suite strictement monotone i-reliant x_3 et z_3.

Première étape : l'extraction d'une suite i-reliante constituée d'éléments compris entre x_3 et z_3

Si $t_3^{k+1} \succ_3 t_3^k$ $\forall k \in \{0, \ldots, r-1\}$, alors le lemme 8.5 est démontré. Sinon, extrayons de la suite (t_3^k) la sous-suite maximale $(s_3^k)_{k=0}^q$ telle que, pour tout k, $z_3 \succsim_3 s_3^k \succsim x_3$. Il est évident que la suite (s_3^k) est finie. Soit f la fonction telle que $s_3^k = t_3^{f(k)}$ $\forall k \in \{0, \ldots, q\}$. Nous allons maintenant montrer que

$$\forall k \in \{0, \ldots, q-1\}, \text{ il existe } c^{k+1}, d^k \in X_1 \times X_2 \text{ tels que } (d^k, s_3^k) \sim (c^{k+1}, s_3^{k+1}).$$

Si $f(k+1) = f(k) + 1$, alors $s_3^k = t_3^{f(k)}$ et $s_3^{k+1} = t_3^{f(k)+1}$, de telle sorte que $(b^{f(k)}, s_3^k) \sim (a^{f(k)+1}, s_3^{k+1})$. Si x_3 et z_3 sont unidimensionnellement-joignables, alors $b^{f(k)}$ et $a^{f(k)+1}$ ont un composant en commun, de telle sorte que s_3^k et s_3^{k+1} sont directement unidimensionnellement-joints.

Sinon, certains t_3^i, $i \in \{f(k)+1, \ldots, f(k+1)-1\}$, sont tels que $t_3^i \succ_3 z_3$ ou $t_3^i \prec_3 x_3$. Trois cas peuvent alors se présenter :

premier cas : si $\exists\, i, j \in \{f(k)+1, \ldots, f(k+1)-1\}$ tels que $t_3^i \succ_3 z_3$ et $t_3^j \prec_3 x_3$:

Alors il existe un indice $i_1 \in \{f(k)+1, \ldots, f(k+1)-1\}$ tel que soit $t_3^{i_1} \succ_3 z_3$ et $t_3^{i_1+1} \prec_3 x_3$, soit $t_3^{i_1} \prec_3 x_3$ et $t_3^{i_1+1} \succ_3 z_3$. Considérons le premier cas (le deuxième peut être démontré d'une manière tout à fait similaire). Alors

$$(b^{i_1}, x_3) \precsim (b^{i_1}, z_3) \prec (b^{i_1}, t_3^{i_1}) \sim (a^{i_1+1}, t_3^{i_1+1}) \prec (a^{i_1+1}, x_3) \precsim (a^{i_1+1}, z_3),$$

ce qui implique d'après le lemme 8.2 qu'il existe $a, b \in X_1 \times X_2$ tels que $(a, x_3) \sim (b, z_3) \sim (b^{i_1}, t_3^{i_1})$; et donc la suite $(s_3^0 = x_3, s_3^1 = z_3)$ est monotone et i-reliante. De plus, si x_3 et z_3 sont unidimensionnellement-joignables, alors a^{i_1+1} et b^{i_1} ont un composant en commun, et donc a et b ont aussi un composant en commun, de telle sorte que $s_3^0 = x_3$ et $s_3^1 = z_3$ sont directement unidimensionnellement-joignables.

deuxième cas : si $\forall i \in \{f(k)+1, \ldots, f(k+1)-1\}$ $t_3^i \succ_3 z_3$:

Si $t_3^{f(k)} \precsim_3 t_3^{f(k+1)}$, alors

$$(a^{f(k)+1}, t_3^{f(k+1)}) \precsim (b^{f(k)}, t_3^{f(k)}) \sim (a^{f(k)+1}, t_3^{f(k)+1}) \precsim (b^{f(k)}, t_3^{f(k+1)}),$$

ce qui implique d'après le lemme 8.2 qu'il existe c^{k+1} tel que $(b^{f(k)}, t_3^{f(k)}) \sim (c^{k+1}, t_3^{f(k+1)})$, ou encore, d'une manière tout à fait équivalente, qu'il existe c^{k+1} tel que $(b^{f(k)}, s_3^k) \sim (c^{k+1}, s_3^{k+1})$.

Si, au contraire, $t_3^{f(k)} \succsim_3 t_3^{f(k+1)}$, alors

$$(b^{f(k+1)-1}, t_3^{f(k)}) \precsim (b^{f(k+1)-1}, t_3^{f(k+1)-1}) \sim (a^{f(k+1)}, t_3^{f(k+1)}) \precsim (a^{f(k+1)}, t_3^{f(k)}),$$

ce qui implique d'après le lemme 8.2 qu'il existe d^k tel que $(d^k, t_3^{f(k)}) \sim (a^{f(k+1)}, t_3^{f(k+1)})$, ou encore, d'une manière tout à fait équivalente, qu'il existe d^k tel que $(d^k, s_3^k) \sim (a^{f(k+1)}, s_3^{k+1})$. De plus, si x_3 et z_3 sont unidimensionnellement-joignables, alors $a^{f(k)+1}$ et $b^{f(k)}$ (resp. $b^{f(k+1)-1}$ et $a^{f(k+1)}$) ont un composant en commun, de telle sorte que c^{k+1} et $b^{f(k)}$ (resp. d^k et $a^{f(k+1)}$) ont aussi un composant en commun, ce qui implique que s_3^k et s_3^{k+1} sont directement undimensionnellement-joignables.

troisième cas : si $\forall i \in \{f(k)+1, \ldots, f(k+1)-1\}$ $t_3^i \prec_3 x_3$:

Ce cas est similaire au précédent.

Par conséquent, dans tous les cas, $(s_3^k)_{k=0}^q$ est une suite i-reliant ou unidimensionnellement-joignant x_3 et z_3. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\forall k \in \{1, \ldots, q-1\}$, $s_3^k \neq x_3$ et $s_3^k \neq z_3$; dans le cas contraire, on peut toujours extraire la plus petite sous-suite possédant cette propriété. Dans le reste de la démonstration, nous allons montrer que l'on peut extraire de $(s_3^k)_{k=0}^q$ une sous-suite strictement croissante (au sens de $\succsim$) et i-reliant (ou unidimensionnellement-joignant) x_3 et z_3.

deuxième étape : extraction d'une suite strictement croissante et i-reliant x_3 et z_3

Si $s_3^{k+1} \succ_3 s_3^k$ $\forall k \in \{0, \ldots, q-1\}$, alors le lemme 8.5 est démontré. Sinon, il existe $k_1 \in \{0, \ldots, q-2\}$ tel que $s_3^{k_1+1} \precsim_3 s_3^{k_1}$. Soit k_2 le plus petit indice appartenant à $\{0, \ldots, q-1\}$ tel que $k_2 \geq k_1$ et $s_3^{k_2} \succ_3 s_3^{k_1}$. Notons $(h_3^k)_{k=0}^p$ la suite $(s_3^0, \ldots, s_3^{k_1}, s_3^{k_2}, \ldots, s_3^q)$, et appelons g la fonction telle que $h_3^k = s_3^{g(k)}$. $\forall k < k_1 - 1$, on sait qu'il existe d^k, c^{k+1} tels que $(d^k, s_3^k) \sim (c^{k+1}, s_3^{k+1})$; donc $(d^k, h_3^k) \sim (c^{k+1}, h_3^{k+1})$. De même, $\forall k \geq k_1 + 1$, $(d^{g(k)}, s_3^{g(k)}) \sim (c^{g(k+1)}, s_3^{g(k+1)})$, de telle sorte que $(d^{g(k)}, h_3^k) \sim (c^{g(k+1)}, h_3^{k+1})$. De plus, si x_3 et z_3 sont unidimensionnellement-joints, alors h_3^k et h_3^{k+1} sont directement unidimensionnellement-joints pour tout $k < k_1 - 1$ et pour tout $k \geq k_1 + 1$. D'après la définition de k_2, $k_2 > k_1 + 1$ et $s_3^{k_2-1} \prec_3 s_3^{k_1}$; donc

$$(c^{k_2}, s_3^{k_1}) \prec (c^{k_2}, s_3^{k_2}) \sim (d^{k_2-1}, s_3^{k_2-1}) \precsim (d^{k_2-1}, s_3^{k_1}),$$

ce qui implique d'après le lemme 8.2 qu'il existe e^{k_1} tel que $(e^{k_1}, s_3^{k_1}) \sim (c^{k_2}, s_3^{k_2})$. Par conséquent, $(e^{k_1}, h_3^{k_1}) \sim (c^{k_2}, h_3^{k_1+1})$, et donc la suite (h_3^k) i-relie x_3 et z_3. De plus, si x_3 et z_3 sont unidimensionnellement-joignables, alors c^{k_2} et d^{k_2-1} ont un composant en commun, de telle sorte que c^{k_2} et e^{k_1} ont aussi un composant en commun. Par conséquent, $h_3^{k_1}$ et $h_3^{k_1+1}$ sont directement unidimensionnellement-joints.

Si (h_3^k) est strictement croissante (au sens de $\succsim$), alors le lemme 8.5 est démontré ; sinon, on peut recommencer le processus décrit ci-dessus, avec (h_3^k) jouant le rôle tenu précédemment par (s_3^k). Par construction, $\mathrm{Card}(h_3^k) \leq \mathrm{Card}(s_3^k) - 1$; donc, le processus est fini car il doit être employé au plus q fois. Ainsi, il existe donc bien une suite strictement croissante au sens de $\succsim$ et i-reliant (ou unidimensionnellement-joignant) x_3 et z_3. ♦

Démonstration du théorème 8.2 et du théorème 8.4 : La démonstration est organisée en deux étapes. Dans la première, nous allons considérer deux éléments quelconques de X_3, x_3^0 et x_3^1, et nous allons montrer qu'il existe une utilité additive f représentant $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times [x_3^0, x_3^1]$. Deux cas doivent alors être examinés :

- dans le premier, on suppose qu'il existe un élément du plan x_3^0 indifférent à un élément du plan x_3^1 ; alors, dans une première sous-étape, on montre qu'il existe une utilité additive f représentant $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times \{x_3^0, x_3^1\}$. Dans la deuxième sous-étape, on étend cette représentation à $X_1 \times X_2 \times \{x_3^0, x_3, x_3^1\}$, pour un x_3 choisi arbitrairement entre x_3^0 et x_3^1. En utilisant le fait que x_3 est arbitraire, on montre dans la troisème sous-étape que f peut être étendue pour représenter $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times [x_3^0, x_3^1]$.

- dans le second cas, on suppose qu'aucun élément du plan x_3^0 n'est indifférent à un élément du plan x_3^1 ; dans le cas 2.1, on montre que si $x_3^0 \mathcal{O}_3 x_3^1$, alors il existe une fonction f additive représentant $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times [x_3^0, x_3^1]$. Dans le cas 2.2, on examine le cas où $\mathrm{Non}(x_3^0 \mathcal{O}_3 x_3^1)$; pour cela, on doit considérer deux sous-cas : le cas 2.2.a, dans lequel il n'existe aucun élément x_3 "entre" x_3^0 et x_3^1 qui ne soit i-relié avec x_3^0 ou avec x_3^1. Le cas 2.2.b est dédié au cas complémentaire.

Dans la seconde étape, f est étendue de manière à représenter $\succsim$ sur X, et l'on montre que l'ensemble des classes d'équivalence de la relation $\mathcal{O}_3$ est dénombrable.

On sait qu'il existe des fonctions $f_1 : X_1 \to \mathbb{R}$ et $f_2 : X_2 \to \mathbb{R}$ représentant $\succsim$ sur $X_1 \times X_2$. Maintenant considérons des éléments arbitraires de X_3, disons x_3^0 et x_3^1. Sans perte de généralité, on peut fixer que $x_3^0 \prec_3 x_3^1$. On va montrer dans la première étape que $f_1 + f_2$ peut être étendu pour représenter $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times [x_3^0, x_3^1]$ — rappelons que $[x_3^0, x_3^1] = \{x_3 : x_3^0 \precsim_3 x_3 \precsim_3 x_3^1\}$.

Première étape : génération de f sur $X_1 \times X_2 \times [x_3^0, x_3^1]$

Premier cas : s'il existe $x_1^0, x_2^0, x_1^1, x_2^1$ tels que $(x_1^1, x_2^1, x_3^1) \sim (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$: (8.60)

première sous-étape : génération de f sur $X_1 \times X_2 \times \{x_3^0, x_3^1\}$

Clairement, puisque $(x_1^1, x_2^1, x_3^1) \sim (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, l'égalité suivante est nécessaire pour que f représente $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times \{x_3^0, x_3^1\}$:

$$f_3(x_3^1) = f_3(x_3^0) + f_1(x_1^0) - f_1(x_1^1) + f_2(x_2^0) - f_2(x_2^1). \tag{8.61}$$

C'est aussi une condition suffisante d'existence. En effet, si x_3^0 et x_3^1 ne sont pas unidimensionnellement-joignables dans X, alors ils ne le sont pas non plus dans $X_1 \times X_2 \times \{x_3^0, x_3^1\}$. Ainsi, le cas 2.3 du lemme 8.4 peut être appliqué, qui montre que f tel que décrit ci-dessus est une utilité sur $X_1 \times X_2 \times \{x_3^0, x_3^1\}$. Si, au contraire, x_3^0 et x_3^1 sont unidimensionnellement-joignables dans X, alors, d'après le lemme 8.5, il existe une suite $(y_3^k)_{k=0}^p$ telle que :

- $y_3^0 = x_3^0$, $y_3^p = x_3^1$,
- $y_3^i \prec_3 y_3^{i+1}$,
- y_3^i et y_3^{i+1} sont directement unidimensionnellement-joignables $\forall\, i \in \{0, \ldots, p-1\}$.

Par conséquent, les y_3^i, y_3^{i+1} sont unidimensionnellement-joignables dans $X_1 \times X_2 \times \{y_3^i, y_3^{i+1}\}$ et d'après les cas 2.1 et 2.2 du lemme 8.4, $\succsim$ est représentable par des fonctions d'utilité additives $f_1^i + f_2^i + f_3^i$, uniques à une transformation affine strictement positive près, sur chaque espace $X_1 \times X_2 \times \{y_3^i, y_3^{i+1}\}$. En appliquant des constantes multiplicatives et additionnelles bien choisies, il n'est pas restrictif de supposer que :

- $f_1^i = f_1$ et $f_2^i = f_2$ pour tout $i \in \{0, \ldots, p\}$ et
- $f_3^i(y_3^{i+1}) = f_3^{i+1}(y_3^{i+1})$ pour tout $i \in \{0, \ldots, p-1\}$.

Maintenant, soit $f_3 : \{y_3^i : i \in \{0, \ldots, p\}\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f_3(y_3^i) = f_3^i(y_3^i) \text{ pour tout } i \in \{0, \ldots, p\}.$$

Alors $f_1 + f_2 + f_3$ est une utilité additive, unique à une transformation affine strictement positive près, représentant $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times \{y_3^i : i \in \{0, \ldots, p\}\}$. En effet, considérons deux éléments arbitraires de cet espace, (x_1, x_2, y_3^i) et (y_1, y_2, y_3^{i+k}), $k \geq 0$. Si $k \leq 1$,

alors, par définition de f_3, il est trivial que f préserve l'ordre sur ces deux éléments. Supposons donc que $k > 1$. Dans ce cas, si

$$(x_1, x_2, y_3^i) \prec (z_1, z_2, y_3^{i+1}), \forall (z_1, z_2) \in X_1 \times X_2,$$

alors puisque f représente $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times \{y_3^i, y_3^{i+1}\}$, on a forcément :

$$f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(y_3^i) \leq \inf_{(z_1,z_2)\in X_1\times X_2} f_1(z_1) + f_2(z_2) + f_3(y_3^{i+1}), \tag{8.62}$$

avec une égalité seulement si l'inf n'est pas atteint.
Or $(y_3^j)_{j=0}^p$ est une suite strictement croissante (au sens de $\succsim_3$) et f représente $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times \{y_3^j, y_3^{j+1}\}$ pour tout $j \in \{0, \ldots, p-1\}$. Par conséquent, par récurrence,

$$f_3(y_3^{i+1}) < f_3(y_3^{i+2}) < \cdots < f_3(y_3^{i+k}).$$

Donc, d'après (8.62),

$$f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(y_3^i) < f_1(y_1) + f_2(y_2) + f_3(y_3^{i+1}) < f_1(y_1) + f_2(y_2) + f_3(y_3^{i+k})$$

et, bien entendu, $(x_1, x_2, y_3^i) \prec (y_1, y_2, y_3^{i+1}) \prec (y_1, y_2, y_3^{i+k})$ puisque (y_3^i) est une suite strictement croissante.

Si, au contraire, il existe $(z_1, z_2) \in X_1 \times X_2$ tel que :

$$(x_1, x_2, y_3^i) \sim (z_1, z_2, y_3^{i+1}),$$

alors, puisque f représente $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times \{y_3^i, y_3^{i+1}\}$,

$$f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(y_3^i) = f_1(z_1) + f_2(z_2) + f_3(y_3^{i+1}).$$

Maintenant, il reste à comparer (z_1, z_2, y_3^{i+1}) et (y_1, y_2, y_3^{i+k}). Par récurrence sur le processus ci-dessus, il est clair que f représente $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times \{y_3^i : i \in \{0, \ldots, p\}\}$, et donc *a fortiori* sur $X_1 \times X_2 \times \{x_3^0, x_3^1\}$.

Maintenant, considérons un élément arbitraire $x_3 \in [x_3^0, x_3^1]$. Alors, d'après (8.60),

$$(x_1^1, x_2^1, x_3) \precsim (x_1^1, x_2^1, x_3^1) \sim (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \precsim (x_1^0, x_2^0, x_3).$$

Donc, d'après le lemme 8.2, il existe x_1, x_2 tels que :

$$(x_1, x_2, x_3) \sim (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \sim (x_1^1, x_2^1, x_3^1). \tag{8.63}$$

deuxième sous-étape : génération de f sur $X_1 \times X_2 \times \{x_3^0, x_3, x_3^1\}$

En utilisant une démonstration similaire à celle de la première sous-étape, $\succsim$ est représentable par une fonction d'utilité additive $g_1 + g_2 + g_3$ sur $X_1 \times X_2 \times \{x_3^0, x_3\}$ et g vérifie :

$$g_1(x_1) + g_2(x_2) + g_3(x_3) = g_1(x_1^0) + g_2(x_2^0) + g_3(x_3^0). \tag{8.64}$$

De plus, g_1, g_2 et g_3 sont uniques à une transformation affine strictement positive près. Par conséquent, puisque $g_1 + g_2$ et $f_1 + f_2$ représentent tous les deux $\succsim_{12}$ sur $X_1 \times X_2$,

il n'est pas restrictif de supposer que $g_1 = f_1$, $g_2 = f_2$, et $g_3(x_3^0) = f_3(x_3^0)$. Ainsi, une condition nécessaire et suffisante pour que f représente $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times \{x_3^0, x_3\}$ et sur $X_1 \times X_2 \times \{x_3^0, x_3^1\}$ est que :

$$\begin{array}{rcl} f_3(x_3^1) & = & f_3(x_3^0) + f_1(x_1^0) - f_1(x_1^1) + f_2(x_2^0) - f_2(x_2^1), \\ f_3(x_3) & = & f_3(x_3^0) + f_1(x_1^0) - f_1(x_1) + f_2(x_2^0) - f_2(x_2). \end{array} \tag{8.65}$$

En utilisant une démonstration similaire, il est facile de montrer que c'est aussi une condition nécessaire et suffisante pour que f représente $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times \{x_3, x_3^1\}$. Notons que (8.63) et (8.65) imposent que les valeurs obtenues pour $f_3(x_3)$ en appliquant la première sous-étape sur $X_1 \times X_2 \times \{x_3^0, x_3\}$ et sur $X_1 \times X_2 \times \{x_3, x_3^1\}$ sont identiques.

Maintenant, il est clair que (8.65) est nécessaire et suffisant pour que f représente $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times \{x_3^0, x_3, x_3^1\}$. En effet, lorsque l'on compare deux éléments au hasard (y_1, y_2, y_3) et (z_1, z_2, z_3) de $X_1 \times X_2 \times \{x_3^0, x_3, x_3^1\}$, le couple (y_3, z_3) appartient forcément à l'un des ensembles suivants : $\{x_3, x_3^1\}^2$, $\{x_3^0, x_3\}^2$ ou $\{x_3, x_3^1\}^2$.

troisième sous-étape : génération de f sur $X_1 \times X_2 \times [x_3^0, x_3^1]$

Considérons deux éléments quelconques $y_3, z_3 \in [x_3^0, x_3^1]$. Nous avons montré au début de ce cas qu'il existe (s_1, s_2, y_3) et (t_1, t_2, z_3) tels que

$$(s_1, s_2, y_3) \sim (t_1, t_2, z_3) \sim (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \sim (x_1^1, x_2^1, x_3^1). \tag{8.66}$$

D'après la sous-étape précédente, l'équation suivante est une condition nécessaire et suffisante pour que f représente $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times \{x_3^0, y_3, x_3^1\}$ et sur $X_1 \times X_2 \times \{x_3^0, z_3, x_3^1\}$:

$$\begin{array}{rl} f_3(x_3^1) & = f_3(x_3^0) + f_1(x_1^0) - f_1(x_1^1) + f_2(x_2^0) - f_2(x_2^1), \\ f_3(y_3) & = f_3(x_3^1) + f_1(x_1^1) - f_1(s_1) + f_2(x_2^1) - f_2(s_2), \\ & = f_3(x_3^0) + f_1(x_1^0) - f_1(s_1) + f_2(x_2^0) - f_2(s_2), \\ f_3(z_3) & = f_3(x_3^1) + f_1(x_1^1) - f_1(t_1) + f_2(x_2^1) - f_2(t_2), \\ & = f_3(x_3^0) + f_1(x_1^0) - f_1(t_1) + f_2(x_2^0) - f_2(t_2). \end{array} \tag{8.67}$$

Il reste maintenant à montrer que c'est aussi une condition nécessaire et suffisante pour que f représente $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times \{x_3^0, y_3, z_3, x_3^1\}$. D'après le paragraphe précédent, cela revient à montrer que f préserve l'ordre $\succsim$ lorsque l'on compare un élément de $X_1 \times X_2 \times \{y_3\}$ avec un élément de $X_1 \times X_2 \times \{z_3\}$; considérons donc deux éléments quelconques (y_1, y_2, y_3) et (z_1, z_2, z_3).

- Soit $(y_1, y_2, y_3) \precsim (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, auquel cas, puisque $y_3 \succsim_3 x_3^0$,

  $$(y_1, y_2, x_3^0) \precsim (y_1, y_2, y_3) \precsim (x_1^0, x_2^0, x_3^0),$$

  ce qui implique d'après le lemme 8.2 qu'il existe a_1, a_2 tels que $(y_1, y_2, y_3) \sim (a_1, a_2, x_3^0)$;

- soit $(y_1, y_2, y_3) \succ (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \sim (x_1^1, x_2^1, x_3^1)$, auquel cas $(x_1^1, x_2^1, x_3^1) \prec (y_1, y_2, y_3) \precsim (y_1, y_2, x_3^1)$, ce qui implique d'après le lemme 8.2 qu'il existe $a_1 \in X_1$ et $a_2 \in X_2$ tels que $(y_1, y_2, y_3) \sim (a_1, a_2, x_3^1)$.

Quoi qu'il en soit, il existe a_1, a_2 tels que

$$\text{soit } (y_1, y_2, y_3) \sim (a_1, a_2, x_3^0), \text{ soit } (y_1, y_2, y_3) \sim (a_1, a_2, x_3^1) \ ;$$

Supposons maintenant que la première relation d'indifférence soit vérifiée (une démonstration similaire s'applique pour l'autre relation d'indifférence). Alors, puisque f représente $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times \{x_3^0, y_3, x_3^1\}$, on a :

$$f_1(y_1) + f_2(y_2) + f_3(y_3) = f_1(a_1) + f_2(a_2) + f_3(x_3^0).$$

Puisque f représente aussi $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times \{x_3^0, z_3, x_3^1\}$, on a aussi :

$$\begin{array}{lcl} (a_1, a_2, x_3^0) \succsim (z_1, z_2, z_3) & \Leftrightarrow & f_1(a_1) + f_2(a_2) + f_3(x_3^0) \geq f_1(z_1) + f_2(z_2) + f_3(z_3) \text{ et} \\ (a_1, a_2, x_3^0) \precsim (z_1, z_2, z_3) & \Leftrightarrow & f_1(a_1) + f_2(a_2) + f_3(x_3^0) \leq f_1(z_1) + f_2(z_2) + f_3(z_3). \end{array}$$

Par conséquent,

$$\begin{array}{lcl} (y_1, y_2, y_3) \succsim (z_1, z_2, z_3) & \Leftrightarrow & f_1(y_1) + f_2(y_2) + f_3(y_3) \geq f_1(z_1) + f_2(z_2) + f_3(z_3) \text{ et} \\ (y_1, y_2, y_3) \precsim (z_1, z_2, z_3) & \Leftrightarrow & f_1(y_1) + f_2(y_2) + f_3(y_3) \leq f_1(z_1) + f_2(z_2) + f_3(z_3). \end{array}$$

Par conséquent, (8.67) est une condition nécessaire et suffisante pour que f représente $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times \{x_3^0, y_3, z_3, x_3^1\}$. Notons au passage que, dans (8.67), la définition de $f_3(y_3)$ ne fait aucunement référence à la valeur $f_3(z_3)$, et réciproquement. De plus, y_3 et z_3 avaient été choisis arbitrairement. Par conséquent, une condition nécessaire et suffisante pour que f représente $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times [x_3^0, x_3^1]$ est que, pour tout $y_3 \in [x_3^0, x_3^1]$, $f_3(y_3)$ soit défini par :

$$\begin{array}{ll} f_3(x_3^1) = f_3(x_3^0) + f_1(x_1^0) - f_1(x_1^1) + f_2(x_2^0) - f_2(x_2^1), & \\ f_3(y_3) = f_3(x_3^0) + f_1(x_1^0) - f_1(s_1) + f_2(x_2^0) - f_2(s_2), & \forall (s_1, s_2) \in X_1 \times X_2 \text{ tel que} \\ & (s_1, s_2, y_3) \sim (x_1^0, x_2^0, x_3^0). \end{array} \tag{8.68}$$

Deuxième cas : si, $\forall (x_1^0, x_2^0, x_1^1, x_2^1)$, $\text{Non}(x_1^1, x_2^1, x_3^1) \sim (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$:

Alors, $\forall (x_1^0, x_2^0, x_1^1, x_2^1)$,

$$(x_1^1, x_2^1, x_3^1) \succ (x_1^0, x_2^0, x_3^0),$$

car, sinon, d'après le fait que $x_3^0 \prec x_3^1$, $(x_1^1, x_2^1, x_3^1) \precsim (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \prec (x_1^0, x_2^0, x_3^1)$, ce qui impliquerait d'après le lemme 8.2 qu'il existe a_1, a_2 tels que $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \sim (a_1, a_2, x_3^1)$.

Cas 2.1 : si $x_3^1 \, \mathcal{O}_3 \, x_3^0$:

x_3^0 et x_3^1 sont i-reliés (cf. définition 8.1, page 163). D'après le lemme 8.5, page 207, il existe une suite finie $(z_3^i)_{i=1}^p$ telle que $z_3^0 = x_3^0$, $z_3^p = x_3^1$, tel que, $\forall i \in \{0, \ldots, p-1\}$, $z_3^{i+1} \succ_3 z_3^i$, et telle qu'il existe (z_1^i, z_2^i) et (y_1^{i+1}, y_2^{i+1}) tels que $(y_1^{i+1}, y_2^{i+1}, z_3^{i+1}) \sim (z_1^i, z_2^i, z_3^i)$.

En sélectionnant une valeur appropriée pour $f_3(z_3^{i+1})$ à partir de celle de $f_3(z_3^i)$, comme on l'avait montré dans (8.68) du cas 1, f représente $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times [z_3^i, z_3^{i+1}]$ $\forall i \in \{0, \ldots, p-1\}$; et, puisque f_1, f_2 et $f_3(z_3^i)$ sont uniques à une transformation affine strictement positive près, f est aussi unique à une transformation affine strictement positive près sur chaque ensemble $X_1 \times X_2 \times [z_3^i, z_3^{i+1}]$.

Considérons maintenant deux éléments quelconques $(x_1, x_2, x_3) \in X_1 \times X_2 \times [z_3^0, z_3^1]$ et $(y_1, y_2, y_3) \in X_1 \times X_2 \times [z_3^1, z_3^2]$; s'il existe (a_1, a_2, z_3^1) tel que $(x_1, x_2, x_3) \sim (a_1, a_2, z_3^1)$ ou tel que $(y_1, y_2, y_3) \sim (a_1, a_2, z_3^1)$, alors, puisque f représente $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times [z_3^0, z_3^1]$ et sur $X_1 \times X_2 \times [z_3^1, z_3^2]$,

$$(x_1, x_2, x_3) \succsim (y_1, y_2, y_3) \Rightarrow f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) \geq f_1(y_1) + f_2(y_2) + f_3(y_3),$$
$$(x_1, x_2, x_3) \precsim (y_1, y_2, y_3) \Rightarrow f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) \leq f_1(y_1) + f_2(y_2) + f_3(y_3) \ ;$$

sinon, d'après le lemme 8.3, $(x_1, x_2, x_3) \prec (y_1, y_2, z_3^1) \prec (y_1, y_2, y_3)$, et, puisque f représente $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times [z_3^0, z_3^1]$ et sur $X_1 \times X_2 \times [z_3^1, z_3^2]$,

$$(x_1, x_2, x_3) \prec (y_1, y_2, y_3) \Leftrightarrow f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) < f_1(y_1) + f_2(y_2) + f_3(y_3).$$

Par conséquent, f représente $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times [z_3^0, z_3^2]$, et sur $X_1 \times X_2 \times [z_3^i, z_3^{i+1}]$ $\forall i \in \{2, \ldots, p-1\}$. Par récurrence, en utilisant le procédé décrit ci-dessus, il est relativement aisé de montrer que f représente $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times [z_3^0, z_3^p]$, ou, d'une manière équivalente, sur $X_1 \times X_2 \times [x_3^0, x_3^1]$. De plus, d'après les relations d'égalité de l'équation (8.68), f est unique à une transformation affine strictement positive près.

Cas 2.2 : Si Non$(x_3^1 \, \mathcal{O}_3 \, x_3^0)$: (8.69)

L'application du lemme 8.4 sur $X_1 \times X_2 \times \{x_3^0, x_3^1\}$ permet de conclure que $f_1(X_1) = \{f_1(x_1) : x_1 \in X_1\}$ et $f_2(X_2) = \{f_2(x_2) : x_2 \in X_2\}$ sont des ensembles bornés(ici le cas 2.3 du lemme 8.4 peut être utilisé directement car x_3^0 et x_3^1 ne sont pas unidimensionnellement joignables dans X). $\forall x_3 \in X_3$ tel que $x_3 \, \mathcal{O}_3 \, x_3^0$ et $x_3 \succsim_3 x_3^0$, il existe d'après le premier cas et le cas 2.1, une fonction d'utilité additive f, unique à une transformation affine strictement positive près, représentant $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times [x_3^0, x_3]$. De même, $\forall y_3$ tel que $y_3 \succsim_3 x_3$ et $y_3 \, \mathcal{O}_3 \, x_3^0$, il existe une fonction d'utilité additive f', unique à une transformation affine strictement positive près, représentant $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times [x_3^0, y_3]$. Par conséquent, f' représente $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times [x_3^0, x_3]$, ce qui signifie que la restriction de f' à $X_1 \times X_2 \times [x_3^0, x_3]$ est une transformée affine de f. Ainsi, en multipliant f' par une certaine constante et en additionnant une autre constante bien choisie, on peut s'arranger pour que la restriction de f' à $X_1 \times X_2 \times [x_3^0, x_3]$ coïncide avec f. Donc, on a étendu f de telle sorte qu'elle représente $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times [x_3^0, y_3]$. En utilisant à nouveau ce procédé, on peut étendre f pour qu'elle représente $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times [x_3^0, z_3]$ $\forall z_3 \succsim_3 y_3$, et ainsi de suite. Par conséquent, il existe une fonction f, unique à une transformation affine strictement positive près, représentant $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times \{x_3 : x_3 \, \mathcal{O}_3 \, x_3^0 \text{ et } x_3 \succsim_3 x_3^0\}$. Le procédé fonctionne bien parce que f est toujours unique à une transformation affine strictement positive près sur chaque ensemble $X_1 \times X_2 \times [x_3^0, x_3]$.

Démontrons maintenant qu'il existe un nombre réel β^0 tel que, $\forall x_3 \in X_3$ tel que $x_3 \, \mathcal{O}_3 \, x_3^0$ et $x_3 \succsim_3 x_3^0$, $f_3(x_3) \leq \beta^0$. Supposons que ce ne soit pas le cas ; alors, $\forall r \in \mathbb{R}$,

$\exists x_3(r)$ tel que $x_3(r)\,\mathcal{O}_3\,x_3^0$ et $f_3(x_3(r)) \geq r$. Le deuxième composant de X étant essentiel, il existe $x_2, y_2 \in X_2$ tels que $x_2 \succ_2 y_2$. Maintenant, pour $y_3^0 = x_3^0$ et $\forall y_1 \in X_1$, si $r = f_3(y_3^0) + f_2(x_2) - f_2(y_2)$, $\exists\, y_3^1 = x_3(r)$ tel que

$$f_3(y_3^1) \geq f_3(y_3^0) + f_2(x_2) - f_2(y_2),$$

ou, d'une manière équivalente, tel que

$$(y_1, y_2, y_3^1) \succsim (y_1, x_2, y_3^0).$$

Par récurrence, $\forall i \in \mathbb{N}$, si $r = f_3(y_3^i) + f_2(x_2) - f_2(y_2)$, $\exists\, y_3^{i+1}$ tel que

$$(y_1, y_2, y_3^{i+1}) \succsim (y_1, x_2, y_3^i).$$

La suite (y_3^{i+1}) est une séquence sur-standard croissante, infinie, et bornée par y_3^0 et x_3^1 (puisque $\mathrm{Non}(x_3^1\,\mathcal{O}_3\,x_3^0)$). Or c'est impossible car cela contredirait le nouvel axiome archimédien. Par conséquent, il existe bien un nombre réel β^0 tel que $f_3(x_3) \leq \beta^0$ $\forall x_3 \in X_3$ tel que $x_3\,\mathcal{O}_3\,x_3^0$. De même, on peut définir une fonction d'utilité additive f^1 sur $X_1 \times X_2 \times \{x_3 : x_3\,\mathcal{O}_3\,x_3^1 \text{ et } x_3 \precsim_3 x_3^1\}$, et f^1 admet une borne inférieure (appelons-la α^1) sur cet ensemble.

Puisque, d'après le premier cas et le cas 2.1, f^1 est unique à une transformation affine strictement positive près, et puisque $f_1 + f_2$ et $f_1^1 + f_2^1$ représentent toutes les deux $\succsim_{12}$ sur $X_1 \times X_2$, $f_1^1 + f_2^1$ est une transformée affine de $f_1 + f_2$; c'est pourquoi il n'est pas restrictif de supposer que $f_1^1(\cdot) = f_1(\cdot)$ et $f_2^1(\cdot) = f_2(\cdot)$.

Nous allons maintenant montrer qu'il est possible de définir $f_3(x_3)$ $\forall x_3 \in [x_3^0, x_3^1]$ de telle sorte que f représente $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times [x_3^0, x_3^1]$. Il est clair qu'il est suffisant de montrer qu'il est possible de définir $f_3(x_3)$ $\forall x_3 \in [x_3^0, x_3^1]$ tel que $\mathrm{Non}(x_3\,\mathcal{O}_3\,x_3^0)$ de telle sorte que f représente $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times [x_3^0, x_3^1]$; et une condition nécessaire à l'obtention de ce résultat est que $f_3(\cdot) = f_3^1(\cdot) + \text{constante } \gamma$.

Cas 2.2.a : si $\nexists\, x_3^2 \in [x_3^0, x_3^1]$ tel que $\mathrm{Non}(x_3^2\,\mathcal{O}_3\,x_3^0)$ et $\mathrm{Non}(x_3^2\,\mathcal{O}_3\,x_3^1)$:

Alors, $\forall x_3 \in [x_3^0, x_3^1]$, soit $x_3\,\mathcal{O}_3\,x_3^0$, soit $x_3\,\mathcal{O}_3\,x_3^1$. D'après le lemme 8.3, on sait que, $\forall (x_1, x_2, x_3) \in X_1 \times X_2 \times \{x_3 : x_3\,\mathcal{O}_3\,x_3^0 \text{ et } x_3 \succsim_3 x_3^0\}$, et $\forall (y_1, y_2, y_3) \in X_1 \times X_2 \times \{y_3 : y_3\,\mathcal{O}_3\,x_3^1 \text{ et } y_3 \precsim_3 x_3^1\}$, $(x_1, x_2, x_3) \prec (y_1, y_2, y_3)$. Mais nous savions déjà que

$$\begin{aligned} &f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) \leq \sup_{z_1 \in X_1}\{f_1(z_1\} + \sup_{z_2 \in X_2}\{f_2(z_2)\} + \sup_{z_3\,\mathcal{O}_3\,x_3^0}\{f_3(z_3)\}, \\ &f_1(y_1) + f_2(y_2) + f_3^1(y_3) \geq \inf_{z_1 \in X_1}\{f_1(z_1\} + \inf_{z_2 \in X_2}\{f_2(z_2)\} + \inf_{z_3\,\mathcal{O}_3\,x_3^1}\{f_3^1(z_3)\}. \end{aligned}$$

Par conséquent, si tous les sup et tous les inf peuvent être atteints, alors il est clair qu'une condition nécessaire et suffisante pour obtenir $f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) < f_1(y_1) + f_2(y_2) + f_3(y_3)$ $\forall (x_1, x_2, x_3) \in X_1 \times X_2 \times \{x_3 : x_3\,\mathcal{O}_3\,x_3^0 \text{ et } x_3 \succsim_3 x_3^0\}$, et $\forall (y_1, y_2, y_3) \in X_1 \times X_2 \times \{y_3 : y_3\,\mathcal{O}_3\,x_3^1 \text{ et } y_3 \precsim_3 x_3^1\}$, est d'ajouter à f_3^1 une constante γ telle que

$$\begin{aligned} \sup_{z_1 \in X_1}\{f_1(z_1\} + \sup_{z_2 \in X_2}\{f_2(z_2)\} + \sup_{z_3\,\mathcal{O}_3\,x_3^0}\{f_3(z_3)\} < \\ \inf_{z_1 \in X_1}\{f_1(z_1\} + \inf_{z_2 \in X_2}\{f_2(z_2)\} + \inf_{z_3\,\mathcal{O}_3\,x_3^1}\{f_3(z_3)\}. \end{aligned}$$

Ainsi, en additionnant n'importe quelle constante γ telle que l'inégalité ci-dessus est vérifiée, on garantit que f représente $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times [x_3^0, x_3^1]$. De même, si au moins un sup ou un inf ne peut être atteint, alors une condition nécessaire et suffisante pour obtenir $f_1(x_1)+f_2(x_2)+f_3(x_3) < f_1(y_1)+f_2(y_2)+f_3(y_3)\ \forall (x_1,x_2,x_3) \in X_1 \times X_2 \times \{x_3 : x_3\ \mathcal{O}_3\ x_3^0$ et $x_3 \succsim_3 x_3^0\}$, et $\forall (y_1,y_2,y_3) \in X_1 \times X_2 \times \{y_3 : y_3\ \mathcal{O}_3\ x_3^1$ et $y_3 \precsim_3 x_3^1\}$, est que l'inégalité soit vérifiée :

$$\sup_{z_1 \in X_1}\{f_1(z_1\} + \sup_{z_2 \in X_2}\{f_2(z_2)\} + \sup_{z_3\ \mathcal{O}_3\ x_3^0}\{f_3(z_3)\} \leq \\ \inf_{z_1 \in X_1}\{f_1(z_1\} + \inf_{z_2 \in X_2}\{f_2(z_2)\} + \inf_{z_3\ \mathcal{O}_3\ x_3^1}\{f_3(z_3)\}.$$

Donc, pour résumer, il existe une fonction d'utilité additive f représentant $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times [x_3^0, x_3^1]$, et la propriété d'unicité du théorème 8.4 est visiblement vérifiée.

Cas 2.2.b : si $\exists\, x_3^2 \in [x_3^0, x_3^1]$ tel que $\mathrm{Non}(x_3^2\ \mathcal{O}_3\ x_3^0)$ et $\mathrm{Non}(x_3^2\ \mathcal{O}_3\ x_3^1)$:

Soient $\mathcal{O}_3^{\sim}$ l'ensemble des classes d'équivalence de la relation binaire $\mathcal{O}_3$, et $Z = \{\tilde{z}_3 \in \mathcal{O}_3^{\sim}$ tels que $\exists\ z_3 \in \tilde{z}_3,\ z_3 \in [x_3^0, x_3^1]\}$. Supposons que $\mathrm{Card}(Z)$ soit infini ; alors il est possible d'extraire de Z une suite infinie $(\tilde{z}_3^p)$ telle que

- soit $\forall z_3^p \in \tilde{z}_3^p$ et $\forall z_3^{p+1} \in \tilde{z}_3^{p+1},\ z_3^{p+1} \succ_3 z_3^p$,
- soit $\forall z_3^p \in \tilde{z}_3^p$ et $\forall z_3^{p+1} \in \tilde{z}_3^{p+1},\ z_3^{p+1} \prec_3 z_3^p$.

En effet, construisons la suite de la manière suivante : posons $\tilde{z}_3^0 = \tilde{x}_3^0$. S'il existe un élément $\tilde{z}_3 \in Z$ tel qu'il n'existe pas de $\tilde{y}_3 \in Z$ tel que $z_3^0 \prec_3 y_3 \prec_3 z_3$, alors posons $\tilde{z}_3^1 = \tilde{z}_3$. On répète alors le même processus pour définir $\tilde{z}_3^2, \tilde{z}_3^3$, etc. Deux cas peuvent alors apparaître : soit le processus peut être répété une infinité de fois, et dans ce cas on a construit la susdite suite infinie strictement monotone, soit il existe un index p tel que :

$$\text{pour tout } \tilde{z}_3 \in Z \text{ tel que } z_3^p \prec_3 z_3, \text{ il existe } \tilde{y}_3 \in Z \text{ tel que } z_3^p \prec_3 y_3 \prec_3 z_3. \tag{8.70}$$

Dans ce cas, construisons une suite infinie strictement décroissante $(\tilde{t}_3^p)$ de la manière suivante : prenons n'importe quel $\tilde{z}_3$ et définissons supérieur à $\tilde{z}_3^p$ et définissons $\tilde{t}_3^0 = \tilde{z}_3$. D'après (8.70), il existe $\tilde{y}_3 \in Z$ tel que $z_3^p \prec_3 y_3 \prec_3 t_3^0$. Soit $\tilde{t}_3^1 = \tilde{y}_3$. Puisque $\tilde{y}_3$ est tel que $z_3^p \prec_3 y_3$, (8.70) peut être appliqué avec y_3 jouant le rôle qui était tenu précédemment par z_3. Par conséquent, $\tilde{t}_3^2$ peut être construit de la même manière que $\tilde{t}_3^1$. (8.70) garantit que le procédé de construction ne s'arrêtera jamais, entrainant par là même l'existence d'une suite infinie strictement décroissante.

Supposons que la séquence soit croissante, c'est-à-dire que $z_3^{p+1} \succ_3 z_3^p$; une démonstration similaire serait valable dans l'autre cas. Le deuxième composant étant essentiel, $\exists\, x_2, y_2 \in X_2$ tels que $x_2 \succ_2 y_2$. Soit x_1 un élément quelconque de X_1. D'après la définition de la séquence $(\tilde{z}_3^p)$, $\mathrm{Non}(z_3^{p+1}\ \mathcal{O}_3\ z_3^p))$, ce qui implique que $(x_1, y_2, z_3^{p+1}) \succ (x_1, x_2, z_3^p)$; mais alors (z_3^p) est une séquence sur-standard croissante, infinie, et bornée

par x_3^0 et x_3^1, ce qui contredit le nouvel axiome archimédien. Par conséquent on doit conclure que Card(Z) est un nombre fini, appelons-le N ; ainsi, $Z = \{\tilde{z}_3^1, \ldots, \tilde{z}_3^N\}$, et $\tilde{z}_3^1 = \tilde{x}_3^0$ et $\tilde{z}_3^N = \tilde{x}_3^1$.

Nous savons déjà qu'il existe une utilité f^i sur $X_1 \times X_2 \times \{x_3 : x_3 \, \mathcal{O}_3 \, z_3^i\}$, bornée, unique à une transformation affine strictement positive près, et telle que $f^i(x_1, x_2, x_3) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3^i(x_3)$. Maintenant, on peut montrer par récurrence en utilisant le cas 2.2.a que f peut être étendue pour représenter $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times \{x_3 : x_3 \in \{z_3^1, \ldots, z_3^{i+1}\}\}$. Par conséquent, f peut être étendue de manière à représenter $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times [x_3^0, x_3^1]$. Quant à la propriété d'unicité, à l'intérieur des classes d'équivalence de $\mathcal{O}_3$, les éléments appartiennent au premier cas ou au cas 2.1, ce qui implique une unicité à une transformation affine strictement positive près, tandis que qu'entre deux classes d'équivalence consécutives, le cas 2.2.a est vérifié. Par conséquent, la propriété d'unicité énoncée dans le théorème 8.4 est bien vérifiée.

Deuxième étape : génération de f sur $X_1 \times X_2 \times X_3$

Supposons que f a été construite sur $X_1 \times X_2 \times [x_3^0, x_3^1]$. Sélectionnons un élément arbitraire $x_3 \succ_3 x_3^1$. Grâce à un procédé similaire à celui décrit dans la première étape, on peut montrer qu'il existe une utilité additive, $f_1 + f_2 + f_3^1$, représentant $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times [x_3^1, x_3]$. Là encore, en utilisant un procédé similaire à celui de la première étape, on peut montrer que si $f_3(\cdot) = f_3^1(\cdot) +$ une constante bien choisie, alors f peut être étendue de manière à représenter $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times [x_3^0, x_3]$. En utilisant cette propriété de manière répétitive, il est clair que l'on peut étendre la fonction f pour qu'elle représente $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times \{x_3 : x_3 \succsim_3 x_3^0\}$ — notons que ce procédé fonctionne bien parce qu'entre deux éléments quelconques de X_3, disons x_3 et y_3, le nombre de classes d'équivalence de $\mathcal{O}_3$ est fini. De même, $\forall y_3 \prec_3 x_3^0$, on peut étendre f de manière à ce qu'elle représente $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times [y_3, x_3^0]$, ce qui nous amène à formuler la conclusion suivante : f peut être étendue de manière à représenter $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times \{y_3 : y_3 \precsim_3 x_3^0\}$. D'après le lemme 8.3, lorsque l'on compare un élément de $X_1 \times X_2 \times \{x_3 : x_3 \precsim_3 x_3^0\}$ avec un élément de $X_1 \times X_2 \times \{x_3 : x_3 \succsim_3 x_3^0\}$, il existe toujours un élément de $X_1 \times X_2 \times \{x_3^0\}$ préféré ou indifférent à l'un de ces deux éléments et non préféré ou indifférent à l'autre ; par conséquent, f représente bien $\succsim$ sur X.

Dans la méthode de construction, nous sommes partis d'un élément arbitraire x_3^0 de X_3, et nous avons montré que $\forall x_3 \succsim_3 x_3^0$, il n'existe pas de suite infinie (x_3^i) telle que $x_3^0 \precsim_3 x_3^i \precsim_3 x_3$ et Non$(x_3^i \, \mathcal{O}_3 \, x_3^{i+1})$, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de suite infinie $(\tilde{x}_3^i)$ de classes d'équivalence de $\mathcal{O}_3$ telle que tout $y_3 \in \tilde{x}_3^i$ appartient à $[x_3^0, x_3]$. Nous avons aussi montré qu'une fonction d'utilité existait sur X ; par conséquent, $\forall p \in \mathbb{Z}$, toute séquence (x_3^i) telle que $p \leq f_3(x_3^i) \leq p + 1$ et Non$(x_3^i \, \mathcal{O}_3 \, x_3^{i+1})$, est forcément finie. Par conséquent, l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{O}_3$ est dénombrable. Donc il existe une suite (x_3^i) telle que $\forall i$, $x_3^{i+1} \succ_3 x_3^i$ et telle que, $\forall x_3 \in X_3$, $\exists \, i$ tel que $x_3 \, \mathcal{O}_3 \, x_3^i$. Cette séquence est en fait créée en prenant un élément au hasard dans chaque classe d'indifférence de $\mathcal{O}_3$. La propriété d'unicité des représentations additives est immédiate.

♦

Lemme 8.6 *Soit $\succsim$ un préordre large total sur $\prod_{i=1}^{n} X_i$ satisfaisant l'axiome d'indépendance (voir page 23), la solvabilité restreinte et l'essentialité par rapport aux deux premiers composants, la condition de Thomsen sur les composants solvables (cf. page 24), l'axiome d'i-lien (cf. page 165), l'axiome de conservation d'échelle (cf. page 170) et le nouvel axiome archimédien (voir page 175). Soit $k \in \{3, \ldots, n\}$.*
Si $k = n$, soit $X_{3,k} = \prod_{i=3}^{n} X_i$ et supposons que $x_n \mathcal{O}_n y_n$ pour tous $x_n, y_n \in X_n$, sinon soit $(a_{k+1}, \ldots, a_n)$ un élément arbitraire de $\prod_{i=k+1}^{n} X_i$ et soit $X_{3,k} = \prod_{i=3}^{k} X_i \times \{a_{k+1}\} \times \cdots \times \{a_n\}$.
Alors $\succsim$ est un préordre large total satisfaisant l'axiome d'indépendance, la condition de Thomsen, la solvabilité restreinte et l'essentialité sur les deux premiers composants, l'axiome d'i-lien, l'axiome de conservation d'échelle, et le nouvel axiome archimédien, sur le produit cartésien tridimensionnel $Y = X_1 \times X_2 \times X_{3,k}$.

Démonstration du lemme 8.6 : D'après Wakker (1989, pp.30–31), l'axiome d'indépendance est vérifié sur Y. De plus, d'après leurs définitions, il est évident que la condition de Thomsen, la solvabilité restreinte et l'essentialité sont aussi vérifiées sur Y.

Montrons maintenant par récurrence que l'axiome d'i-lien (axiome 8.1) est aussi vérifié sur Y : lorsque k est égal à 3, c'est trivial. Supposons donc maintenant que $k > 3$. Supposons en outre que l'axiome d'i-lien est vérifié sur les ensembles $Y' = X_1 \times X_2 \times X_{3,k'}$ quel que soit $k' < k$, c'est-à-dire que, d'après l'indépendance, pour tous $x_{3,k'}, z_{3,k'} \in Y'$, il existe une suite $(y_{3,k'}^{l})_{l=0}^{q} \in X_{3,k'}$ telle que :

- $y_{3,k'}^{0} = x_{3,k'}$ et $y_{3,k'}^{q} = z_{3,k'}$;
- pour tout $l \in \{0, \ldots, q-1\}$, il existe $c^{l+1}, d^{l} \in X_1 \times X_2$ tels que :

$$(c^{l+1}, y_{3,k'}^{l+1}) \sim (d^{l}, y_{3,k'}^{l}).$$

Considérons maintenant deux éléments arbitraires

$$(x_3, \ldots, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) \text{ et } (z_3, \ldots, z_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$$

de $X_{3,k}$. Par hypothèse, x_k et z_k sont k-reliés. Par conséquent, il existe une suite $(y_k^{l})_{l=0}^{p}$ d'éléments de X_k telle que :

- $y_k^{0} = x_k$ et $y_k^{p} = z_k$;
- pour tout $l \in \{0, \ldots, p-1\}$, il existe $a^{l+1} = (a_1^{l+1}, \ldots, a_{k-1}^{l+1})$ et $b^{l} = (b_1^{l}, \ldots, b_{k-1}^{l})$ dans $\prod_{j=1}^{k-1} X_j$ tels que $(a^{l+1}, y_k^{l+1}) \sim_{1\ldots k} (b^{l}, y_k^{l})$, ou, d'une manière tout à fait équivalente, tels que $(a^{l+1}, y_k^{l+1}, a_{k+1}, \ldots, a_n) \sim (b^{l}, y_k^{l}, a_{k+1}, \ldots, a_n)$.

Remarquons que pour tout $l \in \{0, \ldots, p-1\}$,

$$(a_3^{l+1}, \ldots, a_{k-1}^{l+1}, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n), (b_3^{l+1}, b_{k-1}^{l+1}, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) \in X_{3,k-1}.$$

Par conséquent, d'après notre hypothèse de récurrence, pour tout $l \in \{0, \ldots, p-1\}$, il existe une suite $(z_{3,k-1}^{m,l})_{m=0}^{q(l)}$ d'éléments de $\prod_{i=3}^{k-1} X_i \times \prod_{i=k}^{n} \{a_i\}$ telle que :

- $z_{3,k-1}^{0,l} = (a_3^{l+1}, \ldots, a_{k-1}^{l+1}, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$;
- $z_{3,k-1}^{q(l),l} = (b_3^{l+1}, \ldots, b_{k-1}^{l+1}, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$;
- pour tout $m \in \{0, \ldots, q(l)-1\}$, il existe $c^{m+1,l}$, $d^{m,l} \in X_1 \times X_2$ tels que :

$$(c^{m+1,l}, z_{3,k-1}^{m+1,l}) \sim (d^{m,l}, z_{3,k-1}^{m,l}).$$

Par indépendance, en remplaçant tous les a_k par y_k^{l+1}, il existe une suite $(w_{3,k-1}^{m,l})_{m=0}^{q(l)}$ d'éléments de $\prod_{i=3}^{k-1} X_i \times \{y_k^{l+1}\} \times \prod_{i=k+1}^{n}\{a_i\}$ telle que :

- $w_{3,k-1}^{0,l} = (a_3^{l+1}, \ldots, a_{k-1}^{l+1}, y_k^{l+1}, a_{k+1}, \ldots, a_n)$;
- $w_{3,k-1}^{q(l),l} = (b_3^{l+1}, \ldots, b_{k-1}^{l+1}, y_k^{l+1}, a_{k+1}, \ldots, a_n)$;
- pour tout $m \in \{0, \ldots, q(l)-1\}$, il existe $c^{m+1,l}$, $d^{m,l} \in X_1 \times X_2$ tels que :

$$(c^{m+1,l}, w_{3,k-1}^{m+1,l}) \sim (d^{m,l}, w_{3,k-1}^{m,l}).$$

Autrement dit, $(a_3^{l+1}, \ldots, a_{k-1}^{l+1}, y_k^{l+1}, a_{k+1}, \ldots, a_n)$ et $(b_3^{l+1}, \ldots, b_{k-1}^{l+1}, y_k^{l+1}, a_{k+1}, \ldots, a_n)$ sont (3,k)-reliés. De la même manière, il existe deux suites $(w_{3,k-1}^{m,-1})_{m=0}^{q(-1)}$ et $(w_{3,k-1}^{m,p+1})_{m=0}^{q(p+1)}$, $(3, k-1)$-reliant respectivement :

- $(x_3, \ldots, x_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$ et $(b_1^0, \ldots, b_{k-1}^0, x_k,\ a_{k+1}, \ldots, a_n)$, et
- $(z_3, \ldots, z_{k-1}, z_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$ et $(a_3^p, \ldots, a_{k-1}^p, z_k, a_{k+1},\ \ldots, a_n)$.

Ainsi, la suite $\left((w_{3,k}^{m,l})_{m=0}^{q(l)}\right)_{l=-1}^{p+1}$, constituée par la concaténation des suites $(w_{3,k}^{m,l})_{m=0}^{q(l)}$ pour tout l, $(3,k)$-relie $x_{3,k}$ et $z_{3,k}$. Par conséquent, l'axiome d'i-lien est bien vérifié sur Y.

Montrons maintenant que le nouvel axiome archimédien est aussi vérifié sur Y. Soient $x = (x_1, x_2, x_{3,k})$ et $z = (z_1, z_2, z_{3,k})$ deux éléments quelconques de Y. Supposons qu'il existe sur $X_{3,k}$ une séquence sur-standard $(w_{3,k}^l)$ croissante et infinie, de base

$$(x_1^0, x_2^0) \prec (x_1^1, x_2^1) \in X_1 \times X_2,$$

et telle que pour tout l, $x \precsim (x_1^0, x_2^0, w_{3,k}^l) \precsim z$. D'après le paragraphe précédent, $x_{3,k}$ et $z_{3,k}$ sont $(3,k)$-reliés. Par conséquent, il existe une suite $(y_{3,k}^m)_{m=0}^p$ d'éléments de $X_{3,k}$ telle que :

- $y_{3,k}^0 = x_{3,k}$ et $y_{3,k}^p = z_{3,k}$;
- pour tout $m \in \{0, \ldots, p-1\}$, il existe $a^{m+1} = (a_1^{m+1}, a_2^{m+1}), b^m = (b_1^m, b_2^m) \in X_1 \times X_2$ tels que :

$$(a^{m+1}, y_{3,k}^{m+1}) \sim (b^m, y_{3,k}^m).$$

Sans perte de généralité, on peut poser que $a^0 = (x_1, x_2)$ et $b^p = (z_1, z_2)$. En effet, si ce n'était pas le cas, on pourrait utiliser à la place la séquence $(w^m_{3,k})^{p+1}_{m=-1}$ définie par :

- $w^{-1}_{3,k} = x_{3,k}$, $w^{p+1}_{3,k} = z_{3,k}$, et $w^i_{3,k} = y^i_{3,k}$ $\forall i \in \{0, \ldots, p\}$;
- $(a^{-1}_1, a^{-1}_2) = (x_1, x_2)$ et $(b^{-1}_1, b^{-1}_2) = (a^0_1, a^0_2)$, $(b^{p+1}_1, b^{p+1}_2) = (z_1, z_2)$ et $(a^{p+1}_1, a^{p+1}_2) = (b^p_1, b^p_2)$;
- pour tout $m \in \{0, \ldots, p-1\}$, $(a^{m+1}, w^{m+1}_{3,k}) \sim (b^m, w^m_{3,k})$.

Maintenant, pour tout l, il existe clairement $m \in \{0, \ldots, p\}$ tel que :

soit i) $(b^m, y^m_{3,k}) \precsim (x^0_1, x^0_2, w^l_{3,k}) \precsim (a^m, y^m_{3,k})$;

soit ii) $(a^m, y^m_{3,k}) \precsim (x^0_1, x^0_2, w^l_{3,k}) \precsim (b^m, y^m_{3,k})$.

Puisque $(w^l_{3,k})$ est une suite infinie, il existe un index m tel que soit i) soit ii) est vérifié pour un nombre infini de l. Considérons un tel index m et supposons que ce soit i) qui soit vérifié pour tout l dans un ensemble infini L (une démonstration similaire s'applique pour le cas ii)).

Si $a^m_1 \precsim_1 b^m_1$, alors pour tout $l \in L$,

$$(b^m_1, b^m_2, y^m_{3,k}) \precsim (x^0_1, x^0_2, w^l_{3,k}) \precsim (b^m_1, a^m_2, y^m_{3,k}).$$

Donc, par solvabilité restreinte par rapport au second composant, pour tout $l \in L$, il existe $c^l_2 \in X_2$ tel que

$$(x^0_1, x^0_2, w^l_{3,k}) \sim (b^m_1, c^l_2, y^m_{3,k}).$$

Nous allons maintenant montrer que $(c^l_2)_{l \in L}$ est une séquence sur-standard infinie par rapport au second composant. Par hypothèse, pour tout $l \in L$,

$$(b^m_1, c^l_2, y^m_{3,k}) \sim (x^0_1, x^0_2, w^l_{3,k}) \prec (x^1_1, x^1_2, w^l_{3,k}) \precsim (x^0_1, x^0_2, w^{l+1}_{3,k}) \sim (b^m_1, c^{l+1}_2, y^m_{3,k}). \quad (8.71)$$

Par essentialité par rapport au premier composant, il existe $d_1 \in X_1$ tel que Non($d_1 \sim_1 b^m_1$). Supposons maintenant que $d_1 \succ_1 b^m_1$ (une démonstration similaire s'applique dans le cas $d_1 \prec_1 b^m_1$). Alors, d'après (8.71),

- soit il existe l tel que $(b^m_1, c^l_2, y^m_{3,k}) \prec (d_1, c^l_2, y^m_{3,k}) \precsim (x^1_1, x^1_2, w^l_{3,k})$, et $(c^l_2)_{l \in L}$ est une séquence sur-standard de base $\{(b^m_1, y^m_{3,k}), (d_1, y^m_{3,k})\}$. Pour montrer cela, il suffit de montrer que $\forall l' \in L$, $(b^m_1, c^{l'}_2, y^m_{3,k}) \prec (d_1, c^{l'}_2, y^m_{3,k}) \precsim (x^1_1, x^1_2, w^{l'}_{3,k})$. Or, si (C_3), l'axiome d'élimination d'ordre 3, est vérifié, alors quel que soit l' on a :

$$\begin{array}{c} \underbrace{\begin{array}{r} (x^0_1, x^0_2, w^l_{3,k}) \sim (b^m_1, c^l_2, y^m_{3,k}) \\ (b^m_1, c^{l'}_2, y^m_{3,k}) \sim (x^0_1, x^0_2, w^{l'}_{3,k}) \\ (d_1, c^l_2, y^m_{3,k}) \precsim (x^1_1, x^1_2, w^l_{3,k}) \end{array}} \\ \Downarrow \\ (x^1_1, x^1_2, w^{l'}_{3,k}) \succsim (d_1, c^{l'}_2, y^m_{3,k}). \end{array} \quad (8.72)$$

Montrons maintenant que (C_3) est vérifié. Définissons une suite $(f^p_{3,n})$ comme étant une suite unidimensionnellement-joignant $w^l_{3,k}$ et $y^m_{3,k}$ dans X si ceux-ci sont unidimensionnellement-joignables dans X, ou bien la suite à 2 éléments $(w^l_{3,k}, y^m_{3,k})$ dans le cas contraire. De même, pour un $l' \neq l$, définissons une suite $(g^p_{3,n})$ (resp. $(h^p_{3,n})$) comme étant une suite unidimensionnellement-joignant $w^{l'}_{3,k}$ et $y^m_{3,k}$ (resp. $w^{l'}_{3,k}$ et $w^l_{3,k}$) dans X si ceux-ci sont unidimensionnellement-joignables dans X, ou bien la suite à 2 éléments $(w^{l'}_{3,k}, y^m_{3,k})$ (resp. $(w^{l'}_{3,k}, w^l_{3,k})$) dans le cas contraire. Soit $Z_{3,n} = \{f^p_{3,n}\} \cup \{g^p_{3,n}\} \cup \{h^p_{3,n}\}$. Alors $\succsim$ est un préodre large total sur $X_1 \times X_2 \times Z_{3,n}$ vérifiant l'axiome d'indépendance. On sait que X_1 et X_2 vérifient l'essentialité, la solvabilité restreinte et la condition de Thomsen. Le nouvel axiome archimédien est aussi vérifié par hypothèse sur X_1 et X_2, et sur $Z_{3,n}$ car c'est un ensemble fini. L'axiome de conservation d'échelle est aussi vérifié car si deux éléments de $Z_{3,n}$ sont unidimensionnellement-joignables dans X, alors ils le sont aussi dans $Z_{3,n}$, de telle sorte que lorsque deux éléments de $Z_{3,n}$ ne sont pas unidimensionnellement-joignables dans $Z_{3,n}$, ils ne le sont pas non plus dans X et donc l'équation (8.2) est forcément vérifiée pour ces éléments. Conclusion : $(X_1 \times X_2 \times Z_{3,n}, \succsim)$ vérifie toutes les conditions d'application du théorème 8.2, et donc $\succsim$ est représentable par une utilité additive sur cet ensemble. Donc (C_3) est vérifié sur cet ensemble, qui contient $X_1 \times X_2 \times \{y^m_{3,k}, w^l_{3,k}, w^{l'}_{3,k}\}$, et ainsi (8.72) est forcément vérifiée, ce qui implique que $(c^l_2)_{l \in L}$ est bien une séquence sur-standard.

– soit il existe l tel que $(b^m_1, c^l_2, y^m_{3,k}) \prec (x^1_1, x^1_2, w^l_{3,k}) \precsim (d_1, c^l_2, y^m_{3,k})$, et par solvabilité restreinte par rapport à X_1, il existe $e_1 \in X_1$ tel que

$$(x^1_1, x^1_2, w^l_{3,k}) \sim (e_1, c^l_2, y^m_{3,k}),$$

de telle sorte que $(c^l_2)_{l \in L}$ est une séquence sur-standard de base $\{(b^m_1, y^m_{3,k}), (e_1, y^m_{3,k})\}$. La démonstration pour montrer que l'équation ci-dessus ne dépend pas de l est identique à celle fournie précédemment.

Mais tout ceci est impossible puisque le nouvel axiome archimédien est supposé vérifié sur le deuxième composant.

Si $a^m_2 \precsim_2 b^m_2$, alors par symétrie par rapport au premier composant, il existerait une séquence sur-standard infinie par rapport au premier composant "entre" $(b^m, y^m_{3,k})$ et $(a^m, y^m_{3,k})$, ce qui est évidemment impossible d'après le nouvel axiome archimédien.

Supposons maintenant que $b^m_1 \prec_1 a^m_1$ et que $b^m_2 \prec_2 a^m_2$. S'il existe un ensemble infini L' tel que pour tout $l \in L'$,

$$(a^m_1, b^m_2, y^m_{3,k}) \precsim (x^0_1, x^0_2, w^l_{3,k}) \precsim (a^m_1, a^m_2, y^m_{3,k}),$$

alors, d'une manière similaire aux précédents paragraphes, on peut montrer qu'il existe aussi une séquence sur-standard par rapport au second composant infinie et bornée. Sinon, il existe un ensemble infini L'' tel que pour tout $l \in L''$,

$$(b^m_1, b^m_2, y^m_{3,k}) \precsim (x^0_1, x^0_2, w^l_{3,k}) \precsim (a^m_1, b^m_2, y^m_{3,k}),$$

et il existe par la même occasion une séquence sur-standard par rapport au premier composant infinie et bornée.

Conclusion : dans tous les cas, l'existence d'une suite infinie $(w^l_{3,k})$ implique aussi l'existence d'une séquence sur-standard par rapport au premier ou au deuxième composant infinie et bornée. Or ceci est impossible d'après le nouvel axiome archimédien. Par conséquent, le nouvel axiome archimédien est forcément vérifié sur Y.

Enfin, pour finir cette démonstration, montrons que l'axiome de conservation d'échelle est aussi vérifié sur Y. Soient $x = (x_3, \ldots, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$ et $y = (y_3, \ldots, y_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$ deux éléments arbitraires de $X_{3,k}$. Supposons que x et y ne soient pas unidimensionnellement-joignables dans X. Dans ce cas, d'après l'axiome de conservation d'échelle sur X, l'équation (8.2) (voir page 170) est vérifiée. Conséquence : l'axiome de conservation d'échelle est aussi vérifié sur Y dans ce cas. Si, au contraire, x et y sont unidimensionnellement-joignables dans X, alors, par définition, leurs derniers composants, x_n et y_n, sont n-reliés. Donc $x, y \in Z = \prod_{i=3}^{n-1} X_i \times \{z_n : z_n \mathcal{O}_n x_n\}$. Mais d'après les paragraphes précédents, sur $X_1 \times X_2 \times Z$, $\succsim$ vérifie l'axiome d'indépendance, la condition de Thomsen, la solvabilité restreinte et l'essentialité par rapport aux deux premiers composants, l'axiome d'i-lien et le nouvel axiome archimédien. De plus, l'axiome de conservation d'échelle est trivialement vérifié sur $X_1 \times X_2 \times Z$ puisque lorsque deux éléments sont unidimensionnellement-joints sur X, ils le sont aussi sur ils sont aussi $X_1 \times X_2 \times Z$. Par conséquent, d'après le théorème 8.2, il existe une utilité additive représentant $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times Z$. L'équation (8.2) étant clairement nécessaire pour la représentabilité additive, elle est forcément vérifiée sur Z. Par conséquent, l'axiome de conservation d'échelle est vérifié pour x et y et, *a fortiori*, sur Y. ♦

Démonstration du théorème 8.3 et du théorème 8.5 : La démonstration est organisée en deux étapes : dans la première, nous allons montrer que $\succsim_{1\ldots n-1}$ est représentable par une fonction d'utilité additive, et, qui plus est, unique à une transformation affine strictement positive près. Dans la seconde étape, on incorpore le dernier composant de X pour montrer que $\succsim$ est aussi représentable par une fonction d'utilité additive.

Soit $(w_1, \ldots, w_n)$ un élément arbitraire de X. Tout au long de la démonstration, $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i < j$, on désignera par $X_{i,j}$ le produit cartésien $\prod_{k=i}^{j} X_k \times \prod_{k=j+1}^{n} \{w_k\}$. D'après le lemme 8.6, $(X_{1,3}, \succsim)$ satisfait les conditions d'application du théorème 8.2, et il existe des fonctions $f_1 : X_1 \to \mathbb{R}$, $f_2 : X_2 \to \mathbb{R}$, $f_3 : X_3 \to \mathbb{R}$, telles que

$$(x_1, x_2, x_3) \succsim_{123} (y_1, y_2, y_3) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{3} f_i(x_i) \geq \sum_{i=1}^{3} f_i(y_i),$$

et, de plus, d'après l'axiome 8.1, f_1, f_2 et f_3 sont uniques à une transformation affine strictement positive près.

Première étape : génération de f sur $X_{1,n-1}$:

Considérons $X_{1,4} = \prod_{i=1}^{4} X_i \times \prod_{k=5}^{n} \{w_k\}$, et agrégeons les $(n-2)$ derniers composants ; alors $X_{1,4} = X_1 \times X_2 \times X_{3,4}$. D'après le lemme 8.6 et le théorème 8.2, il existe

des fonctions $g_1 : X_1 \to \mathbb{R}$, $g_2 : X_2 \to \mathbb{R}$ et $g_{3,4} : X_{3,4} \to \mathbb{R}$, telles que

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \succsim_{1\ldots4} (y_1, y_2, y_3, y_4) \Leftrightarrow$$
$$g_1(x_1) + g_2(x_2) + g_{3,4}(x_3, x_4) \geq g_1(y_1) + g_2(y_2) + g_{3,4}(y_3, y_4).$$

Si n, la dimension de X, est strictement supérieur à 4 — sinon rendez vous à la deuxième étape sans passer par la case départ —, d'après l'axiome 8.1, g_1, g_2 et $g_{3,4}$ sont uniques à une transformation affine strictement positive près. Fixons maintenant la valeur du quatrième composant à x_4^0 ; alors

$$(x_1, x_2, x_3, x_4^0) \succsim_{1\ldots4} (y_1, y_2, y_3, x_4^0) \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) \succsim_{1\ldots3} (y_1, y_2, y_3) \Leftrightarrow$$
$$g_1(x_1) + g_2(x_2) + g_{3,4}(x_3, x_4^0) \geq g_1(y_1) + g_2(y_2) + g_{3,4}(y_3, x_4^0).$$

Il existe donc des constantes $\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_{3,4}(x_4^0)$ telles que, $\forall x_1 \in X_1$, $\forall x_2 \in X_2$ et $\forall x_3 \in X_3$, $g_1(x_1) = \alpha\, f_1(x_1) + \beta_1$, $g_2(x_2) = \alpha\, f_2(x_2) + \beta_2$ et $g_{3,4}(x_3, x_4^0) = \alpha\, f_3(x_3) + \beta_{3,4}(x_4^0)$. Mais, d'après l'indépendance, ceci est vrai pour n'importe quelle valeur x_4^0. Par conséquent, $g_{3,4}(x_3, x_4)$ est en fait la somme de deux fonctions définies sur un composant chacune. C'est pourquoi si $f_4(\cdot) = \beta_{3,4}(\cdot)$, alors

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \succsim_{1\ldots4} (y_1, y_2, y_3, y_4) \Leftrightarrow$$
$$f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \geq f_1(y_1) + f_2(y_2) + f_3(y_3) + f_4(y_4),$$

et, bien entendu, f_1, f_2, f_3 et f_4 sont uniques à une transformation affine strictement positive près.

Par récurrence, en utilisant la méthode décrite ci-dessus, on peut prouver qu'il existe des fonctions $f_1, \ldots, f_{n-1}$, uniques à une transformation affine strictement positive près, telles que

$$(x_1, \ldots, x_{n-1}) \succsim_{1\ldots n-1} (y_1, \ldots, y_{n-1}) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n-1} f_i(y_i).$$

Deuxième étape : génération de f_n :

Soit x_n^0 un élément quelconque de X_n. Considérons le produit cartésien $Y = \prod_{i=1}^{n-1} X_i \times \{x_n : x_n\, \mathcal{O}_n\, x_n^0\}$. Dans Y, $\forall x_n, y_n \in X_n$, $x_n\, \mathcal{O}_n\, y_n$. Par conséquent, le processus décrit dans la première étape peut être appliqué ; ainsi, on montre qu'il existe une fonction $f_n : \{x_n : x_n\, \mathcal{O}_n\, x_n^0\} \to \mathbb{R}$, unique à une transformation affine strictement positive près, telle que, $\forall x, y \in Y$,

$$x \succsim y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} f_i(y_i).$$

Bien entendu, cette propriété est vraie pour tout x_n^0. Donc, il existe sur chaque classe d'équivalence de $\mathcal{O}_n$ une fonction d'utilité, unique à une transformation affine strictement positive près, représentant $\succsim$.

Si la relation $\mathcal{O}_n$ ne possède qu'une seule classe d'équivalence, alors f représente $\succsim$ sur X. Sinon, agrégeons les composants non solvables : soit $X_{3,n} = \prod_{i=3}^{n} X_i$. Montrons que le nouvel axiome archimédien est vérifié sur $X_1 \times X_2 \times X_{3,n}$. Supposons qu'il

existe $z, t \in X$ et une séquence sur-standard $(y^i_{3,n})_{i\geq 0}$ infinie et croissante, de base $\{(x^0_1, x^0_2), (x^1_1, x^1_2)\}$, telle que :

$$\text{pour tout } i,\ z \precsim (x^0_1, x^0_2, y^i_{3,n}) \precsim t.$$

(une démonstrations similaire s'appliquerait si la séquence était décroissante). S'il existait une classe d'équivalence de $\mathcal{O}_n$ contenant un nombre infini d'éléments $(y^i_{3,n})$, alors cela contredirait le lemme 8.6 puisque, à l'intérieur de cette classe, tous les éléments sont n-liés. Donc l'existence de $(y^i_{3,n})$ implique l'existence d'un nombre infini de classes d'équivalence de $\mathcal{O}_{3,n}$ "entre" les classes contenant $(z_3, \ldots, z_n)$ et $(t_3, \ldots, t_n)$. On peut maintenant extraire de $(y^i_{3,n})$ une séquence sur-standard $(r^i_{3,n})$ infinie, croissante, de base $\{(x^0_1, x^0_2), (x^1_1, x^1_2)\}$, et telle que $\text{Non}(r^i_{3,n}\ \mathcal{O}_{3,n}\ r^j_{3,n})$ pour tout $i \neq j$. Soit (r^i_n) la suite extraite en ne prenant que les $n^{\text{ème}}$ composants de $(r^i_{3,n})$ dans X. Alors, par définition, $\text{Non}(r^i_n\ \mathcal{O}_n\ r^j_n)$ pour tout $i \neq j$. Mais puisque $(r^i_{3,n})$ est une suite croissante (au sens de $\succsim$), (r^i_n) est aussi une suite croissante. De plus, par définition de $\mathcal{O}_n$, pour tous $(a_1, \ldots, a_{n-1}), (b_1, \ldots, b_{n-1}) \in \prod_{i=1}^{n-1}$ tels que

$$(a_1, \ldots, a_{n-1}) \succ_{1\ldots n-1} (b_1, \ldots, b_{n-1}),$$

(de tels éléments existent par essentialité), on a aussi :

$$(b_1, \ldots, b_{n-1}, r^{i+1}_n) \succ (a_1, \ldots, a_{n-1}, r^i_n).$$

Par conséquent (r^i_n) est une séquence sur-standard infinie par rapport au $n^{\text{ème}}$ composant, bornée par z_n et t_n, ce qui est impossible par hypothèse. Conséquence : le nouvel axiome archimédien est vérifié sur $X_{3,n}$.

De plus, sur $X_1 \times X_2 \times X_{3,n}$, l'axiome d'indépendance, la condition de Thomsen, la solvabilité restreinte et l'essentialité sur les deux premiers composants et l'axiome de conservation d'échelle sont manifestement vérifiés. Et d'après l'axiome d'i-lien (cf. page 165) et la définition des i-liens (cf. page 163), deux éléments quelconques de $X_{3,n}$, $x_{3,n}$ et $y_{3,n}$, sont $(3, n)$-reliés si et seulement si $x_n\ \mathcal{O}_n\ y_n$, où x_n et y_n représentent les $n^{\text{ème}}$ composants de $x_{3,n}$ et $y_{3,n}$. D'après les théorèmes 8.2 et 8.4, il existe une fonction d'utilité additive $f_1 + f_2 + f_{3,n}$ représentant $\succsim$ sur $X_1 \times X_2 \times X_{3,n}$ telle que f_1 et f_2 sont uniques à une transformation affine strictement positive près, de même que $f_{3,n}$ sur chaque classe d'équivalence de $\mathcal{O}_n$. Mais sur chaque classe d'équivalence de $\mathcal{O}_n$, nous savons déjà qu'il existe $\sum_{i=1}^n f_i$ représentant $\succsim$. Par conséquent, il existe une constante sur chaque classe d'équivalence telle que $f_{3,n}(\cdot) = \sum_{i=3}^n f_i(\cdot) + \text{constante}$; en agrégeant cette constante avec f_n, on obtient $f_{3,n}(\cdot) = \sum_{i=3}^{n-1} f_i(\cdot) + [f_n(\cdot) + \text{constante}]$. Cette constante n'a pas besoin d'être identique dans toutes les classes d'équivalence puisque f_n a été définie séparément dans chacune des classes d'équivalence de $\mathcal{O}_n$. Ainsi, il existe bien une fonction d'utilité f représentant $\succsim$ sur X. De plus, l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{O}_n$ est dénombrable.

Il reste encore le problème de l'unicité à traiter. Nous savons déjà que les fonctions $f_1, \ldots, f_{n-1}$ sont uniques à une transformation affine strictement positive près. Nous savons que f_n l'est aussi sur chacune des classes d'équivalence de $\mathcal{O}_n$.

Supposons maintenant qu'il existe une autre fonction d'utilité additive : $\sum_{i=1}^{n} g_i$. D'après le théorème 8.4, nous savons qu'il existe un ensemble, N, d'entiers consécutifs, et une séquence d'éléments de $X_{3,n}$, $(x_{3,n}^i)_{i\in N}$, telle que $\forall i, i+1 \in N$, $x_{3,n}^{i+1} \succ_{3\ldots n} x_{3,n}^i$ et $\mathrm{Non}(x_{3,n}^i \mathcal{O}_n x_{3,n}^{i+1})$, et telle que $\forall x_{3,n} \in X_{3,n}$, $\exists\, i \in N$ tel que $x_{3,n} \mathcal{O}_n x_{3,n}^i$. De plus, $\forall x_{3,n}$ tel que $x_{3,n} \mathcal{O}_n x_{3,n}^i$,

$$\begin{aligned} g_{3,n}(x_{3,n}) &= \alpha \cdot f_{3,n}(x_{3,n}) + \beta_i \text{ où } \forall i, i+1 \in N, \\ \beta_{i+1} \geq \beta_i \quad & +\alpha \cdot [\sup_{x_1,x_2}\{f_1(x_1) + f_2(x_2)\} + \sup_{y_{3,n}\, \mathcal{O}_n\, x_{3,n}^i} f_{3,n}(y_{3,n})] \\ & -\alpha \cdot [\inf_{x_1,x_2}\{f_1(x_1) + f_2(x_2)\} + \inf_{y_{3,n}\, \mathcal{O}_n\, x_{3,n}^{i+1}} f_{3,n}(y_{3,n})] \\ & \text{avec une égalité seulement si l'inf et/ou le sup n'est pas atteint ;} \end{aligned}$$

puisque les fonctions $f_3, \ldots, f_{n-1}$ sont uniques à une transformation affine strictement positive près, l'unicité de f_n s'ensuit. ♦

8.4 Résumé

Ce chapitre a été consacré à l'étude de produits cartésiens de dimensions supérieures ou égales à 3, et pour lesquels la solvabilité (restreinte ou non) n'est pas obligatoirement vérifiée par tous les composants. On montre alors que la structure imposée par la solvabilité sur le produit cartésien des composants solvables peut s'étendre à X tout entier.

Plus précisément, la solvabilité non restreinte est une hypothèse tellement structurante que la propriété suivante est vraie :
si

- $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$, $n \geq 3$,
- $\succsim$ est un préordre large total sur X vérifiant l'axiome d'indépendance,
- les 2 premiers composants de X vérifient la solvabilité non restreinte, l'axiome archimédien et la condition de Thomsen (de telle sorte qu'il existe une utilité additive représentant $\succsim_{12}$ sur $X_1 \times X_2$),

alors

- $\succsim$ est représentable par une fonction d'utilité additive ;
- cette fonction est unique à une transformation affine strictement positive près (propriété cardinale).

La solvabilité non restreinte a l'inconvénient de forcer les fonctions d'utilité additives à varier de $-\infty$ à $+\infty$; aussi est-il intéressant de remplacer cette hypothèse très forte par la solvabilité restreinte. Cependant, cette dernière est une propriété très affaiblie par rapport à la solvabilité non restreinte, si bien que le résultat ci-dessus ne peut être généralisé directement : il faut introduire quelques définitions et axiomes :

- **définition :** $x_i, z_i \in X_i$, $i \geq 3$, sont i-reliés s'il existe une suite $(y_i^k)_{k=0}^p$ d'éléments de X_i telle que $y_i^0 = x_i$, $y_i^p = z_i$, et telle que, $\forall k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, $\exists\, a^{k+1}, b^k \in \prod_{j=1}^{i-1} X_j$ tels que $(a^{k+1}, y_i^{k+1}) \sim_{1\ldots i} (b^k, y_i^k)$.

- **axiome d'i-lien :** $\forall x_i, z_i \in X_i$, $i \in \{3, \ldots, n-1\}$, x_i et z_i sont i-reliés.

- **définition :** $a, b \in \prod_{j=3}^n X_j$ sont directement-unidimensionnellement-joignables s'il existe $x_1, y_1 \in X_1$ et $c_2 \in X_2$ tels que $(x_1, c_2, a) \sim (y_1, c_2, b)$, ou bien s'il existe $x_2, y_2 \in X_2$ et $c_1 \in X_1$ tels que $(c_1, x_2, a) \sim (c_1, y_2, b)$.

- **définition :** $a, b \in \prod_{j=3}^n X_j$ sont dits unidimensionnellement-joignables s'il existe une suite $(y^k)_{k=0}^p$ d'éléments de $\prod_{j=3}^n X_j$ telle que $y^0 = a$, $y^p = b$ et, $\forall k \in \{0, \ldots, p-1\}$, y^k et y^{k+1} sont directement-unidimensionnellement-joignables.

- **axiome de conservation d'échelle :** $\forall a, b \in \prod_{j=3}^n X_j$, si a et b ne sont pas unidimensionnellement-joignables, alors, $\forall x_1, y_1, z_1 \in X_1$ et $\forall x_2, y_2, z_2 \in X_2$, $(z_1, x_2, a) \sim (x_1, z_2, b)$ et $(z_1, y_2, a) \sim (y_1, z_2, b)$ impliquent $(x_1, y_2, a) \sim (y_1, x_2, a)$.

- **définition :** l'ensemble $\{x_1^k$ tel que $x_1^k \in X_1, k \in N\}$, N étant un ensemble d'entiers consécutifs, est une séquence sur-standard par rapport au premier composant si et seulement si l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée :

  - $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \prec (x_1^0, x_2^1, \ldots, x_n^1)$ et
    $(x_1^{k+1}, x_2^0, \ldots, x_n^0) \succsim (x_1^k, x_2^1, \ldots, x_n^1)$ $\forall k, k+1 \in N$;
  - $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \succ (x_1^0, x_2^1, \ldots, x_n^1)$ et
    $(x_1^{k+1}, x_2^0, \ldots, x_n^0) \precsim (x_1^k, x_2^1, \ldots, x_n^1)$ $\forall k, k+1 \in N$.

  Des définitions similaires s'appliquent aux autres composants de X.

- **nouvel axiome archimédien :** quel que soit i, toute séquence sur-standard par rapport au $i^{\text{ème}}$ composant bornée est finie.

L'axiome d'i-lien est une relaxation de la solvabilité restreinte ; l'axiome de conservation d'échelle est une sous partie de la condition d'élimination du second ordre ; enfin le nouvel axiome archimédien est un peu plus restrictif que l'axiome archimédien classique. L'ensemble de ces définitions et axiomes permet de montrer que, pour tout produit cartésien X,
si

- $\succsim$ est un préordre large total sur X vérifiant l'indépendance, l'axiome de conservation d'échelle, et le nouvel axiome archimédien,

- $\succsim$ vérifie l'axiome d'i-lien lorsque X est de dimension supérieure ou égale à 4,

- les 2 premiers composants de X vérifient la solvabilité restreinte, l'essentialité et la condition de Thomsen,

alors

- $\succsim$ est représentable par une fonction d'utilité additive ;
- l'unicité de cette fonction se situe entre une propriété ordinale et une propriété cardinale (contrairement aux théorèmes d'existence classiques).

8.5 Bibliographie

GONZALES, C. (1996a) : "Additive Utilities When Some Components Are Solvable And Others Are Not," *Journal of Mathematical Psychology*, 40(2), 141–151.

——— (1996b) : "Additive Utility Without Restricted Solvability on All Components," soumis pour publication.

——— (1997) : "Additive Utility Without Solvability on All Components," *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, 453, 64–90, Springer Verlag.

KRANTZ, D. H., R. D. LUCE, P. SUPPES, ET A. TVERSKY (1971) : *Foundations of Measurement (Additive and Polynomial Representations)*, vol. 1. Academic Press, New York.

Troisième partie

Applications

Chapitre 9

Une prise de décision collective

Vous arrivez devant la nature avec des théories, la nature flanque tout par terre... La vérité est que, dans la peinture comme dans les autres arts, il n'y a pas un seul procédé, si petit soit-il, qui s'accommode d'être mis en formule.

Auguste Renoir

Dans la situation économique actuelle, le chômage est devenu un phénomène plutôt commun. Dans ce contexte difficile, les gouvernements viennent en aide aux chômeurs de plusieurs manières :

- par des politiques d'aide à l'emploi, ils incitent, ou, tout du moins, tentent d'inciter les chefs d'entreprise à recruter du personnel ;
- grâce à des organismes tels que l'ANPE, ils mettent en relation entreprises et chômeurs, et proposent à ces derniers des opportunités de travail ;
- par le biais d'allocations diverses (RMI, etc...), ils aident financièrement les chômeurs en difficulté.

Rassurez-vous, le but de ce chapitre n'est pas de faire l'apologie de l'aide de l'Etat aux chômeurs, mais plutôt de montrer que les fonctions d'utilité additives pourraient être utilisées afin d'optimiser la répartition des aides entre les différentes personnes. En effet, si l'on considère que la société formée par les chômeurs est de taille finie n, les allocations accordées à ceux-ci forment des n-uplets, et il est relativement intuitif de penser que l'ensemble de la société a des préférences sur les allocations qu'elle perçoit ; il semble donc qu'il existe une relation de préférence sur l'ensemble des allocations. Dans ce cas, pourquoi ne pas essayer de la représenter par une utilité additive ?

En fait, l'objectif de ce chapitre est double car, outre le modèle présenté, le lecteur découvrira qu'il est possible de déduire les axiomes présentés dans les deux parties précédentes à partir d'hypothèses "rationnelles". En d'autres termes, des axiomes tels que la conservation d'échelle ou bien l'axiome d'i-lien peuvent être raisonnablement

justifiés dans des situations pratiques. Notons que les sciences sociales sont un domaine d'application privilégié des utilités additives (cf. Weymark (1981) pour les indices de Gini ; Fishburn (1969), Flemming (1952) et Harsanyi (1955) pour des fonctions sociales cardinales).

Ce chapitre est divisé en 4 sections. La première présente le modèle, ses axiomes et son théorème d'existence de représentations additives. Toutes les démonstrations sont regroupées dans la seconde section. Enfin, les deux dernières sections présentent un bref résumé et une bibliographie du présent chapitre.

9.1 Le modèle

Considérons un organisme tel que l'ANPE, ayant pour vocation d'aider une société S composée de $n > 3$ chômeurs. Supposons que, pour atteindre cet objectif, l'organisme ait deux moyens à sa disposition :

1. l'organisme peut proposer des emplois aux chômeurs,
2. il peut fournir des aides financières.

Le modèle est certes réducteur, mais il a l'avantage pédagogique de montrer de manière assez simple comment l'existence d'utilités additives peut être justifiée dans des situations pratiques. Evidemment, dans l'absolu, il est préférable d'obtenir un emploi plutôt qu'une aide financière, qui, on le sait, ne sera que provisoire. Cependant, dans la pratique, il s'avère que l'ANPE compte beaucoup plus de bénéficiaires que d'offres d'emploi. Dans ce cas, lorsqu'elle reçoit une proposition d'embauche dont le profil correspond à plusieurs chômeurs, elle doit effectuer un choix et proposer un seul chômeur à l'entreprise d'accueil. Mais lequel ? Et sur quelle base effectuer ce choix ? Dans la suite, nous supposerons que chaque individu a des préférences propres, ce qui implique que la société S elle-même possède des préférences. Un critère de choix relativement logique serait d'essayer d'optimiser les préférences de la société. Bien entendu, l'ANPE peut pondérer ce critère avec ses propres objectifs. Mais formalisons cela de manière plus mathématique.

$\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, désignons par X_i l'ensemble de toutes les allocations possibles (en termes d'aides financières et d'emplois) que pourrait recevoir le $i^{\text{ème}}$ individu de la société S. Bien entendu, chaque individu a des préférences sur son ensemble X_i. Dans la suite, nous imposerons l'hypothèse suivante :

Axiome 9.1 *Les préférences d'un individu ne dépendent pas des allocations (emplois/aides financières) reçues par les autres individus de la société.*

En d'autres termes, l'individu i ne préfèrera jamais l'emploi a à l'emploi b lorsque l'ANPE alloue des ressources α au reste de la société, et b à a lorsque le reste de la société perçoit β. Cet axiome correspond à l'axiome d'indépendance (cf. page 23). Il semble relativement rationnel : si l'individu i a le choix entre recevoir a ou recevoir b, et ce quels que soient les allocations α et β reçues par le reste de la société, ce qui lui importe, en définitive, c'est ce qu'il perçoit ; il devrait donc toujours préférer a à b —

ou b à a — et ne pas inverser l'ordre de ses préférences. Dans la réalité, cet axiome n'est pourtant pas toujours vérifié : il peut y avoir un effet de mode ou de jalousie ; en effet, dans son for intérieur, l'individu pourrait très bien préférer un travail a à un autre, b, mais s'apercevant que beaucoup d'autres personnes ont opté pour le travail b, il pourrait réviser son jugement pour essayer de s'adapter à la société, ou, tout simplement, se dire que si tant d'individus reçoivent b, c'est peut-être parce que b est "plus avantageux" que a.

L'objectif de l'organisme d'aide est d'optimiser les allocations distribuées aux chômeurs, c'est-à-dire qu'il va choisir parmi l'ensemble Y de toutes les distributions possibles celle qui est globalement préférée par la société S. Désignons par $\succsim$ la relation de préférence correspondante, c'est-à-dire que $\forall x, y \in Y$, $x \succsim y$ si la société S préfère globalement recevoir l'allocation x à l'allocation y. A cause de contraintes économiques, il se peut que Y ne soit pas égal au produit cartésien $\prod_{i=1}^{n} X_i$, mais en soit seulement un sous-ensemble : $Y \subsetneq X = \prod_{i=1}^{n} X_i$; par exemple, si les individus 1 et 2 sont ingénieurs, et si l'ANPE ne reçoit qu'une seule proposition d'embauche pour ce profil, Y sera égal à $\{(\text{emploi},\emptyset), (\emptyset,\text{emploi})\}$: l'ANPE ne pourra distribuer cet emploi qu'à une seule personne. Cependant, il n'est pas restrictif de supposer que $\succsim$ est défini sur le produit cartésien X, même si, finalement, l'organisme ne comparera que les distributions appartenant à Y. Par conséquent, nous supposerons que l'axiome suivant est vérifié :

Axiome 9.2 *La relation de préférence de la société sur les allocations est définie sur le produit cartésien* $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$.

Afin de représenter les préférences de la société, l'organisme choisit d'utiliser des fonctions d'utilité (additives de surcroît). Une fois celles-ci élicitées, choisir la distribution optimale revient à résoudre un problème d'optimisation d'une certaine fonction sous contraintes (économiques), ce qui est relativement classique en Recherche Opérationnelle. Cependant, avant de procéder aux optimisations, il convient de savoir si une telle fonction existe. Pour en garantir l'existence, nous allons introduire quelques axiomes, qui vont régir le comportement de la société.

Axiome 9.3 *La société peut toujours comparer deux distributions quelconques de* X*, et, de plus, si elle préfère une distribution* a *à une autre* b *et* b *à* c*, alors elle préfèrera aussi* a *à* c.

Il semble assez naturel d'imposer cet axiome. En effet, lorsqu'elle compare des distributions d'emplois/aides financières, la société anticipe le "bien-être" qu'elle retirera de ces distributions. Dans ce cas, il est difficile voir ce qui pourrait rendre deux distributions distinctes incomparables. De même, si la société pense qu'elle a intérêt à choisir une distribution a plutôt que b, c'est qu'elle en retirera un plus grand bénéfice ; si elle pense que b est préférable à c, il paraît logique qu'elle trouve a plus avantageux que c.

Notons que l'axiome 9.3 stipule seulement que $\succsim$ est un préordre large total. En le combinant avec le fait que les préférences des individus ne dépendent pas des allocations des autres individus de la société (axiome 9.1), on peut définir des préordres larges totaux $\succsim_i$ sur X_i représentant les relations de préférence de chaque individu sur l'ensemble de toutes les allocations qu'il pourrait recevoir. $\succsim_i$ correspond à la relation induite par $\succsim$

sur X_i.

Pour chaque individu, l'ensemble X_i admet une composante "aide financière" et une composante "emploi". Appelons Z_i le sous-espace de X_i correspondant à l'ensemble des aides financières. Par exemple, si $X_i = \{$emploi a, emploi b, emploi c$\} \cup [$aide \$0, aide \$1000$]$, alors $Z_i = [$aide \$0, aide \$1000$]$. Dans le domaine économique, lorsque $\succsim^*$ est une relation de préférence sur un espace monétaire Z, il est d'usage de supposer que $(Z, \succsim^*)$ est un espace topologique séparable et connexe. Par conséquent, l'axiome suivant n'est pas restrictif :

Axiome 9.4 *$\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $(Z_i, \succsim_i)$ est un espace topologique séparable connexe.*

Par contre, il est irréaliste d'envisager que $X_i \backslash Z_i$ soit connexe car, étant un ensemble d'emplois, il ne peut qu'être discret (il est même probable qu'il soit fini). Les aides financières ne sont pas infinies non plus ; il n'est donc pas non plus restrictif d'imposer l'axiome ci-dessous.

Axiome 9.5 *$\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, l'individu i a une allocation, M_i, qu'il préfère à toutes les autres, et une allocation, m_i, à laquelle il préfère toutes les autres allocations.*

On pourrait écrire l'axiome 9.5 en termes plus mathématiques de la façon suivante :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \exists\, m_i, M_i \in X_i \text{ tels que } m_i \precsim_i x_i \precsim_i M_i \ \forall x_i \in X_i.$$

Il est probable que les chômeurs de très courte durée préfèreront les aides financières les plus élevées auxquelles ils ont droit aux emplois qui leurs sont proposés car ils essayeront de prospecter pour trouver des emplois encore plus avantageux (meilleurs salaires, meilleures perspectives de carrière,...). Inversement, si l'aide financière la moins élevée est suffisamment basse, ils préfèreront n'importe quel emploi à cette aide. Lorsque ces deux propriétés sont réunies, $(X_i, \succsim_i)$ est un espace topologique séparable connexe car, quel que soit l'emploi appartenant à $X_i \backslash Z_i$, il existe une somme d'argent pour laquelle l'individu i est indifférent. L'axiome suivant recense le nombre de personnes dans ce cas :

Axiome 9.6 *Le nombre d'individus de S vérifiant les deux propriétés, noté p, est supérieur ou égal à 3.*

Sans perte de généralité, ceux-ci correspondent à la société $S_{1\ldots p}$ formée par les p premiers individus de S. Soit $\succsim_{1\ldots p}$ la relation de préférence (préordre large total) induit par $\succsim$ sur $S_{1\ldots p}$, c'est-à-dire la relation de préférence $\succsim$ lorsque les allocations à la sous-population $S \backslash S_{1\ldots p}$ sont fixées. Par hypothèse, $\succsim_{1\ldots p}$ est défini sur $X_{1\ldots p} = \prod_{i=1}^{p} X_i$. Pour pouvoir utiliser les théorèmes classiques d'existence d'utilités additives, il faut encore supposer l'axiome suivant, qui est relativement classique en économie :

Axiome 9.7 *$(X_{1\ldots p}, \succsim_{1\ldots p})$ est muni de la topologie produit, et $\succsim_{1\ldots p}$ est un préordre large total continu.*

Dans ce cas, on est dans les conditions d'application du théorème 4.1, et donc $\succsim_{1\ldots p}$ est représentable sur $X_{1\ldots p}$ par une fonction d'utilité additive f :

$$\forall x, y \in X_{1\ldots p},\ x \succsim y \Leftrightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{p} f_i(x_i) \geq f(y) = \sum_{i=1}^{p} f_i(y_i).$$

De plus, cette fonction est unique à une transformation affine strictement positive près. Dans le contexte de ce chapitre, on peut assimiler f à une fonction sociale représentant le bien-être de la société. f_i représente la fonction sociale du $i^{\text{ème}}$ individu.

Cependant, en pratique, il est probable que $p \neq n$ car les chômeurs de longue durée sont tellement désespérés qu'ils préfèreront n'importe quel emploi, même peu attractif, à une nouvelle aide financière. Ainsi, pour ces individus, $(X_i, \succsim_i)$ n'est pas connexe, et, par conséquent, le théorème 4.1 ne peut pas s'appliquer sur X. Heureusement, nous allons voir que les théorèmes 8.3 et 8.5 peuvent, eux, s'appliquer.

Jusqu'à maintenant, nous avons justifié que $\succsim$ est un préordre large total vérifiant l'axiome d'indépendance (ici l'axiome 9.1). On sait que les espaces topologiques séparables connexes vérifient la solvabilité restreinte (cf. Wakker (1989)) ; l'essentialité paraît aussi être une hypothèse raisonnable car comment des individus pourraient-ils être indifférents lorsque leur avenir est en jeu ? Puisque la solvabilité restreinte est vérifiée par les $p \geq 3$ premiers individus, la condition de Thomsen n'a pas besoin d'être requise. Par conséquent, pour appliquer théorèmes 8.3 et 8.5, il ne reste plus qu'à justifier le nouvel axiome archimédien, l'axiome de conservation d'échelle et l'axiome d'i-lien.

Pour parvenir à ce résultat, il nous faut encore une hypothèse, que nous pourrions appeler "hypothèse d'équité" : considérons la société $S_{1\ldots p}$ formée par les individus vérifiant la solvabilité restreinte et pour laquelle, rappelons-le, le théorème classique d'existence d'utilités additives peut s'appliquer. Choisissons au hasard un individu j dans cette société, et remplaçons le par un individu i appartenant à $S \backslash S_{1\ldots p}$. Appelons la nouvelle société ainsi formée S^*. S^* est donc constituée des individus 1 à $(j-1)$, $j+1$ à p, et i. Considérons maintenant deux allocations $x_i, y_i \in X_i$ envisageables pour l'individu i, et supposons que, quelles que soient les allocations $x_k, y_k \in X_k$, $k = 1, \ldots, p, k \neq j$, distribuées au reste de la société S^*, cette dernière manifeste les préférences suivantes :

$$(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_p) \succ_{1\ldots j-1, i, j+1\ldots p} (y_1, \ldots, y_{j-1}, y_i, y_{j+1}, \ldots, y_p)\ ;$$

c'est-à-dire que la société S^* préfère, dans sa globalité, n'importe quelle allocation grâce à laquelle l'individu i peut recevoir x_i à n'importe quelle allocation avec laquelle il recevrait y_i (et ce, quel que soit ce que reçoit le reste de la société S^*). Par conséquent, on peut dire que l'individu i impose ses préférences au reste de la société S^*. Il est en quelque sorte un dictateur (au sens de Arrow (1950) et Arrow (1951)). Cette situation n'est pas très équitable ; nous allons donc empêcher qu'elle se produise grâce à l'axiome suivant :

Axiome 9.8 (équité) *Quels que soient les individus $i > p$ et $j \leq p$, et pour toute allocation $x_i, y_i \in X_i$, il existe des allocations $x_k, y_k \in X_k$, $k = 1, \ldots, p, k \neq j$, telles que :*

$$(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_p) \sim_{1\ldots j-1, i, j+1\ldots p} (y_1, \ldots, y_{j-1}, y_i, y_{j+1}, \ldots, y_p).$$

Cette condition, bien qu'à première vue relativement anodine d'un point de vue mathématique, permet en fait de structurer l'espace des préférences X de telle manière que le nouvel axiome archimédien soit vérifié, et que, quels que soient $a, b \in X_k$, $k \in \{1, \ldots, p\}$, a et b soient unidimensionnellement-joignables, entraînant ainsi l'axiome de conservation d'échelle et l'axiome d'i-lien. Par conséquent, les théorèmes 8.3 et 8.5 des pages 180 et 183 peuvent être utilisés. On obtient donc le corollaire suivant :

Corollaire 9.1 *Supposons que les axiomes 9.1 à 9.8 soient vérifiés. Alors il existe des fonctions sociales f_i sur X_i telles que*

$$\forall x, y \in X,\ x \succsim y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} f_i(y_i).$$

De plus, si une autre fonction d'utilité additive g représente aussi $\succsim$, alors il existe des constantes $\alpha > 0$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$, telles que

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ g_i = \alpha\, f_i + \beta_i.$$

Donc, pour optimiser les allocations qu'elle va distribuer aux chômeurs, l'ANPE peut éliciter une fonction sociale additive de la société, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions sociales de tous les individus, et, à partir de là, utiliser un algorithme d'optimisation sous contraintes. L'élicitation de ces fonctions est toutefois sujète à polémique dans la communauté scientifique. En effet, afin de la mener à bien, il conviendrait d'effectuer des comparaisons interpersonnelles d'utilités, ce qui pose le problème suivant : sur quelle base effectuer ces comparaisons ? Y a t-il une unité de référence qui permettrait ces comparaisons ? De telles questions dépassent largement le cadre de ce chapitre. Je ne les traiterai donc pas ; néanmoins le lecteur intéressé par une telle discussion pourra se reporter par exemple à Harsanyi (1955), Harsanyi (1975), Harsanyi (1976, chapitre 4), Armstrong (1951), Sen (1970), Keeney (1976), Keeney et Raiffa (1993), Brock (1980), Duncan Luce et Raiffa (1957) pour des justifications des comparaisons interpersonnelles d'utilités ; à Vickrey (1960) et Kaldor (1939) pour des discussions sur le sujet ; et à Lange (1942) pour une tentative d'échapper aux comparaisons interpersonnelles.

9.2 Démonstrations

Démonstration du corollaire 9.1 : La démonstration consiste à montrer que l'on est dans les conditions d'application des théorèmes 8.3 et 8.5, auquel cas le corollaire devient trivial. D'après les axiomes 9.2 et 9.3, $\succsim$ est un préordre large total sur un produit cartésien X de dimension supérieure à 3. D'après l'axiome 9.1, $\succsim$ vérifie l'axiome d'indépendance. D'après les axiomes 9.4 et 9.6, les $p > 3$ premiers individus vérifient la solvabilité restreinte. Le reste de la démonstration est organisée en deux étapes : dans la première, on montre que, quels que soit l'individu k et deux allocations a et b pour cet individu, a et b sont unidimensionnellement-joignables, ce qui implique en particulier que les axiomes de conservation d'échelle et d'i-lien sont vérifiés. Dans la seconde étape, on montre que le nouvel axiome archimédien est aussi vérifié. Ainsi, on se retrouve bien

dans les conditions d'application des théorèmes 8.3 et 8.5.

Première étape : axiome de conservation d'échelle et d'i-lien

Soient $a, b \in X_3$ tels que $b \succ_3 a$. S'il existe $z_1, t_1 \in X_1$ et $z_2 \in X_2$ tels que $(z_1, z_2, a) \sim_{123} (t_1, z_2, b)$, alors a et b sont unidimensionnellement-joignables. Sinon, d'après le lemme 8.2, page 190, $\forall z_1, t_1, z_2$, $(z_1, z_2, a) \prec_{123} (t_1, z_2, b)$. D'après l'essentialité par rapport à chaque individu, il existe $x_1 \succ_1 y_1$, ce qui implique que $(y_1, x_2, a) \prec_{123} (x_1, x_2, a) \prec_{123} (y_1, x_2, b)$. Or les p premiers individus vérifient la solvabilité restreinte ; par conséquent, il existe $y_3^1 \in X_3$ tel que $(x_1, x_2, a) \sim_{123} (y_1, x_2, y_3^1)$. Si y_3^1 et b sont directement-unidimensionnellement-joignables, alors a et b sont unidimensionnellement-joignables. Sinon, par solvabilité restreinte, il existe $y_3^2 \in X_3$ tel que $(x_1, x_2, y_3^1) \sim_{123} (y_1, x_2, y_3^2)$, et ainsi de suite. La suite (y_3^k) ainsi créée est une séquence standard bornée par b. Or on avait vu que $(\prod_{i=1}^3 X_i, \succsim_{123})$ vérifie les hypothèses du théorème 4.1, ce qui implique l'axiome archimédien classique est vérifié, et donc que la séquence standard (y_3^k) est finie. Ainsi, cette séquence vérifie les exigences de la définition 8.3 (cf. page 169), et donc a et b sont unidimensionnellement-joignables.

Soient $a = (a_3, \ldots, a_i)$ et $b = (b_3, \ldots, b_i)$ deux éléments de $\prod_{k=3}^i X_k$, $\boldsymbol{3 < i \leq p}$, tels que $b \succ_{3\ldots i} a$. Supposons que, $\forall j < i$, toutes les allocations de $\prod_{k=3}^j X_k$ sont unidimensionnellement-joignables. Par hypothèse, $(a_3, \ldots, a_{i-1})$ et $(b_3, \ldots, b_{i-1})$ sont unidimensionnellement-joignables. Autrement dit, $(a_3, \ldots, a_{i-1}, a_i)$ et $(b_3, \ldots, b_{i-1}, a_i)$ sont unidimensionnellement-joignables. Comme dans le paragraphe précédent, soit $(b_3, \ldots, b_{i-1}, a_i)$ et $(b_3, \ldots, b_{i-1}, b_i)$ sont unidimensionnellement-joignables, soit, par solvabilité restreinte par rapport au $i^{\text{ème}}$ individu, on peut construire une séquence standard finie $(z_i^k)_{k=0}^R \in X_i$ telle que

- $(x_1, x_2, z_i^k) \sim_{12i} (y_1, x_2, z_i^{k+1})$ $\forall k$,
- $z_i^0 = a_i$
- $(x_1, x_2, z_i^R) \succsim_{12i} (y_1, x_2, b_i) \succsim_{12i} (y_1, x_2, z_i^R)$.

Par solvabilité restreinte par rapport au premier individu, la dernière relation de préférence implique qu'il existe $z_1 \in X_1$ tel que $(z_1, x_2, z_i^R) \sim_{12i} (y_1, x_2, b_i)$. Mais par définition,

$$(x_1, x_2, z_i^k) \sim_{12i} (y_1, x_2, z_i^{k+1}) \Leftrightarrow (x_1, x_2, b_3, \ldots, b_{i-1}, z_i^k) \sim_{1\ldots i} (y_1, x_2, b_3, \ldots, b_{i-1}, z_i^{k+1}),$$

ce qui implique que $(b_3, \ldots, b_{i-1}, a_i)$ et $(b_3, \ldots, b_{i-1}, b_i)$ sont unidimensionnellement-joignables. Par conséquent, puisque $(a_3, \ldots, a_{i-1}, a_i)$ et $(b_3, \ldots, b_{i-1}, a_i)$ sont unidimensionnellement-joignables, a et b le sont aussi.

Considérons maintenant deux allocations a et b de $\prod_{k=3}^i X_k$, $i > p$, telles que $b \succ_{3\ldots i} a$. Supposons que $\forall j < i$, toutes les allocations de $\prod_{k=3}^j X_k$ soient unidimensionnellement-joignables. D'après l'axiome 9.8, il existe $x_k, y_k \in X_k$, $k = 2, \ldots, p$, tels que :

$$(a_i, x_2, \ldots, x_p) \sim_{i,2\ldots p} (b_i, y_2, \ldots, y_p),$$

ou, d'une manière équivalente, $\forall x_1 \in X_1$,

$$(x_1, x_2, \ldots, x_p, a_{p+1}, \ldots, a_{i-1}, a_i) \sim_{1\ldots i} (x_1, y_2, \ldots, y_p, a_{p+1}, \ldots, a_{i-1}, b_i).$$

Par conséquent, $(x_3, \ldots, x_p, a_{p+1}, \ldots, a_{i-1}, a_i)$ et $(y_3, \ldots, y_p, a_{p+1}, \ldots, a_{i-1}, b_i)$ sont unidimensionnellement-joignables. Mais par hypothèse, puisque toutes les allocations de $\prod_{k=3}^{p} X_k$ sont unidimensionnellement-joignables, $(x_3, \ldots, x_p, a_{p+1}, \ldots, a_{i-1}, a_i)$ et $(a_3, \ldots, a_p, a_{p+1}, \ldots, a_{i-1}, a_i)$ le sont aussi, de même que $(y_3, \ldots, y_p, a_{p+1}, \ldots, a_{i-1}, b_i)$ et $(b_3, \ldots, b_p, b_{p+1}, \ldots, b_{i-1}, b_i)$. Par conséquent, a et b sont aussi unidimensionnellement-joignables.

Seconde étape : nouvel axiome archimédien

Considérons une séquence sur-standard par rapport au $i^{\text{ème}}$ individu croissante et infinie : $(x_i^k)_{k\in N}$ de base $\{\alpha, \beta\} \in \prod_{j\neq i} X_j$, c'est-à-dire $(x_i^0, \alpha) \prec (x_i^0, \beta)$ et $(x_i^{k+1}, \alpha) \succsim (x_i^k, \beta)$ $\forall k$. Nous allons montrer que cette séquence implique l'existence d'une séquence sur-standard infinie dans l'espace $(\prod_{j=1}^{p} X_j, \succsim_{1\ldots p})$, ce qui est impossible puisque, sur cet espace, le nouvel axiome archimédien est vérifié (car le théorème classique 4.1 s'applique) et, d'après l'axiome 9.5, $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$, $\exists\, m_j, M_j \in X_j$ tels que , $\forall x_j \in X_j$, $m_j \precsim_j x_j \precsim_j M_j$. Par conséquent, toute séquence sur-standard doit être finie, et donc le nouvel axiome archimédien est vérifié.

On montre l'existence de la séquence sur-standard dans l'espace $(\prod_{j=1}^{p} X_j, \succsim_{1\ldots p})$ en deux sous-étapes : dans la première, on montre qu'il existe $x_r, y_r \in X_r$, $r \in \{1, \ldots, p\}$, tels que $(x_i^k)_{k\in N}$ est aussi une séquence sur-standard de base $\{x_r, y_r\}$. Dans la deuxième sous-étape, on montre que l'axiome 9.8 implique l'existence d'une séquence sur-standard infinie dans l'espace $(\prod_{j=1}^{p} X_j, \succsim_{1\ldots p})$. Dans la suite de la démonstration, nous allons utiliser les notations suivantes :

- $\forall r \in \{1, \ldots, n\}$ et $\forall x \in \prod_{j\in J} X_j$, $J \subset \{1, \ldots, n\}$ tel que $r \in J$, $z = x_{-r}y_r$ désigne l'allocation telle que $z_j = x_j$ $\forall j \in J\backslash\{r\}$, et $z_r = y_r$,
- $\succsim_{\neq i}$ est une notation abrégée de $\succsim_{1\ldots i-1, i+1\ldots n}$.

Première sous-étape :

<u>*Premier cas :*</u> *s'il existe $r \in \{1, \ldots, p\}\backslash\{i\}$ tel que $\alpha_r \sim_r \beta_r$:*
Par définition de $\sim_r$ et de l'indépendance, $\alpha \sim_{\neq i} \alpha_{-r}\beta_r$. D'après l'essentialité, $\exists\, x_r \prec_r z_r \in X_r$, et, d'après l'axiome d'indépendance, $(x_i^k)_{k\in N}$ est une séquence sur-standard de base $\{\alpha_{-r}x_r, \beta_{-r}x_r\}$. Si $\alpha_{-r}z_r \precsim_{\neq i} \beta_{-r}x_r$, alors

$$\begin{cases} \beta_{-r}x_r \succsim_{\neq i} \alpha_{-r}z_r \succ_{\neq i} \alpha_{-r}x_r, \\ (x_i^{k+1}, \alpha_{-r}x_r) \succsim (x_i^k, \beta_{-r}x_r) \succsim (x_i^k, \alpha_{-r}z_r), \end{cases}$$

ce qui implique que $(x_i^k)_{k\in N}$ est une séquence sur-standard de base $\{\alpha_{-r}x_r, \alpha_{-r}z_r\}$, ou, d'une manière équivalente, de base $\{x_r, z_r\}$.

Si, au contraire, $\alpha_{-r}z_r \succsim_{\neq i} \beta_{-r}x_r$, alors, puisque $\alpha_{-r}x_r \precsim_{\neq i} \beta_{-r}x_r$, la solvabilité restreinte par rapport au $r^{\text{ème}}$ individu implique qu'il existe $y_r \in X_r$ tel que $\alpha_{-r}y_r \sim_{\neq i}$

$\beta_{-r}x_r$. Par conséquent, $(x_i^k)_{k\in N}$ est une séquence sur-standard de base $\{\alpha_{-r}x_r, \alpha_{-r}y_r\}$, ou, d'une manière équivalente, de base $\{x_r, y_r\}$.
Deuxième cas : s'il existe $r \in \{1,\ldots,p\}\backslash\{i\}$ tel que $\beta_r \succ_r \alpha_r$:
Si $\beta_{-r}\alpha_r \succ_{\neq i} \alpha$, alors

$$\begin{cases} \beta \succ_{\neq i} \beta_{-r}\alpha_r \succ_{\neq i} \alpha, \\ (x_i^{k+1}, \beta_{-r}\alpha_r) \succ (x_i^{k+1}, \alpha) \succsim (x_i^k, \beta), \end{cases}$$

ce qui implique que $(x_i^k)_{k\in N}$ est une séquence sur-standard de base $\{\beta_{-r}\alpha_r, \beta\}$, ou, d'une manière équivalente, de base $\{\alpha_r, \beta_r)\}$.

Si $\beta_{-r}\alpha_r \precsim_{\neq i} \alpha$, alors $\beta_{-r}\alpha_r \precsim_{\neq i} \alpha \prec_{\neq i} \beta$, ce qui implique d'après la solvabilité restreinte par rapport au $r^{\text{ème}}$ individu qu'il existe $y_r \in X_r$ tel que $\beta_{-r}y_r \sim_{\neq i} \alpha$. Alors,

$$\begin{cases} \beta \succ_{\neq i} \alpha \sim_{\neq i} \beta_{-r}y_r, \\ (x_i^{k+1}, \beta_{-r}y_r) \sim (x_i^{k+1}, \alpha) \succsim (x_i^k, \beta), \end{cases}$$

ce qui implique que $(x_i^k)_{k\in N}$ est une séquence sur-standard de base $\{\beta_{-r}y_r, \beta\}$, ou, d'une manière équivalente, de base $\{y_r, \beta_r\}$.
Troisième cas : si, $\forall r \in \{1,\ldots,p\}\backslash\{i\}$, $\alpha_r \succ_r \beta_r$:
Supposons qu'il existe $j \in \{1,\ldots,p\}\backslash\{i\}$ tel que $\alpha_j \prec_j M_j$ — rappelons que M_j est l'élément préféré de X_j et m_j l'élément le moins préféré de X_j. Alors, soit $\alpha_{-j}M_j \precsim_{\neq i} \beta$, et $(x_i^k)_{k\in N}$ est une séquence sur-standard de base $\{\alpha, \alpha_{-j}M_j\}$, ce qui nous ramène aux premier et second cas, soit $\alpha_{-j}M_j \succ_{\neq i} \beta$, et, d'après la solvabilité restreinte par rapport au $j^{\text{ème}}$ individu, il existe x_j tel que $\alpha_{-j}x_j \sim_{\neq i} \beta$, ce qui implique que $(x_i^k)_{k\in N}$ est une séquence sur-standard de base $\{\alpha, \alpha_{-j}x_j\}$. De même, s'il existe $j \in \{1,\ldots,p\}\backslash\{i\}$ tel que $\beta_j \succ_j m_j$, alors il existe une base pour la séquence sur-standard $(x_i^k)_{k\in N}$ correspondant au premier ou au deuxième cas. Donc, maintenant, $\forall r \in \{1,\ldots,p\}\backslash\{i\}$, $\alpha_r \sim_r M_r$ et $\beta_r \sim_r m_r$.

Supposons que $i > p$. Puisque $\beta \succ_{\neq i} \alpha$ et $\alpha_r \succ_r \beta_r$ $\forall r \in \{1,\ldots,p\}\backslash\{i\}$, il existe $j_0 > p$ tel que $\beta_{j_0} \succ_{j_0} \alpha_{j_0}$. D'après l'axiome d'équité, il existe aussi x_j, y_j, $j \in \{1,\ldots,p\}$ tel que

$$(\beta_{j_0}, x_2, \ldots, x_p) \sim_{j_0,2\ldots p} (\alpha_{j_0}, y_2, \ldots, y_p).$$

Par récurrence, on peut aisément montrer qu'il existe aussi z_j, $j \in \{1,\ldots,p\}$, tel que

$$(\beta_{j_0}, z_2, \ldots, z_p) \sim_{j_0,2\ldots p} (\alpha_{j_0}, M_2, \ldots, M_p)\ ; \tag{9.1}$$

en effet, soient $J = \{j : x_j \precsim_j y_j\}$ et $K = \{k : x_k \succ_k y_k\}$. Pour $j \in J$,

$$\begin{aligned} &(\beta_{j_0}, x_2, \ldots, x_{j-1}, y_j, x_{j+1}, \ldots, x_p) \\ &\qquad \succsim_{j_0,2\ldots p} (\alpha_{j_0}, y_2, \ldots, y_{j-1}, y_j, y_{j+1}, \ldots, y_p) \\ &\qquad\qquad \sim_{j_0,2\ldots p} (\beta_{j_0}, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_p), \end{aligned}$$

de telle sorte que, d'après l'axiome d'indépendance et le fait que $M_j \succsim_j y_j$, $\forall j \in J$,

$$\begin{aligned} &(\beta_{j_0}, x_2, \ldots, x_{j-1}, M_j, x_{j+1}, \ldots, x_p) \\ &\qquad \succsim_{j_0,2\ldots p} (\alpha_{j_0}, y_2, \ldots, y_{j-1}, M_j, y_{j+1}, \ldots, y_p) \\ &\qquad\qquad \succsim_{j_0,2\ldots p} (\beta_{j_0}, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_p). \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après la solvabilité restreinte par rapport au $j^{\text{ème}}$ individu, il existe z_j tel que

$$(\beta_{j_0}, x_2, \ldots, x_{j-1}, z_j, x_{j+1}, \ldots, x_p) \sim_{j_0,2\ldots p} (\alpha_{j_0}, y_2, \ldots, y_{j-1}, M_j, y_{j+1}, \ldots, y_p).$$

Donc

$$(\beta_{j_0}, z_{j\in J}, x_{j\in K}) \sim_{j_0,2\ldots p} (\alpha_{j_0}, M_{j\in J}, y_{j\in K}). \tag{9.2}$$

Maintenant, par définition de K, pour un $k \in K$,

$$(\alpha_{j_0}, M_{j\in J}, x_k, y_{j\in K\setminus\{k\}}) \succsim_{j_0,2\ldots p} (\beta_{j_0}, z_{j\in J}, x_k, x_{j\in K\setminus\{k\}})$$

et par indépendance, en remplaçant x_k par M_k, et puisque $M_k \succsim_k y_k$,

$$\begin{aligned}(\alpha_{j_0}, M_{j\in J}, M_k, y_{j\in K\setminus\{k\}}) \\ \succsim_{j_0,2\ldots p} (\beta_{j_0}, z_{j\in J}, M_k, x_{j\in K\setminus\{k\}}) \\ \succsim_{j_0,2\ldots p} (\alpha_{j_0}, y_k, y_{j\in K\setminus\{k\}}).\end{aligned}$$

Donc, par solvabilité restreinte par rapport au $k^{\text{ème}}$ composant, il existe $t_k \prec_k M_k$ tel que

$$(\beta_{j_0}, z_{j\in J}, M_k, x_{j\in K\setminus\{k\}}) \sim_{j_0,2\ldots p} (\alpha_{j_0}, M_{j\in J}, t_k, y_{j\in K\setminus\{k\}}).$$

Mais puisque $(\beta_{j_0}, M_2, \ldots, M_p) \succ_{j_0,2\ldots p} (\alpha_{j_0}, M_2, \ldots, \ldots, M_p)$, il existe $q \neq k$ tel que $z_q \prec_q M_q$ ou $x_q \prec_q M_q$, suivant que $q \in J$ ou $q \in K$. Supposons que $q \in K$, alors soit

$$(\beta_{j_0}, z_{j\in J}, M_k, M_q, x_{j\in K\setminus\{k,q\}}) \succsim_{j_0,2\ldots p} (\alpha_{j_0}, M_{j\in J}, M_k, y_{j\in K\setminus\{k\}})$$

et alors,

$$\begin{aligned}(\beta_{j_0}, z_{j\in J}, M_k, M_q, x_{j\in K\setminus\{k,q\}}) \\ \succsim_{j_0,2\ldots p} (\alpha_{j_0}, M_{j\in J}, M_k, y_{j\in K\setminus\{k\}}) \\ \succsim_{j_0,2\ldots p} (\beta_{j_0}, z_{j\in J}, M_k, x_{j\in K\setminus\{k\}})\end{aligned}$$

ce qui implique, par solvabilité restreinte par rapport au $q^{\text{ème}}$ individu, qu'il existe $z_q \in X_q$ tel que

$$(\beta_{j_0}, z_{j\in J}, M_k, z_q, x_{j\in K\setminus\{k,q\}}) \sim_{j_0,2\ldots p} (\alpha_{j_0}, M_{j\in J}, M_k, y_{j\in K\setminus\{k\}}),$$

et donc qu'on peut réduire dans K l'ensemble des y_j différents de M_j d'une unité. Soit, au contraire,

$$(\beta_{j_0}, z_{j\in J}, M_k, M_q, x_{j\in K\setminus\{k,q\}}) \prec_{j_0,2\ldots p} (\alpha_{j_0}, M_{j\in J}, M_k, y_{j\in K\setminus\{k\}}),$$

et alors

$$\begin{aligned}(\alpha_{j_0}, M_{j\in J}, M_k, y_{j\in K\setminus\{k\}}) \\ \succ_{j_0,2\ldots p} (\beta_{j_0}, z_{j\in J}, M_k, M_q, x_{j\in K\setminus\{k,q\}}) \\ \succsim_{j_0,2\ldots p} (\alpha_{j_0}, M_{j\in J}, t_k, y_{j\in K\setminus\{k\}}),\end{aligned}$$

et donc, par solvabilité restreinte, il existe t'_k tel que

$$(\beta_{j_0}, z_{j\in J}, M_k, M_q, x_{j\in K\setminus\{k,q\}}) \sim_{j_0,2\ldots p} (\alpha_{j_0}, M_{j\in J}, t'_k, y_{j\in K\setminus\{k\}}).$$

Mais alors on a réduit d'une unité l'ensemble des q tels que $q \in J$. Si q avait appartenu à J, la démonstration aurait été similaire; seule la notation aurait changé. Ce processus doit être utilisé jusqu'à ce qu'une allocation soit atteinte, qui soit indifférente à $(\alpha_{j_0}, M_{j\in J}, M_k, y_{j\in K\setminus\{k\}})$; et puisque $(\beta_{j_0}, M_2, \ldots, M_p) \succ_{j_0,2\ldots p} (\alpha_{j_0}, M_2, \ldots, \ldots, M_p)$, on doit arrêter ce processus après au plus $\mathrm{Card}(J \cup K) = p - 1$ itérations. Par récurrence, le même procédé peut être utilisé $\mathrm{Card}(K)$ fois pour démontrer (9.1). Pour résumer, (9.1) peut être démontrée grâce à un algorithme en $O(p^2)$. Or, par définition, (9.1) est équivalent à

$$(\beta_{j_0}, M_1, z_2, \ldots, z_p) \sim_{j_0,1\ldots p} (\alpha_{j_0}, M_1, \ldots, M_p),$$

si bien que

$$\gamma = (M_1, z_2, \ldots, z_p, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_{j_0-1}, \beta_{j_0}, \alpha_{j_0+1}, \ldots, \alpha_n) \sim_{\neq i} \alpha$$

est tel que $(x_i^k)_{k\in N}$ est une séquence sur-standard de base $\{\gamma, \beta\}$. Mais on sait qu'il existe au moins un z_j tel que $z_j \prec_j M_j$, ce qui veut dire que le premier paragraphe du troisième cas peut être appliqué.

Enfin, si $i \leq p$, comme dans paragraphe précédent, il existe $j_0 > p$ tel que $\beta_{j_0} \succ_{j_0} \alpha_{j_0}$, et x_j, y_j, $j \in \{1, \ldots, p\}\setminus\{j_0\}$, tels que

$$(x_1, \ldots, x_{i-1}, \beta_{j_0}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \sim_{1\ldots i-1,j_0,i+1\ldots p} (y_1, \ldots, y_{i-1}, \alpha_{j_0}, y_{i+1}, \ldots, y_p).$$

On démontre alors par récurrence, comme dans le paragraphe précédent, qu'il existe aussi z_j, $j \in \{1, \ldots, p\}$, tel que

$$(z_1, \ldots, z_{i-1}, \beta_{j_0}, z_{i+1}, \ldots, z_n) \sim_{1\ldots i-1,j_0,i+1\ldots p} (M_1, \ldots, M_{i-1}, \alpha_{j_0}, M_{i+1}, \ldots, M_p),$$

si bien que

$$\gamma = (z_1, \ldots, z_p, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_{j_0-1}, \beta_{j_0}, \alpha_{j_0+1}, \ldots, \alpha_n) \sim_{\neq i} \alpha,$$

ce qui entraîne une conclusion similaire à celle du paragraphe précédent.

Seconde sous-étape :

Arrivé à ce stade, on suppose que $(x_i^k)_{k\in N}$ est une séquence sur-standard croissante, infinie, et de base $\{x_r, y_r\} \in X_r$, $r \leq p$, c'est-à-dire $y_r \succ_r x_r$ et $(x_i^{k+1}, x_r) \succsim_{i,r} (x_i^k, y_r)\ \forall k$. Si $i \leq p$, alors il existe une séquence sur-standard infinie dans l'espace $(\prod_{j=1}^p X_j, \succsim_{1\ldots p})$, ce qui, on l'a vu, est impossible à cause de l'existence des bornes m_j et M_j.

Supposons maintenant que $i > p$. D'après l'axiome d'équité, il existe $\gamma^k, \delta^k \in \prod_{j=1,j\neq r}^p X_j$ tel que

$$(x_i^k, \delta^k) \sim_{i,1\ldots r-1,r+1\ldots p} (x_i^0, \gamma^k) \precsim_{i,1\ldots r-1,r+1\ldots p} (x_i^0, M_1, \ldots, M_{r-1}, M_{r+1}, \ldots, M_p).$$

Par récurrence, d'après la solvabilité restreinte par rapport aux p premiers individus, et puisque, par hypothèse, $x_i^{k+1} \succ_i x_i^k$, il est facile de montrer qu'il existe $d^k \in \prod_{j=1,j\neq r}^p X_j$ tel que

$$(x_i^k, d^k) \sim_{i,1\ldots r-1,r+1\ldots p} (x_i^0, M_1, \ldots, M_{r-1}, M_{r+1}, \ldots, M_p),$$

si bien que $\forall k \in N$,

$$(x_i^{k+1}, d^{k+1}) \sim_{i,1\ldots r-1,r+1\ldots p} (x_i^k, d^k).$$

Ainsi, $(x_i^{k+1}, d^{k+1}, x_r) \sim_{i,1\ldots p} (x_i^k, d^k, x_r)$, et, puisque $(x_i^{k+1}, x_r) \succsim_{i,r} (x_i^k, y_r)$,

$$(d^k, x_r) \succsim_{1\ldots p} (d^{k+1}, y_r). \tag{9.3}$$

D'après le théorème 4.1, $(\prod_{j=1}^p X_j, \succsim_{1\ldots p})$ est représentable par une fonction d'utilité, appelons-la f. Donc (9.3) est équivalent à

$$\sum_{j=1, j\neq r}^{p} f_j(d_j^{k+1}) \leq \sum_{j=1, j\neq r}^{p} f_j(d_j^k) - [f_r(y_r) - f_r(x_r)],$$

ce qui implique que

$$\sum_{j=1, j\neq r}^{p} f_j(d_j^k) \leq \sum_{j=1, j\neq r}^{p} f_j(d_j^0) - k[f_r(y_r) - f_r(x_r)].$$

$y_r \succ_r x_r$, donc $f_r(y_r) - f_r(x_r) > 0$. Puisque la suite (x_i^k) est infinie,

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{j=1, j\neq r}^{p} f_j(d_j^k) = -\infty,$$

ce qui est impossible car, chaque individu ayant une allocation préférée à toutes les autres et une non préférée,

$$\sum_{j=1, j\neq r}^{p} f_j(m_j) \leq \sum_{j=1, j\neq r}^{p} f_j(d_j^k),\ \forall k \in N.$$

Par conséquent, il n'existe pas de séquence sur-standard infinie dans $(X, \succsim)$. Une démonstration similaire s'applique pour les séquences sur-standard décroissantes. Donc le nouvel axiome archimédien est vérifié. ♦

9.3 Résumé

Ce chapitre étudie une société S composée de n individus pouvant recevoir d'un organisme public des allocations. Celles-ci peuvent prendre deux formes bien distinctes :

- des propositions d'emploi,
- des aides financières.

Notons X_i l'ensemble des allocations (emplois + aides) et $Z_i \subset X_i$ l'ensemble des aides financières que peut recevoir l'individu i. Chaque individu i a des préférences sur son ensemble X_i, représentées par la relation $\succsim_i$ sur $\prod_{i=1}^n X_i$. l'agrégation des préférences de tous les individus forme la relation de préférence de la société : $\succsim$. Si

- les préférences des individus ne dépendent pas des allocations (aides + emplois) reçues par le reste de la société,

- les $(Z_i, \succsim_i)$, $i = 1, \ldots, n$, sont des espaces topologiques connexes et séparables,
- tous les individus ont une allocation qu'il préfèrent à toutes les autres, M_i, et une allocation à laquelle ils préfèrent toutes les autres, m_i. Soit p le nombre d'individus pour lesquels $m_i, M_i \in X_i \backslash Z_i$. On suppose que $p \geq 3$.
- $(X_{1\ldots p}, \succsim_{1\ldots p})$ est muni de la topologie produit, et $\succsim_{1\ldots p}$ est un préordre large total continu,
- principe d'équité : $\forall$ individus $i > p$ et $j \leq p$, et $\forall$ allocation $x_i, y_i \in X_i$, il existe des allocations $x_k, y_k \in X_k$, $k = 1, \ldots, p, k \neq j$, telles que :

$$(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_p) \sim_{1\ldots j-1, i, j+1\ldots p} (y_1, \ldots, y_{j-1}, y_i, y_{j+1}, \ldots, y_p).$$

alors :

- il existe une fonction d'utilité additive (par rapport aux individus) représentant les préférences de la société S,
- cette fonction est cardinale.

9.4 Bibliographie

Armstrong, W. E. (1951) : "Utility and the Theory of Welfare," *Oxford Economic Papers*, 3, 259–271.

Arrow, K. J. (1950) : "A Difficulty in the Concept of Social Welfare," *The Journal of Political Economy*, 58, 328–346.

——— (1951) : *Individual Values and Social Choice*. Wiley, New York.

Brock, H. W. (1980) : "The Problem of "utility Weights" in Group Preference Aggregation," *Operations Research*, 28(1), 176–187.

Duncan Luce, R., et H. Raiffa (1957) : *Games and Decisions : Introduction and Critical Survey*. Wiley, New York.

Fishburn, P. C. (1969) : "Preferences, Summation, And Social Welfare Functions," *Management Science*, 16(3), 179–186.

Flemming, J. M. (1952) : "A Cardinal Concept of Welfare," *Quarterly Journal of Economics*, LXVI, 366–384.

Harsanyi, J. C. (1955) : "Cardinal Welfare, Individualistic Ethics, and Interpersonal Comparisons of Utility," *The Journal of Political Economy*, 63, 309–321.

——— (1975) : "Nonlinear Social Welfare Functions," *Theory and Decision*, 6(3), 311–332.

——— (1976) : *Essays on Ethics, Rational Behaviour, and Scientific Explanation.* Reidel, Dordrecht.

KALDOR, N. (1939) : "Welfare Propositions of Economics and Interpersonal Comparisons of Utility," *The Economic Journal*, 49, 549–552.

KEENEY, R. L. (1976) : "A Group Preference Axiomatization With Cardinal Utility," *Management Science*, 23(2), 140–145.

KEENEY, R. L., ET H. RAIFFA (1993) : *Decisions with Multiple Objectives - Preferences and Value Tradeoffs.* Cambridge university Press.

LANGE, O. (1942) : "The Foundations of Welfare Economics," *Econometrica*, 10, 215–228.

SEN, A. (1970) : "Interpersonal Aggregation and Partial Comparability," *Econometrica*, 38(3), 393–409.

VICKREY, W. S. (1960) : "Utility, Strategy, And Social Decision Rules," *The Quarterly Journal of Economics*, 74, 507–535.

WAKKER, P. P. (1989) : *Additive Representations of Preferences, A New Foundation of Decision Analysis.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

WEYMARK, J. (1981) : "Generalized Gini Inequality Indices," *Mathematical Social Sciences*, 1, 409–430.

Chapitre 10

Un modèle de décision à base de données fréquentistes

Il n'y a ni règles ni modèles ; ou plutôt il n'y a d'autres règles que les lois générales de la nature qui planent sur l'art tout entier, et les lois spéciales qui, pour chaque composition, résultent des conditions d'existence propres à chaque sujet.

Victor Hugo

Dans ce chapitre, nous allons voir que les utilités additives peuvent être utilisées pour généraliser des modèles déjà existant. Celui retenu à cet effet est le modèle de prise de décision à base de données fréquentistes de Coignard (1993) et Coignard et Jaffray (1994). Dans ce modèle, un décideur, d'ordinaire optimisateur d'espérance d'utilité, se trouve dans une situation dans laquelle il n'a pas connaissance des probabilités associées à tous les événements possibles, mais il connaît leur fréquence observée dans un échantillon de taille finie. Le modèle montre alors que les décisions "rationnelles" doivent être prises en fonction de l'espérance d'utilité par rapport aux fréquences observées, et en fonction de la taille de l'échantillon et d'un biais qui dépend de l'aversion du décideur pour l'ambiguité.

Dans ce modèle, les théorèmes classiques d'existence d'utilités additives peuvent être employés car il n'est pas restrictif de supposer que tous les paramètres entrant en jeu dans la prise de décision vérifient la solvabilité restreinte. Par contre, ils ne s'appliquent plus lorsque les fréquences observées sont imprécises : un effet de certitude empêche l'un des paramètres d'être solvable. L'objectif est ici de montrer que les résultats de la partie 2 permettent d'utiliser les utilités additives dans ce cas.

Le chapitre est divisé en 7 sections. La première décrit le problème traité dans le reste du chapitre. La deuxième section explique les différences de comportement du décideur lorsque celui-ci connaît une loi de probabilité sur les événements possibles, lorsqu'il connaît seulement des intervalles auxquels appartient cette loi de probabilité, ou encore lorsque ces intervalles ne sont connus qu'au travers d'un échantillon de taille finie. La

troisième partie montre différents modèles (EU, GEU, DDM) associés à différentes situations d'incertitude (risque, risque imprécis, probabilités estimées par échantillonnage). Enfin, la quatrième section présente le modèle principal de ce chapitre : il modélise les préférences de décideurs confrontés à des situations dans lesquelles ils ne connaissent les différents événements possibles que par le biais d'un échantillon imprécis de taille finie. Après avoir donné et justifié quelques axiomes, des théorèmes de représentation sont présentés, qui sont suivis par un théorème de représentation additive.

La cinquième section fournit une discussion sur ce dernier modèle ainsi qu'une comparaison avec d'autres modèles. Enfin les deux dernières sections renferment respectivement les démonstrations des théorèmes d'existence, et une bibliographie du chapitre.

10.1 Introduction

Le modèle d'Espérance d'Utilité (EU) s'applique à des situations de **décision dans le risque**, c'est-à-dire des situations dans lesquelles tous les événements possibles A ont des probabilités $\Pi(A)$, connues du décideur (DM) ; chaque décision d engendre alors une distribution de probabilité $P = \Pi \circ d^{-1}$ (c'est-à-dire $P(G) = \Pi(d^{-1}(G))$ pour tout G) sur l'ensemble des résultats possibles des décisions, et c'est cette distribution qui détermine les préférences du décideur :

$$d_{[1]} \succsim d_{[2]} \text{ (la décision “}d_{[1]}\text{ est préférée ou indifférente à }d_{[2]}\text{”)} \Leftrightarrow E_{P_{[1]}}u \geq E_{P_{[2]}}u,$$

où $E_P u$ représente l'espérance de l'utilité u de von Neumann-Morgenstern (vNM) par rapport à la probabilité P (cf. von Neumann et Morgenstern (1944)). Autant sa conformité avec les exigences de rationalité que son application d'un point de vue computationnel ont assuré à la théorie de l'espérance d'utilité une place prépondérante en décision dans le risque.

Cependant, dans les problèmes de décision réels, on connait rarement les probabilités d'occurence des différents événements, ce qui, dans une perspective d'aide à la décision, rend nécessaire soit d'adapter les données dont dispose le décideur au modèle de décision, comme dans le modèle SEU (Subjective Expected Utility), soit d'adapter le modèle de décision aux données disponibles, ce qui constitue la solution retenue dans ce chapitre. La motivation de ce choix réside dans le fait que l'on ne veut pas que les choix du décideur dépendent de paramètres plus ou moins arbitraires, mais plutôt qu'ils soient déterminés par :

i) une description objective de l'ensemble de décision et des données dont dispose le décideur ;

ii) les traits de caractère du décideur.

Les arguments en faveur et contre ce choix seront discutés dans la section 10.5.2.

Les situations réelles de décision dans l'incertain diffèrent toutefois des situations dans le risque et nécessitent diverses adaptations de la théorie de l'utilité espérée. Nous allons nous intéresser dans la suite du chapitre à des situations où les données dont

dispose le décideur sont obtenues grâce à des échantillons et où le procédé utilisé pour obtenir ces derniers engendre de l'imprécision. De telles situations diffèrent des décisions dans le risque, et ce de deux manières :

i) les données récoltées ne permettent d'obtenir que des fréquences d'occurence des événements, et non des probabilités ;

i) ces fréquences sont partiellement indéterminées.

Par conséquent, une double adaptation du modèle d'espérance d'utilité va être nécessaire.

10.2 Echantillons imprécis et décisions

10.2.1 Echantillons imprécis

Dans la réalité, comme le suggère l'exemple ci-dessous, il est probable qu'aux imprécisions sur les observations s'ajoutent des divergences entre les "vraies" fréquences et celles observées.

Exemple 10.1 Une banque de données contient des fiches sur les membres d'une population de taille élevée. Chaque fiche est supposée contenir certains éléments d'information sur la personne correspondante ; mais certaines fiches n'ont pas été entièrement remplies, si bien qu'elles ne contiennent pas tous les renseignements qu'elles devraient contenir.

La question peut se poser de savoir si une affirmation est vraie ou fausse pour une personne choisie au hasard dans la population. Si une lecture exhaustive des fichiers est réalisable et, de plus, si toutes les fiches contiennent les informations appropriées, on peut alors répondre à la question de manière probabiliste : la probabilité que l'affirmation est vraie est le pourcentage exact de fichiers vérifiant cette affirmation.

Cependant il est clair que si certaines fiches sont incomplètes ou si elles ne permettent pas de valider ou d'invalider l'affirmation, on ne pourra connaître le pourcentage ci-dessus que par le truchement de bornes inférieures et supérieures, et donc on ne pourra connaître que des bornes inférieures et supérieures de la "vraie" loi de probabilité concernant l'affirmation.

Pire encore ! si l'échantillon examiné ne représente qu'une sous-population, les probabilités précédentes ou probabilités inférieures/supérieures ne peuvent même plus être évaluées, et les décisions ne sont alors fondées que sur les fréquences observées (qui ne sont que des estimations de ces probabilités). ♦

Plus formellement, on peut décrire une situation d'échantillonnage imprécis de la manière suivante : Ω, l'ensemble des états (concevables) de la nature, est infini et contient la population dont l'échantillon est extrait, celle-ci pouvant être finie ou infinie ; dans les deux cas, l'échantillon recueilli ne permet de décrire qu'une sous-population de taille finie N. De plus ces descriptions sont imprécises : une observation donnée ne permet

pas toujours au décideur d'identifier complètement un état de la nature ω, mais seulement un sous-ensemble (événement) B de Ω (par exemple, ω peut être la liste de toutes les caractéristiques physiques d'une personne, ce qui est suffisant pour l'identifier complètement, et B est l'affirmation que celle-ci fait plus d'1.65m et pèse moins de 55kg). Puisque deux observations différentes peuvent apporter la même information B, les données recueillies consistent en une collection finie $(m(B),\ B \in \mathcal{B})$, $\mathcal{B} \in 2^{\Omega}$, $|\mathcal{B}| \leq N$, où $m(B) = k(B)/N$ et $k(B) \in \mathbb{N}^*$ est le nombre d'observations qui apportent exactement l'information "B est vraie".

A partir de ces données, on peut dériver les fréquences inférieures et supérieures observées, $\Phi, \Psi : \mathcal{A} \subset 2^{\Omega} \mapsto [0,1]$, définies respectivement par :

$$\Phi(A) = \sum_{B \subset A} m(B) \quad \text{and} \quad \Psi(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B). \tag{10.1}$$

On peut interpréter Φ comme étant :

i) soit la borne inférieure du pourcentage d'observations dans lesquelles l'événement A est vrai ;

ii) soit le pourcentage d'observations dans lesquelles on peut déduire que A est vrai.

Une interprétation similaire serait valable pour $\Psi(A)$, qui vérifie $\forall A \in \mathcal{A}$, $\Psi(A) = 1 - \Phi(A^c)$, où $A^c = \Omega \backslash A$.

10.2.2 Prise de décision avec des échantillons imprécis

Avec ce nouveau type de données, le critère d'espérance d'utilité n'est visiblement plus adapté et doit donc être modifié. L'exemple suivant illustre cette nécessité.

Exemple 10.2 On propose à monsieur Nipigue de jouer au jeu suivant : Dans une urne sont placées des boules R(ouges), B(leues) et V(ertes). Dans une première étape, monsieur Nipigue doit choisir une décision parmi $\{d_{[1]}, d_{[2]}, d_{[3]}, d_{[4]}\}$. Puis, dans une deuxième étape, un tirage est effectué, et le gain qu'il reçoit est donné dans le tableau 10.1, qui décrit les gains pour chaque décision en fonction de la boule tirée :

A	R	B	V
$d_{[1]}(A)$	100F	0F	0F
$d_{[2]}(A)$	0F	100F	0F
$d_{[3]}(A)$	50F	50F	50F
$d_{[4]}(A)$	0F	$\{0\text{F}, 100\text{F}\}$	$\{0\text{F}, 100\text{F}\}$

TAB. 10.1: Evénements et décisions.

"$\{0\text{F}, 100\text{F}\}$" indique que l'on ignore exactement quel sera le gain : tout ce que l'on peut dire c'est qu'il sera égal soit à 0F, soit à 100F. Le tableau 10.2 décrit quatre états de connaissance possibles sur la composition de l'urne :

	A	R	B	V
S	$\Pi(A)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
S'	$\Pi(A)$	$\frac{1}{3}$	$\pi \in [0, \frac{2}{3}]$	$(1-\pi) \in [0, \frac{2}{3}]$
S''	$\Phi(A)$	33.3%	50%	16.7%
S'''	$\Phi(A)$	33.3%	$\phi \in [0\%, 66.7\%]$	$(1-\phi) \in [0\%, 66.7\%]$

TAB. 10.2: Evénements, probabilités et fréquences.

Dans la situation S, la comparaison des décisions $d_{[1]}$, $d_{[2]}$ et $d_{[3]}$, est un choix dans le risque ; en effet, $d_{[2]}$ domine stochastiquement $d_{[1]}$, c'est-à-dire que la probabilité de gagner 100F est plus élevée si l'on choisit $d_{[2]}$ que si l'on choisit $d_{[1]}$, et tout maximisateur d'espérance d'utilité préfèrera donc $d_{[2]}$ à $d_{[1]}$; un décideur manifestant de l'aversion au risque (que l'on abrègera dans la suite par le terme riscophobe[1]) préfèrera $d_{[3]}$ à $d_{[2]}$ tandis qu'un décideur riscophile préfèrera $d_{[2]}$ à $d_{[3]}$.

Dans la situation S', le décideur peut seulement attribuer des bornes inférieures et supérieures à la probabilité de tirer une boule bleue et à celle de tirer une boule verte, ce qui implique qu'il ne peut qu'inférer des bornes inférieures et supérieures sur les gains éventuels qu'il recevrait en choisissant $d_{[2]}$, comme le montre le tableau 10.3.

A	$\emptyset$	R	B	V	R $\cup$ B	R $\cup$ V	B $\cup$ V	R $\cup$ B $\cup$ V
Proba inf $\Pi^-(A)$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
Proba sup $\Pi^+(A)$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	1	$\frac{2}{3}$	1

TAB. 10.3: Bornes inférieures et supérieures de $\Pi(\cdot)$ dans la situation S'.

Il est tout à fait remarquable de constater, comme le montre le tableau 10.4, que la situation S avec la décision $d_{[4]}$ engendre exactement la même imprécision quant aux probabilités des différents gains (celle-ci provient de l'indétermination des gains par $d_{[4]}$). C'est en fait une propriété tout à fait générale : sous des hypothèses relativement faibles, l'indétermination sur les résultats des décisions et l'imprécision sur les lois de probabilité des événements ont des effets semblables.

Quoi qu'il en soit, EU ne s'applique dans aucun des deux cas à cause de l'absence de description probabiliste des conséquences des décisions $d_{[2]}$ et $d_{[4]}$. Une évaluation de $d_{[2]}$ dans S' et de $d_{[4]}$ dans S est tout de même possible grâce à (GEU) : l'Espérance d'Utilité Généralisée, une extension de EU que l'on décrira dans la sous-section 10.3.3.

[1] Eeckhoudt et Gollier (1992) attribuent la paternité de ce terme à Boyer et Dione (1983).

	G	$\emptyset$	$\{0F\}$	$\{100F\}$	$\{0F, 100F\}$
$d_{[2]}$ dans S'	$f_{[2]}(G)$	0	$\frac{1}{3}$	0	1
	$F_{[2]}(G)$	0	1	$\frac{2}{3}$	1
$d_{[4]}$ dans S	$f_{[4]}(G)$	0	$\frac{1}{3}$	0	1
	$F_{[4]}(G)$	0	1	$\frac{2}{3}$	1

Proba inf : $f_{[2]}$, $f_{[4]}$; Proba sup : $F_{[2]}$, $F_{[4]}$.

$$\begin{cases} f_{[2]}(G) = \Pi^-(d_{[2]}^{-1}(G)) \\ F_{[2]}(G) = \Pi^+(d_{[2]}^{-1}(G)) \end{cases} \qquad \begin{cases} f_{[4]}(G) = \Pi(\{\omega : d_{[4]}(\omega) \subset G\}) \\ F_{[4]}(G) = \Pi(\{\omega : d_{[4]}(\omega) \cap G \neq \emptyset\}) \end{cases}$$

TAB. 10.4: Comparaison entre $d_{[2]}$ dans S' et $d_{[4]}$ dans S.

Retournons maintenant à la situation S'', dans laquelle un échantillon constitué à partir de N tirages avec replacement a permis de déterminer des fréquences de sortie des boules R, B et V. Ces fréquences sont identiques aux probabilités de la situation S, mais elles ne reflètent en réalité que des estimations des vraies distributions de probabilité, et elles en diffèreront d'autant plus que N est petit. C'est pourquoi l'on ne peut exclure la possibilité que même des décideurs riscophiles préfèrent $d_{[3]}$, qui garantit $EU = u(50)$, à $d_{[2]}$, qui offre une EU indéterminée pouvant certes être supérieure à $u(50)$, mais aussi inférieure. Le critère proposé par la théorie DDM de Coignard et Jaffray (1994) permet d'évaluer $d_{[4]}$ dans la situation S'' (cf. sous-section 10.3.4).

Observons enfin que S''' combine la discordance fréquence/probabilité de S'' avec une imprécision sur les échantillons recueillis.

Dans la situation S''', le pourcentage d'observations pour lesquelles $R \cup B$ est vrai est inconnu, mais admet pour borne inférieure $\Phi(R \cup B) = 33.3\%$, et pour borne supérieure $\Psi(R \cup B) = 100\%$.

Avec 33.3% d'observations de l'événement R et 66.7% de l'événement $B \cup V$, $\Phi(R \cup B) = 33.3\%$ représente aussi le pourcentage de cas dans lesquels $R \cup B$ peut être inféré (puisque $R \subset R \cup B$) et $\Psi(R \cup B) = 100\%$ le pourcentage de cas dans lesquels $(R \cup B)^c$ ne peut être inféré (puisque Non$[R \subset (R \cup B)^c]$ et Non$[(B \cup V) \subset (R \cup B)^c]$), et donc pour lesquels il est seulement possible que $R \cup B$ soit vrai. ♦

La suite de ce chapitre va tenter de fournir une justification axiomatique à un modèle de décision s'appliquant aux situations telles que S''', dans lesquelles les données disponibles sont recueillies à partir d'échantillons imprécis. Il n'est pas surprenant de constater que ce modèle est étroitement lié à aux théories GEU et DDM. En fait, on peut la considérer comme l'adaptation de GEU à des fréquences, de la même manière que DDM est une adaptation de EU, ou comme l'extension de DDM à des données

imprécises, de la même manière que GEU étend EU.

En particulier, comme dans la théorie DDM, le critère de décision dépendra de nouvelles caractéristiques telles que la taille N de l'échantillon dont sont tirées les données, et le support de la décision $d(\Omega)$. L'exemple suivant illustre ces dépendances :

Exemple 10.3 Considérons une urne du même type que celle de l'exemple 2, et supposons qu'après N tirages, seules des boules bleues aient été observées. On demande alors au décideur, monsieur Nipigue, de choisir entre deux décisions, $d_{[1]}$, $d_{[2]}$, décrites de la manière suivante :

A	R	B	V
$d_{[1]}(A)$	-100F	10F	20F
$d_{[2]}(A)$	0F	0F	0F

$S_{[1]} = d_{[1]}(\Omega) = \{-100\text{F}, 10\text{F}, 20\text{F}\}$ et $S_{[2]} = d_{[2]}(\Omega) = \{0\text{F}\}$. Si $N = 1$, monsieur Nipigue n'a tiré qu'une seule boule et il s'est avéré qu'elle était bleue. Devrait-il choisir la décision $d_{[1]}$ ou bien $d_{[2]}$? Sur la base d'un échantillon de taille 1, il ne serait pas surprenant qu'il choisisse $d_{[2]}$ — particulièrement s'il manifeste de l'aversion pour l'ambiguité. Cependant, face à des échantillons de grande taille, monsieur Nipigue devrait avoir plus confiance dans les fréquences observées, et, pour N suffisamment grand, il devrait même choisir la décision $d_{[1]}$, pensant que la probabilité de tirer une boule rouge est vraiment très faible. ♦

Cet exemple nous apprend que le support de chaque décision (l'ensemble des résultats potentiellement observables), qui diffère en général de l'ensemble des résultats effectivement observés, doit aussi être pris en compte lorsque l'on compare des décisions.

10.3 Quelques situations d'incertitude et leur modèle de décision

10.3.1 Définitions et notations

Soient Ω un ensemble infini représentant l'ensemble des états de la nature et $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ la σ-algèbre des événements. Désignons par $\mathcal{C}$ l'ensemble des conséquences et par $\mathcal{G} \subset 2^{\mathcal{C}}$ sa σ-algèbre ; $\mathcal{A}$ et $\mathcal{G}$ contiennent les singletons. Dans l'exemple 2, $\Omega = \{R, V, B\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, R, V, B, R \cup B, R \cup V, B \cup V, R \cup V \cup B\}$, $\mathcal{C} = \{0\text{F}, 50\text{F}, 100\text{F}\}$ et $\mathcal{G} = \{\emptyset, \{0\text{F}\}, \{50\text{F}\}, \{100\text{F}\}, \{0\text{F}, 50\text{F}\}, \{0\text{F}, 100\text{F}\}, \{50\text{F}, 100\text{F}\}, \{0\text{F}, 50\text{F}, 100\text{F}\}\}$. Une décision d est une fonction mesurable de Ω dans $\mathcal{C}$, c'est-à-dire que $\forall G \in \mathcal{G}$, $d^{-1}(G) \in \mathcal{A}$. Soit $S = d(\Omega)$ le support de la décision d, c'est-à-dire l'ensemble des conséquences que peut avoir cette décision. Appelons $\mathcal{D}$ l'ensemble de toutes les décisions possibles, et $\succsim$ la relation de préférence sur $\mathcal{D}$.

Différentes hypothèses sur les informations détenues par le décideur et sur son comportement conduisent à différents modèles de décision. Rappelons brièvement les caractéristiques principales des modèles sur lesquels repose l'extension présentée dans ce chapitre.

10.3.2 Risque et utilité espérée

Situation : décision dans le risque

On connait la loi de probabilité Π sur $(\Omega, \mathcal{A})$; celle-ci détermine la loi de probabilité $P = \Pi \circ d^{-1}$ (c'est-à-dire $P(G) = \Pi(d^{-1}(G))$) engendrée sur $(\mathcal{C}, \mathcal{G})$ par une décision $d \in \mathcal{D}$.

Modèle de décision : utilité espérée

L'attitude du décideur face au risque est caractérisée par son utilité de vNM u puisque la relation de préférence $\succsim$ est représentable sur $\mathcal{D}$ par la fonction d'utilité $U : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}$ telle que $U(d) = E_P u$. Lorsque Π est de support fini, c'est-à-dire lorsqu'il existe un ensemble fini $\Omega_0 \subset \Omega$ tel que $\Pi(\Omega_0) = 1$, P est aussi de support fini et $E_p u = \sum_{c \in \mathcal{C}} P(\{c\}) u(c)$.

10.3.3 Risque imprécis et utilité espérée généralisée (GEU)

Les informations disponibles sur les probabilités peuvent être vagues et ne permettent au décideur que de localiser celles-ci dans des intervalles de probabilité.

Situation : risque imprécis

On sait seulement que la loi de probabilité Π sur $(\Omega, \mathcal{A})$ appartient à la famille de lois de probabilité définie par $\mathcal{M} = \{\Pi : \Pi(A) \geq g(A)\ \forall A \in \mathcal{A}\}$, où $g : \mathcal{A} \mapsto [0,1]$ est une capacité monotone d'ordre infini, c'est-à-dire qu'elle vérifie les deux propriétés suivantes :

(i) $g(\emptyset) = 0\,; \quad g(\Omega) = 1\,; \quad A \subset B \Rightarrow g(A) \leq g(B)$;

(ii) $g\left(\bigcup_{i \in I} A_{[i]}\right) \geq \sum_{J \subset I\ ; J \neq \emptyset} (-1)^{|J|+1} g\left(\bigcap_{j \in J} A_{[j]}\right)$, $\forall I$ tel que $|I| \geq 2$.

Ainsi, $g(A)$ est la probabilité inférieure de A, c'est-à-dire la borne inférieure de $\Pi(A)$, et $g^*(A) = 1 - g(A^c)$ est sa probabilité supérieure. On peut seulement inférer que la probabilité de A se situe dans l'intervalle $[g(A), g^*(A)]$.

L'incertitude sur le résultat d'une décision d peut alors être décrite comme l'image de g engendrée par d sur $\mathcal{C}$, $f_{[d]} = g \circ d^{-1}$, c'est-à-dire $f_{[d]}(G) = g(d^{-1}(G))\ \forall G \in \mathcal{G}$; là encore, la probabilité que le résultat de la décision d appatienne à G reste inconnue mais se situe dans l'intervalle $[f_{[d]}(G), f^*_{[d]}(G)]$. Remarquons que $f_{[d]}$ hérite des propriétés de g et qu'elle est elle-même une capacité monotone d'ordre infini. On a seulement besoin de considérer des capacités $f_{[d]}$ monotones d'ordre infini engendrées de manière finie, c'est-à-dire des cas pour lesquels $f_{[d]}$ est déterminé par

$$f_{[d]}(G) = \sum_{B \subset G} \phi_{[d]}(B),\ \forall G \in \mathcal{G}, \tag{10.2}$$

où $\phi_{[d]} : \mathcal{G} \mapsto [0,1]$ prend partout la valeur 0, sauf sur un ensemble fini ; $\phi_{[d]}$ est la transformée de Möbius généralisée de $f_{[d]}$. C'est en particulier le cas lorsque $\mathcal{C}$ est un ensemble fini et $f_{[d]}$ est une fonction de croyance (cf. Shafer (1976)).

Modèle de décision : espérance d'utilité généralisée (GEU)

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des capacités monotones d'ordre infini sur $\mathcal{C}$ engendrées de manière finie.

Le modèle d'Utilité Espérée peut être étendu à cette situation (cf. Jaffray (1989a), Jaffray (1989b) et Jaffray (1994)), ce qui conduit à l'Espérance d'Utilité Généralisée, théorie dans laquelle $\succsim$ est représentable sur $\mathcal{D}$ par la fonction d'utilité U :

$$d \to U(d) = E_{f_{[d]}}\overline{u} = \sum_{G \in \mathcal{G}} \phi_{[d]}(G)\overline{u}(m_{[G]}, M_{[G]}), \tag{10.3}$$

où

- $\phi_{[d]}$ est la transformée de Möbius de $f_{[d]} = g \circ d^{-1}$, caractérisable par (10.2),
- $m_{[G]} = \arg\min\{u(c), c \in G\}$,
- $M_{[G]} = \arg\max\{u(c), c \in G\}$,
- u, définie par $c \mapsto u(c) = \overline{u}(c, c)$, peut être interprétée comme l'utilité de vNM du décideur,
- $u(m) \leq \overline{u}(m, M) \leq u(M)$,
- $\overline{u}(m, M)$ croît avec $u(m)$ et $u(M)$.

Remarquons que $\overline{u}$ dépend de u, c'est-à-dire de l'attitude du décideur face au risque, et de paramètres supplémentaires reflétant son degré d'aversion pour l'ambiguité (pessimisme). Les cas extrêmes de pessimisme et d'optimisme correspondent respectivement à

$$U(d) = E_{f_{[d]}}\overline{u} = \sum_{G \in \mathcal{G}} \phi_{[d]}(G)u(m_{[G]}) = \inf_{\Pi \in \mathcal{M}} E_{\Pi} u \circ d$$

et

$$U(d) = E_{f_{[d]}}\overline{u} = \sum_{G \in \mathcal{G}} \phi_{[d]}(G)u(M_{[G]}) = \sup_{\Pi \in \mathcal{M}} E_{\Pi} u \circ d$$

(cf. Jaffray (1989a)).

L'équation (10.3) peut être interprétée comme une espérance, avec $\phi_{[d]}(G)$ la probabilité d'obtenir un résultat dans G lorsque l'on prend la décision d, et $\overline{u}(m_{[G]}, M_{[G]})$ l'évaluation de la perspective de recevoir un gain pouvant être n'importe quel élément de G. En fait, ce critère est applicable dans deux cas distincts (cf. exemple 2) :

i) probabilités imprécises et résultats des décisions précis ;

ii) probabilités précises et résultats des décisions imprécis.

10.3.4 Echantillons et prise de Décision Directe (modèle DDM) :

Lorsque c'est réalisable, il est courant d'employer des échantillons sur l'occurence des événements, ceci pour des raisons d'efficacité et de fiabilité.

Situation : données obtenues à partir d'échantillons

Le décideur ne connait pas la loi de probabilité Π sur $(\Omega, \mathcal{A})$, et il fonde entièrement son jugement sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à partir d'une distribution de fréquences (relatives) Φ déterminée à partir d'un échantillon de $N \in \mathbb{N}^*$ observations. On suppose donc que l'information utilisée pour évaluer chaque décision d consiste exactement en :

i) le support de d, c'est-à-dire $S = d(\Omega)$, l'ensemble de tous les résultats potentiellement engendrés par la décision d ;

ii) la mesure $P = \Phi \circ d^{-1}$, qui représente la distribution de fréquences des résultats obtenus par d d'après les N observations de l'échantillon.

Remarquons au passage que Φ et P sont de supports finis. Cette hypothèse est justifiée dans la sous-section 10.4.2.

Modèle de décision : modèle DDM (prise de décision directe ; Coignard et Jaffray (1994)) :

Grâce à quelques hypothèses supplémentaires (semblables à celles de la section 10.4), on peut obtenir le résultat suivant : pour un échantillon donné de taille N, la relation de préférence $\succsim$ est représentable sur $\mathcal{D}$ par la fonction d'utilité $H_{[N]}$ définie par :

$$d \mapsto H_{[N]}(d) = h_{[N]}(E_P u, u_{[S]}, U_{[S]}),$$

où $u_{[S]}$ et $U_{[S]}$ représentent respectivement les niveaux d'utilité de vNM le plus faible et le plus élevé obtenus sur le support S de d. Ainsi, $E_P u$, qui serait la valeur de la décision d dans le modèle EU si P était la vraie loi de probabilité engendrée par d, est corrigée par des considérations MAXMIN et MAXMAX ; on peut s'attendre à ce que ces corrections soient de moins en moins importantes lorsque N croît (ce qui est permis par la dépendance de $H_{[N]}$ à N). La dénomination de "Prise de décision directe" est une référence au modèle d'inférence directe de Bacchus (1989), Bacchus (1991).

10.4 Echantillons imprécis et prise de décision directe

10.4.1 Echantillons imprécis et incertitude sur le résultat des décisions

Considérons une situation dans laquelle les données à la disposition du décideur ont été obtenues grâce à des échantillons imprécis, et, comme défini dans la sous-section 10.2.1, sont caractérisées par une collection finie $(m(B), B \in \mathcal{B})$, où $m(B)$ est la proportion d'observations dans lesquelles l'information "B est vraie" a été observée ; désignons par Φ et Ψ les fréquences inférieures et supérieures correspondantes :

$$\Phi(A) = \sum_{B \subset A} m(B) \quad \text{et} \quad \Psi(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B). \tag{10.4}$$

D'après l'équation (10.4), Φ est une capacité monotone d'ordre infini engendrée de manière finie (puisque Ω n'est pas fini, c'est une légère extension du concept de fonction de croyance — cf. Shafer (1976)).

Pour toute décision d, l'image de Φ par d, $f_{[d]} = \Phi \circ d^{-1}$, hérite des propriétés de Φ et est aussi une capacité monotone d'ordre infini engendrée de manière finie ; en fait, $\phi_{[d]} : \mathcal{G} \to [0,1]$, définie par :

$$\phi_{[d]}(G) = \sum_{d(B)=G} m(B), \tag{10.5}$$

et que nous appelons transformée de Möbius (généralisée), détermine $f_{[d]}$ de la façon suivante :

$$f_{[d]}(E) = \sum_{G \subset E} \phi_{[d]}(G). \tag{10.6}$$

L'interprétation de Φ fournit celle de $f_{[d]}$: soit $E \in \mathcal{G}$; si la décision d avait été sélectionnée précédemment par le décideur, son résultat aurait appartenu à E dans au moins $100 f_{[d]}(E)\%$ des observations (interprétation (i)), ou il aurait été possible de déduire qu'il appartenait à E dans $100 f_{[d]}(E)\%$ des observations (interprétation (ii)). Soit l'ensemble

$$\mathcal{F}_{[N]} = \{f_{[d]} = \Phi \circ d^{-1} : d \in \mathcal{D}\} \ ; \tag{10.7}$$

alors les éléments de $\mathcal{F}_{[N]}$ vérifient (10.6) pour $\phi_{[d]}$ vérifiant (10.5). Posons

$$S_{[f_{[d]}]} = \bigcup \{G \in \mathcal{G} : \phi_{[d]}(G) > 0\}. \tag{10.8}$$

$S_{[f_{[d]}]}$ est appelé support de $f_{[d]}$. On a nécessairement $S_{[f_{[d]}]} \subset S$, où $S = d(\Omega)$ représente le support de la décision d. Aucun résultat n'appartenant pas à $S_{[f_{[d]}]}$ ne peut résulter de la décision d dans les observations.

La GEU de $f_{[d]}$ est définie par

$$U(f_{[d]}) = E_{f_{[d]}} \overline{u} = \sum_{G \in \mathcal{G}} \phi_{[d]}(G) \overline{u}(m_{[G]}, M_{[G]}) \ ; \tag{10.9}$$

elle fournirait une évaluation de la décision d dans le modèle décrit dans ce chapitre si les fréquences inférieures étaient assimilées à des probabilités inférieures, ce qui ne sera le cas que lorsque N tendra vers $+\infty$.

10.4.2 Les axiomes

L'axiomatique décrite dans ce chapitre comprend trois préordres distincts :

- la relation de préférence du décideur sur les différentes décisions, que nous noterons $\succsim$;
- la relation de préférence que le décideur aurait sous GEU, c'est-à-dire le cas asymptotique où l'échantillon est de taille infinie. Cette relation sera notée par la suite $\succsim_\infty$;
- l'ordre partiel (de dominance) $\succsim^*$ sur les décisions défini par :

$$d_{[1]} \succsim^* d_{[2]} \Leftrightarrow u(d_{[1]}(\omega)) \geq u(d_{[2]}(\omega)) \ \forall \omega \in \Omega.$$

Dans le modèle présenté dans ce chapitre, les préférences sur les décisions dépendent de triplets (f, N, S), où f est la fréquence sur l'espace des résultats engendrée à partir de la fréquence observée des états de la nature par la décision d, N la taille de l'échantillon et S le support de la décision. Cette hypothèse peut être justifiée de la manière suivante : considérons tout d'abord le cas où le décideur ne dispose d'aucun échantillon pour fonder ses choix ($N = 0$; f est indéfini), ce qui correspond en fait à une situtation de totale ignorance. Le comportement rationnel des décideurs en situation de complète ignorance a été étudié dans Arrow et Hurvicz (1972), Cohen et Jaffray (1980) et Cohen et Jaffray (1983). Des arguments d'invariance des préférences par rapport aux permutations des états de la nature ω de Ω, et par rapport à leur rafinement (génération de nouveaux espaces Ω' d'états de la nature en subdivisant les singletons $\{\omega\}$ de Ω), permettent de conclure que les préférences du décideur entre des couples de décisions d, d' ne devraient dépendre que :

i) des images $d(\Omega) = S$ et $d(\Omega') = S'$ des décisions dans l'espace des résultats ;

ii) de la dominance ; de plus, on peut montrer que la dominance stricte ($d \succ^* d'$) ne peut avoir qu'une influence du "second ordre" quand $S = S'$ (au sens que de petites variations sur les résultats des décisions peuvent éliminer cette influence).

Le modèle présenté dans ce chapitre néglige cet effet et ne requiert que le respect de la dominance faible (cf. axiom 10.4).

Examinons maintenant l'influence des observations sur les préférences du décideur : puisque les préférences devraient encore être invariantes par rapport aux permutations des états de la nature qui ont été observés (l'information que l'on a sur chacun de ces états est toujours la même : on sait seulement que l'état s'est réalisé), l'ajout de nouvelles données fréquentites observées concernant la décision d peut être résumée par les fréquences correspondant à d dans l'espace des résultats et par la taille N de l'échantillon.

Enfin, en situation d'incertain probabilisé de manière imprécise, c'est-à-dire lorsque l'information disponible est caractérisable par une probabilité inférieure monotone d'ordre infini, on suppose que le décideur agit selon l'Espérance d'Utilité Généralisée sur les résultats. Par conséquent, $\mathcal{F}_{[N]}$, $S_{[f_{[d]}]}$ et $E_{f_{[d]}}\overline{u}$, définis respectivement par (10.7), (10.8) et (10.9), requièrent l'axiome suivant :

Axiome 10.1 (relation d'ordre)
(i) Pour $N \in \mathbb{N}^*$ fixé, $\succsim$ est un préordre large total sur les triplets (f, N, S), où $f \in \mathcal{F}_{[N]}$, et donc $f = f_{[d]}$ pour une décision d, et $S \supset S_{[f_{[d]}]}$.
(ii) $\succsim_\infty$ est un préordre large total sur $\mathcal{F}$ représentable par $U(f) = E_f\overline{u}$.

Soient deux décisions $d_{[1]}$ et $d_{[2]}$ de supports identiques S. Pour un échantillon de taille donnée N, ces deux décisions engendrent des fréquences sur l'ensemble des résultats f et g. Dans notre modèle, le décideur compare $d_{[1]}$ et $d_{[2]}$ uniquement en fonction des triplets (f, N, S) et (g, N, S). Autrement dit, il ne fonde ici ses préférences que sur f et g, c'est-à-dire sur les données observées. Si l'apport de nouvelles observations confirme ces données, c'est-à-dire si les fréquences engendrées par $d_{[1]}$ et $d_{[2]}$ sont encore

f et g, il n'y a donc aucune raison pour que le décideur révise son jugement. On obtient ainsi l'axiome suivant :

Axiome 10.2 (Nouvelle indépendance)
(i) $(f, N, S) \sim (g, N, S) \quad \Rightarrow \quad (f, 2N, S) \sim (g, 2N, S)$
(ii) $(f, N, S) \succ (g, N, S) \quad \Rightarrow \quad (f, 2N, S) \succ (g, 2N, S)$.

Lorsque les échantillons sont de taille élevée, le décideur devrait être assez confiant dans les fréquences observées. Par conséquent, lorsque N tend vers $+\infty$, pour comparer deux décisions (f, N, S) et (g, N, S), la valeur relative des évaluations GEU par rapport aux fréquences observées, $E_f\overline{u}$ et $E_g\overline{u}$, devrait devenir déterminante. D'où l'axiome suivant :

Axiome 10.3 (Continuité) *Soient $f, g \in \mathcal{F}_{[N]}$ tels que $S_{[f]} \cup S_{[g]} \subset S$. Alors $f \succ_\infty g \Leftrightarrow \exists\, k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, $\forall k \geq k_0$, $(f, 2^k N, S) \succ (g, 2^k N, S)$.*

L'axiome ci-dessous est une hypothèse classique de rationalité en Décision dans l'incertain :

Axiome 10.4 (Dominance) *$\forall d_{[1]}, d_{[2]} \in \mathcal{D}$ tels que $f_{[1]} = \Phi \circ d_{[1]}^{-1}$, $f_{[2]} = \Phi \circ d_{[2]}^{-1}$, $S_{[f_{[1]}]} \subset S_{[1]} \in \mathcal{G}$ et $S_{[f_{[2]}]} \subset S_{[2]} \in \mathcal{G}$, la propriété suivante est vraie :*

$$d_{[1]} \succsim^* d_{[2]} \Rightarrow (f_{|1]}, N, S_{|1]}) \succsim (f_{[2]}, N, S_{[2]}).$$

Grâce aux axiomes définis dans cette sous-section, il est maintenant possible de dériver des théorèmes de représentation. C'est l'objet de la sous-section suivante.

10.4.3 Théorèmes de representation

Existence d'utilités

Soit $\mathcal{T}$ l'espace des préférences, c'est-à-dire $\mathcal{T} = \{(f, N, S)$ tel que $f \in \mathcal{F}_{[N]}$, $N \in \mathbb{N}^*$, $S \in \mathcal{G}$ et $S \supset S_{[f]}\}$.

Lemme 10.1 *Supposons que les axiomes 10.1 à 10.3 soient vérifiés. Alors les préférences du décideur sur $\mathcal{T}$ sont fondées uniquement sur les triplets $(E_f\overline{u}, N, S)$.*

Dans la suite de ce chapitre, pour des raisons techniques, nous allons restreindre l'espace des préférences à $\mathcal{T}^0 = \{(f, N, S) \in \mathcal{T}$ tel que $S \supset \{m_{[S]}, M_{[S]}\}\}$, où $m_{[S]}, M_{[S]} \in \mathcal{C}$ sont tels que $\inf_{c \in S} u(c) = u(m_{[S]})$ et $\sup_{c \in S} u(c) = u(M_{[S]})$, et u est l'utilité de vNM. Ainsi, il existe dans S un résultat non préféré à tous les autres, $m_{[S]}$, et un résultat préféré à tous les autres, $M_{[S]}$.

Théorème 10.1 *Supposons que les axiomes 10.1 à 10.4 soient vérifiés. Alors les préférences du décideur sur $\mathcal{T}^0$ ne dépendent que du quadruplet $(E_f\overline{u}, N, u(m_{[S]}), u(M_{[S]}))$.*

En d'autres termes, S influence l'ordre des préférences uniquement par le truchement de ses éléments les pires et les meilleurs, et f n'est pris en compte que par son évaluation par l'Espérance d'Utilité Généralisée, $E_f\overline{u}$. De plus, l'importance relative des

trois facteurs $E_f\overline{u}$, $u(m_{[S]})$ et $u(M_{[S]})$), dépend, comme on l'avait déjà annoncé, de la taille N de l'échantillon à disposition du décideur.

Existence d'utilités additives

On a montré dans le théorème 10.1 que l'ordre sur les triplets $(f, N, S) \in \mathcal{T}^0$ est équivalent à l'ordre sur les quadruplets $(E_f\overline{u}, N, u(m_{[S]}), u(M_{[S]}))$. Dans cette sous-section, nous allons donner quelques axiomes supplémentaires garantissant l'existence de trois fonctions $h^i_{[N]}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, telles que

$$(f, N, S) \succsim (f', N, S') \Leftrightarrow$$
$$h^1_{[N]}(E_f\overline{u}) + h^2_{[N]}(u(m_{[S]})) + h^3_{[N]}(u(M_{[S]})) \geq h^1_{[N]}(E_{f'}\overline{u}) + h^2_{[N]}(u(m_{[S']})) + h^3_{[N]}(u(M_{[S']})).$$

Remarquons que l'on doit seulement comparer des triplets ayant des tailles d'échantillon identiques N. Par conséquent, dans la suite du chapitre, N est fixé, et l'espace des préférences devient $\mathcal{T}^0_{[N]} = \{(E_f\overline{u}, u(m_{[S]}), u(M_{[S]})) : f \in \mathcal{F}_{[N]}$, et $u(m_{[S]}) \leq E_f\overline{u} \leq u(M_{[S]})\}$. On note un élément générique de $\mathcal{T}^0_{[N]}$ de la façon suivante : (v, u, U). Remarquons que, d'après la définition de $\mathcal{T}^0_{[N]}$, on a forcément $u \leq v \leq U$, si bien que $\mathcal{T}^0_{[N]}$ n'est pas un produit cartésien.

Nb : Dans toutes les formules ci-dessous, chaque fois qu'apparaît un triplet (v, u, U), les inégalités $u \leq v \leq U$ sont supposées vérifiées.

Le problème de l'existence d'utilités additives représentant $\succsim$ sur $\mathcal{T}^0_{[N]}$ n'est pas trivial, et ce pour deux raisons :

i) $\mathcal{T}^0_{[N]}$ n'est pas un produit cartésien mais un sous-ensemble, si bien qu'à priori les théorèmes classiques d'existence (cf. Krantz, Luce, Suppes, et Tversky (1971), Wakker (1989)) ne semblent pas applicables;

ii) comme nous allons le voir, il se peut que u ne vérifie ni la connexité, ni la solvabilité restreinte et encore moins la solvabilité non restreinte, si bien que les théorèmes d'existence d'utilités additives "classiques" sur des sous-ensembles de produits cartésiens (cf. Chateauneuf et Wakker (1993), Segal (1991) et Segal (1994)) ne peuvent être employés.

Nous allons voir cependant que les théorèmes développés dans la partie 2 de ce mémoire vont permettre de représenter $\succsim$ par des utilités additives.

L'existence ou la non existence d'utilités additives n'a pas de lien avec la rationnalité du décideur. En effet, ce n'est pas parce qu'une relation de préférence n'est pas représentable par une utilité additive que le décideur n'a pas un comportement rationnel. Par conséquent, la validation des axiomes permettant l'existence d'utilités additives ne peut être qu'empirique. Comme nous l'avons vu dans les parties précédentes, l'axiome d'élimination du second ordre est nécessaire à l'existence de toute utilité additive. Ici cet axiome peut être défini comme suit :

Axiome 10.5 (axiome d'élimination du second ordre) *Soient* (v_j, u_j, U_j), (v'_j, u'_j, U'_j), (v''_j, u''_j, U''_j), $j \in \{1,2\}$, *six éléments de* $\mathcal{T}^0_{[N]}$ *tels que* (v_2, v'_2, v''_2), (u_2, u'_2, u''_2) *et* (U_2, U'_2, U''_2) *sont des permutations de* (v_1, v'_1, v''_1), (u_1, u'_1, u''_1) *et* (U_1, U'_1, U''_1). *alors :*

$$\left.\begin{array}{l}(v_1, u_1, U_1) \succsim (v_2, u_2, U_2)\\ (v'_1, u'_1, U'_1) \succsim (v'_2, u'_2, U'_2)\end{array}\right\} \Rightarrow (v''_1, u''_1, U''_1) \precsim (v''_2, u''_2, U''_2).$$

En particulier, cet axiome reflète les relations de préférence suivantes, qui sont vraiment consistentes avec ce que l'on a déjà dit du comportement du décideur dans le modèle du présent chapitre :

$$\begin{array}{lcl}(v,u,U) \succsim (v,u',U') & \Leftrightarrow & [(v',u,U) \succsim (v',u',U'), \text{ pour tout } v'],\\ (v,u,U) \succsim (v',u,U') & \Leftrightarrow & [(v,u',U) \succsim (v',u',U'), \text{ pour tout } u'],\\ (v,u,U) \succsim (v',u',U) & \Leftrightarrow & [(v,u,U') \succsim (v',u',U'), \text{ pour tout } U'].\end{array}$$

Plus généralement, cela signifie que, lorsqu'il compare différentes alternatives, le décideur ne tient pas compte des composants qui sont identiques dans les deux triplets. Remarquons au passage que les équivalences ci-dessus impliquent l'existence de relations de préférence sur chacun des composants des triplets :

$$\begin{array}{lcll} v \precsim_1 v' & \Leftrightarrow & (v,u,U) \precsim (v',u,U) & \text{pour tout } u, U,\\ u \precsim_2 u' & \Leftrightarrow & (v,u,U) \precsim (v,u',U) & \text{pour tout } v, U,\\ U \precsim_3 U' & \Leftrightarrow & (v,u,U) \precsim (v,u,U') & \text{pour tout } v, u.\end{array}$$

Toute augmentation des niveaux d'utilité des plus mauvais et/ou des meilleurs éléments de S devrait être considérée par le décideur comme une amélioration ; il devrait en être de même pour le niveau GEU. Comme le montre le lemme suivant, ces considérations tout à fait intuitives se voient effectivement vérifiées de manière théorique, et ce grâce aux axiomes mis en place jusqu'ici.

Lemme 10.2 *Supposons que les axiomes 10.1 à 10.4 soient vérifiés. Alors :*

$$\begin{array}{lcl} v \leq v' & \Leftrightarrow & v \precsim_1 v';\\ u \leq u' & \Rightarrow & u \precsim_2 u';\\ U \leq U' & \Rightarrow & U \precsim_3 U'.\end{array}$$

Remarquons que, d'après les deux dernières relations (qui ne sont que des implications et non des équivalences), les comportements suivants ne sont pas incompatibles avec notre modèle :

$$\begin{array}{lcl} u < u' & \text{et} & u \sim_2 u',\\ U < U' & \text{et} & U \sim_3 U'.\end{array}$$

Ces comportements peuvent en effet se manifester lorsque le décideur ne prête pas une attention particulière aux pires ou aux meilleurs résultats possibles lorsqu'il prend ses décisions. Ceci peut arriver lorsque le décideur a particulièrement confiance dans les fréquences observées.

Comme le montre l'exemple ci-dessous, la solvabilité restreinte par rapport à u peut apparaître comme une hypothèse totalement irréaliste (au moins dans certains cas). Rappelons que la connexité et la solvabilité non restreinte impliquent la solvabilité restreinte et sont par conséquent tout aussi irréalistes.

Exemple 10.4 Considérons un décideur (monsieur Nipigue ?) manifestant une profonde aversion pour les pertes, si petites soient-elles, et qui rejette systématiquement toute décision pouvant entraîner des pertes à moins qu'il n'ait l'intime conviction que la probabilité d'une perte est extrêmement faible. Pour des échantillons de petite taille N, il n'y a aucune garantie que les événements non observés soient rares ; par conséquent, il est probable que $\succsim$ soit tel que :

$$\forall u' \geq u(0) > u'', \ \ \forall U' \geq v' \geq u' \ \text{ et } \ \forall U'' \geq v'' \geq u'', \quad (v', u', U') \succ (v'', u'', U'').$$

Supposons maintenant que $v, U, U_{[0]}$ et $v_{[0]}$ soient tels que :

$$(v, u(0), U) \succ (v_{[0]}, u(0), U_{[0]}) \succ (v, u'', U).$$

Alors $(v_{[0]}, u(0), U_{[0]}) \succ (v, u, U)$ $\forall u < u(0)$, et $(v, u, U) \succ (v_{[0]}, u(0), U_{[0]})$ $\forall u \geq u(0)$; par conséquent, il n'existe aucun u tel que $(v, u, U) \sim (v_{[0]}, u(0), U_{[0]})$, et donc u ne vérifie pas la solvabilité restreinte. ♦

Puisque les effets de certitude (ou de sécurité) apparaissent expérimentalement bien plus puissants que les effets de potentialité, on ne doit pas s'attendre nécessairement à ce qu'un phénomène symétrique empêche U de vérifier la solvabilité restreinte. Il est donc intéressant de considérer des cas où la solvabilité restreinte est bien vérifiée par rapport à v et U, mais pas par rapport à u. D'où l'axiome suivant :

Axiome 10.6 (solvabilité restreinte par rapport à v et U)

$$(v, u, U) \succsim (v_{[0]}, u_{[0]}, U_{[0]}) \succsim (v', u, U) \Rightarrow \exists\, v'' \textit{ tel que } (v_{[0]}, u_{[0]}, U_{[0]}) \sim (v'', u, U).$$
$$(v, u, U) \succsim (v_{[0]}, u_{[0]}, U_{[0]}) \succsim (v, u, U') \Rightarrow \exists\, U'' \textit{ tel que } (v_{[0]}, u_{[0]}, U_{[0]}) \sim (v, u, U'').$$

Cet axiome est illustré par la figure 10.1.

Rappelons que, dans le chapitre 8, on a montré grâce au théorème 8.2 que tout préordre large total $\succsim$

- défini sur un **produit cartésien** de dimension 3 dont deux composants vérifient la solvabilité restreinte et la condition de Thomsen,
- et vérifiant l'axiome d'indépendance (correspondant ici à peu près au lemme 10.2), l'axiome de conservation d'échelle (cf. page 170) et le nouvel axiome archimédien (cf. page 175),

est représentable par des utilités additives. Dans le même chapitre, nous avons en outre montré que si l'on omettait l'une (quelconque) des hypothèses ci-dessus, $\succsim$ risquait de ne plus être représentable par une utilité additive.

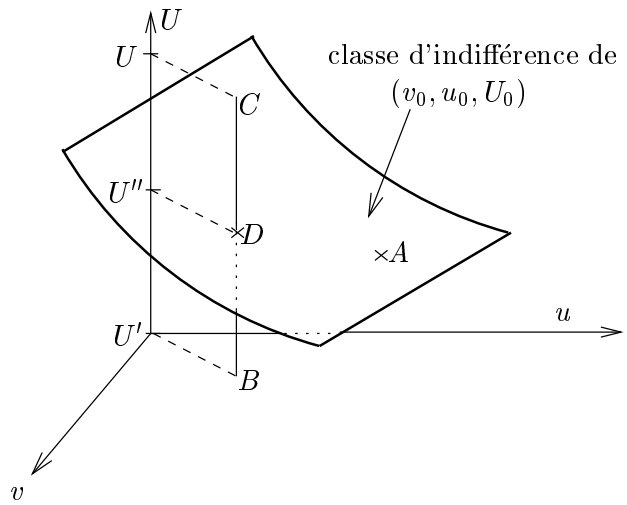


FIG. 10.1: Solvabilité restreinte par rapport à U : B et C sont sur la même verticale. Si $B \precsim A$ et $A \precsim C$, alors il existe D tel que $D \sim A$.

Ici, les mêmes axiomes vont nous permettrent de montrer l'existence de représentations additives de $\succsim$. En fait, puisque l'on va utiliser l'axiome d'élimination d'ordre 2, il n'est pas utile de requérir l'indépendance, la condition de Thomsen ni l'axiome de conservation d'échelle, qui en sont des sous-ensembles. Le lecteur objectera qu'au chapitre 8 on avait considéré que $\succsim$ était défini sur un produit cartésien, alors que dans le cas présent $\mathcal{T}^0_{[N]}$ est plutôt un sous-ensemble de produit cartésien. Certes, mais considérons quatre nombres réels quelconques $u_{[0]}, u_{[1]}, U_{[0]}, U_{[1]} \in \{u(c),\, c \in G\}$ tels que $u_{[0]} < u_{[1]} < U_{[0]} < U_{[1]}$, $u(c)$ étant la valeur de l'utilité de vNM de c. Si $\succsim$ est représentable par une utilité additive sur $\mathcal{T}^0_{[N]}$, alors elle l'est aussi sur $Y = [u_{[0]}, u_{[1]}] \times [u_{[1]}, U_{[0]}] \times [U_{[0]}, U_{[1]}]$ car $Y \subset \mathcal{T}^0_{[N]}$. Or Y est un produit cartésien ; pour déduire l'existence d'utilités additives représentant $\succsim$ (en n'utilisant que des hypothèses aisément testables), on doit donc utiliser les définitions et axiomes suivants :

Définition 10.1 (séquence sur-standard par rapport à U) *Pour toute suite K d'entiers relatifs consécutifs, finie ou infinie, croissante ou décroissante, $(U^k, k \in K)$ est une séquence sur-standard si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :*

- $(v_{[0]}, u_{[0]}, U^0) \prec (v_{[1]}, u_{[1]}, U^0)$, *et* $(v_{[0]}, u_{[0]}, U^{k+1}) \succsim (v_{[1]}, u_{[1]}, U^k)\ \forall k, k{+}1 \in K$;
- $(v_{[0]}, u_{[0]}, U^0) \succ (v_{[1]}, u_{[1]}, U^0)$, *et* $(v_{[0]}, u_{[0]}, U^{k+1}) \precsim (v_{[1]}, u_{[1]}, U^k)\ \forall k, k{+}1 \in K$.

Des définitions similaires s'appliquent pour les séquences sur-standards par rapport à u et v.

Comme dans le chapitre 8, on en déduit le nouvel axiome archimédien :

Axiome 10.7 (nouvel axiome archimédien) *Toute séquence sur-standard bornée est finie.*

Outre ces axiomes, on doit rajouter l'axiome suivant, qui permet de prendre en compte le fait que les préférences ne portent pas sur un produit cartésien, mais sur un sous-ensemble. Par définition, l'utilité de vNM est bornée. L'axiome ci-dessous indique seulement que ces bornes ne peuvent être atteintes.

Axiome 10.8 $\nexists\, c_m \in \mathcal{C}$ *tel que* $u(c_m) \precsim_2 u(c)\ \forall c \in \mathcal{C}$.
$\nexists\, c_M \in \mathcal{C}$ *tel que* $u(c) \precsim_3 u(c_M)\ \forall c \in \mathcal{C}$.

En utilisant tous ces axiomes, on peut alors démontrer le théorème suivant, qui suit la même philosophie que le théorème 8.2 de la page 175.

Théorème 10.2 *Supposons que N, la taille des échantillons observés, soit fixée. Supposons de plus que les axiomes 10.1 à 10.8 soient vérifiés. Alors il existe trois fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, $h^1_{[N]}$, $h^2_{[N]}$, $h^3_{[N]}$, telles que, $\forall (v,u,U),(v',u',U') \in \mathcal{T}^0_{[N]}$,*

$$(v,u,U) \succsim (v',u',U') \Leftrightarrow h^1_{[N]}(v) + h^2_{[N]}(u) + h^3_{[N]}(U) \geq h^1_{[N]}(v') + h^2_{[N]}(u') + h^3_{[N]}(U').$$

Cependant, contrairement aux théorèmes classiques d'existence d'utilités additives (sur des produits cartésiens ou des sous-ensembles), les utilités du théorème 10.2 ne sont pas uniques à une transformation affine strictement positive près. Cette remarque, qui rejoint les résultats de l'exemple 10 et du théorème 8.4, page 182, peut être illustrée par l'exemple suivant :

Exemple 10.4 (suite) Supposons que $h^1_{[N]} + h^2_{[N]} + h^3_{[N]}$ soit une utilité additive représentant les préférences du décideur de l'exemple 10.4 ; son aversion pour les pertes implique que

$$\inf_{U \geq v \geq u \geq u(0)} \{h^1_{[N]}(v) + h^2_{[N]}(u) + h^3_{[N]}(U)\} \geq \sup_{\substack{U \geq v \geq u \\ u(0) > u}} \{h^1_{[N]}(v) + h^2_{[N]}(u) + h^3_{[N]}(U)\}.$$

$\forall (v,u,U) \in \mathcal{T}^0_{[N]}$, posons

$$\begin{aligned} k^1_{[N]}(v) &= \alpha\, h^1_{[N]}(v), \\ k^2_{[N]}(u) &= \alpha\, h^2_{[N]}(u) + \beta(u), \\ k^3_{[N]}(U) &= \alpha\, h^3_{[N]}(U), \end{aligned}$$

où α est une constante positive arbitraire et la fonction $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est telle que

$$\beta(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \geq u(0) \\ 0 & \text{si } u < u(0). \end{cases}$$

Il est clair que $k^1_{[N]} + k^2_{[N]} + k^3_{[N]}$ est aussi une utilité additive représentant $\succsim$ sur $\mathcal{T}^0_{[N]}$; cependant, $k^2_{[N]}$ n'est pas une transformée affine de $h^2_{[N]}$. ♦

Cet exemple suggère donc la définition et le théorème d'unicité suivant :

Définition 10.2 (i-relié) *u et u' sont i-reliés, ce que l'on note $u\mathcal{O}u'$, si et seulement si $u \sim_2 u'$ ou s'il existe un entier n et une suite $(u^i)_{i=0}^p$ telle que*

- $u^0 = u$,
- $u^p = u'$,
- $\forall i \in \{0, \ldots, p-1\}$, $\exists\, v^i, U^i, v^{i+1}, U^{i+1}$ *tels que* $(v^{i+1}, u^{i+1}, U^{i+1}) \sim (v^i, u^i, U^i)$,
- *soit* $u^{i+1} \succ_2 u^i$ $\forall i \in \{0, \ldots, p-1\}$, *soit* $u^{i+1} \prec_2 u^i$ $\forall i \in \{0, \ldots, p-1\}$.

Cette définition est légèrement différente de celle que j'avais donnée page 163 car elle suppose ici que le suite $(u^i)_{i=0}^p$ est soit croissante, soit décroissante. En fait, d'après le lemme 8.5, page 207, on peut toujours extraire d'une suite $(u^i)_{i=0}^p$ 2-reliante, une suite strictement monotone.

Théorème 10.3 *Supposons que les axiomes 10.1 à 10.8 soient vérifiés. Alors il existe un ensemble K d'entiers consécutifs, fini ou infini, positifs ou négatifs, et une suite, $(u^k)_{k\in K}$, tels que*

- $\forall u$, $\exists\, k \in K$ *tel que* $u\,\mathcal{O}\,u^k$,
- *si* $\mathrm{Card}(K) > 1$, *alors* $u^{k+1} > u^k$ *et* $\mathrm{Non}(u^k\,\mathcal{O}\,u^{k+1})$ $\forall k, k+1 \in K$.

Supposons maintenant que $v^1_{[N]} + v^2_{[N]} + v^3_{[N]}$ et $w^1_{[N]} + w^2_{[N]} + w^3_{[N]}$ soient des utilités additives représentant $\succsim$ sur $\mathcal{T}^0_{[N]}$. Alors il existe des constantes $\alpha > 0$, $\alpha_{[1]}$, $\alpha_{[3]}$ et $\beta_{[k]}$, $k \in K$, telles que :

$$\begin{cases} \forall v, & w^1_{[N]}(v) = \alpha \cdot v^1_{[N]}(v) + \alpha_{[1]} \\ \forall U, & w^3_{[N]}(U) = \alpha \cdot v^3_{[N]}(U) + \alpha_{[3]} \\ \forall u\,\mathcal{O}\,u^k, & w^2_{[N]}(u) = \alpha \cdot v^2_{[N]}(u) + \beta_{[k]} \text{ où, } \forall k, k+1 \in K, \\ & \beta_{[k+1]} \geq \beta_{[k]} \quad + \alpha \cdot [\sup\limits_{\substack{u'\,\mathcal{O}\,u^k \\ u' \leq v \leq U}} \{v^1_{[N]}(v) + v^2_{[N]}(u') + v^3_{[N]}(U)\}] \\ & \qquad\qquad\qquad - \alpha \cdot [\inf\limits_{\substack{u'\,\mathcal{O}\,u^k \\ u' \leq v \leq U}} \{v^1_{[N]}(v) + v^2_{[N]}(u') + v^3_{[N]}(U)\}]. \end{cases}$$

10.5 Discussion et conclusion sur le modèle

10.5.1 Questions ouvertes sur le modèle

Dans ce chapitre, nous avons établi un fondement théorique à la dépendance des préférences par rapport à certaines caractéristiques des décisions, et à leur représentation par des fonctions d'utilité particulières, lorsque les seules données connues proviennent

d'échantillons imprécis. Cependant, à l'heure actuelle aucune procédure n'a été implémentée, qui permettrait d'éliciter ces fonctions. Bien entendu, les constructions de fonctions d'utilité ont été particulièrement étudiées dans la communauté scientifique (citons par exemple Keeney et Sicherman (1976) ; Keeney et Raiffa (1993) ; Holz et Mosler (1994) ; Von Nitzsch et Weber (1988)) ; cependant, dans le contexte de ce chapitre, il devrait être possible de simplifier les méthodes classiques car des informations sur le comportement du décideur sont disponibles : en particulier, plus N est grand, plus le critère de préférence devrait se rapprocher de GEU ; de plus, l'importance relative de m_S et M_S dans les quadruplets de la section 10.4.3 refètent le degré de pessimisme du décideur.

En décision dans l'incertain, un indice de pessimisme bien connu a été introduit par Hurwicz (1951). Les liens entre les deux indices ne sont pas évidents car ils représentent les réactions du décideur face à deux types d'incertitude : le premier indice reflète la confiance du décideur en l'échantillon observé tandis que le second exprime son attitude envers l'ambiguité (c'est-à-dire pour des situations dans lesquelles seules les probabilités inférieures et supérieures des événements sont connues). Cependant, il est raisonnable de penser que le même trait psychologique est responsable de l'importance accordée aux mauvaises conséquences par rapport aux bonnes dans les deux modèles, établissant ainsi une connexion entre les deux indices de pessimisme.

Un autre aspect qui n'a pas été étudié dans le présent chapitre, c'est l'effet que produit un apport d'information : comment l'attitude du décideur change t-elle dans ce cas ? Intuitivement, le décideur devrait être enclins à faire plus confiance à l'échantillon observé, et à prendre moins en compte la plus mauvaise et la meilleure conséquence possible. D'un autre côté, l'apport de données très vagues pourrait peut-être résulter en une perte globale de confiance en l'échantillon et avoir ainsi l'effet opposé.

Le dernier aspect qui mérite un approfondissement est la possibilité de justifier l'existence de fonctions d'utilité de formes particulières. Dans la section 10.4.3, on a montré l'existence de fonctions d'utilité additives lorsque les échantillons étaient de taille fixe ; on pourrait essayer de généraliser ce résultat en représentant les préférences selon :

$$V(f, N, S) = \lambda_{[N]} G_f(u) + (1 - \lambda_{[N]})[H(m_S) + K(M_S)],$$

ce qui permettrait de séparer l'attitude du décideur face à l'ambiguité (H et K) de celle qu'il a face à l'imprécision ($\lambda_{[N]}$).

10.5.2 Comparaison avec d'autres approches

La statistique paramétrique classique suppose que la distribution de l'échantillon à disposition du décideur suit une famille paramétrique connue de lois de probabilité ; la statistique Bayésienne introduit en outre une distribution *a priori* sur l'espace des paramètres. Tant que les informations que requièrent ces approches sont disponibles, il n'y a aucune objection à leur faire, d'autant que ce sont des méthodes très attractives car elles ont été éprouvées par la communauté scientifique. De plus, la statistique Bayésienne présente l'avantage de ne pas être sujette aux problèmes d'inconsistance dynamique, ce que tous les autres modèles, y compris celui du présent chapitre, ont beaucoup de

difficultés à contourner. D'un autre côté, lorsqu'il y a peu ou pas d'informations sur les distributions *a priori* et que les valeurs des paramètres sont dans une large part fixées arbitrairement[2], on est en droit de se demander dans quelle mesure ces choix arbitraires ne jouent pas un rôle prépondérant dans la sélection d'une décision "optimale".

C'est pour cette raison qu'il est intéressant d'étudier des modèles de décision qui "collent" aux données (sans introduire de paramètres plus liés à des raisons techniques qu'au comportement du décideur). Cette préoccupation n'est bien sûr pas nouvelle : la statistique non paramétrique évite les hypothèses injustifiables ; et des méthodes de Bayes empiriques utilisent des lois de probabilité *a priori* fondées sur des données. Le modèle présenté dans ce chapitre a été ellaboré dans cet esprit.

10.6 Démonstrations

Démonstration du lemme 10.1 : Lorsque $(f, N, S) \succ (g, N, S)$, une utilisation répétée de l'axiome 10.2 montre que $(f, 2^k N, S) \succ (g, 2^k N, S)$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$, et donc, d'après l'axiome 10.3, que $f \succ_\infty g$ et $E_f u > E_g u$. Par conséquent, $E_f u = E_g u$ implique que$(f, N, S) \sim (g, N, S)$: les préférences sur $\mathcal{T}$ ne dépendent de f que par le biais de $E_f u$. ♦

Démonstration du théorème 10.1 : Le théorème 10.1 explique qu'il existe un ordre sur les quadruplets $(E_f \overline{u}, N, u(m_{[S]}), u(M_{[S]}))$ qui préserve l'ordre des préférences sur les triplets (f, N, S). D'après le lemme 10.1, l'ordre sur les triplets (f, N, S) peut être transformé en un ordre sur $(E_f \overline{u}, N, S)$. Montrons maintenant que cet ordre est lui-même représentable par un ordre sur $(E_f \overline{u}, N, u(m_{[S]}), u(M_{[S]}))$. En d'autres termes, si $\xi = \{(f, N, S) \in \mathcal{T}^0$ tel que $E_f \overline{u} = v$, $\inf_{s \in S} u(s) = u$, $\sup_{s \in S} u(s) = U\}$, où u, v et U sont des constantes réelles quelconques, alors tous les éléments de ξ appartiennent à la même classe d'indifférence de $\succsim$.

Considérons une décision d correspondant au triplet $(f, N, S) \in \xi$. Puisque $S \supset \{m_{[S]}, M_{[S]}\}$, il existe $\omega_{[m]}, \omega_{[M]} \in \Omega$ tels que $d(\omega_{[m]}) = m_{[S]}$ et $d(\omega_{[M]}) = M_{[S]}$. Soit $\Omega_{[N]}$ l'ensemble des états de la nature ayant été observés. Soit $\Omega^c_{[N]} = \Omega \backslash \Omega_{[N]}$ l'ensemble des états de la nature non observés. Remarquons que $\Omega^c_{[N]}$ est un ensemble infini car $\Omega = \Omega_{[N]} \cup \Omega^c_{[N]}$, $\mathrm{Card}(\Omega_{[N]})$ est fini et $\mathrm{Card}(\Omega)$ est infini. Soit d^+ la décision définie par :

$$\begin{cases} \forall \omega \in \Omega_{[N]} \cap \{\omega_{[m]}\}^c, & d^+(\omega) = d(\omega), \\ \forall \omega \in \Omega^c_{[N]} \cap \{\omega_{[m]}\}^c, & d^+(\omega) = M_{[S]}, \\ \text{Pour } \omega = \omega_{[m]} & d^+(\omega) = m_{[S]}. \end{cases}$$

D'après sa définition, d^+ correspond à une décision $(f, N, S_{[f]} \cup \{m_{[S]}, M_{[S]}\})$. De plus, $d^+ \succsim^* d$, donc d'après l'axiome 10.4, il est clair que $d^+ \succsim d$, c'est-à-dire

$$(f, N, S_{[f]} \cup \{m_{[S]}, M_{[S]}\}) \succsim (f, N, S).$$

[2]En fait, ces valeurs sont plutôt choisies pour des raisons techniques : hypothèses de normalité ; etc.

De même si d^- est définie par :

$$\begin{cases} \forall \omega \in \Omega_{[N]} \cap \{\omega_{[M]}\}^c, & d^-(\omega) = d(\omega), \\ \forall \omega \in \Omega^c_{[N]} \cap \{\omega_{[M]}\}^c, & d^-(\omega) = m_{[S]}, \\ \text{Pour } \omega = \omega_{[M]} & d^-(\omega) = M_{[S]}, \end{cases}$$

alors d^- correspond à $(f, N, S_{[f]} \cup \{m_{[S]}, M_{[S]}\})$, et $d \succsim d^-$. Par conséquent,

$$(f, N, S) \sim (f, N, S_{[f]} \cup \{m_{[S]}, M_{[S]}\}).$$

De la même manière, $\forall (f', N, S') \in \xi$, $(f', N, S') \sim (f', N, S_{[f']} \cup \{m_{[S']}, M_{[S']}\})$. Maintenant, pour $u(m_{[S']}) = u(m_{[S]})$ et $u(M_{[S']}) = u(M_{[S]})$, puisque $S_{[f]}$ et $S_{[f']}$ sont des ensembles finis, les valeurs de $d^+(\omega)$ et $d^-(\omega)$ peuvent être modifiées sur des $\omega \in \Omega^c_{[N]} \cap \{\omega_{[m]}, \omega_{[m']}, \omega_{[M]}, \omega_{[M']}\}^c$, de telle sorte que les nouvelles décisions $d^+_{[1]}$ et $d^-_{[1]}$ engendrent $(f, N, S_{[f]} \cup S_{[f']} \cup \{m_{[S]}, m_{[S']}, M_{[S]}, M_{[S']}\})$; et, bien entendu, puisque $d^+ \succsim^* d^+_{[1]} \succsim^* d^-$ et $d^+ \succsim^* d^-_{[1]} \succsim^* d^-$, d'après l'axiome 10.4, on a $d \sim d^+_{[1]} \sim d^-_{[1]}$, et donc

$$(f, N, S_{[f]}) \sim (f, N, S_{[f]} \cup S_{[f']} \cup \{m_{[S]}, m_{[S']}, M_{[S]}, M_{[S']}\}).$$

D'après un raisonnement similaire,

$$(f', N, S') \sim (f', N, S_{[f]} \cup S_{[f']} \cup \{m_{[S]}, m_{[S']}, M_{[S]}, M_{[S']}\}).$$

Maintenant, d'après les axiomes 10.2 et 10.3, puisque $E_f \overline{u} = E_{f'} \overline{u} = v$,

$$(f', N, S_{[f]} \cup S_{[f']} \cup \{m_{[S]}, m_{[S']}, M_{[S]}, M_{[S']}\}) \sim (f, N, S_{[f]} \cup S_{[f']} \cup \{m_{[S]}, m_{[S']}, M_{[S]}, M_{[S']}\});$$

par conséquent, $(f, N, S) \sim (f', N, S')$. Donc tous les éléments de ξ appartiennent à la même classe d'indifférence de $\succsim$. ♦

Démonstration du lemme 10.2 : Considérons des quadruplets (v, N, u, U) et (v', N, u, U). Soit $S \in \mathcal{G}$ tel que $\inf_{c \in S} u(c) = u$ et $\sup_{c \in S} u(c) = U$. D'après le théorème 10.1 et l'axiome 10.2, l'ordre des préférences entre (v, N, u, U) et (v', N, u, U) est identique à celui entre (v, N, S) et (v', N, S) et, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, à celui entre $(v, 2^k N, S)$ et $(v', 2^k N, S)$, et par conséquent, d'après l'axiome 10.3, à celui entre v et v'. Donc $(v, N, u, U) \precsim (v', N, u, U) \Leftrightarrow v \leq v'$.

Supposons que $u \leq u'$. Soit $\Omega_{[N]}$ l'ensemble des états de la nature ayant été observés, et $\Omega^c_{[N]} = \Omega \backslash \Omega_{[N]}$. Considérons une décision d engendrant le quadruplet (v, N, u', U), et telle que, pour $\omega_{[1]}, \omega_{[2]} \in \Omega^c_N$, $\omega_{[1]} \neq \omega_{[2]}$, $d(\omega_{[1]}) = d(\omega_{[2]}) = U$. Soit d' la décision définie par :

$$\begin{cases} d'(\omega) = d(\omega) \text{ pour } \omega \neq \omega_{[2]}, \\ d'(\omega_{[2]}) = u. \end{cases}$$

Il est clair que d' engendre (v, N, u, U), et puisque $d' \precsim^* d$, d'après l'axiome 10.4, on a aussi $(v, N, u, U) \precsim (v, N, u', U)$.

La troisième équivalence du lemme peut être démontré d'une manière analogue au paragraphe précédent. ♦

Comme dans le chapitre 8, il est pratique de démontrer les théorèmes 10.2 et 10.3 en une seule démonstration.

Démonstration du théorème 10.2 et du théorème 10.3 :
Le principe de démonstration est de construire une utilité additive sur chaque classe d'équivalence de $\mathcal{O}$, et de "recoller" les morceaux ainsi créés pour former une utilité additive sur $\mathcal{T}^0_{[N]}$. Notons que, comme l'a fait remarquer Wakker (1993, section 2), d'une manière générale, ce principe de démonstration ne fonctionne pas ; mais, ici le lemme 10.2 garantit que la fonction ainsi créée est bien une fonction d'utilité.

Soit $u_{[0]}$ un réel quelconque tel qu'il existe une décision d telle que $\inf_{\omega\in\Omega} u(d(\omega)) = u_{[0]}$. Commençons par montrer qu'il existe une fonction d'utilité additive (unique à une transformation affine strictement positive près) $h^1_{[N]} + h^2_{[N]} + h^3_{[N]}$ représentant $\succsim$ sur $\{(v, u_{[0]}, U) : u_{[0]} \leq v \leq U\}$. Remarquons que cet ensemble n'est pas un produit cartésien, et donc que l'existence d'une utilité additive représentant $\succsim$ dessus ne découle pas directement des théorèmes d'existence montrés tout au long de ce mémoire.

Première étape : existence d'une utilité additive sur $\{(v, u_{[0]}, U) : u_{[0]} < U\}$

$\forall v_{[0]} \succ_1 u_{[0]}$, c'est-à-dire pour tout $v_{[0]} > u_{[0]}$, l'ensemble $\{(v, u_{[0]}, U) : u_{[0]} \leq v \leq v_{[0]} \leq U\}$ est un produit cartésien de dimension 3 vérifiant :

- la solvabilité restreinte par rapport à tous les composants ;
- l'essentialité par rapport aux composants v et U : en effet, puisque $v_{[0]} \succ_1 u_{[0]}$, $\{v : u_{[0]} \leq v \leq v_{[0]}\} = \{v : u_{[0]} \precsim_1 v \precsim_1 v_{[0]}\}$ est clairement essentiel. Par définition de $\mathcal{T}^0_{[N]}$, $v_{[0]} = E_f\overline{u}$, pour une fréquence f engendrée sur l'espace des résultats par l'échantillon observé de taille N. Donc le support de f est fini et il existe $c \in \mathcal{C}$ tel que $v_{[0]} \leq u(c)$. D'après l'axiome 10.8, il existe c' tel que $u(c') \succ_3 u(c)$, et, d'après le lemme 10.2, $u(c') > u(c)$. Par conséquent, $\{U : v_{[0]} \leq U\}$ est aussi essentiel ;
- l'axiome d'élimination du second ordre ;
- un axiome archimédien qui implique l'axiome archimédien classique.

Par conséquent, le théorème classique 3.4 (cf. Krantz, Luce, Suppes, et Tversky (1971)) peut s'appliquer, et montre qu'il existe une utilité additive $h^1_{[N]} + h^2_{[N]} + h^3_{[N]}$, unique à une transformation affine strictement positive près, représentant $\succsim$ sur $\{(v, u_{[0]}, U) : u_{[0]} \leq v \leq v_{[0]} \leq U\}$.

Maintenant, pour $v_{[1]} \succ_1 u_{[0]}$, $v_{[1]} \neq v_{[0]}$ ($v_{[1]} > v_{[0]}$ par exemple), un raisonnement analogue montre qu'il existe des utilités additives uniques à une transformation affine strictement positive près représentant $\succsim$ sur les produits cartésiens suivants :

$$\{(v, u_{[0]}, U) : u_{[0]} \leq v \leq v_{[1]} \leq U\},$$
$$\{(v, u_{[0]}, U) : u_{[0]} \leq v \leq v_{[0]} < v_{[1]} \leq U\}.$$

Notons que le dernier ensemble est l'intersection des deux premiers ensembles, c'est-à-dire

$$\{(v, u_{[0]}, U) : u_{[0]} \leq v \leq v_{[0]} \leq U\} \cap \{(v, u_{[0]}, U) : u_{[0]} \leq v \leq v_{[1]} \leq U\}.$$

Puisque les fonctions d'utilité additives sont uniques à une transformation affine strictement positive près sur ces trois ensembles, on peut donc s'arranger pour qu'elles coincident toutes sur le dernier ensemble, ou, plus exactement, on peut s'arranger pour que les fonctions d'utilité définies sur les deux derniers ensembles coincident avec celle définie sur le premier. Autrement dit, on peut étendre la définition de la fonction d'utilité du premier ensemble à

$$\{(v, u_{[0]}, U) : u_{[0]} \leq v \leq v_{[0]} \leq U\} \cup \{(v, u_{[0]}, U) : u_{[0]} \leq v \leq v_{[1]} \leq U\}.$$

En fait, c'est une règle tout à fait générale : le fait que toutes les fonctions d'utilité additives sur les ensembles $\{(v, u_{[0]}, U) : u_{[0]} \leq v \leq v' \leq U\}$ (et ce quel que soit $v' > u_{[0]}$) soient uniques à une transformation affine strictement positive près assure que $h^1_{[N]} + h^2_{[N]} + h^3_{[N]}$ peut être étendue de façon consistante sur $\{(v, u_{[0]}, U) : u_{[0]} \leq v \leq U,\ u_0 < U\}$, c'est-à-dire de façon à ce que les $h^1_{[N]} + h^2_{[N]} + h^3_{[N]}$ soient toujours des utilités additives représentant $\succsim$ sur les ensembles $\{(v, u_{[0]}, U) : u_{[0]} \leq v \leq v' \leq U\}$. Il reste maintenant à prouver que la fonction ainsi engendrée est effectivement une utilité additive sur $\{(v, u_{[0]}, U) : u_{[0]} \leq v \leq U\}$, ce qui est loin d'être trivial (cf. Wakker (1993, section 2)). Pour cela, considérons deux éléments :

$$\begin{aligned}(v', u_{[0]}, U') &\in \{(v, u_{[0]}, U) : v \leq v_{[0]} \leq U\},\\ (v'', u_{[0]}, U'') &\in \{(v, u_{[0]}, U) : v \leq v_{[1]} \leq U\}.\end{aligned}$$

Si $U' \geq v_{[1]}$, alors, puisque, par construction $h^1_{[N]} + h^2_{[N]} + h^3_{[N]}$ est une utilité sur $\{(v, u_{[0]}, U) : u_{[0]} \leq v \leq v_{[1]} \leq U\}$, on a bien

$$\begin{gathered}(v', u_{[0]}, U') \succsim (v'', u_{[0]}, U'') \Leftrightarrow\\ h^1_{[N]}(v') + h^2_{[N]}(u_{[0]}) + h^3_{[N]}(U') \geq h^1_{[N]}(v'') + h^2_{[N]}(u_{[0]}) + h^3_{[N]}(U'').\end{gathered} \tag{10.10}$$

Si, au contraire, $U' < v_{[1]}$, alors

- soit $\exists (v''', u_{[0]}, U''') \in \{(v, u_{[0]}, U) : u_{[0]} \leq v \leq v_{[0]} < v_{[1]} \leq U\}$ tel que $(v''', u_{[0]}, U''') \sim (v', u_{[0]}, U')$, auquel cas $(v''', u_{[0]}, U''')$ appartient aussi à $\{(v, u_{[0]}, U) : u_{[0]} \leq v \leq v_{[0]} \leq U\}$, et donc, puisque, par construction, $h^1_{[N]} + h^2_{[N]} + h^3_{[N]}$ est une utilité sur $\{(v, u_{[0]}, U) : u_{[0]} \leq v \leq v_{[0]} \leq U\}$, on a

  $$h^1_{[N]}(v') + h^2_{[N]}(u_{[0]}) + h^3_{[N]}(U') = h^1_{[N]}(v''') + h^2_{[N]}(u_{[0]}) + h^3_{[N]}(U''').$$

  Mais $(v''', u_{[0]}, U''')$ appartient aussi à $\{(v, u_{[0]}, U) : u_{[0]} \leq v \leq v_{[1]} \leq U\}$, ce qui implique que

  $$\begin{gathered}(v'', u_{[0]}, U'') \succsim (v''', u_{[0]}, U''') \Leftrightarrow\\ h^1_{[N]}(v'') + h^2_{[N]}(u_{[0]}) + h^3_{[N]}(U'') \geq h^1_{[N]}(v''') + h^2_{[N]}(u_{[0]}) + h^3_{[N]}(U''').\end{gathered}$$

  Par transitivité de la relation $\geq$ sur $\mathbb{R}$, (10.10) est donc bien vérifiée.

- soit il n'existe aucun élément $(v''', u_{[0]}, U''') \in \{(v, u_{[0]}, U) : u_{[0]} \leq v \leq v_{[0]} < v_{[1]} \leq U\}$ tel que $(v''', u_{[0]}, U''') \sim (v', u_{[0]}, U')$. Alors $(v', u_{[0]}, U') \prec (u_{[0]}, u_{[0]}, v_{[1]})$. En

effet, dans le cas contraire, puisque $U' < v_{[1]}$ et $v' \leq v_{[0]}$, et d'après le lemme 10.2, on aurait

$$(u_{[0]}, u_{[0]}, v_{[1]}) \precsim (v', u_{[0]}, U') \prec (v', u_{[0]}, v_{[1]}) \precsim (v_{[0]}, u_{[0]}, v_{[1]}),$$

ce qui impliquerait d'après la solvabilité restreinte par rapport au premier composant qu'il existerait $v''' \in [u_{[0]}, v_{[0]}]$ tel que $(v', u_{[0]}, U') \sim (v''', u_{[0]}, v_{[1]})$, ce qui contredirait notre hypothèse de départ.
D'autre part, toujours d'après le lemme 10.2, on a $(u_{[0]}, u_{[0]}, v_{[1]}) \precsim (v'', u_{[0]}, U'')$. Donc

$$(v', u_{[0]}, U') \prec (u_{[0]}, u_{[0]}, v_{[1]}) \precsim (v'', u_{[0]}, U''),$$

et puisque $h^1_{[N]} + h^2_{[N]} + h^3_{[N]}$ est une utilité sur $\{(v, u_{[0]}, U) : u_{[0]} \leq v \leq v_{[0]} \leq U\}$ et sur $\{(v, u_{[0]}, U) : u_{[0]} \leq v \leq v_{[1]} \leq U\}$, on a

$$h^1_{[N]}(v') + h^2_{[N]}(u_{[0]}) + h^3_{[N]}(U') \quad < \quad h^1_{[N]}(v'') + h^2_{[N]}(u_{[0]}) + h^3_{[N]}(U'').$$

Donc, en conclusion, $h^1_{[N]} + h^2_{[N]} + h^3_{[N]}$ représente bien $\succsim$ sur

$$\{(v, u_{[0]}, U) : u_{[0]} \leq v \leq v_{[0]} \leq U\} \cup \{(v, u_{[0]}, U) : u_{[0]} \leq v \leq v_{[1]} \leq U\}.$$

Pour achever cette, étape, étendons le représentation de $\succsim$ à $\{(v, u_{[0]}, U) : u_{[0]} < U\}$. Remarquons tout d'abord que, pour $v_{[2]} \notin \{v_{[0]}, v_{[1]}\}$, $v_{[2]} \succ_1 u_{[0]}$, les extensions de $h^1_{[N]} + h^2_{[N]} + h^3_{[N]}$ à $\{(v, u_{[0]}, U) : v \leq v_{[0]} \leq U\} \cup \{(v, u_{[0]}, U) : v \leq v_{[1]} \leq U\}$ et à $\{(v, u_{[0]}, U) : v \leq v_{[0]} \leq U\} \cup \{(v, u_{[0]}, U) : v \leq v_{[2]} \leq U\}$ doivent obligatoirement coincider sur l'intersection de ces ensembles (d'après l'unicité à une transformation affine strictement positive près), de telle sorte que la valeur de $h^1_{[N]}+h^2_{[N]}+h^3_{[N]}$ sur tout élément (v, u_0, U) est bien défini. Deuxièmement, $\succsim$ est représentable par $h^1_{[N]} + h^2_{[N]} + h^3_{[N]}$ sur :

$$\begin{aligned}\{(v, u_{[0]}, U) : v \leq v_{[0]} \leq U\} \cup \{(v, u_{[0]}, U) : v \leq v_{[1]} \leq U\} \\ \cup \{(v, u_{[0]}, U) : v \leq v_{[2]} \leq U\}.\end{aligned}$$

Puisque deux éléments arbitraires de cette réunion d'ensembles appartiennent forcément à la réunion de deux des trois ensembles, le résultat du paragraphe précédent s'applique. Maintenant, puisque $v_{[1]}$ et $v_{[2]}$ on été choisis arbitrairement, bien que satisfaisant $v_{[1]}, v_{[2]} \succ_1 u_{[0]}$, n'importe quels éléments $(v', u_{[0]}, v_{[1]}), (v'', u_{[0]}, v_{[2]})$ de $\{(v, u_0, U) : u_0 < U\}$ peuvent être comparés grâce à $h^1_{[N]} + h^2_{[N]} + h^3_{[N]}$, de telle sorte que cette fonction représente $\succsim$ sur la totalité de l'ensemble $\{(v, u_{[0]}, U) : u_{[0]} < U\}$. De plus, par construction, cette fonction d'utilité additive est unique à une transformation affine strictement positive près sur $\{(v, u_{[0]}, U) : u_{[0]} < U\}$.

Deuxième étape : existence d'une utilité additive sur $\{(v, u, U) : u \in \{u_{[0]}, u_{[1]}\}, u_{[1]} \mathcal{O} u_{[0]}, u_{[0]} < u_{[1]}, u_{[0]} < U\}$.

D'après la définition 10.2, soit i) $u_{[1]} \sim_2 u_{[0]}$, auquel cas $(v, u_{[1]}, U) \sim (v, u_{[0]}, U)$ pour tout v, U et, par conséquent, si $h^1_{[N]} + h^2_{[N]} + h^3_{[N]}$ est une utilité additive sur $\{(v, u_{[0]}, U) : u_{[0]} < U\}$, c'est aussi une utilité additive sur $\{(v, u, U) : u \in \{u_{[0]}, u_{[1]}\}, u_{[0]} < U\}$; soit ii) il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et une suite $(u^i)_{i=0}^p$ telle que

- $u^0 = u_{[0]}$, $u^p = u_{[1]}$,
- $\forall i \in \{0, \ldots, p-1\}$, $u^i \prec_2 u^{i+1}$,
- $\forall i \in \{0, \ldots, p-1\}$, $\exists\, v_{[i]}, U_{[i]}, v'_{[i+1]}, U'_{[i+1]}$ tels que $(v_{[i]}, u^i, U_{[i]}) \sim (v'_{[i+1]}, u^{i+1}, U'_{[i+1]})$.

D'après la première étape, il existe une utilité additive $h^1_{[N]} + h^2_{[N]} + h^3_{[N]}$, unique à une transformation affine strictement positive près, représentant $\succsim$ sur $\{(v, u^0, U) : u^0 < U\}$. Notons aussi que d'après l'axiome 10.5, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ et pour tous v, v', U, U',

$$(v, u^i, U) \succsim (v', u^i, U') \Leftrightarrow (v, u^0, U) \succsim (v', u^0, U'),$$

de telle sorte que, pour n'importe quelle valeur de $h^2_{[N]}(u^i)$, la restriction de $h^1_{[N]} + h^2_{[N]} + h^3_{[N]}$ à $\{(v, u^i, U) : u^0 < U\}$ représente aussi $\succsim$.

Pour résumer, il existe une suite $(h^2_{[N]}(u^i))_{i=0}^p$ telle que $h^1_{[N]} + h^2_{[N]} + h^3_{[N]}$ représente $\succsim$ sur tous les ensembles $\{(v, u^i, U) : u^0 < U\}$. Il reste maintenant à définir la valeur de chaque $h^2_{[N]}(u^i)$ de telle sorte que $h^1_{[N]} + h^2_{[N]} + h^3_{[N]}$ représente aussi $\succsim$ sur $\{(v, u, U) : u \in \{u^i, i = 0, \ldots, p\},\ u^0 < U\}$.

D'après la définition de la relation $\mathcal{O}$, pour tout $i \in \{0, \ldots, p-1\}$, il existe $v_{[i]}, U_{[i]}$, $v'_{[i+1]}$, $U'_{[i+1]}$ tels que :

$$(v_{[i]}, u^i, U_{[i]}) \sim (v'_{[i+1]}, u^{i+1}, U'_{[i+1]}).$$

Ainsi, l'égalité suivante est-elle une condition nécessaire pour que $h^1_{[N]} + h^2_{[N]} + h^3_{[N]}$ représente $\succsim$ sur $\{(v, u, U) : u \in \{u^i, i = 0, \ldots, p\},\ u^0 < U\}$:

$$h^2_{[N]}(u^{i+1}) = h^2_{[N]}(u^i) + \left[h^1_{[N]}(v_{[i]}) + h^3_{[N]}(U_{[i]})\right] - \left[h^1_{[N]}(v'_{[i+1]}) + h^3_{[N]}(U'_{[i+1]})\right]. \quad (10.11)$$

La question qui se pose maintenant est de savoir si cette condition est aussi suffisante pour la représentabilité additive de $h_{[N]}$. Tous les produits cartésiens

$$\{(v, u, U) : u \in \{u^i, u^{i+1}\} \text{ et } u^{i+1} \leq v \leq v' \leq U\}, \text{ pour tout } v' > u^{i+1} \text{ fixé},$$

satisfont les propriétés suivantes :

- solvabilité restreinte par rapport à deux composants, et essentialité par rapport à tous les composants,
- axiome d'élimination du second ordre,
- un axiome archimédien (axiome 10.7),
- $u^i \mathcal{O} u^{i+1}$.

Par conséquent, d'après les thérème de représentation du chapitre 8, il existe une fonction d'utilité additive, unique à une transformation affine strictement positive près,

représentant $\succsim$ sur ces produits cartésiens. De plus, cette fonction, de part son unicité, est forcément égale à $h^1_{[N]} + h^2_{[N]} + h^3_{[N]}$. Une démonstration similaire à celle de la première étape montre que $h^1_{[N]} + h^2_{[N]} + h^3_{[N]}$ représente en fait $\succsim$ sur

$$\{(v, u, U) : u \in \{u^i, u^{i+1}\} \text{ et } u^{i+1} \leq v \leq U\}.$$

Pour résumer, $h^1_{[N]}+h^2_{[N]}+h^3_{[N]}$ représente $\succsim$ sur l'ensemble ci-dessus et sur $\{(v, u^i, U) : u^0 < U\}$. Maintenant, montrons que cette fonction représente en fait $\succsim$ sur

$$\{(v, u^i, U) : u^0 < U\} \cup \{(v, u^{i+1}, U)\}.$$

(Notons que, pour le deuxième ensemble, il est inutile de supposer que $U > u^0$ puisque nous savons déjà que $U \geq u^{i+1}$). Considérons donc n'importe quel couple d'éléments, (v', u^i, U') et (v'', u^{i+1}, U''), de cette réunion. Remarquons que :

$$\{(v, u^{i+1}, U)\} \subset \{(v, u, U) : u \in \{u^i, u^{i+1}\},\ u^{i+1} \leq v \leq U\}.$$

Deux cas doivent être examinés :

- S'il existe $(v''', u^i, U''') \in \{(v, u, U) : u \in \{u^i, u^{i+1}\},\ u^{i+1} \leq v \leq U\}$ indifférent à (v', u^i, U'), alors, puisque $h^1_{[N]} + h^2_{[N]} + h^3_{[N]}$ représente $\succsim$ sur $\{(v, u^i, U) : u^0 < U\}$, l'égalité suivante est vraie :

  $$h^1_{[N]}(v') + h^2_{[N]}(u^i) + h^3_{[N]}(U') = h^1_{[N]}(v''') + h^2_{[N]}(u^i) + h^3_{[N]}(U'''),$$

  et puisque (v''', u^i, U''') et (v'', u^{i+1}, U'') appartiennent à $\{(v, u, U) : u \in \{u^i, u^{i+1}\}, u^{i+1} \leq v \leq U\}$,

  $$\begin{cases} (v''', u^i, U''') \succsim (v'', u^{i+1}, U'') \Leftrightarrow \\ \qquad h^1_{[N]}(v''') + h^2_{[N]}(u^i) + h^3_{[N]}(U''') \geq h^1_{[N]}(v'') + h^2_{[N]}(u^{i+1}) + h^3_{[N]}(U''). \end{cases}$$

  Donc, par transitivité,

  $$\begin{cases} (v', u^i, U') \succsim (v'', u^{i+1}, U'') \Leftrightarrow \\ \qquad h^1_{[N]}(v') + h^2_{[N]}(u^i) + h^3_{[N]}(U') \geq h^1_{[N]}(v'') + h^2_{[N]}(u^{i+1}) + h^3_{[N]}(U''). \end{cases}$$

- Si, d'un autre côté, il n'existe pas de $(v''', u^i, U''') \in \{(v, u, U) : u \in \{u^i, u^{i+1}\}, u^{i+1} \leq v \leq U\}$ indifférent à (v', u^i, U'), alors $(v', u^i, U') \prec (u^{i+1}, u^i, u^{i+1})$; sinon, soit $v' \geq u^{i+1}$, auquel cas $U' \geq u^{i+1}$ et

  $$(v', u^i, U') \in \{(v, u, U) : u \in \{u^i, u^{i+1}\},\ u^{i+1} \leq v \leq U\},$$

  ce qui contredit notre hypothèse, soit $v' < u^{i+1}$, ce qui implique d'après le lemme 10.2 que

  $$(v', u^i, u^{i+1}) \prec (u^{i+1}, u^i, u^{i+1}) \precsim (v', u^i, U') \ ;$$

  mais alors, d'après la définition de $\succsim_3$, $u^{i+1} \prec_3 U'$. Encore d'après le lemme 10.2,

  $$(u^{i+1}, u^i, u^{i+1}) \precsim (v', u^i, U') \prec (u^{i+1}, u^i, U')$$

et, par solvabilité restreinte par rapport au troisième composant, il existe U''' tel que $u^{i+1} \precsim_3 U''' \precsim_3 U'$ et tel que $(v', u^i, U') \sim (u^{i+1}, u^i, U''')$, ce qui contredit, là encore, notre hypothèse.

Par conséquent, d'après le lemme 10.2, on a

$$(v', u^i, U') \prec (u^{i+1}, u^i, u^{i+1}) \precsim (v'', u^{i+1}, U'')$$

et, puisque $h^1_{[N]}+h^2_{[N]}+h^3_{[N]}$ représent $\succsim$ sur $\{(v, u^i, U) : u^0 < U\}$ et sur $\{(v, u, U) : u \in \{u^i, u^{i+1}\},\ u^{i+1} \leq v \leq U\}$,

$$\begin{aligned} h^1_{[N]}(v') + h^2_{[N]}(u^i) + h^3_{[N]}(U') &< h^1_{[N]}(u^{i+1}) + h^2_{[N]}(u^i) + h^3_{[N]}(u^{i+1}) \\ &\leq h^1_{[N]}(v'') + h^2_{[N]}(u^{i+1}) + h^3_{[N]}(U''). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $i \in \{0, \ldots, p-1\}$, $h^1_{[N]} + h^2_{[N]} + h^3_{[N]}$ représente $\succsim$ sur

$$\{(v, u, U) : u \in \{u^i, u^{i+1}\} \text{ et } u^0 < U\}.$$

Par récurrence, en utilisant le même principe, il est facile de montrer que $h^1_{[N]}+h^2_{[N]}+h^3_{[N]}$ représente $\succsim$ sur $\{(v, u, U) : u \in \{u^i, i = 0, \ldots, p\},\ u^0 < U\}$. De plus, d'après (10.11), cette fonction d'utilité est unique à une transformation affine strictement positive près.

Troisième étape : existence d'une utilité additive sur $\{(v, u, U) : u \mathcal{O} u_{[0]} \text{ et } U > \inf_{u' \mathcal{O} u_{[0]}} u'\}$.

$h^1_{[N]} + h^2_{[N]} + h^3_{[N]}$ est déjà définie sur $\{(v, u^0, U) : U > u^0\}$. Soient $u_{[1]}$ et $u_{[2]}$ deux nombres réels tels que $u_{[0]} \mathcal{O} u_{[1]}$ et $u_{[0]} \mathcal{O} u_{[2]}$. D'après la définition de $\mathcal{O}$, il existe une suite $(u^i)_{i=0}^p$ 2-reliant $u_{[0]}$ et $u_{[1]}$. D'après les étapes précédentes, $h^1_{[N]} + h^2_{[N]} + h^3_{[N]}$ peut être étendue pour représenter $\succsim$ sur $\{(v, u, U) : u \in \{u^i, i = 0, \ldots, p\}$ et $U > \inf\{u_0, u_1\}\}$; de plus, cette fonction est unique à une transformation affine strictement positive près. De la même manière, il existe une suite $(w^i)_{i=0}^q$ 2-reliant $u_{[0]}$ et $u_{[2]}$, et $h^1_{[N]} + h^2_{[N]} + h^3_{[N]}$ peut être étendue de manière à représenter $\succsim$ sur $\{(v, u, U) : u \in \{w^i, i = 0, \ldots, q\}$ et $U > \inf\{u_0, u_2\}\}$; et cette fonction est aussi unique à une transformation affine strictement positive près. Montrons maintenant que ces deux extensions sont compatibles et qu'elles définissent une utilité additive, unique à une transformation affine strictement positive près, sur

$$\left\{(v, u, U) : u \in \{u^i, i = 0, \ldots, p\} \cup \{w^i, i = 0, \ldots, q\} \text{ et } U > \inf\{u_0, u_1, u_2\}\right\}.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $u_{[2]} > u_{[1]}$ et que $\text{Non}(u_{[2]} \sim_2 u_{[1]})$.

Supposons que $u_{[1]} \leq u_{[0]} \leq u_{[2]}$. Alors $u_{[1]} \precsim_2 u_{[0]} \precsim_2 u_{[2]}$ et, par conséquent, $u^i \precsim_2 u_{[0]}$ pour tout $i \in \{0, \ldots, p\}$, et $w^j \succ_2 u_{[0]}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, q\}$. Ainsi $h^2_{[N]}$ est définie de manière non ambigüe sur $\{u^i, i = 0, \ldots, p\} \cup \{w^i, i = 1, \ldots, q\}$. $h^1_{[N]}$ et $h^3_{[N]}$ sont aussi bien définis car, d'après le lemme 10.2, les préférences pour u fixé ne dépendent pas de u, et les fonctions d'utilité additives sont uniques à une transformation affine strictement positive près. Problème : est-ce que $h^1_{[N]} + h^2_{[N]} + h^3_{[N]}$ est une fonction d'utilité ? Autrement dit, est-ce qu'elle représente $\succsim$? La suite $(z^i)_{i=0}^{p+q} = (u^p, u^{p-1}, \ldots, u^0, w^1, \ldots, w^q)$ est telle que :

- $z^0 = u_{[1]}$, $z^{p+q} = u_{[2]}$,
- $z^i \prec_2 z^{i+1}$ pour tout $i \in \{0, \ldots, p+q-1\}$,
- pour tout $i \in \{0, \ldots, p+q-1\}$, il existe $v_{[i]}, U_{[i]}, v'_{[i+1]}, U'_{[i+1]}$ tels que $(v_{[i]}, z^i, U_{[i]}) \sim (v'_{[i+1]}, z^{i+1}, U'_{[i+1]})$.

Par conséquent, (z^i) 2-relie $u_{[1]}$ et $u_{[2]}$ et, d'après l'étape précédente, il existe une fonction d'utilité $k^1_{[N]} + k^2_{[N]} + k^3_{[N]}$, unique à une transformation affine strictement positive près, représentant $\succsim$ sur

$$\{(v, u, U) : u \in \{z^i, i = 0, \ldots, p+q\},\ z^0 < U\}.$$

Comme ce dernier ensemble contient l'union de $\{(v, u, U) : u \in \{u^i, i = 0, \ldots, p\}, U > u_1\}$ et de $\{(v, u, U) : u \in \{w^i, i = 0, \ldots, q\}$ et $U > u_0\}$, $h^1_{[N]} + h^2_{[N]} + h^3_{[N]}$ et $k^1_{[N]} + k^2_{[N]} + k^3_{[N]}$ doivent coincider. Par conséquent, $h^1_{[N]} + h^2_{[N]} + h^3_{[N]}$ est une utilité additive et, de plus, elle est unique à une transformation affine strictement positive près.

Supposons maintenant que $u_{[0]} \leq u_{[1]} \leq u_{[2]}$. Soit $(z^i)_{i=0}^r$ la suite de taille maximale, constituée des éléments des suites $(u^i)_{i=0}^p$ et $(w^i)_{i=0}^q$, telle que $z^i \prec_2 z^{i+1}$ pour tout $i \in \{0, \ldots, r-1\}$. Cette suite 2-relie $u_{[0]}$, $u_{[1]}$ et $u_{[2]}$. En effet, quand deux éléments consécutifs de (z^i) appartiennent aussi à l'une des suites (u^i), $i < p$ ou (w^i), $i < q$, alors, d'après les définitions de (u^i) et (w^i), il existe $v_{[i]}, U_{[i]}, v'_{[i+1]}, U'_{[i+1]}$ telles que :

$$(v_{[i]}, z^i, U_{[i]}) \sim (v'_{[i+1]}, z^{i+1}, U'_{[i+1]}).$$

Sinon, considérons le cas où $z^k = u^i$, $z^{k+1} = w^j$ et $z^{k'} = u^{i+1}$, $k' > k+1$. Par définition de la suite (u^i), il existe $v_{[i]}, U_{[i]}, v'_{[i+1]}, U'_{[i+1]}$ tels que :

$$(v_{[i]}, u^i, U_{[i]}) \sim (v'_{[i+1]}, u^{i+1}, U'_{[i+1]}).$$

Donc, puisque par définition $z^k \prec_2 z^{k+1} \prec_2 z^{k'}$,

$$\begin{aligned}(v'_{[i+1]}, z^{k+1}, U'_{[i+1]}) \prec (v_{[i]}, z^k, U_{[i]}) &\sim (v'_{[i+1]}, z^{k'}, U'_{[i+1]}) \\ &\prec (\max\{v_{[i]}, z^{k+1}\}, z^{k+1}, \max\{U_{[i]}, z^{k+1}\}).\end{aligned}$$

Puisque $z^{k'} \succ_2 z^k$, deux cas peuvent se présenter :

- Soit $v_{[i]} \succ_1 v'_{[i+1]}$. Dans ce cas,

  $$(v'_{[i+1]}, z^{k+1}, U'_{[i+1]}) \prec (v_{[i]}, z^k, U_{[i]}) \prec (v_{[i]}, z^{k+1}, U_{[i]}).$$

  Mais alors, soit $(v'_{[i+1]}, z^{k+1}, U_{[i]}) \prec (v_{[i]}, z^k, U_{[i]}) \prec (v_{[i]}, z^{k+1}, U_{[i]})$, auquel cas, par solvabilité restreinte par rapport au premier composant, il existe $v''_{[i+1]}$ tel que $(v''_{[i+1]}, z^{k+1}, U_{[i]}) \sim (v_{[i]}, z^k, U_{[i]})$, soit $(v'_{[i+1]}, z^{k+1}, U'_{[i+1]}) \prec (v_{[i]}, z^k, U_{[i]}) \precsim (v'_{[i+1]}, z^{k+1}, U_{[i]})$, auquel cas, par solvabilité restreinte par rapport au troisième composant, il existe $U''_{[i+1]}$ tel que $(v'_{[i+1]}, z^{k+1}, U''_{[i+1]}) \sim (v_{[i]}, z^k, U_{[i]})$.

– Soit $U_{[i]} \succ_3 U'_{[i+1]}$. Dans ce cas,

$$(v'_{[i+1]}, z^{k+1}, U'_{[i+1]}) \prec (v_{[i]}, z^k, U_{[i]}) \prec (U_{[i]}, z^{k+1}, U_{[i]}).$$

Mais alors, soit $(v'_{[i+1]}, z^{k+1}, U'_{[i+1]}) \prec (v_{[i]}, z^k, U_{[i]}) \prec (v'_{[i+1]}, z^{k+1}, U_{[i]})$, et par solvabilité restreinte par rapport au troisième composant, il existe $U''_{[i+1]}$ tel que $(v'_{[i+1]}, z^{k+1}, U''_{[i+1]}) \sim (v_{[i]}, z^k, U_{[i]})$, soit $(v'_{[i+1]}, z^{k+1}, U_{[i]}) \prec (v_{[i]}, z^k, U_{[i]}) \precsim (U_{[i]}, z^{k+1}, U_{[i]})$ et par solvabilité restreinte par rapport au premier composant, il existe $v''_{[i]}$ tel que $(v''_{[i]}, z^{k+1}, U_{[i]}) \sim (v_{[i]}, z^k, U_{[i]})$.

Par conséquent, lorsque $z^k = u^i$, $z^{k+1} = w^j$ et $z^{k'} = u^{i+1}$, $k' > k+1$, z^k et z^{k+1} sont forcément des éléments d'une suite 2-reliante. Une démonstration similaire est valable lorsque $z^k = w^i$, $z^{k+1} = u^j$ et $z^{k'} = w^{i+1}$, $k' > k+1$. Par conséquent, (z^k) est une suite 2-reliant $u_{[0]}$, $u_{[1]}$ et $u_{[2]}$.

Ainsi, d'après l'étape précédente, il existe une fonction d'utilité additive $k^1_{[N]} + k^2_{[N]} + k^3_{[N]}$, unique à une transformation affine strictement positive près, représentant $\succsim$ sur $\{(v, u, U) : u \in \{z^i, i = 0, \ldots, r\}$ et $U > z^0\}$. Mais cette fonction représente aussi $\succsim$ sur $\{(v, u, U) : u \in \{u^i, i = 0, \ldots, p\}$ et $U > z^0\}$ ainsi que sur $\{(v, u, U) : u \in \{w^i, i = 0, \ldots, q\}$ et $U > z^0\}$. Par conséquent, elle doit coincider avec $h^1_{[N]} + h^2_{[N]} + h^3_{[N]}$. Donc $h^1_{[N]} + h^2_{[N]} + h^3_{[N]}$ est une utilité additive, et de plus elle est unique à une transformation affine strictement positive près.

C'est suffisant pour conclure que $h^1_{[N]} + h^2_{[N]} + h^3_{[N]}$ est une utilité additive sur $\{(v, u, U) : u \mathcal{O} u_{[0]}$ et $\inf_{u \mathcal{O} u_{[0]}} u < U\}$. Il est assez remarquable que ce principe de construction ne remet jamais en question ce qui avait été construit précédemment, mais plutôt il étend toujours le domaine de définition de la dernière fonction d'utilité définie.

Quatrième étape : existence d'une utilité additive sur $\{(v, u, U) : u \mathcal{O} u_{[0]}$ ou $u \mathcal{O} u_{[1]}$, et $U > \inf_{u' \mathcal{O} u_{[0]}} u'\}$ ($u_{[1]} > u_{[0]}$ et $\mathrm{Non}(u_{[1]} \mathcal{O} u_{[0]})$).

Supposons que $\mathcal{O}$ ait seulement une classe d'équivalence. Alors, d'après l'axiome 10.8, il n'existe aucun $c_{[m]} \in \mathcal{C}$ tel que $u(c_{[m]}) \precsim_2 u(c)$ pour tout $c \in \mathcal{C}$. Donc, pour tout $c_{[m]} \in \mathcal{C}$, il existe $c \in \mathcal{C}$ tel que $u(c) \prec_2 u(c_{[m]})$. Donc, d'après le lemme 10.2, $u(c) < u(c_{[m]})$,

$$\{(v, u, U) : \inf u < U\} = \{(v, u, U)\},$$

et les théorèmes 10.2 et 10.3 sont démontrés.

Si, au contraire, il existe plus d'une classe d'équivalence, alors considérons deux nombres réels $u_{[0]}$ et $u_{[1]}$ tels que $\mathrm{Non}(u_{[1]} \mathcal{O} u_{[0]})$ et $u_{[1]} \succ_2 u_{[0]}$. D'après les étapes précédentes, on sait qu'il existe un utilité additive $h^1_{[N]} + h^2_{[N]} + h^3_{[N]}$, unique à une transformation affine strictement positive près sur :

$$\{(v, u, U) : u \mathcal{O} u_{[0]} \text{ et } \inf_{u' \mathcal{O} u_{[0]}} u' < U\},$$

et une autre fonction d'utilité additive $k^1_{[N]} + k^2_{[N]} + k^3_{[N]}$, aussi unique à une transformation affine strictement positive près, sur :

$$\{(v, u, U) : u \mathcal{O} u_{[1]} \text{ et } \inf_{u' \mathcal{O} u_{[1]}} u' < U\}.$$

Remarquons que, d'après l'axiome 10.5,

$$(v, u_{[0]}, U) \succsim (v', u_{[0]}, U') \Leftrightarrow (v, u_{[1]}, U) \succsim (v', u_{[1]}, U'),$$

de telle sorte que les restriction de $h^1_{[N]} + h^3_{[N]}$ et $k^1_{[N]} + k^3_{[N]}$ sur $\{(v, U) : u_{[0]}, u_{[1]} \leq v$ et $u_{[0]}, u_{[1]} < U\}$ doivent coincider. Par conséquent, il existe des constantes $\alpha > 0$ et $\beta_1, \beta_3 \in \mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{aligned} k^1_{[N]} &= \alpha\, h^1_{[N]} + \beta_1 \\ k^3_{[N]} &= \alpha\, h^3_{[N]} + \beta_3. \end{aligned}$$

En soustrayant β_i à $k^i_{[N]}$ et en divisant par α, on obtient une fonction d'utilité représentant le même préordre large total. Par conséquent, on peut supposer que $k^1_{[N]} = h^1_{[N]}$ et que $k^3_{[N]} = h^3_{[N]}$. Montrons maintenant que $h^1_{[N]}$ et $h^2_{[N]}$ sur $\{u \,\mathcal{O}\, u_{[0]}\}$, $k^2_{[N]}$ sur $\{u \,\mathcal{O}\, u_{[1]}\}$, et $h^3_{[N]}$, sont bornées.

D'après l'axiome 10.8, il existe $v_{[0]}$ tel que $u_{[1]} \prec_1 v_{[0]}$. Par conséquent, $[u_{[1]}, v_{[0]}] \times [u_{[0]}, u_{[1]}] \times \{U : U \geq v_{[0]}\}$ est un produit cartésien vérifiant :

- la solvabilité restreinte par rapport à 2 composants, et l'essentialité par rapport à tous les composants,
- l'axiome d'élimination du second ordre,
- une propriété archimédienne (axiome 10.7),
- Non$(u_{[0]} \,\mathcal{O}\, u_{[1]})$.

Donc d'après le chapitre 8, $\succsim$ est représentable par une fonction d'utilité additive $f^1_{[N]} + f^2_{[N]} + f^3_{[N]}$ sur $[u_{[1]}, v_{[0]}] \times [u_{[0]}, u_{[1]}] \times \{U : U \geq v_{[0]}\}$, et les fonctions correspondant au premier et au troisième composant sont bornées et sont uniques à une transformation affine strictement positive près. Mais puisque

$$[u_{[1]}, v_{[0]}] \times \{u_{[0]}\} \times \{U : U \geq v_{[0]}\} \subset [u_{[1]}, v_{[0]}] \times [u_{[0]}, u_{[1]}] \times \{U : U \geq v_{[0]}\},$$

$f^1_{[N]} + f^2_{[N]} + f^3_{[N]}$ et $h^1_{[N]} + h^2_{[N]} + h^3_{[N]}$ doivent coincider (à une transformation affine strictement positive près). Donc $h^3_{[N]}$ admet une borne supérieure.

D'après l'axiome 10.8, il existe $u_{[2]} \prec_2 u_{[0]}$. si $h^3_{[N]}$ n'avait pas de borne inférieure sur $\{u : u \,\mathcal{O}\, u_{[1]}\}$, il existerait une séquence sur-standard infinie et strictement décroissante, par rapport au troisième composant, (U^i), de base $\{(u_{[0]}, u_{[2]}), (u_{[0]}, u_{[0]})\}$, partant de $(u_{[0]}, u_{[0]}, U^0)$ et bornée inférieurement par $(u_{[0]}, u_{[0]}, u_{[0]})$, ce qui contredirait notre nouvel axiome archimédien.

$h^2_{[N]}$ admet aussi une borne supérieure sur $\{u : u \,\mathcal{O}\, u_{[0]}\}$ sinon il existerait une séquence sur-standard infinie et strictement croissante (u^k), de base $\{(u_{[1]}, u_{[1]}), (u_{[1]}, v_{[0]})\}$, telle que $u^k \,\mathcal{O}\, u_{[0]}$, et bornée supérieurement par $(u_{[1]}, u_{[1]}, u_{[1]})$, ce qui contredirait notre axiome archimédien. De la même manière, on montre que $h^2_{[N]}$ admet une borne inférieure sur $\{u : u \,\mathcal{O}\, u_1\}$.

$h^1_{[N]}$ a une borne supérieure sur $\{u : u \mathcal{O} u_{[0]}\}$ car sinon il existerait une séquence sur-standard infinie et strictement croissante, par rapport au premier composant, (w^i), de base $\{(u_{[0]}, u_{[1]}), (u_{[0]}, v_{[0]})\}$, partant de $(u_{[0]}, u_{[0]}, u_{[0]})$ et bornée supérieurement par $(u_{[1]}, u_{[1]}, u_{[1]})$, ce qui contredirait l'axiome archimédien. De la même manière, si $h^1_{[N]}$ n'avait pas de borne inférieure sur $\{u : u \mathcal{O} u_{[1]}\}$, il existerait une séquence sur-standard par rapport au premier composant, infinie et strictement décroissante, (w^i), de base $\{(u_{[0]}, v_{[0]}), (u_{[0]}, u_{[1]})\}$, partant de $(u_{[1]}, u_{[1]}, v_{[0]})$ et bornée inférieurement par $(u_{[0]}, u_{[0]}, u_{[0]})$, ce qui contredirait l'axiome archimédien.

Par conséquent, puisque $h^1_{[N]}$, $h^2_{[N]}$ et $h^3_{[N]}$ sont bornées, une condition nécessaire et suffisante pour que $h_{[N]}$ représente $\succsim$ sur $\{(v, u, U) : u \mathcal{O} u_{[0]}$ ou $u \mathcal{O} u_{[1]}$, et $\inf_{u' \mathcal{O} u_{[0]}} u' < U\}$ est que :

$$\inf_{\substack{u \mathcal{O} u_{[1]} \\ u \leq v \leq U}} \{h^1_{[N]}(v) + h^2_{[N]}(u) + h^3_{[N]}(U)\} \geq \sup_{\substack{u \mathcal{O} u_{[0]} \\ u \leq v \leq U}} \{h^1_{[N]}(v) + h^2_{[N]}(u) + h^3_{[N]}(U)\}. \quad (10.12)$$

Cinquième étape : existence d'une utilité additive sur $\mathcal{T}^0_{[N]}$.

Les classes d'équivalence de $\mathcal{O}$ sont naturellement ordonnées par $>$. En effet, si $\text{Non}(u_{[0]} \mathcal{O} u_{[1]})$, alors soit $u_{[0]} \prec_2 u_{[1]}$ soit $u_{[1]} \prec_2 u_{[0]}$; dans les deux cas, le lemme 10.2 garantit que soit $u_{[0]} < u_{[1]}$ soit $u_{[1]} < u_{[0]}$. De plus, comme on l'a montré juste ci-dessus, pour un u^0 donné, il existe un seulement un nombre fini de classes "entre" celles contenant u^0 et n'importe quel u. Ainsi, toutes les classes peuvent être énumérées grâce à une suite u^z, $z \in Z \subset \mathbb{Z}$, telle que les éléments de Z sont consécutifs et $u^z < u^{z+1}$. L'utilité additive peut alors être étendue successivement sur :

$$\{(v, u, U) : u \mathcal{O} u^0 \text{ ou } u \mathcal{O} u^1, \text{ et } \inf_{u' \mathcal{O} u^0} u' < U\},$$
$$\{(v, u, U) : u \mathcal{O} u^{-1} \text{ ou } u \mathcal{O} u^0 \text{ ou } u \mathcal{O} u^1, \text{ et } \inf_{u' \mathcal{O} u^{-1}} u' < U\}, \text{etc} \ldots$$

À chaque étape, par exemple lors de l'extension de $\{(v, u, U) : u \mathcal{O} u^z, z \in \{z', z' + 1, \ldots, z''\}\}$ à $\{(v, u, U) : u \mathcal{O} u^z, z \in \{z' - 1, z', \ldots, z''\}\}$, la démonstration est réalisée de la même manière que dans la quatrième partie de la démonstration et elle s'appuie sur le fait que :

- $h^1_{[N]}$ est bornée sur$\{v : v \geq \inf_{u \mathcal{O} u^{z'-1}} u\}$,
- $h^2_{[N]}$ est bornée inférieurement sur $\{u : u \mathcal{O} u^{z'}\}$, et supérieurement sur $\{u : u \mathcal{O} u^{z'-1}\}$,
- $h^3_{[N]}$ est bornée sur $\{U : U > \inf_{u \mathcal{O} u^{z'-1}} u\}$.

Ainsi, l'égalité correspondant à (10.12) peut toujours être vérifiée. (L'extension de l'autre côté peut être justifiée de la même manière). Donc, par récurrence sur z, la fonction d'utilité additive peut être étendue sur chaque ensemble $\{(v, u, U) : u \mathcal{O} u^z$ et $U > \inf_{u' \mathcal{O} u^z} u'\}$. Ce procédé de construction garantit que la fonction ainsi créée représente bien $\succsim$ sur $\{(v, u, U) : U > \inf_{u'} u'\}$. En effet, c'est évident quand Z est un ensemble fini ; si, au contraire, Z est infini, alors $h^1_{[N]} + h^2_{[N]} + h^3_{[N]}$ ne représente pas $\succsim$ sur $\{(v, u, U) : U > \inf_{u'} u'\}$ seulement si l'un des cas suivants est vrai :

– il existe (v, u, U) tel que $(v, u, U) \precsim (v', u^z, U')$ pour tous $z \in Z$, v', U', et

$$\lim_{\substack{z \to -\infty \\ u,v,U \to \inf_{u' \mathcal{O} u^z} u'}} h^1_{[N]}(v) + h^2_{[N]}(u^z) + h^3_{[N]}(U) = -\infty.$$

– il existe (v, u, U) tel que $(v, u, U) \succsim (v', u^z, U')$ pour tous $z \in Z$, v', U', et

$$\lim_{\substack{z \to +\infty \\ u \to \inf_{u' \mathcal{O} u^z} u' \\ v,U \to \sup\{u(c) : c \in \mathcal{C}\}}} h^1_{[N]}(v) + h^2_{[N]}(u^z) + h^3_{[N]}(U) = +\infty.$$

Mais ces deux cas sont impossibles car u^z est une séquence sur-standard et que, d'après l'axiome 10.7, quand elle est bornée, elle est aussi finie.

Par conséquent, $h^1_{[N]} + h^2_{[N]} + h^3_{[N]}$ représente $\succsim$ sur $\{(v, u, U) : U > \inf_{u'} u'\}$. Mais puisque, d'après l'axiome 10.8, $\inf_u$ n'est pas atteint, $h^1_{[N]} + h^2_{[N]} + h^3_{[N]}$ peut être étendue pour représenter $\succsim$ sur $\{(v, u, U)\} = \mathcal{T}^0_{[N]}$. L'unicité de la représentation provient directement de l'équation (10.12) et de l'unicité à une transformation affine strictement positive près à l'intérieur des classes d'équivalence de $\mathcal{O}$. ♦

10.7 Bibliographie

Arrow, K. J., et L. Hurvicz (1972) : "An optimality criterion for decision making under ignorance," in *Uncertainty and Expectations in Economics*, ed. by C. F. Carter and J. L. Ford eds., Basil Blackwell & Mott Ltd, Oxford.

Bacchus, F. (1989) : *Representing and Reasoning with Probabilistic Knowledge*. MIT Press, Cambridge, Ma.

——— (1991) : "Default Reasoning from Statistics," *AAAI*, 1, 392–398.

Boyer, M., et G. Dione (1983) : "Riscophobie et étalement à moyenne constante," *L'Actualité économique*, 59, 208–229.

Chateauneuf, A., et P. P. Wakker (1993) : "From Local to Global Additive Representation," *Journal of Mathematical Economics*, 22, 523–545.

Cohen, M., et J.-Y. Jaffray (1980) : "Rational behaviour under complete ignorance," *Econometrica*, 48, 1281–1299.

——— (1983) : "Approximations of rational criteria under complete ignorance," *Theory and Decision*, 15, 121–150.

Coignard, Y. (1993) : "Modèle de Décision sur la Base de Données Fréquentistes," Ph.D. thesis, Université Paris 6, Paris.

Coignard, Y., et J.-Y. Jaffray (1994) : "Direct Decision Making," in *Decision Theory and Decision Analysis : Trends and Challenges*, ed. by S. Ríos, pp. 81–90. Kluwers Academic Publishers, Dordrecht, the Netherlands.

EECKHOUDT, L., ET C. GOLLIER (1992) : *Les risques financiers*. Ediscience, Paris.

HOLZ, H., ET K. MOSLER (1994) : "An Interactive Decision Procedure With Multiple Attributes Under Risk," *Annals of Operations Research*, 52, 151–170.

HURWICZ, L. (1951) : "Optimality Criteria for Decision Making Under Ignorance," Discussion Paper 370, Cowles Commission, Statistics.

JAFFRAY, J.-Y. (1989a) : "Généralisation du critère de l'utilité espérée aux choix dans l'incertain régulier," *RAIRO/OR*, 23, 237–265.

——— (1989b) : "Linear Utility Theory For Belief Functions," *Operations Research Letters*, 8, 107–112.

——— (1994) : "Dynamic Decision Making With Belief Functions," in *Advances in the Dempster-Shafer Theory of Evidence*, ed. by R. R. Yager, J. Kacprzyk, et M. Fedrizzi. John Wiley & Sons, inc.

KEENEY, R., ET A. SICHERMAN (1976) : "Assessing and Analyzing Preferences Concerning Multiple Objectives : An Interactive Computer Program," *Behavioral Science*, pp. 173–182.

KEENEY, R. L., ET H. RAIFFA (1993) : *Decisions with Multiple Objectives - Preferences and Value Tradeoffs*. Cambridge university Press.

KRANTZ, D. H., R. D. LUCE, P. SUPPES, ET A. TVERSKY (1971) : *Foundations of Measurement (Additive and Polynomial Representations)*, vol. 1. Academic Press, New York.

SEGAL, U. (1991) : "Additively Separable Representations on Non-convex Sets," *Journal of Economic Theory*, 56, 89–99.

——— (1994) : "A Sufficient Condition for Additively Separable Functions," *Journal of Mathematical Economics*, 23, 295–303.

SHAFER, G. (1976) : *A Mathermatical Theory of Evidence*. Princetown University Press, Princetown, New Jersey.

VON NEUMANN, J., ET O. MORGENSTERN (1944) : *Theory of Games and Economic Behaviour*. Princetown University Press, Princetown, New Jersey.

VON NITZSCH, R., ET M. WEBER (1988) : "Utility Function Assessment on a Micro-Computer : an Interactive Procedure," *Annals of Operations Research*, 16, 149–160.

WAKKER, P. P. (1989) : *Additive Representations of Preferences, A New Foundation of Decision Analysis*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

——— (1993) : "Additive Representations on Rank-Ordered Sets. II. The Topological Approach," *Journal of Mathematical Economics*, 22, 1–26.

Chapitre 11

MADMAX : un programme de construction d'utilités

Et pourtant il y a aussi des règles qui gouvernent les réactions humaines [$\cdots$] *Mais il les trouve trop compliquées à analyser. Il se demande s'il se pourrait qu'un jour on développe un système analysant le comportement humain dans le moindre détail et dérivant — à partir de là — de puissantes lois qui exprimeraient les règles de ce comportement.*

Isaac Asimov

Acronyme cinématographique barbare s'il en est, MADMAX signifie "**M**ulti-**A**ttribute **D**ecision **M**aking **A**pplication for **X**/Windows". Il s'agit d'une application graphique permettant de construire des fonctions d'utilité additives. Elle fonctionne sous X, l'environnement graphique d'UNIX, et sous Windows 95/98.

Dans les chapitres précédents, nous avons surtout étudié des conditions permettant d'affirmer que des relations de préférence sont représentables par des fonctions d'utilité additives, et ce tant du point de vue théorique (cf. les deux premières parties) que du point de vue pratique (cf. les chapitres 9 et 10). Cependant, cela ne constitue pas une fin en soi, mais plutôt une étape préliminaire indispensable : une fois l'existence de ces fonctions établie, et avant de pouvoir les manipuler, il reste encore à les construire. Bien entendu, pour cela il existe des algorithmes classiques, fondés sur des processus conversationnels : construction par classement ("ranking"), par étalonnage ("rating"), par dichotomie ("midpoint"), par compensation ("trade-off"),... et il existe encore bien d'autres algorithmes, surtout dans le contexte de la théorie de l'utilité espérée de von Neumann et Morgenstern (1944).

Dans le cadre de ce mémoire, nous allons retenir une méthode par compensation. A ce choix, on peut apporter plusieurs justifications : tout d'abord, certaines des méthodes décrites ci-dessus ne s'appliquent pas pour des composants dont le domaine de défini-

tion est un continuum (le "ranking" par exemple), ce qui ne permet pas, en général, de prendre en compte les composants solvables ; ensuite, certaines méthodes construisent séparément les fonctions d'utilité sur chacun des composants, ce qui ne permet pas d'utiliser de manière optimale des axiomes tels que la condition de Thomsen ou l'axiome de conservation d'échelle ; enfin, c'est la méthode par compensation qui me paraît bénéficier le plus des apports théoriques de la partie 2.

Les algorithmes par compensation reposent sur la définition même des fonctions d'utilité additives : si $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$, alors $f_1(x_1) + f_2(x_2) = f_1(y_1) + f_2(y_2)$. Ainsi, la connaissance de $f_1(x_1)$, $f_2(x_2)$ et $f_2(y_2)$, permet de déduire la valeur de $f_1(y_1)$. Le principe de construction est donc le suivant : on part d'éléments x_1, x_2, y_2 dont on a déjà évalué les images par la fonction d'utilité, et on demande au décideur de déterminer l'élément y_1 pour lequel il est indifférent entre (x_1, x_2) et (y_1, y_2). La déduction de $f_1(y_1)$ permet d'étendre le domaine de définition de la fonction déjà construite. En itérant ce mécanisme, on peut donc, théoriquement, construire la fonction d'utilité recherchée. Toutefois cette méthode présente deux inconvénients majeurs :

- elle présuppose que les réponses du décideur sont d'une précision infinie (y_1 ne doit pas être déterminé approximativement), ce qui n'est pas le cas en pratique,

- à chaque itération du processus, on utilise des éléments x_1, x_2, y_2 obtenus lors d'itérations précédentes. Ainsi, une erreur dans la réponse du décideur à une étape du processus se répercute sur les suivantes.

Le but de ce chapitre est de montrer comment atténuer ces effets de bord indésirables. Il comporte 6 sections. La première rappelle de manière détaillée les méthodes de construction classiques, et justifie le choix d'une méthode par compensation. La section 11.2 est consacrée à une présentation plutôt théorique de l'algorithme utilisé par MADMAX. La section suivante en précise quelques aspects techniques. La section 11.4 dresse le portrait de l'application graphique MADMAX. Enfin, les sections 11.5 et 11.6 renferment le résumé et la bibliographie du chapitre.

11.1 Les mécanismes de construction classiques

Si la recherche de conditions assurant l'existence d'utilités additives a reçu de nombreuses contributions, les méthodes de construction de ces fonctions n'ont pas été délaissées pour autant : depuis les années 60, un florilège d'algorithmes ont été développés. Le lecteur intéressé pourra se reporter à Fishburn (1967) et Keeney et Raiffa (1993) pour une étude détaillée sur le sujet. Tous les algorithmes décrits ci-dessous supposent que les attributs (ou composants de X) ont été spécifiés au préalable (Keeney et Raiffa (1993, chapitre 2) propose des méthodes pour parvenir à ce résultat). Ils sont tous fondés sur des processus conversationnels : un analyste (ici MADMAX) pose des questions judicieusement choisies au décideur à propos de ses préférences. Les réponses obtenues sont enregistrées et permettent de construire une fonction d'utilité additive.

11.1.1 Un mécanisme de construction conversationnel

L'exemple suivant, adapté de Keeney et Raiffa (1993, pages 96-97), illustre le mécanisme conversationnel utilisé par les méthodes de construction de fonctions d'utilités additives.

On suppose que les préférences du décideur portent sur un ensemble $X = [0, 100] \times [-10, 10]$. Puisque les fonctions d'utilité additives sont uniques à une transformation affine strictement positive près, on peut supposer sans perte de généralité que $f_1(0) = 0$, $f_1(100) = 100$ et $f_2(-10) = 0$. Voyons maintenant le processus conversationnel de construction :

Question de l'analyste	Réponse du décideur
1. Supposez que $x_1 = 20$ et que $x_2 = 0$. Si l'on décrémentait x_2 d'une unité, combien d'unités rajouteriez-vous à x_1 pour compenser ?	Je passerais de $x_1 = 20$ à $x_1 = 25$.
2. Conservons $x_2 = 0$, mais supposons maintenant que $x_1 = 60$. Si l'on enlevait 1 unité à x_2, combien d'unités rajouteriez-vous à x_1 pour compenser ?	Disons, à peu près 10 ; je passe donc de $x_1 = 60$ à $x_1 = 70$.
3. Donc, lorsque $x_2 = 0$, il vous en coûterait environ une unité de X_2 pour passer de $x_1 = 20$ à $x_1 = 25$ et de $x_1 = 60$ à $x_1 = 70$. Est-ce exact ?	Oui, c'est bien cela.
4. OK. Maintenant réfléchissez bien à la question suivante : pour une autre valeur de x_2, disons $x_2 = 5$, est-ce que, pour passer de $x_1 = 20$ à $x_1 = 25$, vous réduiriez x_2 de la même manière que pour passer de $x_1 = 60$ à $x_1 = 70$?	Oui, pour moi, le prix à payer en x_2 pour passer de $x_1 = 20$ à $x_1 = 25$ est identique à celui pour passer de $x_1 = 60$ à $x_1 = 70$. Mais ce prix dépend de la valeur de x_2 : je compenserais ces variations en x_1 avec la perte d'une unité lorsque $x_2 = 0$, mais avec $1,5$ unités si $x_2 = 5$. Cela vous convient ?
5. Oui, ça paraît raisonnable.	

Les deux premières questions nous permettent d'affirmer que les préférences du décideur vérifient respectivement les indifférences suivantes :

$$(20, 0) \sim (25, -1) \quad \text{et} \quad (60, 0) \sim (70, -1).$$

Autrement dit, quand on devra affecter des valeurs à $f_1(20)$, $f_1(25)$, $f_1(60)$, $f_1(70)$, $f_2(0)$ et $f_2(-1)$, on devra nécessairement respecter les égalités suivantes :

$$f_1(20) + f_2(0) = f_1(25) + f_2(-1) \quad \text{et} \quad f_1(60) + f_2(0) = f_1(70) + f_2(-1).$$

La quatrième question, quant à elle, permet d'affirmer que les indifférences suivantes sont vérifiées par la relation de préférence du décideur :

$$(20,5) \sim (25,3.5) \quad \text{et} \quad (60,5) \sim (70,3.5).$$

Autrement dit, l'utilité additive du décideur, si elle existe, doit satisfaire :

$$f_1(20) + f_2(5) = f_1(25) + f_2(3.5) \quad \text{et} \quad f_1(60) + f_2(5) = f_1(70) + f_2(3.5).$$

Arrivé à ce stade, on a aussi testé (au moins localement) la condition de Reidemeister : en effet, cette condition nous dit que :

$$\left.\begin{array}{r} (20,0) \sim (25,-1) \\ (70,-1) \sim (60,0) \\ (25,3.5) \sim (20,5) \end{array}\right\} \Rightarrow (60,5) \sim (70,3.5).$$

Etant donné que cette condition est vérifiée et qu'elle est nécessaire à l'existence de toute utilité additive (c'est un cas particulier de la condition d'élimination d'ordre 3), notre conviction qu'une utilité additive existe est renforcée. On devrait tester la condition de Reidemeister, la condition de Thomsen et l'indépendance sur d'autres régions de X, mais, pour ne pas rallonger exagérément cet exemple, on passera sous silence toutes ces vérifications, et l'on va poursuivre le processus de construction :

Question de l'analyste	Réponse du décideur
6. Supposez que $x_2 = 0$. Réduiriez-vous plus x_2 pour passer de $x_1 = 0$ à $x_1 = 50$ ou pour passer de $x_1 = 50$ à $x_1 = 100$?	Je réduirais plus x_2 pour passer de 0 à 50.
7. Vous réduiriez plus x_2 pour passer de 0 à 10 ou pour passer de 10 à 100 ?	Je réduirais plus x_2 pour passer de 10 à 100.
8. Donnez-moi une valeur de x_1 pour laquelle vous seriez indifférent entre passer de 0 à x_1 et passer de x_1 à 100.	Disons 20.

Les questions 6 à 8 cherchent à déterminer la valeur x_1 de X_1 pour laquelle

$$f_1(x_1) = \frac{f_1(0) + f_1(100)}{2} = \frac{0 + 100}{2} = 50,$$

C'est ce que l'on appelle un point médian (en anglais "midpoint"). On aurait pu, pour cela, n'utiliser qu'une seule question : "Donnez-moi une valeur de x_1 pour laquelle vous seriez indifférent entre passer de 0 à x_1 et passer de x_1 à 100" puisque, après tout, c'est précisément la réponse à cette question que l'on cherche à travers les questions 6 à 8. Mais en pratique, si l'on veut obtenir une réponse assez précise, il vaut mieux aider

le décideur en réduisant l'intervalle dans lequel se trouve la réponse cherchée. Avant la question 6, le x_1 cherché pouvait se trouver n'importe où entre 0 et 100. Après la question 6, on peut déjà dire que x_1 se situe entre 0 et 50 et, après la question 7, entre 10 et 100. L'intersection de ces intervalles nous montre que x_1 est situé entre 10 et 50. Si l'on considère que les bornes sont suffisamment restreintes, on peut demander au décideur de préciser où se trouve x_1 dans l'intervalle $[10, 50]$; c'est ce qui est réalisé dans la question 8.

Question de l'analyste	Réponse du décideur
9. Dans notre jargon, nous disons que 20 est le point médian de 0 et de 100. Pourriez-vous me donner la valeur de x_1 qui, selon vous, est le point médian de 20 et 100 ?	Ce devrait être 45. Oui, je réduirais autant x_2 pour passer de $x_1 = 20$ à $x_1 = 45$ que pour passer de $x_1 = 45$ à $x_1 = 100$.
10. Pourriez-vous me dire maintenant quel est, selon vous, le point médian entre 0 et 20 ?	Eh bien, c'est 7.
11. Parfait. Est ce que 20 vous semble être le point médian entre 7 et 45 ?	Oui.
12. Passons maintenant à x_2. Pourriez-vous me donner le point médian entre -10 et 10 ?	Disons -2.
13. Le point médian entre -2 et 10 ?	Disons 3.
14. Le point médian entre -10 et 2 ?	-7.

Grâce aux questions 6 à 11, et en supposant que $f_2(10) = \alpha$, l'analyste a pu déterminer que :

$$\begin{aligned}
f_1(20) &= \frac{f_1(0) + f_1(100)}{2} &&= 50 \quad \text{(questions 6 à 8)},\\
f_1(45) &= \frac{f_1(20) + f_1(100)}{2} &&= 75 \quad \text{(question 9)},\\
f_1(7) &= \frac{f_1(0) + f_1(20)}{2} &&= 25 \quad \text{(question 10)},\\
f_2(-2) &= \frac{f_2(-10) + f_2(10)}{2} &&= \frac{\alpha}{2} \quad \text{(question 12)},\\
f_2(3) &= \frac{f_2(-2) + f_2(10)}{2} &&= \frac{3\alpha}{4} \quad \text{(question 13)},\\
f_2(-7) &= \frac{f_2(-10) + f_2(-2)}{2} &&= \frac{\alpha}{4} \quad \text{(question 14)},
\end{aligned}$$

ce qui permet, en extrapolant, de tracer les graphes des fonctions f_1 et f_2, comme indiqué sur la figure 11.1. On ne connaît toujours pas la valeur de α. Mais on peut utiliser les deux graphes pour la trouver. D'après ceux-ci,

$$\begin{aligned}
f_1(20) + f_2(0) = f_1(25) + f_2(-1) &\Leftrightarrow 50.00 + 0.610\alpha = 55.50 + 0.550\alpha\\
f_1(60) + f_2(5) = f_1(70) + f_2(3.5) &\Leftrightarrow 83.25 + 0.825\alpha = 88.75 + 0.765\alpha.
\end{aligned}$$

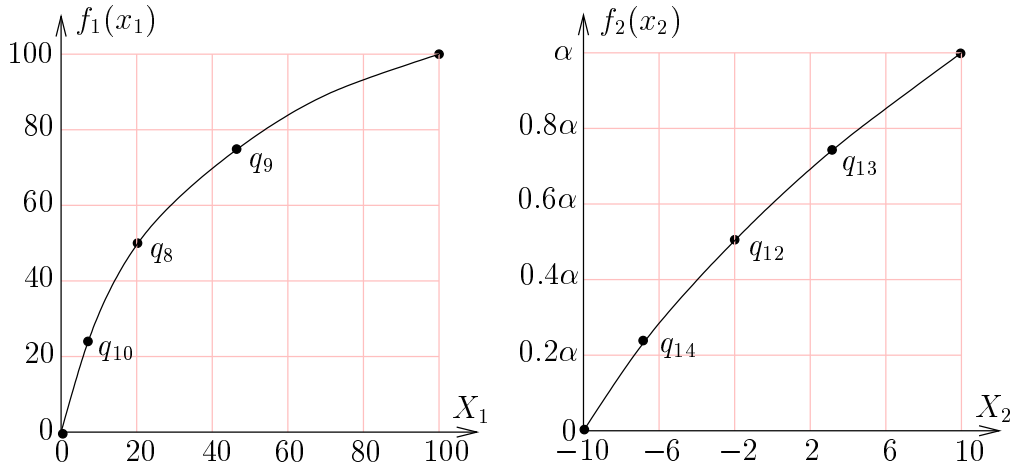


FIG. 11.1: Les graphes de f_1 et f_2 obtenus par le processus conversationnel. Chaque point q_i correspond à la réponse donnée par le décideur à la $i^{\text{ème}}$ question posée par l'analyste.

On obtient donc $\alpha \approx 92$. Ainsi f_1 et f_2 sont totalement déterminées.

Notons qu'au cours du processus de construction, l'analyste doit poser des questions (du type condition de Thomsen, condition de Reidemeister...) pour vérifier que ce qu'il construit est bien en accord avec la théorie de la mesure additive (cf. les parties 1 et 2).

Malgré la diversité des algorithmes de construction, ceux-ci peuvent être classés dans un certain nombre de catégories, que nous allons nous empresser de décrire dans la sous-section suivante.

11.1.2 Classification des algorithmes de construction classiques

La construction par comparaisons deux à deux : On présente au décideur une matrice dont les ordonnées et les abscisses représentent les différents éléments de X. On demande alors à celui-ci d'indiquer dans chaque case de la matrice celui qu'il préfère entre l'élément en abscisse et celui en ordonnée. La matrice reflète alors complètement les préférences du décideur. Par exemple, si "0" représente une indifférence entre l'élément en ligne et celui en colonne et si "1" (resp. "-1") représente la stricte préférence (resp. non préférence) de l'élément en ligne par rapport à celui en colonne, alors la matrice

	boeuf	pintade	poulet	porc
agneau	1	-1	1	1
boeuf		-1	-1	-1
pintade			1	1
poulet				0

correspond à une relation de préférence sur $X = \{$agneau, boeuf, pintade, poulet, porc$\}$

vérifiant :

$$\text{pintade} \succ \text{agneau} \succ \text{poulet} \sim \text{porc} \succ \text{boeuf}.$$

Connaissant les préférences du décideur, il ne reste plus qu'à donner des valeurs à la fonction d'utilité pour que celle-ci représente $\succsim$. Par exemple, ici, la fonction f définie par :

$$f(\text{pintade}) = 3 \quad f(\text{agneau}) = 2 \quad f(\text{poulet}) = 1 \quad f(\text{porc}) = 1 \quad f(\text{boeuf}) = 0$$

représente $\succsim$. Evidemment ce type de construction ne peut s'appliquer que si X est fini, et, de plus, de cardinal peu élevé. Il n'est donc pas du tout en harmonie avec les théorèmes d'existence des parties 1 et 2. Notons tout de même que ce procédé de construction s'applique même lorsque $\succsim$ n'est pas représentable par une fonction d'utilité additive.

La construction par classement ("ranking") : Pour chaque composant de X, on demande au décideur d'affecter un rang aux différents niveaux de préférence x_i ; par exemple, 1 pour l'élément préféré à tous les autres, 2 pour celui qui est préféré aux autres sauf au précédent, et ainsi de suite (cf. Eckenrode (1965) pour un exemple sur le choix d'un système de défense aérien). En fait, les rangs affectés aux différents x_i peuvent s'obtenir grâce à des comparaisons deux à deux. Tant que $\text{Card}(X)$ est fini, le processus fonctionne bien, et ce quelle que soit la dimension de X. Lorsque celle-ci est strictement supérieure à 1, les fonctions d'utilité f_i peuvent être évaluées indépendamment les unes des autres par classement et, dans une deuxième phase, grâce à l'adjonction de quelques informations complémentaires, elles peuvent être regroupées pour former une utilité additive sur X. Lorsque X est de cardinal infini, ce qui est le cas dans tous les théorèmes des parties 1 et 2, l'algorithme de construction par classement ne fonctionne plus car les utilités additives sont uniques à une transformation affine strictement positive près, ce que ne peut garantir la méthode par classement.

La construction par étalonnage : Elle se rapproche beaucoup de la précédente. Néanmoins, le décideur ne doit pas seulement fournir l'ordre de ses préférences, il doit aussi préciser dans quelles proportions il préfère certains niveaux de préférence à d'autres. Fishburn (1967) propose l'exemple suivant : on donne au décideur quatre bières à tester, et on lui demande de les placer sur un axe gradué de -3 à 3, le 0 représentant sa conception d'une bière moyenne. La graduation de l'axe permet de mesurer la force des préférences. Torgerson (1958) décrit quelques variations de cette méthode et Eckenrode (1965) la compare avec la précédente. Cette méthode peut s'appliquer sur des composants définis autant sur des continuums que sur des composants discrets. Là encore, les utilités f_i sont en principe construites indépendamment les unes des autres, puis regroupées (en leur appliquant des coefficients multiplicatifs) pour former une utilité additive : en effet, si g est une fonction d'utilité additive du décideur, alors, à une constante additionnelle près, il existe des constantes réelles w_i strictement positives telles que $g_i(\cdot) = w_i f_i(\cdot)$. En théorie, une seule question suffit pour déterminer un w_i donné. Cependant, en pratique, il faut en poser beaucoup plus pour s'assurer que des conditions comme celle de

Thomsen ou Reidemeister sont bien vérifiées et que les préférences du décideur sont vraiment représentables par des fonctions d'utilité additives.

La construction par dichotomie ("midpoint") : On demande au décideur de spécifier l'élément du $i^{\text{ème}}$ composant qu'il préfère, x_i, et celui qu'il déteste le plus, y_i. Le décideur doit alors estimer z_i, l'élément pour lequel la substitution de x_i par z_i ne paraît pas préférable à celle de z_i par y_i, et inversement. Autrement dit, $f_i(z_i) - f_i(x_i) = f_i(y_i) - f_i(z_i)$, ou encore $f_i(z_i) = (f_i(x_i) + f_i(y_i))/2$. En itérant ce procédé un nombre suffisant de fois, on obtient la fonction d'utilité correspondant au $i^{\text{ème}}$ composant. Cette méthode de construction correspond aux questions 6 à 14 de la sous-section 11.1.1. Comme dans les méthodes précédentes, les points médians sont calculés composant par composant, et on regroupe finalement toutes les fonctions d'utilité ainsi construites pour former une fonction d'utilité globale. Dans le cas de continuums, les fonctions d'utilité additives sont uniques à une transformation affine strictement positive près. Il faut donc très peu de questions supplémentaires pour pouvoir regrouper toutes les f_i déjà créées en une fonction d'utilité additive.

Toutes les méthodes présentées jusqu'ici évaluent les fonctions d'utilité f_i indépendamment les unes des autres. Il s'agit ensuite de "raccorder" tous les morceaux ainsi construits : c'est le but de la méthode suivante, un classique de la Décision Multi-Attribut.

La construction par MAUT : MAUT est l'acronyme de Multiple Attribute Utility Theory, ou encore Multiple Attribute Utility Technique dans le cadre de la construction de fonctions d'utilité. La méthode consiste à estimer dans un premier temps les fonctions d'utilité f_i sur chacun des composants indépendamment les unes des autres (grâce à l'emploi de loteries et/ou des mécanismes cités ci-dessus). Leur image est en principe comprise dans l'intervalle $[0, 1]$. Dans un deuxième temps, on cherche à affecter un poids w_i à chaque f_i pour que

$$f(\cdot) = \sum_{i=1}^{n} w_i f_i(\cdot)$$

soit une fonction d'utilité représentant $\succsim$ sur X. C'est évidemment la deuxième phase qui est problématique dans cette méthode. Elle a d'ailleurs reçu de nombreuses contributions ; citons par exemple Von Nitzsch et Weber (1988) et Borcherding, Eppel, et Von Winterfeldt (1991). Citons aussi Holz et Mosler (1994), qui est fondé sur le même principe et MARPI, le programme interactif qui en découle.

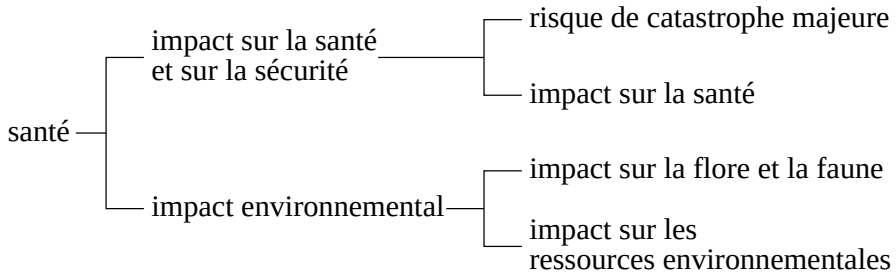
Malheureusement, comme le montrent Von Nitzsch et Weber (1993), Stillwell, Von Winterfeldt et John (1987), ou encore Weber, Eisenführ et Von Winterfeldt (1988), les poids w_i obtenus sont très sensibles à l'algorithme utilisé pour les découvrir, ainsi qu'à l'étendue des intervalles sur lesquels sont définis les attributs. Or il existe différentes manières de définir l'étendue d'un attribut : on peut utiliser l'ensemble de ses valeurs possibles dans l'absolu, ou pour un problème donné auquel fait face le décideur, l'ensemble des valeurs disponibles, etc. Il y a de fortes chances pour que l'étendue diffère suivant la définition qu'on utilisera. Or, si le $i^{\text{ème}}$ attribut est défini sur l'intervalle

$[a_i^-, a_i^+]$ alors, par définition, $f_i(a_i^-) = 0$ et $f_i(a_i^+) = 1$, de sorte que, quels que soient les a_j, $j \neq i$,

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i^+, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i^-, a_{i+1}, \ldots, a_n) = w_i.$$

Bien évidemment, la valeur de w_i dépend des autres w_j. Donc si le $i^{\text{ème}}$ attribut est maintenant défini sur l'intervalle $[b_i^-, b_i^+]$, on devrait obtenir un poids w_i' probablement différent de w_i (en particulier si $b_i^-, b_i^+ \in]a_i^-, a_i^+[$). Eh bien, comme les décideurs sont en principe assez peu sensibles aux variations d'étendue des attributs, on obtient souvent $w_i' \approx w_i$, et les fonctions d'utilité additives obtenues par MAUT diffèrent souvent selon les définitions que l'on utilise pour les attributs.

Il en est de même pour les différentes techniques de construction des w_i. Ainsi, pour simplifier les questions posées au décideur, il peut être tentant de regrouper certains attributs. Par exemple, Stillwell, Von Winterfeldt et John (1987) étudie le problème de l'implantation d'une centrale électrique dans une région à forte expansion démographique. Parmi les attributs, on compte les risques de catastrophe majeure, l'impact sur la santé de la population, l'impact sur la flore et la faune, l'impact sur les ressources environnementales. On peut alors regrouper les attributs selon la hiérarchie suivante :



Si la procédure de construction des w_i consiste à construire un poids pour l'attribut "santé", puis à raffiner ce poids sur les sous-attributs "impact sur la santé et sur la sécurité" et "impact environnemental", puis à raffiner à nouveau pour obtenir les poids des attributs de départ, eh bien, on n'obtient pas les mêmes w_i que si l'on estime ces poids directement (sans passer par une hiérarchie).

La construction par compensation ("trade-off") : Cette méthode correspond aux questions 1 à 5 de la sous-section 11.1.1. C'est aussi un "classique" de la théorie Multi-Attributs, mais, contrairement aux méthodes précédentes, elle utilise plusieurs dimensions de X en même temps. L'idée en est fort simple : supposons que $X = X_1 \times X_2$ et que l'on connaisse déjà les valeurs de l'utilité additive du décideur pour les points $y_1 \in X_1$ et $x_2, y_2 \in X_2$. La méthode par compensation consiste à faire estimer au décideur l'élément x_1 de X_1 pour lequel il est indifférent entre (x_1, x_2) et (y_1, y_2). Pour cela, l'analyste lui propose une série de valeurs (x_1^k) et lui demande si les couples (x_1^k, x_2) correspondants sont préférés ou non à (y_1, y_2). L'analyste obtient ainsi un intervalle $[x_1^i, x_1^j]$ sur lequel se trouve le point recherché. Il essaye alors de le réduire en posant de nouvelles questions. Le processus s'arrête lorsque la largeur de l'intervalle passe en dessous d'un certain seuil. Sur la figure 11.2, ce mécanisme s'appellerait X-Matching, parce que la recherche est effectuée sur une ligne horizontale. Il est bien évident que l'on peut réaliser une recherche similaire sur un axe vertical : on parle alors de Y-Matching.

Les questions 1 et 2 de la sous-section 11.1.1 correspondent au X-Matching, tandis que la question 4 s'apparente au Y-Matching.

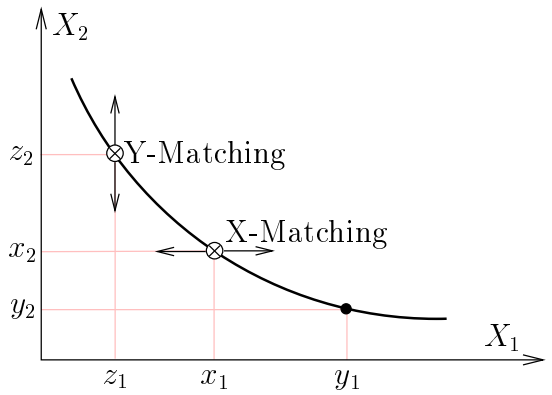


FIG. 11.2: X-Matching et Y-Matching.

Typiquement, les mécanismes de X-Matching et de Y-matching sont incorporés dans une construction s'inspirant des démonstrations de l'approche topologique. Le principe, illustré par la figure 11.3, en est le suivant : Soient (0) et (1) deux points quelconques

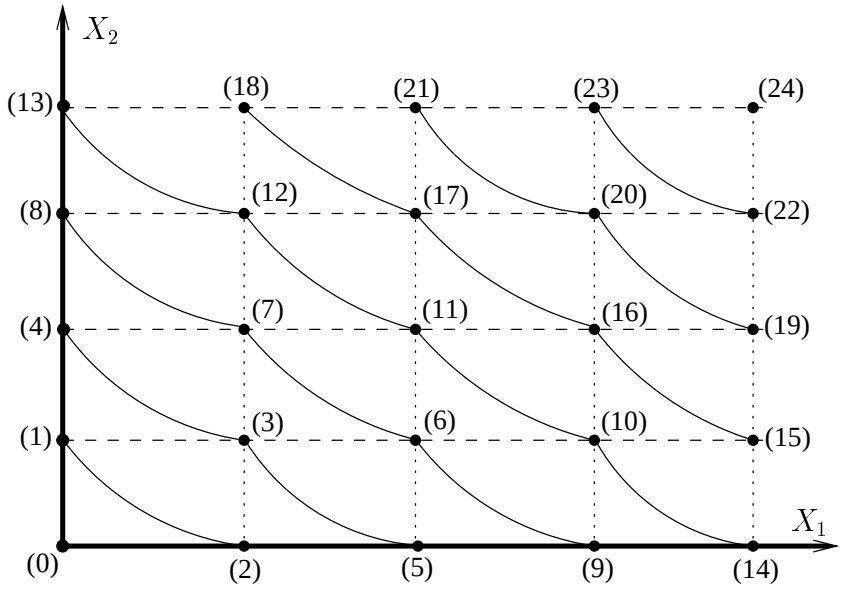


FIG. 11.3: Exemple d'une construction par compensation.

de $X_1 \times X_2$, situés sur une même droite verticale. Dans la suite, je noterai $(k)_1$ et $(k)_2$ respectivement les première et deuxième composantes du point (k). Puisque toute transformée affine strictement positive d'une utilité additive est encore une utilité additive, on peut poser

$$f_1((0)_1) = f_2((0)_2) = 0 \quad \text{et} \quad f_2((1)_2) = 1.$$

Par l'emploi de compensations ("trade-offs"), l'analyste peut faire découvrir au décideur

le point (2), intersection de l'axe horizontal passant par (0) et de la courbe d'indifférence passant par (1) (il s'agit de X-Matching). Les égalités suivantes doivent alors être vérifiées par (2) :

$$f_2((2)_2) = f_2((0)_2) = 0 \quad \text{et} \quad f_1((2)_1) + f_2((2)_2) = f_1((1)_1) + f_2((1)_2),$$

d'où l'analyste déduit que $f_1((2)_1) = 1$. Puisque X est un produit cartésien, (3) appartient forcément à X, et, de plus, si f est une fonction d'utilité additive, alors $f((3)) = 2$. Par trade-off, l'analyste amène alors le décideur à déterminer les points (4) et (5) respectivement sur l'intersection de la courbe d'indifférence contenant (3) et de la droite verticale passant par (0) (l'analyste fait alors du Y-Matching) et sur l'intersection de la courbe d'indifférence contenant (3) et de la droite horizontale passant par (0) (il fait alors du X-Matching). On réitère le processus autant de fois que nécessaire. Si l'on veut affiner la fonction d'utilité ainsi construite, on peut utiliser des points médians, et, ainsi, doubler la densité de la grille, comme le montre la figure 11.4 : le décideur trouve un

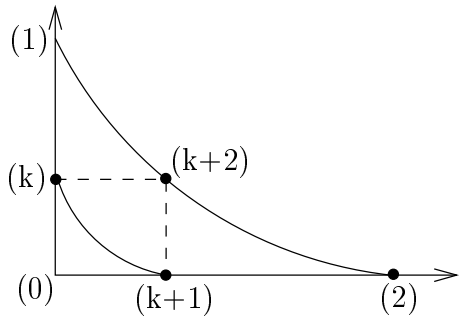


FIG. 11.4: Affinement de la fonction d'utilité.

point (k), point médian de (0) et de (1), et l'on réitère le processus décrit ci-dessus, pour calculer $(k+1)$, $(k+2)$, etc... La grille de la figure 11.3 devient alors celle de la figure 11.5. Habituellement, les programmes finissent l'algorithme en reliant entre eux tous les points indifférents par des droites (cf. Tanguiane et Gruber (1995)).

11.1.3 Problèmes soulevés par les méthodes de construction

A l'exception de la dernière, l'ensemble des méthodes présentées dans la sous-section précédente construisent les fonctions d'utilité sur chaque composant, indépendamment les unes des autres, puis, à l'aide de constantes multiplicatives, elles les regroupent pour former une fonction d'utilité additive sur la totalité de X. Cela présente un inconvénient majeur : on ne peut déceler que $\succsim$ n'est pas représentable par une utilité additive qu'à la fin de l'algorithme de construction. En effet, pour s'en apercevoir, il faut tester des axiomes d'élimination[1]. Or, ceci n'est possible qu'en comparant des éléments de X différant les uns des autres par plusieurs composants (dans les relations d'indifférence de

[1]Pour être précis, il faudrait aussi s'assurer que l'axiome archimédien est vérifié. Mais on sait que c'est déjà le cas si des fonctions d'utilité (uniques à une transformation affine strictement positive près) existent pour chaque composant.

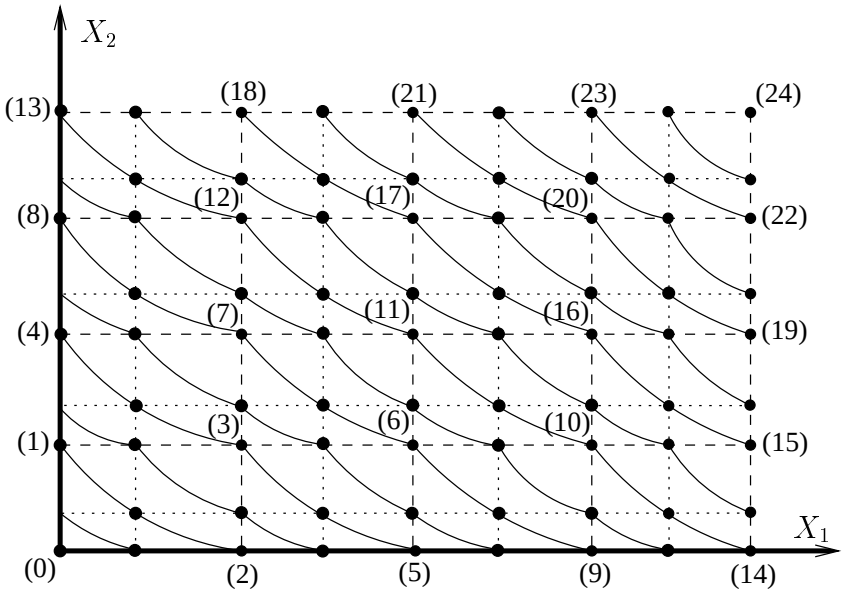


FIG. 11.5: Grille de double densité.

la condition de Thomsen par exemple, les éléments n'ont jamais en commun leur premier ou leur deuxième composant). Par conséquent, on ne peut s'apercevoir d'une violation d'un axiome d'élimination qu'après avoir construit des constantes multiplicatives (poids) w_i, c'est-à-dire qu'on aura réalisé un travail tout de même assez conséquent pour rien. Il aurait mieux valu tester plus tôt les conditions d'élimination.

En outre, si certains composants ne sont pas solvables, les points médians risquent de ne plus exister, les fonctions sur chaque composant ne sont plus uniques à une transformation affine strictement positive près, et, ainsi, MAUT risque de ne jamais pouvoir leur affecter des poids satisfaisants. Il semblerait donc plus judicieux de procéder à une construction plus globale de la fonction d'utilité sur X, c'est-à-dire en se préoccupant de plusieurs dimensions en même temps. C'est précisément ce qui est réalisé par la méthode par compensation, dont s'inspire d'ailleurs MADMAX. Néanmoins cette méthode présente aussi des inconvénients.

Le mécanisme de construction par compensation a en effet une grosse faille : si une erreur se produit lors de l'extraction d'un point (k), celle-ci va se propager tout au long du processus de construction. L'analyste n'aura donc pas déterminé, en définitive, la "vraie" fonction d'utilité du décideur. Or c'est exactement ce qui arrive en pratique. Plus précisément, les réponses du décideur aux questions posées par l'analyste sont entâchées d'au moins deux types d'erreurs :

- **les biais :** il a été prouvé expérimentalement que les réponses ont systématiquement des biais. Il semble en effet que, suivant les questions qui lui sont posées, le décideur modifie les poids w_i associés aux fonctions d'utilité sur chaque composant. Si l'on tient compte exactement des réponses du décideur, on ne construit alors plus la fonction d'utilité recherchée. Cet état de fait n'est d'ailleurs pas limité à la méthode par compensation : il semble que tous les mécanismes de construction

soient, dans une plus ou moins large mesure, concernés. Le lecteur intéressé pourra se reporter entre autres à Hershey, Kunreuther, et Schoemaker (1982), Johnson et Schkade (1989), Delquié (1993).

- **les imprécisions :** Une autre source d'erreur vient s'ajouter à la première : l'imprécision des réponses du décideur. Prenons un exemple simple : soit $X = \{\text{argent}\} \times \{\text{voiture}\}$. On demande au décideur d'estimer le prix d'une voiture x_2. Il nous répond 100000F, de telle sorte que (100000F,pas de voiture) $\sim$ (0F,x_2). Mais alors, on peut en déduire que (100001F,pas de voiture) $\succ$ (0F,x_2). Autrement dit, quelle que soit la petite somme d'argent que l'on rajoute à 100000F, le décideur devrait préférer l'argent à la voiture x_2. En pratique, nos préférences sont assez floues, et on aura encore une indifférence et non une préférence stricte.

Dans ces conditions, il est clair que la propagation des erreurs pendant la phase de construction va entraîner une déviation importante de la fonction obtenue par rapport à la "vraie" fonction d'utilité du décideur. C'est pourquoi il serait intéressant d'avoir à sa disposition une méthode de construction limitant la propagation des erreurs.

11.2 Un nouveau modèle de construction

La section précédente nous a permis de justifier l'emploi d'une méthode par compensation. Elle a, de plus, mis en évidence deux problèmes liés au principe de construction des algorithmes classiques par compensation :

- les erreurs dans les réponses du décideur, dues elles-mêmes à
  - des problèmes d'imprécision,
  - des problèmes de biais,
- le chaînage de ces erreurs.

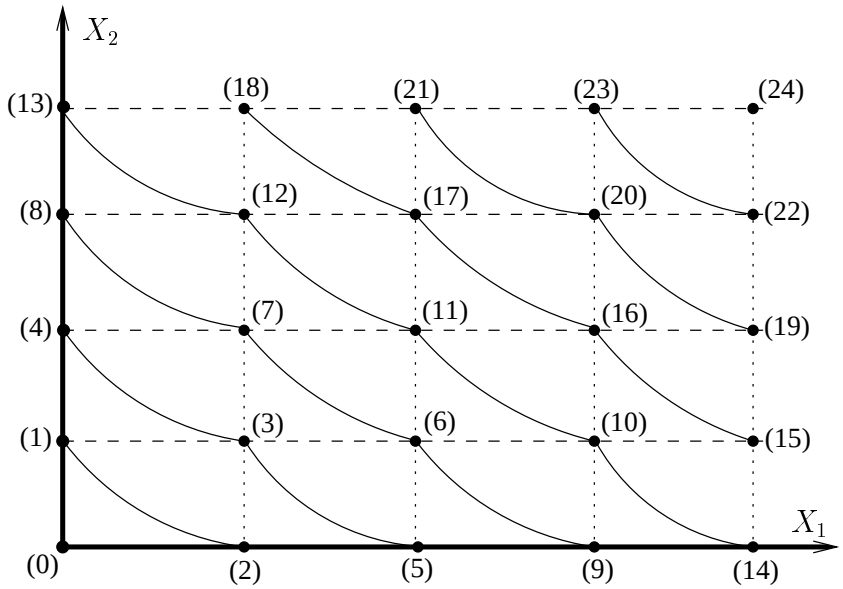
Le but de cette section est de proposer quelques solutions pour remédier à ces inconvénients ou, tout du moins, pour les atténuer. Plus exactement, nous allons réduire le chaînage des erreurs, et tenter de contrôler les problèmes dûs à l'imprécision et aux biais dans les réponses du décideur.

Cette section est divisée en 4 sous-sections. La première présente d'une manière tout à fait générale la méthode de construction. Celle-ci est réalisée en deux étapes bien distinctes. Chacune de ces étapes peut être effectuée de différentes manières et les sous-sections 11.2.2 et 11.2.3 présentent celles retenues dans MADMAX. Enfin, la quatrième sous-section fournit quelques indications sur la réduction des erreurs (erreurs de chaînage d'imprécisions et de biais) réalisée par MADMAX.

11.2.1 Présentation générale de la méthode

Reprenons l'algorithme par compensation défini dans la section précédente et, plus précisément, la figure 11.3. Pour ne pas compliquer inutilement la présentation, on

supposera que X_1 et X_2 vérifient la solvabilité non restreinte. Remarquons que, dans la figure 11.3 (reproduite ci-dessous), si l'on connaît l'image des points (6) à (14) par



la fonction d'utilité additive f, alors on connaît aussi l'image de tous les points de (0) à (24). Ceci suggère d'utiliser seulement deux courbes d'indifférence pour construire la fonction f, et de se servir des autres points (ici (0) à (5) et (15) à (24)) afin de tester des axiomes du type condition de Thomsen, condition de Reidemeister et autres axiomes de conservation d'échelle.

Supposons donc que l'on ait réussi à obtenir les deux courbes d'indifférence de la figure 11.6. Puisque toute transformée affine strictement positive d'une fonction d'utilité

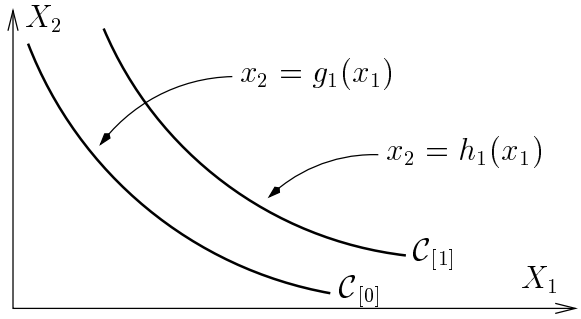


FIG. 11.6: Construction à partir de 2 courbes d'indifférence.

additive est encore une utilité additive, on peut supposer que les deux courbes ont pour images respectives par l'utilité additive f les constantes 0 et 1. Autrement dit, $\mathcal{C}_{[0]} = \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 : f_1(x_1) + f_2(x_2) = 0\}$ et $\mathcal{C}_{[1]} = \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 : f_1(x_1) + f_2(x_2) = 1\}$. D'après la figure 11.6, il semble que les deux courbes $\mathcal{C}_{[0]}$ et $\mathcal{C}_{[1]}$ puissent s'interpréter comme étant les graphes respectifs de deux fonctions $g_1 : X_1 \to X_2$ et $h_1 : X_1 \to X_2$. Ainsi, indépendamment de la fonction d'utilité f, on peut définir les

courbes $\mathcal{C}_{[0]}$ et $\mathcal{C}_{[1]}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{[0]} &= \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 : x_2 = g_1(x_1)\},\\ \mathcal{C}_{[1]} &= \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 : x_2 = h_1(x_1)\},\end{aligned}$$

où g_1 est une bijection. S'il n'y avait pas bijection, on pourrait toujours travailler dans l'espace $(X_1/\sim) \times (X_2/\sim)$, où cette propriété est garantie (parce qu'il y a solvabilité non restreinte).

Puisque $\mathcal{C}_{[0]}$ et $\mathcal{C}_{[1]}$ sont les courbes d'isopréférence de valeurs 0 et 1 par la fonction f, on a donc :

$$\begin{aligned}f_1(x_1) + f_2 \circ g_1(x_1) &= 0 \quad \forall x_1 \in X_1,\\ f_1(x_1) + f_2 \circ h_1(x_1) &= 1 \quad \forall x_1 \in X_1.\end{aligned}$$

g_1 étant une bijection, on peut effectuer le changement de variable suivant : $x_1 = g_1^{-1}(x_2)$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}&f_1(x_1) + f_2(x_2) = 0 && \forall x_1 \in X_1,\ x_2 = g_1(x_1)\\ &f_1(x_1) + f_2 \circ h_1 \circ g_1^{-1}(x_2) = 1 && \forall x_1 \in X_1,\ x_2 = g_1(x_1).\end{aligned}$$

En soustrayant la première égalité à la deuxième, on obtient donc :

$$f_2 \circ h_1 \circ g_1^{-1}(x_2) = 1 + f_2(x_2) \quad \forall x_2 \in X_2.$$

Autrement dit, connaissant les deux courbes d'indifférence $\mathcal{C}_{[0]}$ et $\mathcal{C}_{[1]}$, on peut déduire que f vérifie les propriétés suivantes :

$$f_2 \circ h_1 \circ g_1^{-1}(x_2) = 1 + f_2(x_2) \quad \forall x_2 \in X_2, \tag{11.1}$$

$$f_1(x_1) + f_2 \circ g_1(x_1) = 0 \quad \forall x_1 \in X_1. \tag{11.2}$$

On obtient ainsi la méthode de construction de fonctions d'utilités additives suivante :

Nouvelle méthode de construction : la méthode proposée consiste à effectuer les deux étapes suivantes :

- **Première étape :** Au moyen d'un processus conversationnel, l'analyste exhibe deux courbes d'indifférence. Ce processus est laissé au choix de l'analyste, la deuxième étape ne dépendant pas de ce choix.
- **Deuxième étape :** L'analyste utilise la formule (11.1) pour engendrer f_2, puis la formule (11.2) pour calculer f_1.

Voyons maintenant concrètement comment sont réalisées ces deux étapes dans MAD-MAX.

11.2.2 Précisions sur la première étape

Il est important de noter que la méthode décrite ci-dessus ne fait absolument aucune hypothèse quant à la manière dont on construit les deux courbes d'indifférence $\mathcal{C}_{[0]}$ et $\mathcal{C}_{[1]}$. D'un point de vue théorique, n'importe quelle méthode de construction devrait aboutir au même résultat. En pratique, à cause des erreurs d'imprécision et de biais dans les réponses du décideur, certaines méthodes sont meilleures que d'autres car elles réduisent les bruits parasites. MADMAX s'accomode de toutes ces méthodes mais, par défaut, il propose celle décrite ci-dessous.

Construction à partir de points de référence :

A partir de deux points de référence $(x_1^0, x_2^0) \in \mathcal{C}_{[0]}$ et $(x_1^1, x_2^1) \in \mathcal{C}_{[1]}$, on peut exhiber, grâce à des trade-offs, d'autres points des deux courbes d'indifférence. Pour ne pas propager d'erreur sur la construction de ces courbes, il suffit d'effectuer les trade-offs en prenant toujours pour référence (x_1^0, x_2^0) et (x_1^1, x_2^1).

Exemple 11.1 Supposons que $X = [0, 50] \times [0, 50]$. L'analyste a pris respectivement comme référence sur les courbes $\mathcal{C}_{[0]}$ et $\mathcal{C}_{[1]}$, les points $(30, 10)$ et $(30, 25)$.

Question de l'analyste	Réponse du décideur
1. Imaginez que vous soyez en $(30, 10)$. Par quelle augmentation de x_2 compenseriez-vous une perte de 10 unités de x_1 ?	Eh bien j'augmenterais x_2 d'environ 7.5 unités.
2. Supposez que vous soyez revenu en $(30, 10)$. Par quelle augmentation de x_2 compenseriez-vous maintenant une perte de 20 unités de x_1 ?	J'augmenterais x_2 d'environ 25 unités.
3. Vous êtes une fois de plus revenu en $(30, 10)$. Par quelle diminution de x_1 compenseriez-vous un gain de 30 unités de x_2 ?	Je suppose que je compenserais en enlevant 25 unités de x_1.
4. Considérons maintenant que vous n'êtes plus en $(30, 10)$, mais en $(30, 25)$. Comment compenseriez-vous l'ajout de 10 unités de x_1 ?	Je diminuerais x_2 de 7.5 unités.
5. Et si, à partir de $(30, 25)$, on augmentait x_2 de 5 unités ?	Je diminuerais x_1 de 5 unités.
6. Enfin, dernière question, combien d'unités de x_2 rajouteriez-vous à $(30, 25)$ pour compenser une perte de 10 unités de x_1 ?	Environ 10.

A partir des réponses du décideur, l'analyste peut reconstituer approximativement les deux courbes d'indifférence (cf. figure 11.7).

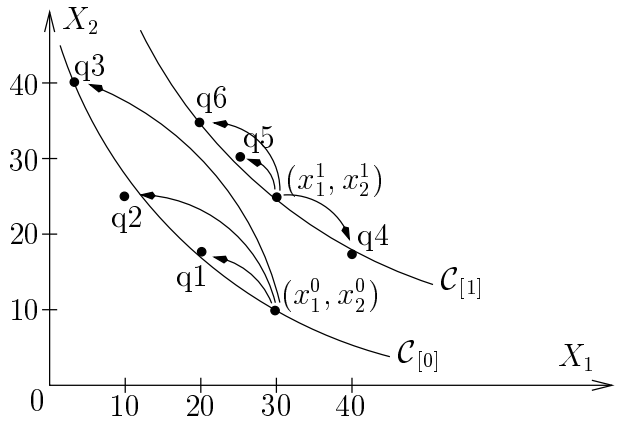


FIG. 11.7: Construction des courbes d'indifférence.

♦

Remarquons que l'analyste ne fait pas passer systématiquement les courbes d'indifférence par les réponses du décideur : on sait en effet de manière empirique que ces courbes doivent être assez lisses ; l'analyste va donc privilégier l'aspect lissé à la recherche de courbes passant impérativement par les réponses (de toute manière approximatives) du décideur.

L'avantage de poser les questions toujours par rapport aux deux mêmes points de référence est que l'on ne chaîne pas les erreurs dans les réponses du décideur : si une erreur a été introduite lors de la détermination du point q_1, celle-ci n'entraine aucune erreur sur la détermination du point q_2. L'inconvénient est que plus on s'éloigne du point de référence, plus on peut s'attendre à avoir des erreurs d'imprécision (par exemple, Welzel (1997) suppose que de telles erreurs sont proportionnelles à la distance entre le point cherché et le point de référence). C'est pourquoi, au delà d'une certaine distance, MADMAX doit changer de point de référence. Cela entraîne évidemment un chaînage d'erreur, mais on peut s'attendre à ce que celui-ci soit plus petit que si l'on prend toujours le dernier point calculé comme point de référence. Exemple : Soient $\succsim$ une relation de préférence sur un ensemble $X_1 \times X_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et (x_1^0, x_2^0) un point quelconque de $X_1 \times X_2$. Un algorithme de construction classique (voir figure 11.8.a) déterminerait un point q_1 indifférent à (x_1^0, x_2^0), puis un point q_2 indifférent à q_1, puis q_3 indifférent à q_2 et ainsi de suite. MADMAX quant à lui (voir figure 11.8.b) peut très bien déterminer les points q_1, q_2 et q_3 en fonction de (x_1^0, x_2^0), puis q_4 et q_5 en fonction de q_3. Ainsi, si dans l'algorithme classique l'erreur d'approximation lors de la détermination du point q_1 en fonction du point (x_1^0, x_2^0) est ϵ_1^c, si celle de q_2 en fonction de q_1 est ϵ_2^c, et plus généralement l'erreur de q_i par rapport à q_{i-1} est ϵ_i^c, alors les erreurs s'accumulent et l'erreur de q_3 par rapport au point d'origine (x_1^0, x_2^0) est $\epsilon_1^c + \epsilon_2^c + \epsilon_3^c$. Si les erreurs dans MADMAX sont notées ϵ_i^M, alors l'erreur sur le point q_3, c'est-à-dire ϵ_3^M, n'est pas due à un chaînage, mais simplement à une erreur d'imprécision ou de biais. Si la distance entre q_3 et (x_1^0, x_2^0) n'est pas trop grande, il y a fort à parier que l'égalité suivante sera

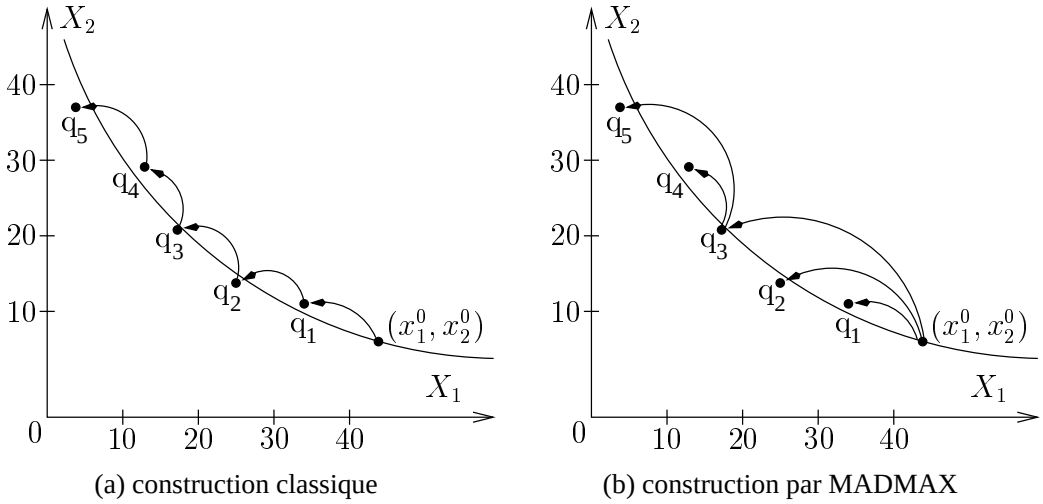


FIG. 11.8: Sélection des points de référence.

vérifiée :

$$\epsilon_1^c + \epsilon_2^c + \epsilon_3^c > \epsilon_3^M.$$

Autrement dit, lorsque la distance entre deux points q_i et q_{i+p} n'est pas trop élevée, la somme des imprécisions entre deux points consécutifs q_i, q_{i+1} est plus importante que l'imprécision dans la détermination de q_{i+p} directement par rapport à q_i. Ainsi, les points obtenus par MADMAX seront plus proches des points recherchés que ceux obtenus par l'algorithme classique.

La première étape peut donc être résumée de la manière suivante :

Première étape :

1. Prendre deux points de référence $(x_1^0, x_2^0) \in \mathcal{C}_{[0]}$ et $(x_1^1, x_2^1) \in \mathcal{C}_{[1]}$.
2. Poser des questions au décideur de manière à obtenir des points q_i indifférents aux deux points de référence.
3. Si la distance entre les derniers points de référence et les q_i sont supérieures à un certain seuil, changer de points de référence.
4. Tant que l'on n'a pas obtenu assez de points q_i, revenir en 2/.
5. Tracer les courbes passant par ou à proximité des points exhibés en 2/.

Calcul des seuils :

Evidemment, le calcul des seuils à partir desquels on doit changer les points de référence est important car il contribue à réduire les erreurs de construction des courbes d'indifférence et, par là même, celle des fonctions d'utilité additives. Ce calcul nécessiterait à lui seul une étude approfondie, qui n'a pu être menée jusqu'à maintenant.

Pour l'instant, on peut utiliser une heuristique. Pourquoi a-t-on besoin de changer de point de référence ? Parce que, lorsque la distance entre le point cherché, appelons-le q_i, et le dernier point de référence S est grande, les imprécisions dans les réponses sont élevées. Pour obtenir ce point q_i, MADMAX génère une suite de points sur une droite (comme les points A, B, C, D ci-dessous) et demande au décideur lequel des

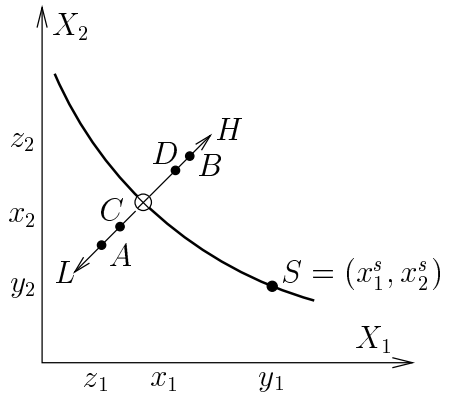


FIG. 11.9: Les questions posées au décideur.

deux points A (resp. B, C, D) ou S il préfère. Grâce à ses réponses, MADMAX peut déterminer un segment sur lequel tous les points paraissent indifférents au décideur (ici, par exemple, le segment $[CD]$). La longueur de ce segment nous fournit alors une mesure de l'imprécision dans les réponses du décideur. L'heuristique suivante pourrait donc nous permettre de changer les points de référence :

Changement de point de référence : Lorsque MADMAX cherche un point q_i, il détermine un segment $[CD]$ à l'intérieur duquel tous les points sont indifférents. Si la longueur de ce segment est supérieure à une certaine valeur, alors il prend le dernier point exhibé sur la courbe d'indifférence avant la recherche de q_i comme nouveau point de référence et recalcule q_i en fonction de ce nouveau point.

Par exemple, sur la figure 11.8.b, MADMAX a posé des questions pour déterminer q_1, q_2 et q_3 par rapport au point de référence (x_1^0, x_2^0). Les longueurs des segments obtenus ont été suffisamment petites pour que l'on garde (x_1^0, x_2^0) comme point de référence. Ensuite, on a essayé d'exhiber q_4 en fonction de (x_1^0, x_2^0). Mais, là, le segment avait une longueur dépassant le seuil autorisé. On a donc pris pour nouveau point de référence q_3 et on a recalculé q_4 par rapport à q_3.

Constitution des questions pour obtenir les points :

Bien que MADMAX supporte le X-Matching et le Y-Matching, il pose par défaut des questions de type Bi-Matching. C'est en effet une méthode récente (introduite dans Delquié (1996)) qui présente l'avantage de réduire à la fois les biais et les erreurs d'approximation. Elle repose sur la remarque suivante : "The weight of a stimulus attribute is enhanced by its compatibility with the response" (Slovic, Griffin, et Tversky (1990)).

Aussi l'attribut (ou encore le composant) sur l'axe des abscisses prend-il plus de poids en X-Matching qu'en Y-Matching, et réciproquement. Les courbes d'indifférence obtenues diffèrent donc suivant qu'on les a construites par X-Matching ou par Y-Matching. Or le choix de l'une de ces procédures plutôt que l'autre ne repose sur aucun critère normatif. Pour éliminer ce déséquilibre entre les composants, il faudrait donc poser des questions permettant d'ajuster simultanément les deux composants : on effectue donc un matching bidimensionnel, Bi-Matching en abrégé.

La figure 11.10 illustre son utilisation. Pour initialiser le mécanisme, on choisit un

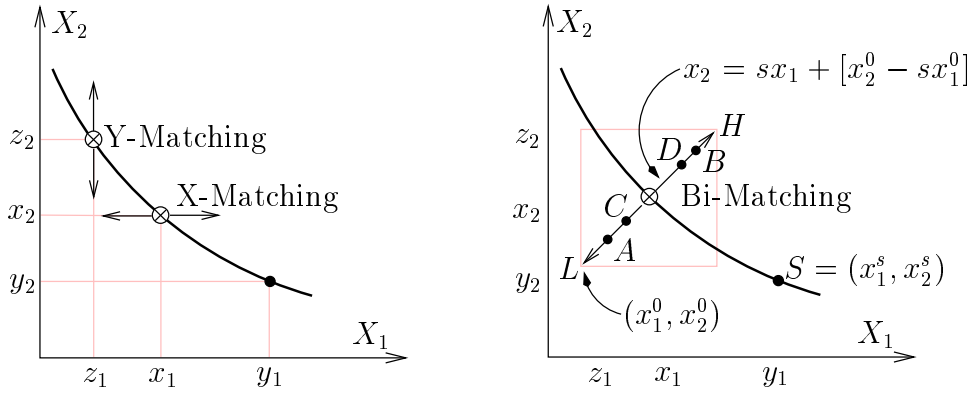


FIG. 11.10: Le Bi-Matching.

point $L = (x_1^0, x_2^0)$ et une pente s. On va alors chercher le point intersection de la droite LH (la droite de Bi-Matching) et de la courbe d'indifférence passant par S. Le principe est de proposer des points au décideur, qui répond s'il les préfère ou non à S. En fonction de sa réponse, on peut alors réduire l'intervalle d'étude sur la droite LH. Afin d'éviter des biais, les points proposés sont situés à environ $\frac{1}{4}$ de distance de l'une des bornes, celle-ci changeant à chaque question. La première borne est choisie au hasard. Par exemple, sur la figure 11.10, si le point A est le premier à être proposé au décideur, alors B est le deuxième, C le troisième, D le quatrième, et ainsi de suite...

Exemple 11.2 Soit $\succsim$ une relation de préférence sur $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Prenons une courbe d'indifférence quelconque de $\succsim$. Soit $S = (55, 15)$ un point quelconque sur cette courbe d'indifférence, et $L(5, 20)$ et $H = (45, 60)$ deux points de part et d'autre de la courbe d'indifférence (c'est-à-dire tels que $L \prec S \prec H$). En posant des questions au décideur, nous allons essayer de déterminer le point T se trouvant sur l'intersection de la droite LH et de la courbe d'indifférence passant par T (cf. figure 11.11).

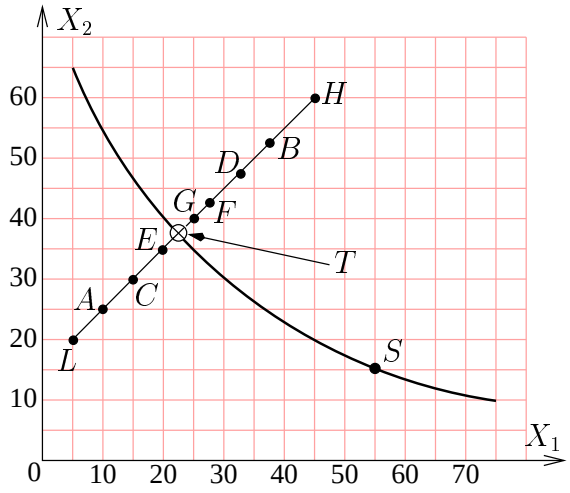


FIG. 11.11: Détermination du point T par bi-matching.

Question de l'analyste	Réponse du décideur
1. Vous préferez strictement $S = (55, 15)$ à $L = (5, 20)$, et $H = (45, 60)$ à S. Est-ce bien cela ?	Oui, tout à fait.
2. Est-ce que vous préférez $A = (10, 25)$ ou bien S ?	Je préfère S.
3. Est-ce que vous préférez $B = (37.5, 52.5)$ ou bien S ?	Je préfère B.
4. Est-ce que vous préférez $C = (15, 30)$ ou bien S ?	Je préfère S.
5. Est-ce que vous préférez $D = (32.5, 47.5)$ ou bien S ?	Je préfère D.
6. Est-ce que vous préférez $E = (20, 35)$ ou bien S ?	Je préfère S.
7. Est-ce que vous préférez $F = (27.5, 42.5)$ ou bien S ?	Je préfère F.
8. Est-ce que vous préférez $G = (25, 40)$ ou bien S ?	Je préfère G.

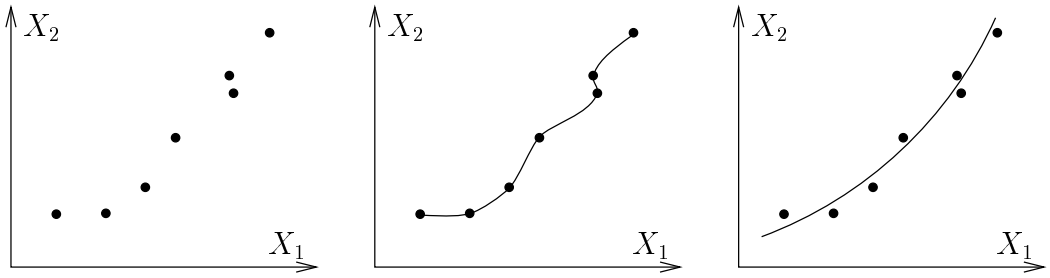
Au bout d'un moment, soit l'analyste a réussi à obtenir un seul point d'indifférence (ici le point T), soit il a obtenu un segment (du type $[E, G]$) sur lequel tous les points sont indifférents à S. Obtenir un tel segment va bien évidemment à l'encontre de la théorie des fonctions d'utilité additives, mais en pratique cela peut arriver à cause des erreurs d'imprécision dans les réponses du décideur. ♦

D'après les expériences de Delquié, ce type de questionnaire par bi-matching permet de réduire de manière significative à la fois certains biais et les erreurs d'imprécision. A propos de ces dernières, MADMAX effectue une autre réduction : par analyse de l'ensemble des réponses du décideur, comme décrit ci-dessous.

Construction des courbes à partir de points :

Je l'avais déjà évoqué, les courbes d'indifférence ainsi que les graphes des fonctions d'utilité sont en principe des courbes assez lisses (sauf en certains points particuliers : la frontière entre gains et pertes par exemple). Ainsi, lorsque le décideur a exhibé les points de la figure 11.12(a), il est plus probable que la courbe d'indifférence qu'il voulait

déterminer s'apparente à la figure 11.12(c) plutôt qu'à la figure 11.12(b), dans laquelle tous les points ont été reliés entre eux. Ceci suggère donc que les courbes d'indifférence



(a) Points répondus par le décideur

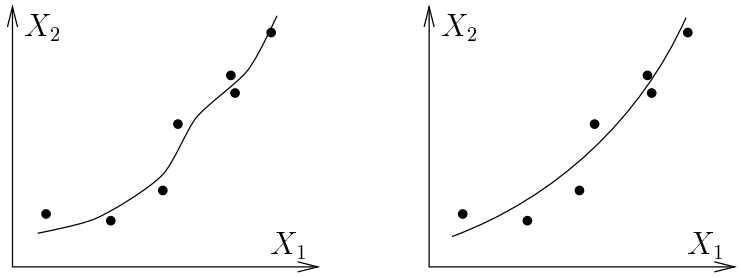
(b) Courbe passant par les points du décideur

(c) Approximation de la courbe d'indifférence du décideur

FIG. 11.12: Les points déterminés par le décideur et les courbes d'indifférence.

ne passent qu'approximativement autour des points exhibés par le décideur.

Une technique classique employée en CAO, ainsi que dans tous les logiciels de dessin sur ordinateur, pour tracer des courbes lissées passant près d'un nuage de points, est d'utiliser des polynômes par morceaux. C'est ce que l'on appelle dans le jargon informatique des Splines (cf. Foley et Van Dam (1982) et Newman et Sproull (1979) pour une introduction générale sur les graphismes sur ordinateur, ainsi que Rogers et Adams (1976) pour une étude générale sur la représentation de courbes). MADMAX utilise la technologie des Splines pour approximer courbes d'indifférence et fonctions d'utilité. Cependant, quelques précautions s'imposent : la figure 11.13(a) représente une Spline approximant les points déterminés par le décideur. A cause des erreurs d'imprécision, on



(a) Spline passant près des points du décideur

(b) Spline corrigée

FIG. 11.13: Précautions à prendre avec les Splines.

risque d'obtenir une courbe qui change de convexité/concavité relativement souvent, ce qui paraît peu conforme aux résultats expérimentaux qui, eux, révèleraient des courbes s'apparentant à celle de la figure 11.13(b).

Autrement dit, outre le fait que les courbes ne doivent passer qu'aux alentours des

points construits par le décideur, il faudrait contrôler, localement, la convexité de la courbe. Heureusement, comme nous le verrons dans la section suivante, les Splines se prêtent bien à cet exercice.

La méthode utilisée par MADMAX consiste donc à trouver une (ou l'unique) Spline passant le plus près possible des points du décideur, tout en vérifiant certaines propriétés de convexité/concavité. Plus précisément, MADMAX résoud le problème d'optimisation suivant :

> Trouver la Spline minimisant la somme des carrés des distances la séparant des points du décideur, sous contraintes locales de convexité/concavité.

Notons que l'on peut aussi utiliser ce mécanisme pour construire les graphes des fonctions d'utilité.

En fait, le choix d'utiliser les Splines plutôt qu'une autre représentation n'est pas arbitraire. Ces courbes ont en effet l'avantage d'être paramétriques $\mathcal{C} = \{(x_1(u), x_2(u)) : u \in U\}$; la symétrie ainsi engendrée entre x_1 et x_2 permet d'extraire aussi facilement x_2 sachant x_1 que x_1 sachant x_2. Par conséquent, si le graphe d'une fonction f est représenté par une Spline, on peut aisément calculer f^{-1}, ce qui est appréciable pour réaliser les opérations de la sous-section précédente. En outre, une petite astuce de calcul permet d'estimer les Splines utilisées par MADMAX en résolvant seulement un problème quadratique strictement convexe. Or de nombreux algorithmes et logiciels de Recherche Opérationnelle permettent de résoudre efficacement ce type de problème (Vanderbei (1992) par exemple). Les Splines paraissent donc être un bon choix pour représenter à la fois les courbes d'indifférence et les fonctions d'utilité.

Construction des courbes à partir de segments :

La construction des courbes d'indifférence lorsque l'on a à sa disposition des segments par lesquels elles devraient passer n'est pas fondamentalement différente de la construction dans le cas où l'analyste connaît des points à proximité de ces courbes. En effet, l'idée utilisée dans MADMAX est de calculer le milieu de chacun des segments et d'utiliser ces points pour tracer les courbes, comme le montre la figure 11.14.

11.2.3 Précisions sur la deuxième étape

Supposons que la première étape ait été réalisée et que l'on ait déterminé les deux courbes $\mathcal{C}_{[0]}$ et $\mathcal{C}_{[1]}$. Grâce à l'égalité (11.1), l'analyste peut calculer la fonction d'utilité f_2. En effet, sur la figure 11.15, si l'ordonnée de A est z_2, alors, puisque B a pour ordonnée z_2 et est situé sur la courbe d'équation $x_2 = g_1(x_1)$, on a forcément $B = (g_1^{-1}(z_2), z_2)$. De même, puisque C est situé sur la courbe d'équation $x_2 = h_1(x_1)$, $C = (g_1^{-1}(z_2), h_1 \circ g_1^{-1}(z_2))$. On sait que B appartient à $\mathcal{C}_{[0]}$, par conséquent $f(B) = 0$, et C appartient à $\mathcal{C}_{[1]}$, d'où $f(C) = 1$. Mais B et C sont sur la même verticale, donc

$$f(C) - f(B) = 1 \Leftrightarrow f_2(h_1 \circ g_1^{-1}(z_2)) - f_2(z_2) = 1.$$

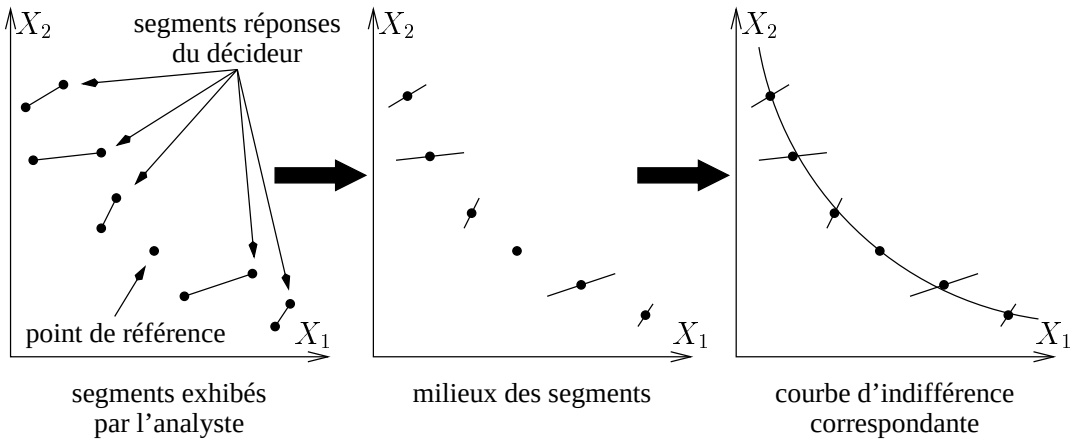


FIG. 11.14: Construction des courbes à partir de segments.

Maintenant, soient D et E les points sur le graphe de la fonction f_2 d'ordonnées respectives z_2 et $h_1 \circ g_1^{-1}(z_2)$. Alors, d'après l'équation ci-dessus, l'abscisse de E est égale à celle de D plus une unité, E se déduit donc de D par (11.1). Cette équation ne permet

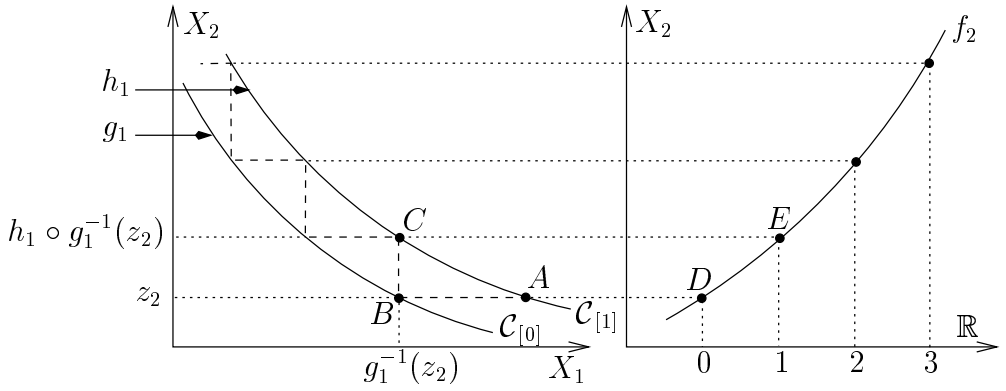


FIG. 11.15: Construction de f_2.

pas de définir f_2 toute entière, mais seulement un ensemble de points par lesquels est censée passer la fonction. Pour achever sa construction, il faut encore relier les points entre eux. Nous verrons précisément dans la section suivante comment parvenir à ce résultat, mais nous réaliserons cela exactement de la même manière que nous l'avions fait pour la première étape, c'est-à-dire avec des splines.

Notons que, sur la figure 11.15, f_2 est visiblement construite à partir d'un escalier s'appuyant sur les deux courbes d'indifférence $\mathcal{C}_{[0]}$ et $\mathcal{C}_{[1]}$. Où se trouve la réduction du chaînage d'erreur dans ce cas ? En fait, si les courbes d'indifférence sont suffisamment précises, les erreurs introduites sur chaque marche de l'escalier sont faibles et le chaînage des erreurs n'est pas trop important. C'est dans ce sens que la propagation des erreurs peut être atténuée. Or, c'est précisément ce qui se produit après la première étape : dans celle-ci, on a veillé à ce que les questions posées au décideur soient entâchées

le moins possible d'erreurs et on a corrigé les erreurs restantes en lissant les courbes d'indifférence. Ces dernières doivent donc être relativement précises.

Lorsque f_2 est calculée, l'analyste utilise (11.2) pour construire f_1, comme le montre la figure 11.16 : à chaque point de $\mathcal{C}_{[0]}$, disons $A = (x_1, x_2)$, est associé un point sur la courbe $-f_2$, ici B. Le point B a donc pour coordonnées $(-f_2(x_2), x_2)$. De ce point,

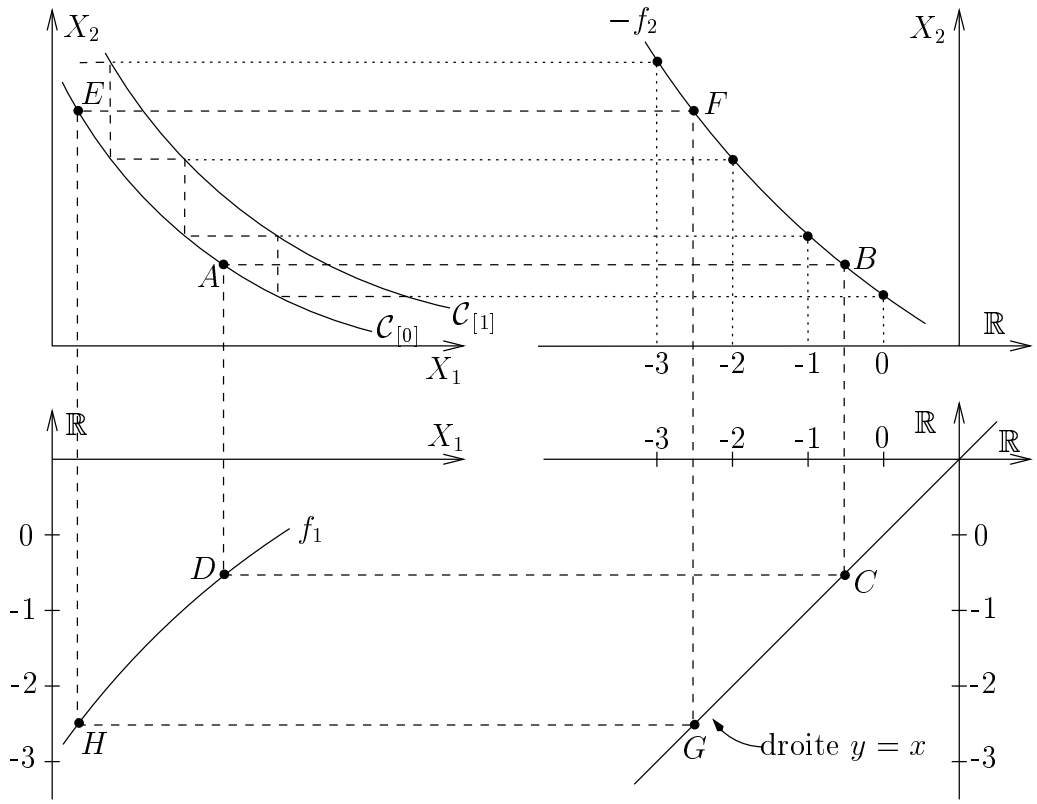


FIG. 11.16: Construction de f_1.

on déduit le point C sur la droite $y = x$, de coordonnées $(-f_2(x_2), -f_2(x_2))$. Enfin, on obtient le point D à l'intersection de la droite verticale passant par A et de la droite horizontale passant par C. Or la droite verticale passant par A correspond à l'ensemble des points d'abscisse x_1 puisque x_1 est l'abscisse de A. De plus, la droite horizontale passant par C correspond à l'ensemble des points d'ordonnée $-f_2(x_2)$. Par conséquent, D est le point de coordonnées $(x_1, -f_2(x_2))$. Mais rappelons-nous que $A \in \mathcal{C}_{[0]}$, de telle sorte que $f_1(x_1) + f_2(x_2) = 0$, ou encore $f_1(x_1) = -f_2(x_2)$. Par conséquent, D est le point de coodonnées $(x_1, f_1(x_1))$. En répétant ce processus avec tous les points de la courbe $\mathcal{C}_{[0]}$, on obtient l'ensemble de la fonction f_1. Par exemple, en partant du point E de coordonnées (y_1, y_2), on obtient le point H de coordonnées $(y_1, f_1(y_1))$.

Lorsque X_1 et X_2 vérifient seulement la solvabilité restreinte, pour couvrir $X_1 \times X_2$, on peut réitérer le mécanisme ci-dessus avec plus de deux courbes d'indifférence, comme le montre la figure 11.17. On commence par déterminer les courbes $\mathcal{C}_{[0]}$ et $\mathcal{C}_{[1]}$, ce qui revient à générer f_1 et f_2 sur l'espace contenu dans le rectangle en pointillés à gauche.

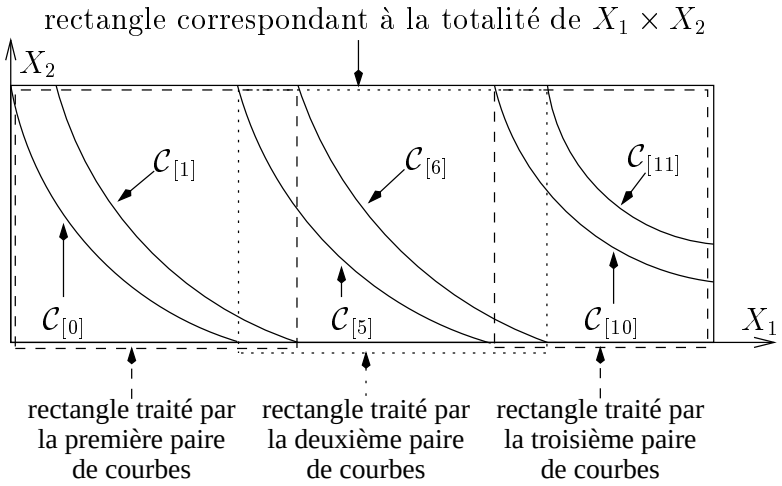


FIG. 11.17: Prise en compte de la totalité de $X_1 \times X_2$.

Or ce rectangle ne correspond pas à tout l'espace : on a bien généré f_2 sur tout son ensemble de définition, mais pas f_1. On sélectionne donc deux autres courbes (ici $\mathcal{C}_{[5]}$ et $\mathcal{C}_{[6]}$ afin d'étendre la définition de f_1, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait défini f_1 sur la totalité de X_1. Ce type de construction rappellera étrangement au lecteur la technique utilisée au chapitre 7 pour prouver qu'une utilité additive existait.

Cette méthode de construction est assez souple car on n'a jamais rien imposé quant au protocole permettant d'obtenir les points du décideur sur les deux courbes d'indifférence. En particulier, ce mécanisme supporte le X-Matching, le Y-Matching, le Bi-Matching, ainsi que toute combinaison de ces méthodes.

11.2.4 Réduction du bruit

MADMAX possède trois mécanismes pour réduire les erreurs dans les réponses du décideur :

1. L'utilisation du bi-matching plutôt que du X-matching et/ou du Y-matching ;
2. La diminution du nombre de points de référence pour la construction des points sur les courbes d'indifférence pendant la première étape ;
3. L'approximation et le lissage des courbes d'indifférence et des graphes des fonctions d'utilité par des splines.

Pour mesurer la réduction du bruit réalisée par l'utilisation du bi-matching, le lecteur se reportera à Delquié (1996), qui étudie de manière très approfondie les différents biais engendrés par le X-matching, le Y-matching et le bi-matching. Cet article montre que les réponses du décideurs sont à la fois plus précises et moins biaisées dans le bi-matching que dans les autres méthodes de construction.

La première étape de construction consiste, rappelons-le, à déterminer deux courbes d'indifférence. Pour cela, on commence par déterminer des points sur ces courbes, puis

on trace des courbes passant autour de ces points. Il aurait été intéressant de pouvoir donner un modèle des erreurs dans les réponses du décideur afin de comparer d'une manière théorique MADMAX par rapport aux méthodes classiques. Malheureusement, dans la littérature, si les articles montrent bien l'existence d'erreurs (de biais et d'approximation), aucun ne s'engage en fournissant un modèle des erreurs. Cela est sans doute dû à la complexité que devrait avoir un tel modèle, comme l'indique Delquié (1993) : "The pattern of error-induced biases is in fact quite complex and can be shown to be determined by five factors : model (multiplicative (risky) vs. additive (riskless)), domain (gain vs. losses), test configuration (change in stimulus vs. no change), response sequence ($X - P$ vs. $P - X$), and function shape (concave vs. convex)". Pour l'instant, aucun modèle théorique ne m'a paru suffisamment proche de la réalité pour pouvoir effectuer une comparaison théorique réaliste entre MADMAX et les méthodes classiques. Seules des études expérimentales pourraient confirmer ou infirmer l'apport de MADMAX.

Enfin, le fait que les courbes générées par MADMAX soient lissées me paraît donner des résultats plus proches de la réalité que l'utilisation de fonctions affines par morceaux comme le font les méthodes classiques : en effet, dans tous les articles sur la construction de fonctions d'utilité, on nous montre des courbes toujours très lisses. Alors pourquoi, lorsque l'on essaye de construire des courbes d'indifférence et des fonctions d'utilité, devrait-on obtenir des courbes non lisses ? Là encore, des études expérimentales devraient être menées pour estimer le gain de ces lissages.

11.3 Approximation des courbes par B-Splines

Lorsque MADMAX possède un ensemble de points sur (ou autour) d'une courbe d'indifférence, il essaye de construire une courbe passant approximativement par ces points. Pour cela, il utilise des B-Splines.

L'univers des Splines est très riche et toujours en expansion (cf. Bartels, Beatty et Barsky (1987)) mais nous allons nous contenter dans ce mémoire des B-Splines cubiques uniformes (cf. de Boor (1978)), qui sont des courbes suffisamment souples pour représenter convenablement courbes d'indifférence et fonctions d'utilité.

Afin d'aider le lecteur peu familiarisé avec les B-Splines à comprendre comment MADMAX manipule ces dernières, je propose dans la sous-section suivante une petite introduction aux B-Splines cubiques uniformes. Celle-ci suit fortement la présentation très pédagogique de Bartels, Beatty et Barsky (1987). On se limitera, pour l'exposé, à des Splines définies sur des espaces de dimension 2.

11.3.1 Introduction aux B-Splines

Les B-Splines sont une famille de courbes paramétriques $(x_1(u), x_2(u))$ telles que $x_1(u)$ et $x_2(u)$ sont composées de morceaux de polynômes. Suivant le degré du polynôme, on parlera de B-Spline linéaire (degré 1), quadratique (degré 2), cubique (degré 3)...

Afin de présenter simplement les cubiques, nous allons commencer par étudier les B-Splines linéaires, plus simples à appréhender.

B-Splines linéaires

Considérons la courbe $\mathcal{C}$ de la figure 11.18, composée de segments de droites reliant entre eux les points V^{i-2}, V^{i-1}, V^i, V^{i+1} et V^{i+2}. La courbe $\mathcal{C}$ est la réunion de $\mathcal{C}^{i-1} =$

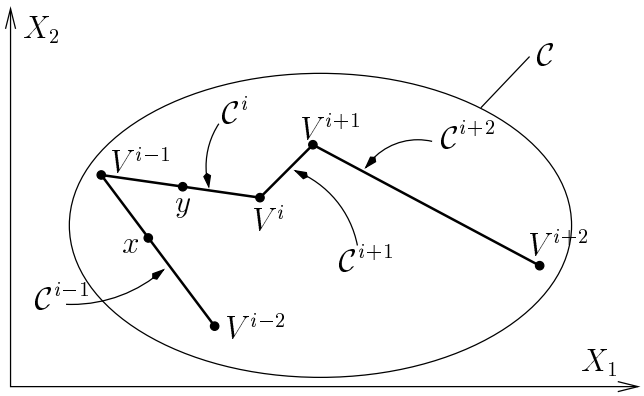


FIG. 11.18: Une courbe linéaire par morceaux.

$[V^{i-2}, V^{i-1}]$, $\mathcal{C}^i = [V^{i-1}, V^i]$, $\mathcal{C}^{i+1} = [V^i, V^{i+1}]$ et $\mathcal{C}^{i+2} = [V^{i+1}, V^{i+2}]$. Ainsi, un point $x \in \mathcal{C}^{i-1}$ peut s'exprimer sous la forme

$$x = (1-\overline{u})V^{i-2} + \overline{u}V^{i-1}, \text{ où } \overline{u} \in [0,1].$$

De même,

$$\forall y \in \mathcal{C}^i,\ \exists\, \overline{u}' \in [0,1] \text{ tel que } y = (1-\overline{u}')V^{i-1} + \overline{u}'V^i.$$

Par conséquent, on peut définir les courbes $\mathcal{C}^{i-1}$, $\mathcal{C}^i$, $\mathcal{C}^{i+1}$ et $\mathcal{C}^{i+2}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}^{i-1} &= \{(x_1^{i-1}(\overline{u}), x_2^{i-1}(\overline{u})) : \overline{u} \in [0,1],\ x_1^{i-1}(\overline{u}) = (1-\overline{u})V_1^{i-2} + \overline{u}V_1^{i-1} \text{ et} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_2^{i-1}(\overline{u}) = (1-\overline{u})V_2^{i-2} + \overline{u}V_2^{i-1}\}, \\
\mathcal{C}^{i} &= \{(x_1^{i}(\overline{u}), x_2^{i}(\overline{u})) : \overline{u} \in [0,1],\ x_1^{i}(\overline{u}) = (1-\overline{u})V_1^{i-1} + \overline{u}V_1^{i} \text{ et} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_2^{i}(\overline{u}) = (1-\overline{u})V_2^{i-1} + \overline{u}V_2^{i}\}, \\
\mathcal{C}^{i+1} &= \{(x_1^{i+1}(\overline{u}), x_2^{i+1}(\overline{u})) : \overline{u} \in [0,1],\ x_1^{i+1}(\overline{u}) = (1-\overline{u})V_1^{i} + \overline{u}V_1^{i+1} \text{ et} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_2^{i+1}(\overline{u}) = (1-\overline{u})V_2^{i} + \overline{u}V_2^{i+1}\}, \\
\mathcal{C}^{i+2} &= \{(x_1^{i+2}(\overline{u}), x_2^{i+2}(\overline{u})) : \overline{u} \in [0,1],\ x_1^{i+2}(\overline{u}) = (1-\overline{u})V_1^{i+1} + \overline{u}V_1^{i+2} \text{ et} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_2^{i+2}(\overline{u}) = (1-\overline{u})V_2^{i+1} + \overline{u}V_2^{i+2}\}.
\end{aligned} \tag{11.3}$$

Partons du point V^{i-2}. D'après les formules ci-dessus, le paramètre $\overline{u}$ vaut 0. Faisons le varier de cette valeur jusqu'à 1. On remonte alors la courbe de V^{i-2} à V^{i-1}. Il serait maintenant intéressant de pouvoir continuer le parcours de la courbe $\mathcal{C}$ vers V^i en continuant à faire varier continuement $\overline{u}$, par exemple de 1 jusqu'à 2. Or les formules ci-dessus ne le permettent pas puisqu'à chaque fois que l'on change de segment $\mathcal{C}^k$, on

repart de $\overline{u} = 0$. Ceci suggère donc d'introduire de nouvelles variables u^k telles que

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} = \{(x_1(u), x_2(u)) &\text{ tels que} \\
&\text{si } u \in [u^{i-1}, u^i], \quad (x_1(u), x_2(u)) = \left(x_1^{i-1}\left(\tfrac{u-u^{i-1}}{u^i-u^{i-1}}\right), x_2^{i-1}\left(\tfrac{u-u^{i-1}}{u^i-u^{i-1}}\right)\right), \\
&\text{si } u \in [u^i, u^{i+1}], \quad (x_1(u), x_2(u)) = \left(x_1^{i}\left(\tfrac{u-u^{i}}{u^{i+1}-u^{i}}\right), x_2^{i}\left(\tfrac{u-u^{i}}{u^{i+1}-u^{i}}\right)\right), \\
&\text{si } u \in [u^{i+1}, u^{i+2}], \ (x_1(u), x_2(u)) = \left(x_1^{i+1}\left(\tfrac{u-u^{i+1}}{u^{i+2}-u^{i+1}}\right), x_2^{i+1}\left(\tfrac{u-u^{i+1}}{u^{i+2}-u^{i+1}}\right)\right), \\
&\text{si } u \in [u^{i+2}, u^{i+3}], \ (x_1(u), x_2(u)) = \left(x_1^{i+2}\left(\tfrac{u-u^{i+2}}{u^{i+3}-u^{i+2}}\right), x_2^{i+2}\left(\tfrac{u-u^{i+2}}{u^{i+3}-u^{i+2}}\right)\right)\Big\}.
\end{aligned} \tag{11.4}$$

Grâce à ces nouvelles variables, si l'on fait varier u de u^{i-1} jusqu'à u^{i+3}, on se déplace sur la courbe $\mathcal{C}$ du point V^{i-2} jusqu'à V^{i+2}. Remarquons que si $u \in [u^k, u^{k+1}]$, le $\overline{u}$ correspondant est égal à $\dfrac{u-u^k}{u^{k+1}-u^k}$ et appartient bien à l'intervalle $[0, 1]$.

Il est clair d'après les formules (11.3) et (11.4) que si l'on déplace le sommet V^i, cela n'affecte que les courbes $\mathcal{C}^i$ et $\mathcal{C}^{i+1}$. Autrement dit, chaque V^i contrôle localement la courbe. C'est ce que l'on appelle un point de contrôle de la Spline. Représentons maintenant la courbe $\mathcal{C}$ de manière à isoler l'influence individuelle des V^k : sur la figure 11.19, j'ai dessiné la courbe $x_2(u)$, c'est-à-dire les variations du deuxième composant des points de $\mathcal{C}$ en fonction de $u \in [u^{i-1}, u^{i+3}]$. La courbe en pointillés représente la contribution

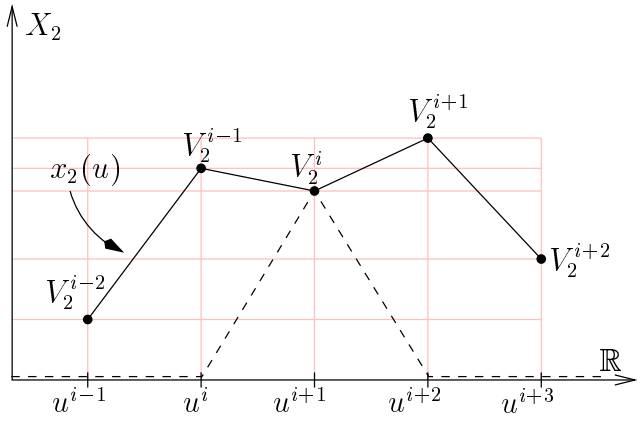


FIG. 11.19: Contribution de V_2^i à la courbe $x_2(u)$.

de V_2^i à $x_2(u)$. Sur la figure 11.20, j'ai indiqué la contribution de tous les V_2^k à $x_2(u)$. On remarque que toutes ces contributions ont le même aspect : avant une certaine valeur de u et après une autre valeur, elles se confondent avec l'axe des abscisses ; entre ces deux valeurs, elles ont toutes la forme d'un triangle. Si les V_2^k étaient tous à la même hauteur, disons une hauteur de 1 unité, toutes les contributions se déduiraient les unes des autres par translation (comme le montre la figure 11.21), et seraient égales aux fonctions :

$$B^i(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < u^i \text{ ou } u \geq u^{i+2}, \\ \dfrac{u-u^i}{u^{i+1}-u^i} & \text{si } u^i \leq u < u^{i+1}, \\ \dfrac{u^{i+2}-u}{u^{i+2}-u^{i+1}} & \text{si } u^{i+1} \leq u < u^{i+2}. \end{cases}$$

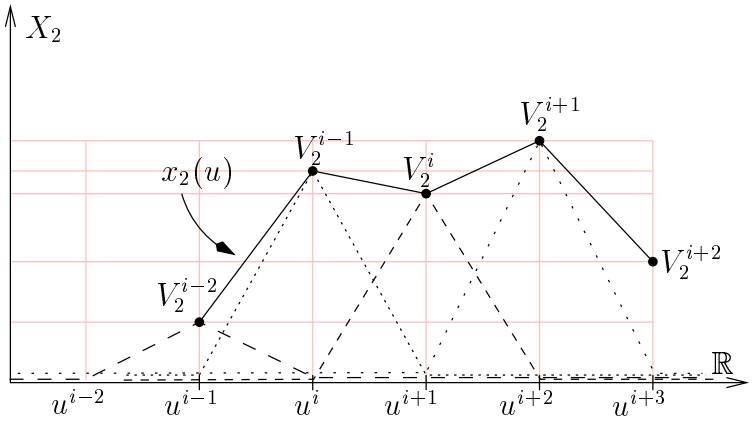


FIG. 11.20: Contribution de tous les V_2^k à la courbe $x_2(u)$.

Ces fonctions étant toutes identiques, on les appelle "bases" de la B-Spline. Les contri-

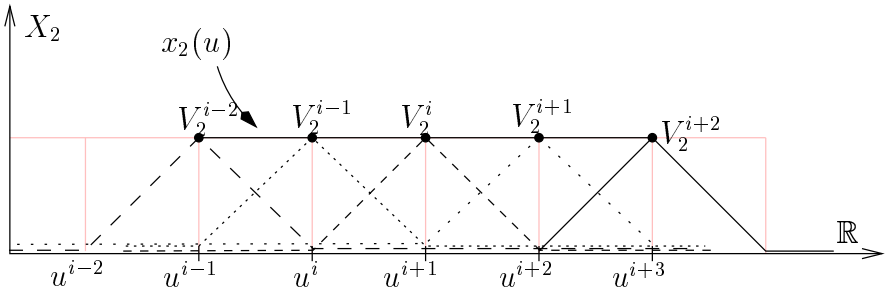


FIG. 11.21: Les bases de la B-Spline.

butions des points V^k sont donc des bases multipliées par un facteur d'échelle (égal à V_2^k). Ainsi,

$$x_2(u) = \sum_i V_2^i B^i(u).$$

Il est clair que l'on peut effectuer la même démarche avec le premier composant. On obtient alors une représentation paramétrique de la courbe $\mathcal{C}$:

$$x(u) = \sum_i V^i B^i(u) \ ;$$

c'est ce que l'on appelle une B-Spline. Puisque les B^i sont linéaires par morceaux, on dit que la B-Spline est linéaire. Mais le même principe s'applique lorsque les B^i sont des polynômes par morceaux de degré quelconque.

B-Splines cubiques uniformes

Evidemment, les B-Splines linéaires étant composées de segments de droite, elles ne permettent pas d'obtenir des courbes très lisses ; pour parvenir à ce résultat, il faut donc changer de bases. Celles que nous avons adoptées sont composées de polynômes

de degré 3. Autrement dit, la courbe $\mathcal{C}$ est la réunion de courbes $\mathcal{C}^i$, $i \in I$, où chaque courbe $\mathcal{C}^i$ est décrite par :

$$\mathcal{C}^i = \{(x_1^i(\overline{u}), x_2^i(\overline{u})) : \overline{u} \in [0,1],\ x_1^i(\overline{u}) \text{ et } x_2^i(\overline{u}) \text{ sont des polynômes de degré 3 en } \overline{u}\}.$$

Afin que les courbes soient lisses, il faut faire en sorte que les dérivées première et seconde des fonctions $x_1(u)$ et $x_2(u)$ soient continues pour tout u (on dit qu'elles sont de classe C^2). Comme les polynômes sont déjà continuement dérivables, il suffit de faire en sorte que la fin de la courbe $\mathcal{C}^{i-1}$ coïncide avec le début de la courbe $\mathcal{C}^i$, et qu'en ce point, les dérivées première et seconde à droite sur $\mathcal{C}^{i-1}$ et à gauche sur $\mathcal{C}^i$ coïncident elles aussi. En termes plus mathématiques, cela revient à imposer les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
x_1^{i-1}(\overline{u}=1) &= x_1^i(\overline{u}=0) && \text{et} && x_2^{i-1}(\overline{u}=1) = x_2^i(\overline{u}=0),\\
\left(\frac{dx_1^{i-1}}{d\overline{u}}\right)(\overline{u}=1) &= \left(\frac{dx_1^i}{d\overline{u}}\right)(\overline{u}=0) && \text{et} && \left(\frac{dx_2^{i-1}}{d\overline{u}}\right)(\overline{u}=1) = \left(\frac{dx_2^i}{d\overline{u}}\right)(\overline{u}=0),\\
\left(\frac{d^2x_1^{i-1}}{d\overline{u}^2}\right)(\overline{u}=1) &= \left(\frac{d^2x_1^i}{d\overline{u}^2}\right)(\overline{u}=0) && \text{et} && \left(\frac{d^2x_2^{i-1}}{d\overline{u}^2}\right)(\overline{u}=1) = \left(\frac{d^2x_2^i}{d\overline{u}^2}\right)(\overline{u}=0).
\end{aligned} \tag{11.5}$$

De par la définition des fonctions $x_1^i(\overline{u})$ et $x_2^i(\overline{u})$, cela revient en fait à dire que les bases des B-Splines cubiques doivent, elles-même, être de classe C^2. Contrairement aux B-Splines linéaires, les cubiques nécessitent des bases s'étendant sur 4 segments $[u^i, u^{i+1}]$ consécutifs. En dehors de ces quatre segments, elles s'annulent. Leur aspect est illustré par la figure 11.22. Comme chacun des morceaux, $b^{-0}(u)$, $b^{-1}(u)$, $b^{-2}(u)$, et $b^{-3}(u)$ est

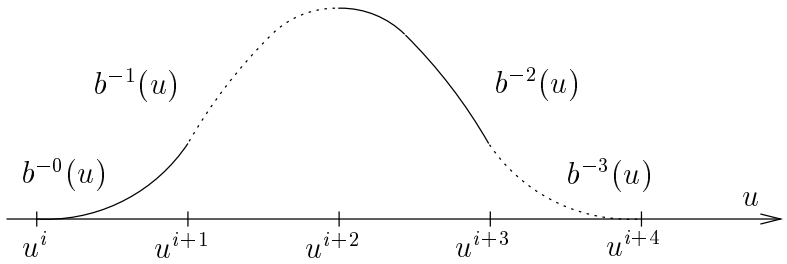


FIG. 11.22: Les bases des B-Splines cubiques uniformes.

un polynôme de degré 3 en u, $a_j + b_j u + c_j u^2 + d_j u^3$, $j \in \{-0, -1, -2, -3\}$, la base des B-Splines cubiques uniformes est définie de manière unique grâce à 16 coefficients (4 a_j, 4 b_j, 4 c_j et 4 d_j). Les égalités (11.5) et le fait qu'en dehors du segment $[u^i, u^{i+4}]$ les bases doivent s'annuler, impliquent 15 équations. Il reste à en définir une dernière pour avoir autant d'équations que d'inconnues. Celle qui est habituellement imposée est la suivante :

$$b^{-0}(0) + b^{-1}(0) + b^{-2}(0) + b^{-3}(0) = 1.$$

Les 16 équations ainsi obtenues forment alors un système linéaire en a_j, b_j, c_j, d_j, ne

possédant qu'une seule solution : pour tout $\overline{u} \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} b^{-0}(\overline{u}) &= \frac{1}{6}\overline{u}^3 \\ b^{-1}(\overline{u}) &= \frac{1}{6}(1+3\overline{u}+3\overline{u}^2-3\overline{u}^3) \\ b^{-2}(\overline{u}) &= \frac{1}{6}(4-6\overline{u}^2+3\overline{u}^3) \\ b^{-3}(\overline{u}) &= \frac{1}{6}(1-3\overline{u}+3\overline{u}^2-\overline{u}^3). \end{aligned} \tag{11.6}$$

Les bases des B-Splines cubiques uniformes sont donc définies de la manière suivante :

$$B^i(u) = \begin{cases} b^{-0}\left(\frac{u-u^i}{u^{i+1}-u^i}\right) & \text{si } u \in [u^i, u^{i+1}[\\ b^{-1}\left(\frac{u-u^{i+1}}{u^{i+2}-u^{i+1}}\right) & \text{si } u \in [u^{i+1}, u^{i+2}[\\ b^{-2}\left(\frac{u-u^{i+2}}{u^{i+3}-u^{i+2}}\right) & \text{si } u \in [u^{i+2}, u^{i+3}[\\ b^{-3}\left(\frac{u-u^{i+3}}{u^{i+4}-u^{i+3}}\right) & \text{si } u \in [u^{i+3}, u^{i+4}[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{11.7}$$

Une B-Spline cubique uniforme est donc une courbe $\mathcal{C}$ définie par

$$\mathcal{C} = \left\{ x(u) : x(u) = \sum_i V^i B^i(u) \right\}, \text{ où}$$

$B^i(u)$ est déterminée par l'équation (11.7). De plus, puisque les $B^i(u)$ sont non nulles sur seulement 4 intervalles $[u^i, u^{i+1}[$, $\mathcal{C}$ est la réunion de courbes $\mathcal{C}^i$ définies par

$$\mathcal{C}^i = \left\{ x^i(\overline{u}) : x^i(\overline{u}) = \sum_{r=-3}^{0} V^{i+r} b^{-r}(\overline{u}) \right\}. \tag{11.8}$$

11.3.2 Utilisation des B-Splines dans MADMAX

Nous avons vu que l'une des tâches principales que MADMAX doit réaliser consiste à construire des Splines passant le plus près possible des points déterminés par le décideur, et respectant quelques propriétés locales de convexité/concavité. Celles-ci sont en fait des B-Splines cubiques uniformes. Puisque leurs bases sont déterminées de manière unique (cf. les équations (11.6) et (11.7)), cela revient donc à résoudre le problème suivant :

> Chercher un ensemble de points de contrôle tel que la somme des carrés des distances séparant la B-Spline cubique uniforme correspondante des points du décideur est minimale, et tel que cette B-Spline vérifie des contraintes locales de convexité/concavité.

La prise en compte de ces contraintes peut être problématique car, comme on peut le voir sur la figure 11.22, les bases des B-Splines cubiques uniformes ont des parties

strictement convexes et des parties strictement concaves. Ainsi, il se peut qu'entre deux points de contrôle, la B-Spline change de convexité/concavité. Par conséquent, dans l'absolu, il faudrait tester l'allure des Splines en chacun de leurs points. Il est évident qu'une telle opération serait trop coûteuse en temps de calcul et doit donc être rejetée. Comment faire dans ce cas pour tester simplement la convexité/concavité locale des courbes ? Eh bien une petite astuce de calcul va nous permettre de déduire leur aspect en n'importe quel point uniquement en connaissant la convexité/concavité aux extrémités des courbes $\mathcal{C}^i$: considérons un ensemble $\{V^i, i \in I\}$ de points de contrôle, I étant un ensemble d'entiers consécutifs. La B-Spline correspondante, $\mathcal{C}$, est constituée d'un ensemble de courbes $\mathcal{C}^i$ définies par (11.8). En dérivant cette équation par rapport à $\overline{u}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{dx^i(\overline{u})}{d\overline{u}} &= \frac{1}{6}\left[(-3+6\overline{u}-3\overline{u}^2)V^{i-3}+(-12\overline{u}+9\overline{u}^2)V^{i-2}\right.\\ &\quad \left.+\ (3+6\overline{u}-9\overline{u}^2)V^{i-1}+(3\overline{u}^2)V^i\right].\end{aligned} \tag{11.9}$$

En redérivant à nouveau par rapport à $\overline{u}$, on obtient :

$$\frac{d^2x^i(\overline{u})}{d\overline{u}^2} = (1-\overline{u})V^{i-3}+(-2+3\overline{u})V^{i-2}+(1-3\overline{u})V^{i-1}+(2\overline{u})V^i. \tag{11.10}$$

Or $x^i(\overline{u}) = (x_1^i(\overline{u}), x_2^i(\overline{u}))$, $\mathcal{C}^i = \{x^i(\overline{u}) : \overline{u} \in [0,1]\}$ et la convexité/concavité de la courbe $\mathcal{C}^i$ est déterminée par

$$\frac{d^2x_2^i(\overline{u})}{dx_1^i(\overline{u})^2}.$$

Il n'est pas très difficile de montrer que

$$\frac{d^2x_2^i(\overline{u})}{dx_1^i(\overline{u})^2} = \frac{\dfrac{d^2x_2^i(\overline{u})}{d\overline{u}^2}\times\dfrac{dx_1^i(\overline{u})}{d\overline{u}} - \dfrac{d^2x_1^i(\overline{u})}{d\overline{u}^2}\times\dfrac{dx_2^i(\overline{u})}{d\overline{u}}}{\left[\dfrac{dx_1^i(\overline{u})}{d\overline{u}}\right]^3}.$$

Puisque les B-Splines sont des courbes continues, pour contrôler leurs changements de convexité/concavité, il suffit de contrôler leurs points d'inflexion, ce qui revient à rechercher pour quelles valeurs de $\overline{u}$, l'égalité suivante est vérifiée :

$$\frac{d^2x_2^i(\overline{u})}{d\overline{u}^2}\times\frac{dx_1^i(\overline{u})}{d\overline{u}} - \frac{d^2x_1^i(\overline{u})}{d\overline{u}^2}\times\frac{dx_2^i(\overline{u})}{d\overline{u}} = 0.$$

En utilisant les équations (11.9) et (11.10), on peut montrer que l'égalité ci-dessus

revient à résoudre l'équation suivante du deuxième degré en $\overline{u}$:

$$\begin{aligned}
&36\left[\left(V_2^{i-2}-V_2^{i-1}\right)V_1^{i-3}+\left(V_2^{i-1}-V_2^{i-3}\right)V_1^{i-2}+\left(V_2^{i-3}-V_2^{i-2}\right)V_1^{i-1}\right]\\
&+18\left[\begin{array}{l}\left(-3V_2^{i-2}+4V_2^{i-1}-V_2^{i}\right)V_1^{i-3}+3\left(V_2^{i-3}-V_2^{i-1}\right)V_1^{i-2}\\+\left(-4V_2^{i-3}+3V_2^{i-2}+V_2^{i}\right)V_1^{i-1}+\left(V_2^{i-3}-V_2^{i-1}\right)V_1^{i}\end{array}\right]\overline{u}\\
&+18\left[\begin{array}{l}\left(V_2^{i-2}-2V_2^{i-1}+V_2^{i}\right)V_1^{i-3}-\left(V_2^{i-3}-3V_2^{i-1}+2V_2^{i}\right)V_1^{i-2}\\+\left(2V_2^{i-3}-3V_2^{i-2}+V_2^{i}\right)V_1^{i-1}-\left(V_2^{i-3}-2V_2^{i-2}+V_2^{i-1}\right)V_1^{i}\end{array}\right]\overline{u}^2=0.
\end{aligned} \tag{11.11}$$

Afin de résoudre cette équation, posons

$$V_1^{i-2}=V_1^{i-3}+\alpha \qquad V_1^{i-1}=V_1^{i-3}+\beta \qquad V_1^{i}=V_1^{i-3}+\gamma.$$

L'équation ci-dessus devient alors :

$$\begin{aligned}
&36\left[V_2^{i-2}-V_2^{i-1}+V_2^{i-1}-V_2^{i-3}+V_2^{i-3}-V_2^{i-2}\right]V_1^{i-3}\\
&+36\left[\alpha\left(V_2^{i-1}-V_2^{i-3}\right)+\beta\left(V_2^{i-3}-V_2^{i-2}\right)\right]\\
&+18\left[\begin{array}{l}-3V_2^{i-2}+4V_2^{i-1}-V_2^{i}+3V_2^{i-3}-3V_2^{i-1}\\-4V_2^{i-3}+3V_2^{i-2}+V_2^{i}+V_2^{i-3}-V_2^{i-1}\end{array}\right]V_1^{i-3}\,\overline{u}\\
&+18\left[\begin{array}{l}\alpha\left(3V_2^{i-3}-3V_2^{i-1}\right)+\beta\left(-4V_2^{i-3}+3V_2^{i-2}+V_2^{i}\right)\\+\gamma\left(V_2^{i-3}-V_2^{i-1}\right)\end{array}\right]\overline{u}\\
&+18\left[\begin{array}{l}V_2^{i-2}-2V_2^{i-1}+V_2^{i}-V_2^{i-3}+3V_2^{i-1}-2V_2^{i}\\+2V_2^{i-3}-3V_2^{i-2}+V_2^{i}-V_2^{i-3}+2V_2^{i-2}-V_2^{i-1}\end{array}\right]V_1^{i-3}\,\overline{u}^2\\
&+18\left[\begin{array}{l}\alpha\left(-V_2^{i-3}+3V_2^{i-1}-2V_2^{i}\right)+\beta\left(2V_2^{i-3}-3V_2^{i-2}+V_2^{i}\right)\\-\gamma\left(V_2^{i-3}-2V_2^{i-2}+V_2^{i-1}\right)\end{array}\right]\overline{u}^2=0
\end{aligned}$$

Dans l'équation ci-dessus, on peut remarquer que tous les termes en V_1^{i-3} sont nuls (les sommes des V_2^j entre crochets s'annulent). Donc l'équation ci-dessus est équivalente à :

$$
\begin{aligned}
& 36\left[\alpha\left(V_2^{i-1}-V_2^{i-3}\right)+\beta\left(V_2^{i-3}-V_2^{i-2}\right)\right] \\
+\ 18 & \left[\begin{array}{l}\alpha\left(3V_2^{i-3}-3V_2^{i-1}\right)+\beta\left(-4V_2^{i-3}+3V_2^{i-2}+V_2^{i}\right) \\ +\gamma\left(V_2^{i-3}-V_2^{i-1}\right)\end{array}\right]\overline{u} \\
+\ 18 & \left[\begin{array}{l}\alpha\left(-V_2^{i-3}+3V_2^{i-1}-2V_2^{i}\right)+\beta\left(2V_2^{i-3}-3V_2^{i-2}+V_2^{i}\right) \\ -\gamma\left(V_2^{i-3}-2V_2^{i-2}+V_2^{i-1}\right)\end{array}\right]\overline{u}^2=0
\end{aligned}
$$

Il reste encore trop d'inconnues pour pouvoir résoudre simplement cette équation. C'est pourquoi nous allons rajouter une contrainte : nous allons supposer que les points de contrôle V^j sont équi-espacés sur l'axe des abscisses. Autrement dit :

$$V_1^{i-2}=V_1^{i-3}+\alpha \qquad V_1^{i-1}=V_1^{i-3}+\beta=V_1^{i-3}+2\alpha \qquad V_1^{i}=V_1^{i-3}+\gamma=V_1^{i-3}+3\alpha.$$

L'équation ci-dessus devient alors, lorsque l'on divise toutes les expressions par α :

$$
\begin{aligned}
& 36\left[V_2^{i-1}-V_2^{i-3}+2V_2^{i-3}-2V_2^{i-2}\right] \\
+\ 18 & \left[3V_2^{i-3}-3V_2^{i-1}-8V_2^{i-3}+6V_2^{i-2}+2V_2^{i}+3V_2^{i-3}-3V_2^{i-1}\right]\overline{u} \\
+\ 18 & \left[-V_2^{i-3}+3V_2^{i-1}-2V_2^{i}+4V_2^{i-3}-6V_2^{i-2}+2V_2^{i}-3V_2^{i-3}+6V_2^{i-2}-3V_2^{i-1}\right]\overline{u}^2=0
\end{aligned}
$$

ou encore

$$36\left[V_2^{i-1}-2V_2^{i-2}+V_2^{i-3}\right]+18\left[2V_2^{i}-6V_2^{i-1}+6V_2^{i-2}-2V_2^{i-3}\right]\overline{u}=0.$$

Cette équation et par conséquent l'équation (11.11) n'admet qu'une unique solution :

$$\overline{u}=\frac{V_2^{i-3}-2V_2^{i-2}+V_2^{i-1}}{(V_2^{i-3}-2V_2^{i-2}+V_2^{i-1})-(V_2^{i-2}-2V_2^{i-1}+V_2^{i})}. \tag{11.12}$$

Maintenant, si l'on veut imposer que la courbe $\mathcal{C}^i$ soit convexe (ou concave), il suffit de faire en sorte qu'il n'y ait aucun point d'inflexion ; autrement dit, il suffit que (11.12) n'admette aucune solution sur $[0,1]$, ce qui entraîne des contraintes du type :

$$V_2^{k-2}-2V_2^{k-1}+V_2^{k}\geq 0 \quad \text{ou} \quad V_2^{k-2}-2V_2^{k-1}+V_2^{k}\leq 0. \tag{11.13}$$

En résumé, si l'on impose, $\forall i$, que $V_1^i-V_1^{i-1}=$ constante α, c'est-à-dire si les points de contrôle sont équi-espacés sur l'axe des abscisses, alors :

- les contraintes de concavité s'expriment sous la forme $V_2^{k-2}-2V_2^{k-1}+V_2^{k}\leq 0$;
- les contraintes de convexité s'expriment sous la forme $V_2^{k-2}-2V_2^{k-1}+V_2^{k}\geq 0$.

Pour trouver les B-Splines approximant les courbes d'indifférence et les fonctions d'utilité, MADMAX procède donc de la manière suivante :

méthode d'approximation des courbes utilisée par MADMAX : Supposons que l'on travaille sur un espace $X_1 \times X_2$.

1. D'après les points (D_1^k, D_2^k) construits par le décideur, MADMAX détermine le nombre N de points de contrôle (V_1^k, V_2^k) de la Spline.

2. Il calcule les abscisses V_1^k pour que les points de contrôle soient équi-espacés.

3. Connaîssant les abscisses des points de contrôle et les bases B^i, la courbe $x_1(u)$ est totalement déterminée. Par conséquent, pour chaque k, on peut déterminer de manière unique l'indice $i(k)$ tel que D_1^k appartient à la $i(k)^{\text{ème}}$ courbe $\mathcal{C}_1^{i(k)}$, ainsi que le paramètre $\overline{u}(k)$ situant D_1^k sur cette courbe :

$$D_1^k = \sum_{r=-3}^{0} V_1^{i(k)+r} b^r(\overline{u}(k)).$$

4. Grâce à ces renseignements, on peut déterminer la distance verticale séparant (D_1^k, D_2^k) de la B-Spline :

$$\Big(\text{distance verticale}\Big((D_1^k, D_2^k), \text{B-Spline}\Big)\Big)^2 = \left(D_2^k - \sum_{r=-3}^{0} V_2^{i(k)+r} b^r(\overline{u}(k))\right)^2.$$

5. Afin de trouver les ordonnées des points de contrôle définissant la B-Spline recherchée, il ne reste plus qu'à résoudre le problème suivant, dont les inconnues sont les V_2^i :

$$\min \sum_k \left(D_2^k - \sum_{r=-3}^{0} V_2^{i(k)+r} b^r(\overline{u}(k))\right)^2$$

Sous contraintes :

$$(C)\begin{cases} V_2^{i-2} - 2V_2^{i-1} + V_2^i & \leq 0,\ i \in I \quad \text{(contraintes de concavité)} \\ V_2^{j-2} - 2V_2^{j-1} + V_2^j & \geq 0,\ j \in J \quad \text{(contraintes de convexité)} \\ V_2^l - V_2^{l-1} & \geq 0,\ l \in L \quad \text{(contraintes de croissance)} \\ V_2^m - V_2^{m-1} & \leq 0,\ m \in M \quad \text{(contraintes de décroissance)} \end{cases} \tag{11.14}$$

Les problèmes du type (11.14) sont ce que l'on appelle en Recherche Opérationnelle des problèmes quadratiques strictement convexes. Dans la littérature, on distingue, d'une manière générale, deux méthodes pour les résoudre :

- les méthodes simpliciales (cf. l'algorithme de Dantzig-Wolfe (Wolfe (1959), modifié par Dantzig (1963)), Graves (1967), Van de Panne et Whinston (1969) ou Tricot (1996)).

– les méthodes par points intérieurs (le lecteur intéressé pourra se reporter par exemple à Vanderbei (1992), Goldfarb et Liu (1991), Goldfarb et Liu (1993) ou Monteiro et Adler (1989)).

La première méthode consiste à utiliser des tableaux simplexe pour se déplacer vers la solution du problème ; la deuxième consiste à partir d'un point intérieur du polytope défini par les contraintes (C) de (11.14), et à effectuer des déplacements convergeant vers la solution, tout en restant à l'intérieur du polytope. C'est la méthode qui a été retenue dans MADMAX. La justification de ce choix est la suivante : à chaque fois que le décideur construit un point, MADMAX réactualise les B-Splines approximant les courbes d'indifférence et les fonctions d'utilité. Or il paraît assez intuitif de supposer que l'ajout d'un nouveau point ne va pas changer radicalement l'allure de ces courbes. Autrement dit, les points de contrôle de la nouvelle Spline ne devraient pas être très éloignés de l'ancienne. Un algorithme d'optimisation partant de points proches de celle-ci devrait donc converger vers la solution du problème quadratique très rapidement. Or il est très facile de calculer des points proches des anciennes B-Splines et à l'intérieur du polytope défini par (C). C'est pourquoi MADMAX utilise une méthode de points intérieurs plutôt qu'une méthode simpliciale.

Pour être précis, MADMAX implémente la méthode de résolution primale-duale décrite dans Monteiro et Adler (1989). Elle est en effet simple à mettre en oeuvre tout en étant performante (complexité en $\mathrm{O}(n^3L)$). Une légère adaptation est toutefois nécessaire pour calculer le point de départ de l'algorithme à partir des anciennes B-Splines, et ce pour deux raisons : tout d'abord parce que le calcul du point initial par Monteiro et Adler nécessite que toutes les constantes du problème quadratique (ici les D_2^k et les $b^r(\overline{u}(k))$) soient des entiers, et ensuite parce que l'on veut un point défini par rapport aux anciens points de contrôle.

11.4 L'application MADMAX

Le but de cette section est de montrer le fonctionnement en pratique de l'application MADMAX. Précisons tout d'abord quelques aspects techniques : MADMAX a été programmé en C++, avec un interfaçage en wxWin1.66b (environnement multi plateformes), ce qui lui permet de fonctionner sous Windows 95/98 et X/MOTIF (environnement graphique des systèmes UNIX). A l'heure où ce mémoire est imprimé, MADMAX est encore en cours de développement et n'est, pour l'instant, qu'une maquette. Je préciserais donc, dans ce qui suit, ce que la version finale devrait comporter et ce que réalise la version actuelle.

Lorsque le décideur lance l'application, une fenêtre similaire à celle de la figure 11.23 apparaît. L'utilisateur choisit alors le nombre d'attributs (la dimension de X) et leur type. Actuellement tous les attributs doivent être réels mais, dans un proche avenir, une extension sera réalisée pour prendre en compte les entiers et les symboles. Une fois cette phase préliminaire réalisée, MADMAX entreprend un dialogue avec l'utilisateur, qui va lui permettre de construire sa fonction d'utilité. L'écran d'ordinateur ne nous permettant pas de représenter des courbes dans des espaces de dimension n, nous avons donc

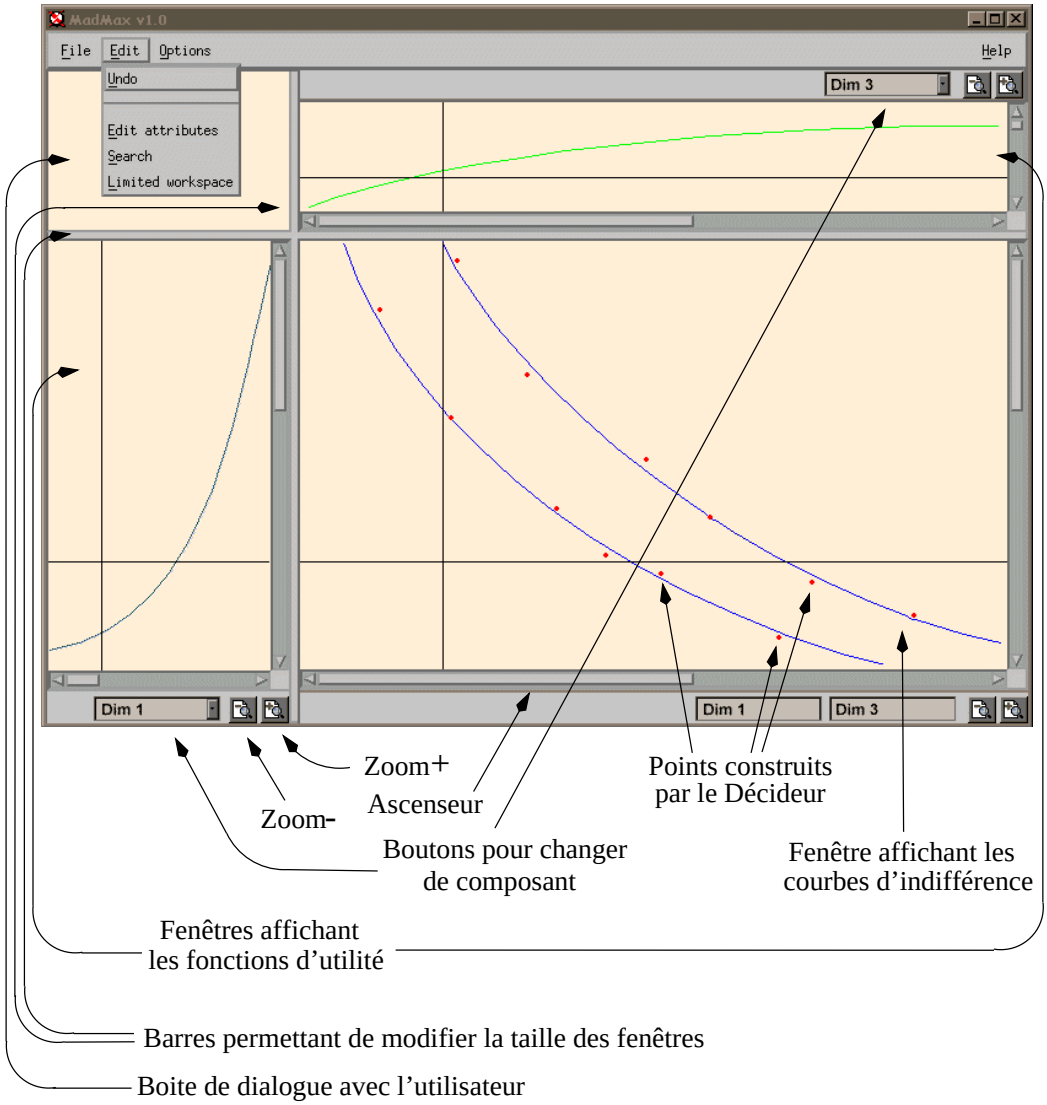


FIG. 11.23: L'application graphique MADMAX.

choisi de n'afficher que deux composants à la fois. Ce n'est pas réellement un inconvénient car, en pratique, les trade-offs font rarement intervenir plus de deux composants de X à la fois. Cependant, de temps à autre, des conditions définissant des relations entre les divers composants (comme l'axiome de conservation d'échelle) seront testées afin de s'assurer de la cohérence de la construction. Le processus de construction est illustré dans la figure 11.24 : MADMAX commence par sélectionner deux dimensions de X et par calculer deux points de référence (un pour chacune des deux courbes d'indifférence à tracer). Dans la petite fenêtre en haut à gauche de la figure 11.23, MADMAX pose ses questions aux décideur afin de déterminer un autre point sur chacune des courbes. Lorsque celui-ci a répondu, MADMAX entreprend d'actualiser les B-Splines définissant les courbes d'indifférence. Il les affiche dans la fenêtre en bas à droite de la figure 11.23. MADMAX peut, de plus, afficher les points répondus par le décideur. Une fois cette

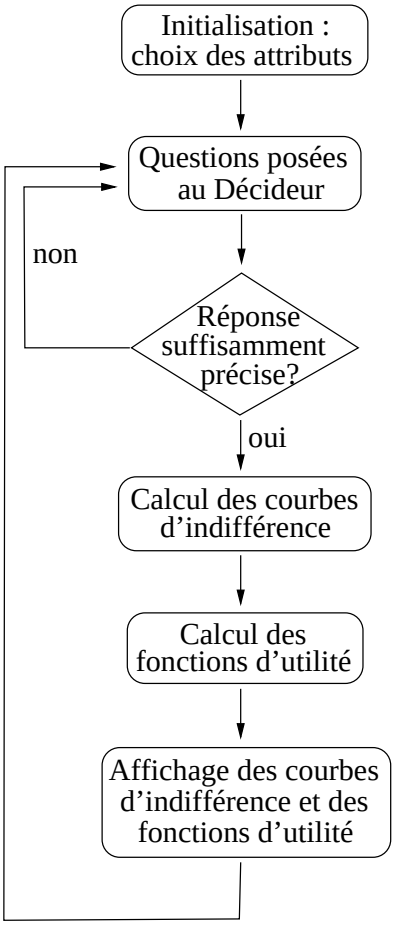


FIG. 11.24: L'algorithme de MADMAX.

opération effectuée, il recalcule les deux fonctions d'utilité correspondantes et les affiche respectivement dans la fenêtre en haut à droite, et en bas à gauche, de la figure 11.23. Pour l'instant, MADMAX suppose que les courbes d'indifférence, comme les fonctions d'utilité, sont entièrement convexes ou entièrement concaves (ce qui permet de paramétrer simplement les problèmes d'optimisation quadratiques) ; mais, dans un futur proche, cette restriction sera supprimée. MADMAX continue en posant de nouvelles questions afin de déterminer deux nouveaux points sur les courbes, et le cycle peut recommencer.

J'ai programmé MADMAX dans l'optique que les chercheurs en Théorie de la Décision puissent l'utiliser pour mener à bien des expériences (mise en évidence de certains biais dans les réponses, de l'impact des données graphiques sur les réponses...). Aussi, le menu "options" (cf. figure 11.25) permet-il de paramétrer le comportement de MADMAX :

- **Type de questionnaire :** l'utilisateur (ou l'expérimentateur) peut choisir le type de questions posées au décideur : par X-Matching, Y-Matching ou Bi-Matching. Mais MADMAX pourrait accepter à l'avenir d'autres types de questionnaires (le mode de calcul des fonctions d'utilité est suffisamment souple pour cela).

- **Affichage :** l'utilisateur peut spécifier s'il veut que les courbes d'indifférence et/ou les fonctions d'utilité apparaîssent à l'écran. Par exemple, "Show F1" commute l'affichage de la fonction d'utilité de la fenêtre en bas à gauche de la figure 11.23. "Show Responses" commute l'affichage des points construits par le décideur.

- **Test des axiomes d'élimination :** L'utilisateur peut demander à MADMAX de vérifier certains axiomes d'élimination. Concrètement, cette option modifie les questions posées au décideur. Par exemple, si "Check Reidemeister" a été sélectionné, lorsqu'il en aura la possibilité, MADMAX déterminera des points grâce à cette condition et, ensuite, posera des questions au décideur pour s'assurer que ce qu'il a construit est en adéquation avec les préférences du décideur.

- **Points de référence :** MADMAX offre la possibilité de paramétrer les points de référence des deux courbes d'indifférence. Comme son nom l'indique, l'option "Upper Left Reference Point" revient à choisir un point de référence dont la composante en abscisse est très petite et dont celle en ordonnée est relativement grande. En fait, si l'on considère que plus les points sont situés vers la droite ou vers le haut des fenêtres, et plus ils sont préférés par le décideur (ce qui est la convention de représentation usuelle), alors choisir "Upper Left Reference Point" équivaut à sélectionner un point dont la composante en abscisse est relativement peu appréciée du décideur et dont celle en ordonnée l'est beaucoup.

11.5 Résumé

Ce chapitre a été consacré à l'étude d'une application graphique permettant de construire, grâce à un processus conversationnel, des fonctions d'utilité additives. Parmi l'ensemble des méthodes à notre disposition pour parvenir à ce résultat, nous avons choisi une méthode par compensation ("trade-off"). Les algorithmes classiques utilisant ce type de construction présentent deux inconvénients majeurs :

- ils supposent que les réponses du décideur sont d'une précision infinie puisqu'ils font passer les courbes d'indifférence par les points construits par le décideur,

- le processus de construction étant en escalier, à chaque itération ils utilisent des données calculées lors des itérations précédentes. Ainsi, une erreur dans la réponse du décideur à une étape du processus se répercute sur les suivantes.

Nous avons essayé de pallier ces inconvénients en utilisant l'algorithme suivant :

1. Nous essayons de construire deux courbes d'indifférence. Pour cela, de nombreuses méthodes conviennent : nous pourrions évidemment utiliser un processus en escalier, mais cela propagerait les erreurs dans les réponses du décideur. Nous avons plutôt choisi la méthode suivante :

   (a) Nous choisissons un élément de référence sur chacune des deux courbes,

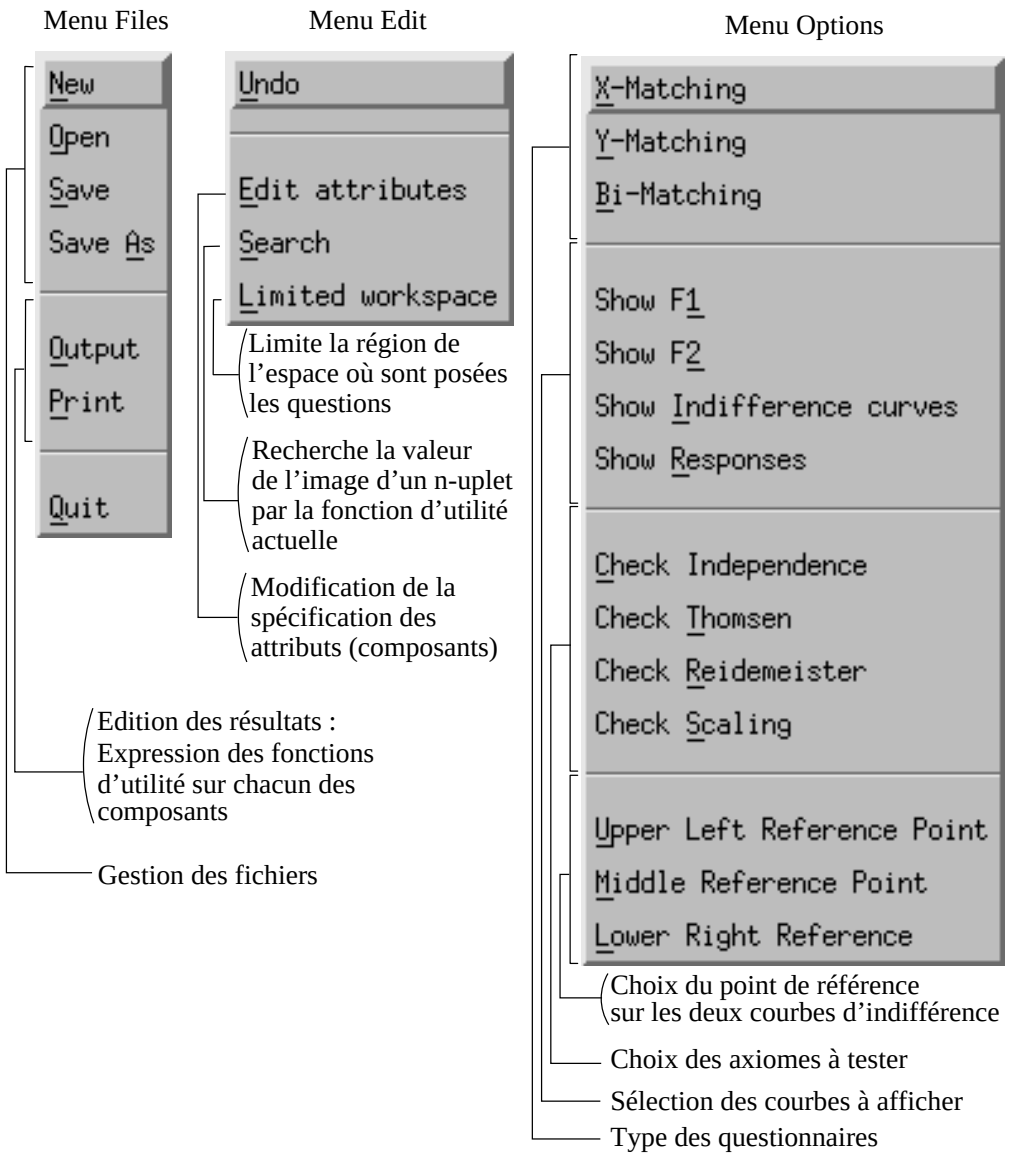


FIG. 11.25: Les différents menus.

(b) Nous posons des questions aux décideur pour déterminer des points indifférents aux points de référence,

(c) Sachant par expérience que les courbes d'indifférence sont, en principe, très lisses (sauf en certains points particuliers) et ont relativement peu de points d'inflexion, nous recherchons des courbes lisses passant le plus près possible des points construits par le décideur. Celles que nous utilisons sont des B-Splines cubiques uniformes.

2. A partir de ces courbes, nous déduisons les fonctions d'utilité additives correspondantes, là encore grâce à l'utilisation de B-Splines.

Les avantages de ce type de construction sont :

- une réduction de la propagation des erreurs dans les réponses du décideur,
- une réduction des imprécisions,
- une souplesse de construction (les questions posées au décideur peuvent être de type X-Matching, Y-Matching ou Bi-Matching),

En contrepartie, l'inconvénient majeur de la méthode réside dans la puissance de calcul qu'elle nécessite (un Pentium est un minimum).

Cette méthode a donné lieu à une application graphique, MADMAX, qui fonctionne actuellement sous Windows 95/98 et sous X/MOTIF.

11.6 Bibliographie

Bartels, R. H., J. C. Beatty, et B. A. Barsky (1987) : *An Introduction to Splines For Use in Computer Graphics And Geometric Modeling*. Morgan Kaufmann.

Borcherding, K., T. Eppel, et D. Von Winterfeldt (1991) : "Comparison of Weighting Judgments in Multiattribute Utility Measurement," *Management Science*, 37(12), 1603–1619.

Dantzig, G. B. (1963) : *Linear Programming And Extensions*. Princeton University Press, Princeton.

de Boor, C. (1978) : "A Practical Guide to Splines," in *Applied Mathematical Sciences*, vol. 27. Springer Verlag, New York.

Delquié, P. (1993) : "Inconsistent Trade-Offs Between Attributes : New Evidence in Preference Assessment Biases," *Management Science*, 39(11), 1382–1395.

——— (1996) : "'Bi-Matching' : A New Preference Assessment Method to Reduce Compatibility Effects," manuscrit transmis par l'auteur.

Eckenrode, R. T. (1965) : "Weighting Multiple Criteria," *Management Science*, 12(3), 180–192.

FISHBURN, P. (1967) : "Methods of Estimating Additive Utilities," *Management Science*, 13, 435–453.

FOLEY, J. D., ET A. VAN DAM (1982) : *Fundamentals of Interactive Computer Graphics*. Addison Wesley, Reading, Massachussets.

GOLDFARB, D., ET S. LIU (1991) : "An $O(n^3L)$ Primal Interior Point Algorithm For Convex Quadratic Programming," *Mathematical Programming*, 49, 325–340.

——— (1993) : "An $O(n^3L)$ Primal-Dual Potential Reduction Algorithm For Solving Convex Quadratic Programs," *Mathematical Programming*, 61, 161–170.

GRAVES, R. L. (1967) : "A Principal Pivoting Simplex Algorithm For Linear And Quadratic Programming," *Operations Research*, 15, 482–494.

HERSHEY, J. C., H. C. KUNREUTHER, ET P. J. SCHOEMAKER (1982) : "Sources of Bias in Assessment Procedures For Utility Functions," *Management Science*, 28(8), 936–954.

HOLZ, H., ET K. MOSLER (1994) : "An Interactive Decision Procedure With Multiple Attributes Under Risk," *Annals of Operations Research*, 52, 151–170.

JOHNSON, E. J., ET D. A. SCHKADE (1989) : "Bias in Utility Assessments : further evidence and explanations," *Management Science*, 35, 406–423.

KEENEY, R. L., ET H. RAIFFA (1993) : *Decisions with Multiple Objectives - Preferences and Value Tradeoffs*. Cambridge university Press.

MONTEIRO, R. D., ET I. ADLER (1989) : "Interior Path Following Primal-Dual Algorithm. Part II : Convex Quadratic Programming," *Mathematical Programming*, 44, 43–66.

NEWMAN, W. M., ET R. F. SPROULL (1979) : *Principles of Interactive Computer Graphics*. McGraw-Hill, New York.

ROGERS, D. F., ET A. J. ADAMS (1976) : *Mathematical Elements For Computer Graphics*. McGraw-Hill, New York.

SLOVIC, P., D. GRIFFIN, ET A. TVERSKY (1990) : "Compatibility Effetcs in Judgment And Choice," in *Insights In Decision Making : A Tribute to Hillel J. Einhorn*, ed. by R. M. Hogarth, pp. 5–27. The University of Chicago Press.

STILLWELL, W. G., D. VON WINTERFELDT, ET R. S. JOHN (1987) : "Comparing Hierarchical and Nonhierarchical Weighting Methods for Eliciting Multiattribute Value Models," *Management Science*, 33(4), 442–450.

TANGUIANE, A., ET J. GRUBER (1995) : "Constructing Quadratic, Polynomial, and Separable Objective Functions," Discussion Paper No. 218, FernUniversität Hagen, Hagen, Germany.

TORGERSON, W. S. (1958) : *Theory and Methods of Scaling*. John Wiley and Sons, New York.

TRICOT, S. (1996) : "Analyse Comparative et Mise en Oeuvre Numérique d'Algorithmes de Programmation Quadratique Sous Contraintes Linéraires," Thèse de doctorat de l'université paris VI.

VAN DE PANNE, C., ET A. WHINSTON (1969) : "The Symmetric Formulation of the Simplex Method For Quadratic Programming," *Econometrica*, 37, 507–527.

VANDERBEI, R. J. (1992) : *LOQO User's Manual*Program in Statistics and Operations Research, Princeton University, Princeton.

VON NEUMANN, J., ET O. MORGENSTERN (1944) : *Theory of Games and Economic Behaviour*. Princetown University Press, Princetown, New Jersey.

VON NITZSCH, R., ET M. WEBER (1988) : "Utility Function Assessment on a Micro-Computer : an Interactive Procedure," *Annals of Operations Research*, 16, 149–160.

——— (1993) : "Effect of Attribute Ranges on Weights in Multiattribute Utility Measures," *Management Science*, 39(8), 937–943.

WEBER, M., F. EISENFÜHR, ET D. VON WINTERFELDT (1988) : "The Effects of Splitting Attributes on Weights in Multiattribute Utility Measurement," *Management Science*, 34(4), 431–445.

WELZEL, P. (1997) : "Quadratic Ordinal Functions from Ordinal Data," *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, 453, 195–214, Springer Verlag.

WOLFE, P. (1959) : "The Simplex Method For Quadratic Programming," *Econometrica*, 27, 382–398.

Chapitre 12

Conclusion

Nous devons espérer qu'il continuera de servir dans nos recherches futures, et que, pour le meilleur ou pour le pire, il s'étendra, pour notre plaisir et peut-être même aussi pour notre stupéfaction, à de larges branches de la connaissance.

Benoît Mandelbrot

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'existence et à la construction de fonctions d'utilité additives. Celles-ci sont utilisées dans de nombreux domaines : la Théorie de la Décision bien sûr, mais aussi en Intelligence Artificielle (on les appelle alors fonctions d'évaluation), en Economie et, d'une manière générale, dans tous les domaines où l'on doit représenter une relation d'ordre.

En Théorie de la Décision, ces fonctions présentent deux avantages par rapport aux utilités non additives : leur construction est relativement aisée, et leur utilisation très rapide. C'est pourquoi ces deux aspects ont suscité un florilège de contributions depuis le début des années 60. Citons entre autres Debreu (1960), Fishburn (1970), Jaffray (1974b), Krantz, Luce, Suppes, et Tversky (1971), Wakker (1989) pour des conditions assurant l'existence d'utilités additives ; Fishburn (1967), Keeney et Raiffa (1993), Keeney et Sicherman (1976) pour des méthodes de construction.

Dans la littérature, les conditions d'existence testables, c'est-à-dire utilisables par les algorithmes de construction, font appel à des hypothèses très restrictives sur l'ensemble des dimensions des espaces de préférence : la solvabilité restreinte et non restreinte dans l'approche algébrique, et la connexité dans l'approche topologique. Ces hypothèses ont pour conséquence de limiter considérablement le champ d'application des utilités additives. Aussi est-il intéressant de les affaiblir : ce fut l'objectif principal de ce mémoire.

Les algorithmes de construction de la littérature sont, pour la plupart, fondés sur les techniques de démonstration des théorèmes d'existence de l'approche topologique, c'est-à-dire sur des constructions en escalier. Ainsi une erreur (d'estimation, de biais ; cf. Delquié (1993), Hershey, Kunreuther, et Schoemaker (1982), Johnson et Schkade (1989)) à une étape de l'algorithme peut-elle influencer l'ensemble de la construction. C'est pourquoi il est intéressant d'étudier si les résultats théoriques de ce mémoire

peuvent, d'une manière ou d'une autre, aider à pallier ou affaiblir ces effets indésirables.

12.1 La contribution de ce mémoire

Nous avons proposé des conditions assez générales garantissant l'existence d'utilités additives. En particulier, nous avons introduit une nouvelle méthode de démonstration des théorèmes d'existence, qui nous a permis de définir un nouveau principe de construction réduisant la propagation des erreurs d'estimation. Enfin, nous avons utilisé nos théorèmes d'existence afin de généraliser des modèles de décision déjà existant.

12.1.1 Les résultats théoriques

L'obstacle principal à une généralisation des théorèmes d'existence classiques réside dans les méthodes utilisées pour démontrer ceux-ci. En effet, les deux approches usuelles, l'approche algébrique et l'approche topologique, utilisent des outils mathématiques relativement complexes et assez peu intuitifs. C'est pourquoi une grande partie de ce mémoire a été consacrée à l'élaboration d'une nouvelle méthode de démonstration, appelée approche analytique. Celle-ci est plus intuitive, elle nécessite peu de connaissances mathématiques de haut niveau et, surtout, elle peut s'interpréter graphiquement. Grâce à ces propriétés, il a donc été possible de généraliser les théorèmes d'existence classiques.

Ces généralisations proviennent du fait que l'on a abandonné l'hypothèse restrictive de solvabilité restreinte sur l'ensemble des dimensions de l'espace des préférences, pour ne la supposer vérifiée que sur quelques dimensions (deux ou trois suffisent amplement). Un certain nombre de contre-exemples (dont certaines familles génériques) nous ont en outre permis de montrer que les hypothèses de nos théorèmes sont minimales, au sens où elles ne sont pas redondantes, et que l'on peut difficilement les affaiblir sans prendre le risque d'obtenir des théorèmes non testables.

12.1.2 L'extension de modèles de décision

Il existe un certain nombre de domaines dans lesquels les résultats théoriques de cette thèse peuvent s'appliquer directement. Citons par exemple la Théorie de la Décision Médicale, dans laquelle les états de santé sont souvent discrets, contrairement à certaines dimensions monétaires qui, elles, vérifient l'hypothèse de solvabilité restreinte.

Cependant, on peut aussi intégrer nos résultats théoriques dans des modèles de décision, voire même en créer de nouveaux. Le chapitre 10 montre, par exemple, que l'on peut généraliser le modèle de décision à base de données fréquentistes de Coignard (1993) et Coignard et Jaffray (1994) au cas de fréquences imprécises (estimation fréquentiste de fonctions de croyance). Le chapitre 9, quant à lui, propose un petit modèle de prise de décision collective. Nous montrons alors que des hypothèses rationnelles et éthiques permettent de déduire celles employées par nos théorèmes d'existence.

12.1.3 La construction d'utilités

Parmi les résultats théoriques, nous avons énoncé un théorème d'existence d'utilités additives sur des produits cartésiens de dimension 2 dont le second composant était booléen (c'est-à-dire qu'il ne pouvait prendre que deux valeurs). La démonstration de ce théorème montrait comment l'on pouvait transformer une fonction d'utilité (pas forcément additive) en une fonction d'utilité additive. En suivant un principe similaire, nous avons montré qu'à partir de deux courbes d'indifférence, on pouvait construire une famille de fonctions d'utilité additives ayant un certain nombre de points imposés par les deux courbes d'indifférence en commun.

Le principe de construction adopté dans ce mémoire consiste donc à construire deux courbes d'indifférence, à engendrer un élément de la famille de fonctions d'utilité correspondante et, ensuite, à affiner cet élément en prenant en compte des couples de points n'appartenant pas aux deux courbes d'indifférence.

La difficulté consiste évidemment à créer ces deux courbes. Mais, pour cela, des techniques telles que le bi-matching (cf. Delquié (1996)) permettent d'obtenir un ensemble de points sur chacune des courbes. On engendre alors celles-ci grâce à des approximations par B-Splines (cf. Bartels, Beatty et Barsky (1987)) et des résolutions de problèmes quadratiques (cf. Monteiro et Adler (1989)). Le processus de construction permet en outre de contrôler les erreurs d'estimation par l'introduction de contraintes de convexité/concavité sur les courbes d'indifférence et les fonctions d'utilité.

12.2 Quelques perspectives

Deux axes de Recherche paraissent intéressants à poursuivre, dans la lignée des résultats de ce mémoire.

Le premier axe concerne l'extension des résultats théoriques : nous avons montré qu'elle semblait difficilement réalisable sur des produits cartésiens[1] ; cependant, il reste à étudier les sous-ensembles de produits cartésiens. Il semble que les derniers résultats du chapitre 7 sur la solvabilité restreinte locale puissent se généraliser à des ensembles bien plus généraux et notamment à des sous-ensembles de produits cartésiens. En définissant ceux-ci comme des réunions de petits produits cartésiens, la condition de Reidemeister devrait permettre, dans certains cas, de propager la structure additive entre les produits cartésiens. On pourrait aussi envisager des sous-ensembles dont certains composants ne sont pas solvables. Toutes ces familles de sous-ensembles ont des applications pratiques très intéressantes.

Le deuxième axe concerne la construction des utilités additives. Le programme proposé dans ce mémoire peut être manifestement amélioré : le calcul des B-Splines devrait s'effectuer avec plus d'efficacité, c'est-à-dire en utilisant des techniques d'optimisation quadratique plus appropriées ; ensuite, le contrôle de la concavité/convexité des courbes devrait pouvoir être inféré à partir de techniques de statistique ; enfin, le programme ne

[1] pour être précis, nous avons montré qu'affaiblir encore la solvabilité, comme dans la famille générique d'exemples de la page 89, devait être compensé par un recourt à des axiomes d'élimination d'ordres élevés.

tient pas (encore) compte de la topologie particulière des composants non solvables, et pourrait donc être amélioré dans cette voie.

Ce programme devrait permettre à court terme de mener à bien des expériences, pour essayer de justifier l'existence de certains biais par exemple. En particulier, on pourrait se demander quel est l'impact des éléments graphiques (dessin des courbes d'indifférence et/ou des fonctions d'utilité) dans les réponses des utilisateurs.

Bibliographie

Arrow, K. J., et L. Hurvicz (1972) : "An optimality criterion for decision making under ignorance," in *Uncertainty and Expectations in Economics*, ed. by C. F. Carter and J. L. Ford eds., Basil Blackwell & Mott Ltd, Oxford.

Aczèl, J. (1966) : *Lectures on Functional Equations and Their Applications.* Academic Press, New York.

Adams, E. W. (1965) : "Elements of a Theory of Inexact Measurement," *Philosophy of Science*, 32, 205–228.

Anand, P. (1987) : "Are the Preference Axioms Really Rational ?," *Theory and Decision*, 23, 189–214.

Andersen, S. K., S. Andreassen, et M. Woldbye (1986) : "Knowledge Representation For Diagnosis And Test Planning in The Domain of Electromyography," in *Proceedings of the 7th European Conference on Artificial Intelligence*, pp. 357–368, Brighton.

Armstrong, W. E. (1951) : "Utility and the Theory of Welfare," *Oxford Economic Papers*, 3, 259–271.

Arrow, K. J. (1950) : "A Difficulty in the Concept of Social Welfare," *The Journal of Political Economy*, 58, 328–346.

——— (1951) : *Individual Values and Social Choice.* Wiley, New York.

Bacchus, F. (1989) : *Representing and Reasoning with Probabilistic Knowledge.* MIT Press, Cambridge, Ma.

——— (1991) : "Default Reasoning from Statistics," *AAAI*, 1, 392–398.

Bartels, R. H., J. C. Beatty, et B. A. Barsky (1987) : *An Introduction to Splines For Use in Computer Graphics And Geometric Modeling.* Morgan Kaufmann.

Borcherding, K., T. Eppel, et D. Von Winterfeldt (1991) : "Comparison of Weighting Judgments in Multiattribute Utility Measurement," *Management Science*, 37(12), 1603–1619.

BOYER, M., ET G. DIONE (1983) : "Riscophobie et étalement à moyenne constante," *L'Actualité économique*, 59, 208–229.

BROCK, H. W. (1980) : "The Problem of "utility Weights" in Group Preference Aggregation," *Operations Research*, 28(1), 176–187.

CHATEAUNEUF, A., ET P. P. WAKKER (1993) : "From Local to Global Additive Representation," *Journal of Mathematical Economics*, 22, 523–545.

COHEN, M., ET J.-Y. JAFFRAY (1980) : "Rational behaviour under complete ignorance," *Econometrica*, 48, 1281–1299.

——— (1983) : "Approximations of rational criteria under complete ignorance," *Theory and Decision*, 15, 121–150.

COIGNARD, Y. (1993) : "Modèle de Décision sur la Base de Données Fréquentistes," Ph.D. thesis, Université Paris 6, Paris.

COIGNARD, Y., ET J.-Y. JAFFRAY (1994) : "Direct Decision Making," in *Decision Theory and Decision Analysis : Trends and Challenges*, ed. by S. Ríos, pp. 81–90. Kluwers Academic Publishers, Dordrecht, the Netherlands.

DANTZIG, G. B. (1963) : *Linear Programming And Extensions*. Princeton University Press, Princeton.

DE BOOR, C. (1978) : "A Practical Guide to Splines," in *Applied Mathematical Sciences*, vol. 27. Springer Verlag, New York.

DEBREU, G. (1954) : "Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function," in *Decision Pocesses*, ed. by R. Thrall, C. Coombs, et R. Davis, pp. 159–165. Wiley, New York.

——— (1960) : "Topological Methods in Cardinal Utility Theory," in *Mathematical Methods in the Social Sciences*, ed. by K. J. Arrow, S. Karlin, et P. Suppes, pp. 16–26. Stanford University Press, Stanford, CA.

——— (1964) : "Continuity Properties of Paretian Utility," *International Economic Review*, 5(3), 285–293.

DELQUIÉ, P. (1993) : "Inconsistent Trade-Offs Between Attributes : New Evidence in Preference Assessment Biases," *Management Science*, 39(11), 1382–1395.

——— (1996) : "'Bi-Matching' : A New Preference Assessment Method to Reduce Compatibility Effects," manuscrit transmis par l'auteur.

DUNCAN LUCE, R. (1956) : "Semiorders and a Theory of Utility Discrimination," *Econometrica*, 24, 178–191.

DUNCAN LUCE, R., ET H. RAIFFA (1957) : *Games and Decisions : Introduction and Critical Survey*. Wiley, New York.

ECKENRODE, R. T. (1965) : "Weighting Multiple Criteria," *Management Science*, 12(3), 180–192.

EECKHOUDT, L., ET C. GOLLIER (1992) : *Les risques financiers*. Ediscience, Paris.

EICHHORN, W. (1978) : *Functional Equations in Economics*. Addison Wesley, London.

FISHBURN, P. (1967) : "Methods of Estimating Additive Utilities," *Management Science*, 13, 435–453.

FISHBURN, P. C. (1969) : "Preferences, Summation, And Social Welfare Functions," *Management Science*, 16(3), 179–186.

FISHBURN, P. C. (1970) : *Utility Theory for Decision Making*. Wiley, NewYork.

——— (1981) : "Uniqueness Properties in Finite-Continuous Additive Measurement," *Mathematical Social Sciences*, 1, 145–153.

FLEMMING, J. M. (1952) : "A Cardinal Concept of Welfare," *Quarterly Journal of Economics*, LXVI, 366–384.

FOLEY, J. D., ET A. VAN DAM (1982) : *Fundamentals of Interactive Computer Graphics*. Addison Wesley, Reading, Massachussets.

FUHRKEN, G., ET M. K. RICHTER (1991) : "Additive Utility," *Economic Theory*, 1, 83–105.

GOLDFARB, D., ET S. LIU (1991) : "An $O(n^3L)$ Primal Interior Point Algorithm For Convex Quadratic Programming," *Mathematical Programming*, 49, 325–340.

——— (1993) : "An $O(n^3L)$ Primal-Dual Potential Reduction Algorithm For Solving Convex Quadratic Programs," *Mathematical Programming*, 61, 161–170.

GONZALES, C. (1995) : "Two Factor Additive Conjoint Measurement with One Solvable Component," working paper.

——— (1996a) : "Additive Utilities When Some Components Are Solvable And Others Are Not," *Journal of Mathematical Psychology*, 40(2), 141–151.

——— (1996b) : "Additive Utility Without Restricted Solvability on All Components," soumis pour publication.

——— (1997) : "Additive Utility Without Solvability on All Components," *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, 453, 64–90, Springer Verlag.

GORMAN, W. (1968) : "The Structure of Utility Functions," *Review of Economic Studies*, 35, 367–390.

GRAVES, R. L. (1967) : "A Principal Pivoting Simplex Algorithm For Linear And Quadratic Programming," *Operations Research*, 15, 482–494.

HARSANYI, J. C. (1955) : "Cardinal Welfare, Individualistic Ethics, and Interpersonal Comparisons of Utility," *The Journal of Political Economy*, 63, 309–321.

——— (1975) : "Nonlinear Social Welfare Functions," *Theory and Decision*, 6(3), 311–332.

——— (1976) : *Essays on Ethics, Rational Behaviour, and Scientific Explanation.* Reidel, Dordrecht.

HARVEY, C. M. (1981) : "Conditions on Risk Attitude for a Single Attribute," *Management Science*, 27(2), 190–203.

——— (1991) : "Models of Tradeoffs in a Hierarchical Structure of Objectives," *Management Science*, 37(8), 1030–1042.

HERSHEY, J. C., H. C. KUNREUTHER, ET P. J. SCHOEMAKER (1982) : "Sources of Bias in Assessment Procedures For Utility Functions," *Management Science*, 28(8), 936–954.

HÖLDER, O. (1901) : "Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass. Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellshaft der Wissenschaften zu Leipzig," *Mathematische-Physische Klasse*, 53, 1–64.

HOLMAN, E. W. (1971) : "A Note on Conjoint Measurement with Restricted Solvability," *Journal of Mathematical Psychology.*

HOLZ, H., ET K. MOSLER (1994) : "An Interactive Decision Procedure With Multiple Attributes Under Risk," *Annals of Operations Research*, 52, 151–170.

HURWICZ, L. (1951) : "Optimality Criteria for Decision Making Under Ignorance," Discussion Paper 370, Cowles Commission, Statistics.

JAFFRAY, J.-Y. (1974a) : "Existence, Propriétés de Continuité, Additivité de Fonctions d'Utilité sur un Espace Partiellement ou Totalement Ordonné," Thèse d'Etat, Université Paris VI.

——— (1974b) : "On the Extension of Additive Utilities to Infinite Sets," *Journal of Mathematical Psychology*, 11(4), 431–452.

JAFFRAY, J.-Y. (1989a) : "Généralisation du critère de l'utilité espérée aux choix dans l'incertain régulier," *RAIRO/OR*, 23, 237–265.

——— (1989b) : "Linear Utility Theory For Belief Functions," *Operations Research Letters*, 8, 107–112.

——— (1994) : "Dynamic Decision Making With Belief Functions," in *Advances in the Dempster-Shafer Theory of Evidence*, ed. by R. R. Yager, J. Kacprzyk, et M. Fedrizzi. John Wiley & Sons, inc.

JOHNSON, E. J., ET D. A. SCHKADE (1989) : "Bias in Utility Assessments : further evidence and explanations," *Management Science*, 35, 406–423.

KALDOR, N. (1939) : "Welfare Propositions of Economics and Interpersonal Comparisons of Utility," *The Economic Journal*, 49, 549–552.

KEENEY, R., ET A. SICHERMAN (1976) : "Assessing and Analyzing Preferences Concerning Multiple Objectives : An Interactive Computer Program," *Behavioral Science*, pp. 173–182.

KEENEY, R. L. (1976) : "A Group Preference Axiomatization With Cardinal Utility," *Management Science*, 23(2), 140–145.

KEENEY, R. L., ET H. RAIFFA (1993) : *Decisions with Multiple Objectives - Preferences and Value Tradeoffs*. Cambridge university Press.

KOOPMAN, T. C. (1972) : "Representations of Preference Orderings With Independent Components of Consumption," in *Decision and Organisation*, ed. by C. B. McGuire, et R. Radner, chap. 3, pp. 57–78. North Holland, Amsterdam.

KRANTZ, D. H. (1964) : "Conjoint Measurement : The Luce-Tukey Axiomatization and Some Extensions," *Journal of Mathematical Psychology*, 1, 248–277.

KRANTZ, D. H., R. D. LUCE, P. SUPPES, ET A. TVERSKY (1971) : *Foundations of Measurement (Additive and Polynomial Representations)*, vol. 1. Academic Press, New York.

——— (1989) : *Foundations of Measurement (Geometrical, Threshold, and Probabilistic Representations)*, vol. 2. Academic Press, San Diego, California.

LANGE, O. (1942) : "The Foundations of Welfare Economics," *Econometrica*, 10, 215–228.

LAURITZEN, S. L., ET D. J. SPIEGELHALTER (1988) : "Local Computations with Probabilities on Graphical Structures and Their Application to Expert Systems," *The Journal of The Royal Statistical Society - Series B (Methodological)*, 50(2), 157–224.

LUCE, R. D. (1966) : "Two extensions of Conjoint Measurement," *Journal of Mathematical Psychology*, 3, 348–370.

LUCE, R. D., ET J. W. TUKEY (1964) : "Simultaneous Conjoint Measurement : A New Type of Fondamental Measurement," *Journal of Mathematical Psychology*, 1, 1–27.

MONTEIRO, R. D., ET I. ADLER (1989) : "Interior Path Following Primal-Dual Algorithm. Part II : Convex Quadratic Programming," *Mathematical Programming*, 44, 43–66.

NARENS, L. (1974) : "Minimal Conditions for Additive Conjoint Measurement and Qualitative Probability," *Journal of Mathematical Psychology*, 11, 404–430.

NEWMAN, W. M., ET R. F. SPROULL (1979) : *Principles of Interactive Computer Graphics*. McGraw-Hill, New York.

PACKARD, D. J. (1982) : "Cyclical Preference Logic," *Decision and Theory*, 14, 415–426.

PEARL, J. (1988) : *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems : Networks of Plausible Inference*. Morgan Kaufman Publishers, inc, San Mateo, California.

PRINCIPIA CYBERNETICA (1995) : "Glossary of Cybernetics," *Internet Server : http ://pespmc1.vub.ac.be/ASC/INDEXASC.html*.

ROGERS, D. F., ET A. J. ADAMS (1976) : *Mathematical Elements For Computer Graphics*. McGraw-Hill, New York.

SCOTT, D. (1964) : "Measurement structures and Linear Inequalities," *Journal of Mathematical Psychology*, 1, 233–247.

SCOTT, D., ET P. SUPPES (1958) : "Foundational Aspects of Theories of Measurement," *Journal of Symbolic Logic*, 23(2), 113–128.

SEGAL, U. (1991) : "Additively Separable Representations on Non-convex Sets," *Journal of Economic Theory*, 56, 89–99.

——— (1994) : "A Sufficient Condition for Additively Separable Functions," *Journal of Mathematical Economics*, 23, 295–303.

SEN, A. (1970) : "Interpersonal Aggregation and Partial Comparability," *Econometrica*, 38(3), 393–409.

SHAFER, G. (1976) : *A Mathermatical Theory of Evidence*. Princetown University Press, Princetown, New Jersey.

SLOVIC, P., D. GRIFFIN, ET A. TVERSKY (1990) : "Compatibility Effetcs in Judgment And Choice," in *Insights In Decision Making : A Tribute to Hillel J. Einhorn*, ed. by R. M. Hogarth, pp. 5–27. The University of Chicago Press.

STILLWELL, W. G., D. VON WINTERFELDT, ET R. S. JOHN (1987) : "Comparing Hierarchical and Nonhierarchical Weighting Methods for Eliciting Multiattribute Value Models," *Management Science*, 33(4), 442–450.

TANGUIANE, A., ET J. GRUBER (1995) : "Constructing Quadratic, Polynomial, and Separable Objective Functions," Discussion Paper No. 218, FernUniversität Hagen, Hagen, Germany.

TORGERSON, W. S. (1958) : *Theory and Methods of Scaling*. John Wiley and Sons, New York.

TRICOT, S. (1996) : "Analyse Comparative et Mise en Oeuvre Numérique d'Algorithmes de Programmation Quadratique Sous Contraintes Linéraires," Thèse de doctorat de l'université paris VI.

TVERSKY, A. (1967) : "A General Theory of Polynomial Conjoint Measurement," *Journal of Mathematical Psychology*, 4, 1–20.

VAN DE PANNE, C., ET A. WHINSTON (1969) : "The Symmetric Formulation of the Simplex Method For Quadratic Programming," *Econometrica*, 37, 507–527.

VANDERBEI, R. J. (1992) : *LOQO User's Manual*Program in Statistics and Operations Research, Princeton University, Princeton.

VICKREY, W. S. (1960) : "Utility, Strategy, And Social Decision Rules," *The Quarterly Journal of Economics*, 74, 507–535.

VON NEUMANN, J., ET O. MORGENSTERN (1944) : *Theory of Games and Economic Behaviour*. Princetown University Press, Princetown, New Jersey.

VON NITZSCH, R., ET M. WEBER (1988) : "Utility Function Assessment on a Micro-Computer : an Interactive Procedure," *Annals of Operations Research*, 16, 149–160.

——— (1993) : "Effect of Attribute Ranges on Weights in Multiattribute Utility Measures," *Management Science*, 39(8), 937–943.

WAKKER, P. P. (1988) : "The Algebraic Versus the Topological Approach to Additive Representations," *Journal of Mathematical Psychology*, 32, 421–435.

——— (1989) : *Additive Representations of Preferences, A New Foundation of Decision Analysis*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

——— (1993) : "Additive Representations on Rank-Ordered Sets. II. The Topological Approach," *Journal of Mathematical Economics*, 22, 1–26.

WEBER, M., F. EISENFÜHR, ET D. VON WINTERFELDT (1988) : "The Effects of Splitting Attributes on Weights in Multiattribute Utility Measurement," *Management Science*, 34(4), 431–445.

WELZEL, P. (1997) : "Quadratic Ordinal Functions from Ordinal Data," *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, 453, 195–214, Springer Verlag.

WEYMARK, J. (1981) : "Generalized Gini Inequality Indices," *Mathematical Social Sciences*, 1, 409–430.

WOLFE, P. (1959) : "The Simplex Method For Quadratic Programming," *Econometrica*, 27, 382–398.

Index

— Symboles —

$\succsim$, $\precsim$, $\succ$, $\prec$, $\sim$, 9, 17
$\succsim_i$, 23
$\circ$, 9
$\mathcal{O}$, 163
f_i, $f_{[i]}$, 9
X, $X/\sim$, $X\backslash Y$, x_i, 9

— A —

alternative, 5, 15, 16
approche
  algébrique, 29–60
  analytique, 71–228
  topologique, 61–68
attribut, 5, 16
  voir composant
aversion pour l'ambiguïté, 253
axiome
  archimédien, 38, 175
  de conservation d'échelle, 170
  d'élimination, 26, 101
    globale, 26
    lien entre (C_2) et Thomsen, 81, 116
    lien entre (C_m), (S_{m+1}) et (C_{m+1}), 85, 86–90, 117
    lien entre l'indépendance et la condition de Thomsen, 90–99, 116
    symétrique, 85
  d'équité, 235
  i-lien, 165
  d'indépendance, 23, 257

— B —

base d'une B-spline, 307, 310
biais, 290, 304–305
bi-matching, 297
B-spline, 305–310
  linéaire 306–308
  cubique, 308–310

— C —

capacité, 252
caractéristique de performance, 5
cardinalité, 43
comparaisons interpersonnelles d'utilités, 236
composant, 16
complétude, 18
condition d'élimination
  voir axiome d'élimination
condition nécessaire d'existence
  axiome archimédien, 38, 175
  axiome d'élimination, 26, 101
    globale, 26
    lien entre (C_2) et Thomsen, 81, 116
    lien entre (C_m), (S_{m+1}) et (C_{m+1}), 85, 86–90, 117
    lien entre l'indépdendance et la condition de Thomsen, 90–99, 116
    symétrique, 85
  complétude, 18
  condition de l'hexagone, 63
  condition de Reidemeister, 135
  condition de Thomsen, 24, 83

élargie, 80
lien avec (C_2), 81
indépendance, 23, 257
préordre large total, 20
transitivité, 19
condition de l'hexagone, 63
condition de Reidemeister, 135
condition de représentabilité de Debreu, 129
condition structurelle
voir hypothèse structurelle
condition de Thomsen, 24, 83
élargie, 80
lien avec (C_2), 81
connexité, 62
conséquence, 5, 9, 16
construction d'utilités
voir méthode de construction
courbe d'indifférence, 24
critère, 5

— D —

décision dans le risque, 246, 252
densité, 62
dictateur, 235
directement-unidimensionnellement-joignable, 168
dominance, 255
donnée fréquentiste, 245

— E —

échantillon imprécis, 247
ensemble équi-espacé, 125
espérance d'utilité (EU), 246, 252
généralisée (GEU), 253
essentialité, 43
état de la nature, 251
événement, 251

— F —

facteur, 5
fermé, 62
fonction de croyance, 252
fonction d'utilité
voir utilité
fonction sociale, 235

— G —

groupe, 31
archimédien, 32
commutatif, 31
strictement ordonné, 31

— H —

Hölder
voir théorème de Hölder
hypothèse structurelle
axiome de conservation d'échelle, 170
axiome d'équité, 235
axiome d'i-lien, 165
essentialité, 43
solvabilité
non restreinte, 35
restreinte, 41
restreinte locale, 141

— I —

i-lien, 162–166
i-relié, 163
indépendance, 23, 257

— M —

MADMAX, 279

matching, 288, 297
méthode de construction
par classement (“ranking”), 285
par comparaison 2 à 2, 284
par compensation (“trade-off”), 287
par dichotomie (“midpoint”), 286
par étalonnage, 285
par MAUT, 286
problème de biais, 290, 304–305
modèle de décision
utilité espérée (EU), 246, 252
utilité espérée généralisée (GEU), 253
prise de décision directe (DDM), 253
modélisation des préférences, 6
Möbius, 252

— N —

niveau de satisfaction, 6
nouvel axiome archimédien, 175

— O —

optimisme, 253
ordinalité, 121
ouvert, 62

— P —

pessimisme, 253
point médian, 283
préférence, 5, 15
modélisation, 6
relation, 17
préordre large total, 20
continu, 63
produit cartésien, 22
propriété archimédienne
voir axiome archimédien
propriété cardinale, 43
propriété ordinale, 121

— R —

relation de préférence, 17
risque, 246, 252

— S —

semi groupe local, positif, régulier, archimédien, 52
séparabilité, 62
séquence standard, 37
séquence sur-standard, 175
solvabilité
non restreinte, 35
restreinte, 41
restreinte locale, 141
spline, 300, 305–310
structure additive symétrique, 51

— T —

théorème d’existence
dimension 2, 39, 43, 120, 125, 126, 128, 129, 136, 141, 142
dimension 3, 175, 182, 192, 262–263
dimension n, 40, 45, 63, 159, 161, 180, 183
théorème de Hölder, 33, 53
théorème topologique central, 63
théorie de la décision, 5
Thomsen
voir condition de Thomsen
topologie, 62
produit, 63
transformation d’une utilité en une utilité additive, 135–141
transformée de Möbius, 252
transitivité, 19

— U —

unidimensionnellement-joignable, 169
unicité
    cardinale, 43
    ordinale, 121
utilité, 6, 17
    additive, 6, 21
    espérée (EU), 246, 252
    espérée généralisée (GEU), 253
    transformation d'une utilité en une
        utilité additive, 135–141

— V —

von Neumann-Morgenstern, 246

— X —

X-matching, 288

— Y —

Y-matching, 288