Théorie de l'utilité multi-attributs

Mohammed Abdellaoui
CNRS, GRID-ENSAM
Paris

Christophe Gonzales
LIP6 - université Paris 6
Paris

4 janvier 2013

Les décisions importantes pour les individus comme dans les organisations tiennent souvent compte de plusieurs objectifs. De l'achat d'une voiture familiale jusqu'au choix de la localisation d'une centrale nucléaire ou d'un aéroport, le décideur se détermine en fonction d'un certain nombre d'objectifs. Très souvent, le caractère multi-objectif des décisions importantes est révélé par des affirmations telles que ≪ nous acceptons de payer un peu plus pour avoir le confort ou le prestige de la marque A par rapport à la marque B ≫ dans le cas de l'achat d'une voiture ; ≪ nous acceptons d'allonger un peu plus le temps d'accès du voyageur à l'aéroport pour avoir plus de possibilités d'extension future ou moins de nuisances sonores pour les riverains ≫ dans le cas de la localisation d'un aéroport. Ces affirmations font intervenir des *arbitrages* (ou *tradeoffs*) entre différents objectifs du décideur. Ces arbitrages peuvent résulter soit d'une délibération introspective du décideur, soit d'un processus explicite, dit d'aide à la décision, au début duquel le décideur exprime la volonté de faire des *arbitrages cohérents* afin de prendre la ≪ meilleure ≫ décision possible.

Les premières tentatives d'aide à la décision avec objectifs multiples ou non remontent à la fin des années 1960 à travers les travaux de Raiffa et Edwards [Rai69, Edw71] qui ont donné naissance à l'*analyse de la décision* (*Decision Analysis*). Dans ces travaux, le modèle formel de référence fait appel à la représentation numérique des préférences du décideur sur l'ensemble des choix possibles grâce à une fonction numérique dite *fonction d'utilité*. L'idée de base d'une telle démarche étant que l'encodage (c'est-à-dire la construction) d'une fonction d'utilité dans un contexte de décision donné permettra d'affecter des ≪ scores ≫ ou utilités aux *actions potentielles* (c'est-à-dire les choix possibles) auxquel(le)s fait face le décideur. Ces scores permettront ensuite de classer les actions de la moins désirable à la plus désirable (ou vice-versa).

La possibilité de construire de tels scores nécessite cependant la vérification de deux conditions. La première consiste à expliciter les ≪ conditions de cohérence ≫ que doivent vérifier les préférences du décideur pour qu'elles soient numériquement représentables à l'aide d'une fonction d'utilité. La seconde condition concerne les autres contraintes au prix desquelles il devient possible de décomposer la fonction d'utilité multi-objectifs initiale en une ≪ combinaison simple » de fonctions d'utilités mono-objectif (on parle aussi de fonctions d'utilité *multi-attributs* et de fonctions d'utilité *mono-attribut*). Les limites des capacités cognitives du décideur rendent nécessaire l'utilisation de telles décompositions pour l'encodage des fonctions d'utilité. En effet, chaque individu ayant ses propres préférences, chaque décideur possède sa propre fonction d'utilité. Pour l'encoder, l'analyste (de la décision) va demander au décideur d'arbitrer entre deux alternatives et en déduire itérativement la fonction d'utilité recherchée. Or, de par la multiplicité des attributs, certains arbitrages peuvent être extrêmement complexes à établir d'un point de vue cognitif (Andersen et al. [AAW86] cite un exemple dans lequel les alternatives sont représentées par 25 attributs).

Le but de ce chapitre est d'étudier les formes les plus couramment utilisées. Plus précisément, nous aborderons dans les sections 2 et 3 la décomposition additive des fonctions d'utilité, la différence entre ces deux sections résidant dans les informations dont dispose le décideur : dans la section 2, le décideur effectuera ses arbitrages en connaissant précisément les conséquences de ses choix. En revanche, dans la section 3, lors de sa prise de décision, le décideur ne connaîtra pas avec certitude les conséquences de ses choix. Enfin, la section 4 traitera de la construction proprement dite des fonctions d'utilité multi-attributs, en particulier des techniques les plus récentes.

1 Introduction

1.1 Les fonctions d'utilité

Mathématiquement, modéliser des préférences est un problème relativement trivial. En effet, supposons qu'un décideur ait des préférences sur un ensemble de choix culinaire $X = \{$manger un gigot, manger un magret de canard, manger une tarte tatin, manger du foie gras$\}$, c'est-à-dire que pour tout couple d'éléments x, y de X, il puisse soit : i) juger ces éléments incomparables (par exemple, il peut être difficile d'affirmer que l'on préfère manger du magret à de la tarte tatin (ou vice-versa) car l'un est un plat de résistance et l'autre un dessert) ; soit ii) affirmer qu'il préfère l'un à l'autre ou bien qu'il est indifférent entre les deux plats x et y. Cela revient, mathématiquement, à représenter les préférences culinaires du décideur grâce à une relation binaire $\succsim$ sur $X \times X$, $x \succsim y$ signifiant « x est préféré ou indifférent à y ». Ainsi le fait que deux éléments x et y soient incomparables est traduit par (Non($x \succsim y$) et Non($y \succsim x$)) ; lorsque le décideur aime au moins autant x que y, cela correspond à $x \succsim y$, et préférer strictement x à y est exprimé par ($x \succsim y$ et Non($y \succsim x$)), ce que l'on abrège généralement de la manière suivante : $x \succ y$. Enfin, lorsque le décideur est indifférent entre x et y, c'est-à-dire qu'il aime autant x que y et inversement, on a ($x \succsim y$ et $y \succsim x$), que l'on abrège en $x \sim y$.

Toutefois, sans représentation numérique à l'aide de *fonctions d'utilité* (appelées aussi *utilités*), la relation $\succsim$ est souvent très difficile à manipuler. Le concept d'utilité est relativement simple : il s'agit d'utiliser une fonction $u : X \mapsto \mathbb{R}$ attachant à tout objet de l'ensemble de choix un nombre réel de telle sorte que plus ce dernier est élevé, plus l'objet est « préféré » par le décideur. Plus formellement, cela revient à énoncer :

$$\forall x, y \in X, \quad x \succsim y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y). \tag{1}$$

1.2 Choix dans le certain, l'incertain, le risque

D'une manière générale, il est admis que les préférences du décideur sur l'ensemble des alternatives possibles sont contingentes à ses préférences sur les conséquences possibles de ces choix. À titre d'illustration, Savage [Sav54, page14] donne l'exemple suivant : votre femme prépare une omelette. Elle a déjà cassé cinq œufs dans une assiette lorsque vous vous portez volontaire pour terminer la préparation. Il reste un sixième œuf intact et vous devez décider de ce que vous allez en faire. Vous avez trois alternatives : i) casser l'œuf dans l'assiette contenant les cinq autres œufs ; ii) le casser dans une autre assiette pour l'inspecter avant de le mélanger aux autres œufs ; iii) ne pas vous servir de cet œuf. Comment décider laquelle de ces options est la meilleure ? Eh bien tout simplement en analysant ce que chaque décision peut entraîner. Ainsi, si l'œuf est bon, l'option i) fournira une plus grande omelette, mais s'il est impropre à la consommation, les cinq autres œufs seront perdus. Si vous choisissez l'option ii) et que l'œuf est bon, vous aurez sali une autre assiette pour rien, etc. En analysant les conséquences de chaque alternative, vous pourrez juger laquelle d'entre elles vous paraît la meilleure.

Comme le montre l'exemple précédent, chaque alternative peut avoir plusieurs conséquences suivant que l'œuf est consommable ou non. Dans le jargon de la théorie de la décision, ces facteurs incertains (ici l'état de l'œuf) portent le nom d'*événements* et, tout comme en théorie des probabilités, les événements élémentaires jouent un rôle particulier et sont appelés *états de la nature*. À chaque état de la nature (œuf propre à la consommation ou non), le choix d'une alternative (option i), ii) ou iii)) va entraîner une et une seule conséquence. Donc, les alternatives peuvent être décrites par des ensembles de couples (événement,conséquence). C'est ce que l'on appelle un *acte*. Plus formellement, appelons A l'ensemble des alternatives à arbitrer, X l'ensemble de toutes les conséquences possibles et E l'ensemble des états de la nature. Un acte est une fonction $E \mapsto X$ qui, à chaque état $e \in E$, associe une conséquence dans X. Ainsi, on peut dire que l'acte f consistant à choisir l'option i) est tel que f(œuf bon) = « grande omelette », et f(œuf impropre) = « perte des six œufs ».

Revenons maintenant aux fonctions d'utilité. Nous avions vu qu'une telle fonction représente les préférences du décideur. Puisque, du point de vue cognitif du décideur, les alternatives peuvent être décrites par des actes, à la relation de préférence du décideur sur les alternatives correspond une relation de préférence sur les actes (voir Savage [Sav54] et von Neumann et Morgenstern [vNM44] pour une discussion plus technique sur le sujet). Appelons donc $\mathcal{A}$ l'ensemble des actes et $\succsim_{\mathcal{A}}$ la relation de préférence sur les actes. Une fonction d'utilité représentant $\succsim_{\mathcal{A}}$ est alors une fonction U de $\mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}$ telle que $\text{acte}_1 \succsim_{\mathcal{A}} \text{acte}_2 \Leftrightarrow U(\text{acte}_1) \geq$

$U(\text{acte}_2)$.

Bien entendu, les préférences sur les actes révèlent à la fois les préférences du décideur sur les conséquences — il préférera sans doute une grosse omelette à la perte des six œufs — et sa croyance dans la plausibilité d'apparition de l'événement. Ainsi, si le décideur sait que sa femme est obsédée par les dates limites de consommation, le couple (œuf impropre, six œufs perdus) sera peu pris en considération dans l'évaluation de l'option i), tandis qu'il le sera beaucoup plus si le décideur sait que sa femme est très étourdie. La fonction d'utilité U doit donc prendre en compte la plausibilité des événements. Or ceci n'est possible qu'à travers les connaissances qu'a le décideur de ces événements. À différents types de connaissances vont correspondre différents modèles pour U. Parmi les trois modèles les plus importants figurent les suivants :

- *la décision dans le certain* : quel que soit l'état de la nature, un acte donné a toujours la même conséquence. Ce peut être par exemple le cas lorsqu'un décideur choisit un menu plutôt qu'un autre au restaurant : les conséquences sont parfaitement déterminées par le menu choisi.

  Appelons $\succsim_{\mathcal{A}}$ la relation de préférence sur les actes, et $\succsim$ celle sur les conséquences. Supposons que $\succsim_{\mathcal{A}}$ et $\succsim$ soient représentées respectivement par les fonctions d'utilité $U : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}$ et $u : X \mapsto \mathbb{R}$. Appelons x_{acte} la conséquence de acte. Alors, le choix dans le certain revient à énoncer que : $\forall \text{acte} \in \mathcal{A},\ U(\text{acte}) = u(x_{\text{acte}})$.
- *la décision dans le risque* : ici, une alternative donnée peut avoir plusieurs conséquences en fonction de la réalisation d'un événement ou d'un autre. De plus, on suppose qu'il existe une distribution « objective » de probabilité connue sur les événements. C'est le cas lorsqu'un décideur choisit de jouer ou de ne pas jouer à un jeu comme le keno de la Française des Jeux : il connaît les probabilités d'avoir tant de numéros gagnants ainsi que le gain que cela rapportera.

  Le modèle d'utilité espérée, décrit ci-dessous, est l'outil standard de décision dans le risque. Il a été axiomatisé par von Neumann et Morgenstern [vNM44]. Puisqu'à chaque événement est associé une probabilité et une conséquence, chaque conséquence possède une probabilité. Ainsi, les actes peuvent être représentés comme des ensembles finis de couples (probabilité d'une conséquence, conséquence), que l'on appelle des *loteries*. Supposons qu'un acte corresponde à la loterie $(x^1, p_1; \ldots; x^n, p_n)$, autrement dit cet acte va avoir pour conséquence x^1 avec une probabilité p_1, x^2 avec une probabilité p_2, etc. Alors, l'axiomatique de von Neumann-Morgenstern implique l'existence d'une fonction U telle que $U(\text{acte}) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(x^i)$, où u est la restriction de U aux conséquences.
- *la décision dans l'incertain* : C'est une situation un peu similaire à la précédente ; simplement on ne suppose pas l'existence d'une distribution de probabilité sur les événements, mais on dérive celle-ci d'un certain nombre d'axiomes (cf. Savage : [Sav54]) résultant de la « rationalité » du décideur. C'est par exemple le cas si vous décidez de jouer ou de ne pas jouer au loto sportif : vous pariez sur les résultats de futurs matchs de football. L'approche objectiviste des probabilités ne pouvant s'appliquer

ici car vous n'avez pas à votre disposition une séquence infinie de résultats de matchs, les probabilités utilisées dans la décision dans l'incertain sont subjectives, c'est-à-dire estimées par le décideur.

Dans ce modèle, le décideur associe à chaque état de la nature une probabilité (subjective) p_i et l'utilité d'un acte est, comme dans le modèle de von Neumann-Morgenstern, $U(\text{acte}) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(x^i)$.

Dans la suite de ce chapitre, nous nous placerons dans le cadre de l'un ou l'autre de ces modèles et nous nous intéresserons à la fonction d'utilité sur les conséquences, autrement dit u.

1.3 Les fonctions d'utilité multi-attributs

En pratique, la multiplicité des objectifs du décideur conduit à décrire les conséquences possibles grâce à divers *attributs*, c'est-à-dire que l'ensemble des conséquences est un espace multidimensionnel. Ainsi, le décideur désirant acheter une voiture peut avoir comme ensemble de choix $X = \{$Opel Corsa, Renault Clio, Peugeot 206$\}$, mais si ses *critères de choix* (les attributs) sont, pour simplifier, la cylindrée, la marque et le prix, on peut aussi exprimer l'ensemble X sous la forme $X = \{$(1,2l ; Opel ; 11400 €), (1,2l ; Renault ; 11150 €), (1,1l ; Peugeot ;11600 €)$\}$. Toute fonction d'utilité sur cet ensemble vérifie donc l'équation ci-dessous :

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in X, \quad x \succsim y \Leftrightarrow u(x_1, x_2, x_3) \geq u(y_1, y_2, y_3).$$

C'est ce que l'on appelle une fonction d'utilité *multi-attributs*.

Bien entendu, pour chaque domaine d'application, la signification des attributs et de la relation $\succsim$ sont différents. Par exemple, Wakker (1989, p.28) et Bleichrodt [Wak89, Ble96] citent, entre autres, les domaines suivants :

- dans la théorie du consommateur, les attributs représentent des biens de consommation, et, pour $x, y \in X$, $x \succsim y$ signifie que le consommateur pense que le panier de biens x est au moins aussi bon que le panier y ;
- dans la théorie du producteur, $x \in X$ est un vecteur d'inputs et $x \succsim y$ signifie que x fournit au moins autant d'outputs que y. La fonction d'utilité est alors appelée « fonction de production » ;
- dans les théories de choix social, x est une allocation, ou une situation sociale, chaque attribut représente la richesse d'un agent, ou d'un joueur, et $x \succsim y$ signifie que la richesse du groupe x est supérieure à celle du groupe y ;
- dans la théorie de la décision médicale, en particulier dans la théorie des QALYs (*Quality Adjusted Life Years*), le premier attribut représente le niveau de qualité de vie que l'on peut espérer après avoir subi un certain traitement médical, et le second correspond au nombre d'années que l'on peut espérer vivre avec ce niveau de vie.

Bien entendu, cette liste n'est pas exhaustive et on peut associer à chaque situation les attributs qui lui correspondent. Keeney et Raiffa [KR93] montrent comment cela peut être réalisé en pratique (« structuration des objectifs »).

1.4 La décomposition des fonctions d'utilité

Lorsque la fonction d'utilité sur les conséquences, u, est connue, il est très facile de l'exploiter sur ordinateur. Il suffit simplement d'appliquer les formules énoncées par von Neumann-Morgenstern ou bien Savage. De simples logiciels d'optimisation permettent alors de déterminer les actes optimaux pour le décideur. En revanche, la construction effective de u pose de nombreux problèmes pratiques. En effet, alors qu'il n'est généralement pas compliqué de construire une fonction d'utilité mono-attribut, la construction d'une fonction d'utilité multi-attributs nécessite, en raison des capacités cognitives limitées des décideurs, la décomposition de celle-ci en une combinaison d'utilités mono-attribut plus faciles à encoder. Considérons par exemple une personne désireuse d'acquérir un ordinateur, les attributs parties prenantes de ses préférences étant la marque, la puissance du processeur, la capacité du disque dur, la taille du moniteur, la taille de la mémoire ainsi que le prix. On comprend bien que le décideur peut comparer aisément les sextuplets (Dell ; 1,1GHz ; 30GO ; 17" ; 128MO ; 1000 €) et (Apple ; 1,1GHz ; 30GO ; 17" ; 128MO ; 1000 €) car seule la marque diffère entre ces deux machines. Par contre, d'un point de vue cognitif, il est beaucoup plus délicat de se prononcer entre (Dell ; 1,1GHz ; 30GO ; 17" ; 128MO ; 1000 €) et (Apple ; 850MHz ; 40GO ; 15" ; 256MO ; 900 €) car ces deux machines ont des caractéristiques vraiment très différentes.

C'est pourquoi, d'une manière générale, on ne cherche pas à construire directement une fonction d'utilité représentant les préférences du décideur, mais on essaye plutôt d'en construire une d'une forme particulière dont on sait que sa construction se révèlera ≪ réalisable ≫ cognitivement. De multiples formes ont été décrites dans la littérature, dont voici certainement ci-dessous les principales. Dans cette liste, on note X_i l'ensemble des valeurs que peut prendre le $i^{\text{ème}}$ attribut, et on suppose que $X \subseteq \prod_{i=1}^n X_i$. Les axiomatiques assurant l'existence de ces formes différant suivant que l'on se place dans le choix dans le certain, ou bien dans le contexte de l'espérance d'utilité (EU), c'est-à-dire lorsque $U(\cdot) = \sum_j p_j u(x^j)$ (comme dans von Neumann-Morgenstern ou Savage), le contexte d'application est indiqué pour chaque référence de la liste.

1. la décomposition additive : il existe des fonctions $u_i : X_i \mapsto \mathbb{R}$ telles que $u(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n u_i(x_i)$. Parmi les ouvrages de référence pour cette décomposition figurent [Fis70, chapitres 4 et 5], [KLST71, chapitre 6], [KR93, chapitre 3], [LT64], [Deb60] et [Wak89, chapitre 3] pour le certain ; et [Fis70, chapitre 11] et [KR93, chapitres 5 et 6] dans le cadre de EU.

2. la décomposition multiplicative : il existe des fonctions $u_i : X_i \mapsto \mathbb{R}$ telles que $u(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n u_i(x_i)$. Cette décomposition est proche de la précédente et s'y ramène en utilisant une échelle logarithmique dans le cas des $u_i \geq 0$.

3. la décomposition multilinéaire (on dit aussi polynômiale ou encore multiplicative-additive) : il existe des fonctions $u_i : X_i \mapsto \mathbb{R}$ et pour tout $j \in J$, ensemble des parties de $\{1, \ldots, n\}$, il existe $\pi_j \in \mathbb{R}$ tels que $u(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j \in J} \pi_j \prod_{k \in j} u_k(x_k)$. Cette décomposition est présentée dans [KLST71,

chapitre 7], [Fis75] et [FR91] pour le certain ; et dans [KR93, chapitres 5 et 6] et [Far81] pour EU.

4. la structure décomposable : il existe des fonctions $u_i : X_i \mapsto \mathbb{R}$ et une fonction $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ telles que $u(x_1, \ldots, x_n) = F(u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n))$. [BP02] et [KLST71, chapitre 7] étudient cette représentation dans le certain. Cette structure est plus générale que les précédentes, mais elle présente un inconvénient majeur : l'unicité des u_i et de F n'est pas assurée, ce qui, comme nous le verrons plus loin, peut poser des problèmes de construction.
5. la décomposition additive non transitive : il existe des fonctions $v_i : X_i \times X_i \mapsto \mathbb{R}$ telles que $x \succsim y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n v_i(x_i, y_i)$. Cf. [Fis91] ou [BP02] dans le certain ; et [Nak90] pour une généralisation du critère EU. Parmi les fonctions additives non transitives, se trouve le cas particulier de la décomposition additive par différence : il existe des fonctions $u_i : X_i \mapsto \mathbb{R}$ et des fonctions $F_i : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telles que $x \succsim y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n F_i(u_i(x_i) - u_i(y_i))$. Cf. [Tve69] et [BP02] dans le certain.

Dans la suite de ce chapitre, nous nous concentrerons sur les modèles 1 (décomposition dans le certain) et 3 (dans l'incertain). Voyons maintenant quel est le prix à payer pour que de telles décompositions représentent fidèlement les préférences du décideur.

2 Décomposition dans le certain

Dans cette section, nous nous plaçons dans un cadre où chaque acte ne peut avoir qu'une seule conséquence, indépendante de l'état de la nature qui prévaut. Nous supposerons en outre que l'ensemble des conséquences X est un produit cartésien de l'ensemble des attributs X_i, autrement dit que $X = \prod_{i=1}^n X_i$. Dans l'exemple de l'acquisition des voitures mentionné dans l'introduction, nous aurons donc $X_1 = \{1,1\text{l}; 1,2\text{l}\}$, $X_2 = \{\text{Opel}, \text{Renault}, \text{Peugeot}\}$, $X_3 = \{11400\,€, 11150\,€, 11600\,€\}$ et $X = X_1 \times X_2 \times X_3$. En particulier, cela implique que, cognitivement, l'on n'exclut pas l'existence d'une voiture (1,1l ; Opel ; 11600 €), même si, actuellement, cette voiture n'existe pas. Nous verrons par la suite comment lever, partiellement, cette restriction. Elle ne pourra toutefois pas être levée complètement : c'est l'un des prix à payer pour obtenir la décomposabilité des fonctions d'utilité.

Dans le reste de cette section, nous aborderons le problème de la décomposabilité additive de u, tout d'abord lorsque $X = X_1 \times X_2$, puis lorsque l'ensemble des conséquences est décrit par plus de deux attributs, et enfin lorsque $X \subsetneq \prod_{i=1}^n X_i$. Plus exactement, nous rechercherons des conditions que doit satisfaire la relation de préférence $\succsim$ du décideur sur les conséquences pour qu'il existe des fonctions $u_i : X_i \mapsto \mathbb{R}$ telles que :

$$\text{a)}\ \ \forall x, y \in \prod_{i=1}^{n} X_i,\ x \succsim y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y) \text{ et}$$

$$\text{b)}\ \ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i,\ u(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i).$$

Nous verrons en particulier que l'unicité des fonctions u_i est tout à fait singulière et sera très utile lors de leur construction.

2.1 La décomposition additive en dimension 2

Considérons un problème de décision dans lequel les conséquences possibles des actes sont décrites par deux attributs, autrement dit $X = X_1 \times X_2$, et recherchons quelques conditions nécessaires pour qu'il existe u_1 et u_2 telles que :

$$\forall x, y \in X_1 \times X_2,\ x \succsim y \Leftrightarrow u_1(x_1) + u_2(x_2) \geq u_1(y_1) + u_2(y_2). \tag{2}$$

La première, et la plus évidente de ces conditions, est que $\succsim$ soit au moins représentable par une fonction d'utilité — pas obligatoirement additive — $u : X_1 \times X_2 \mapsto \mathbb{R}$. Debreu [Deb54] a énoncé des conditions nécessaires et suffisantes sur $\succsim$ pour assurer cela. En particulier, parmi les conditions nécessaires, on trouve la complétude de $\succsim$, c'est-à-dire que quels que soient les conséquences x et y, on a soit $x \succsim y$, soit $y \succsim x$. En effet, si $\succsim$ est représentable par u, alors $u(x)$ et $u(y)$ sont des nombres réels et, donc, soit $u(x) \geq u(y)$, soit $u(y) \geq u(x)$. Par conséquent, d'après l'équation (2), soit $x \succsim y$, soit $y \succsim x$. Pour la même raison, $\geq$ étant une relation transitive, $\succsim$ doit l'être aussi (si $x \succsim y$ et $y \succsim z$, alors $x \succsim z$). En conclusion, pour être représentable par une fonction d'utilité, $\succsim$ doit être un préordre large total (c'est une condition nécessaire mais non suffisante, cf. Debreu [Deb54]) :

Définition 1 (préordre large total): *Un préordre large total $\succsim$ est une relation binaire transitive ($[x \succsim y$ et $y \succsim z] \Rightarrow x \succsim z$) et complète ($\forall x, y \in X$, soit $x \succsim y$, soit $y \succsim x$).*

Nous allons maintenant examiner quelques propriétés spécifiques aux utilités additives. Tout d'abord, s'il existe $u = u_1 + u_2$ représentant $\succsim$, alors, quels que soient $x_1, y_1 \in X_1$ et $x_2, y_2 \in X_2$,

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) \succsim (y_1, x_2) &\Leftrightarrow u_1(x_1) + u_2(x_2) \geq u_1(y_1) + u_2(x_2)\\ &\Leftrightarrow u_1(x_1) \geq u_1(y_1)\\ &\Leftrightarrow u_1(x_1) + u_2(y_2) \geq u_1(y_1) + u_2(y_2)\\ &\Leftrightarrow (x_1, y_2) \succsim (y_1, y_2).\end{aligned}$$

C'est ce que l'on appelle l'indépendance :

Axiome 1 (indépendance): $\forall x_1, y_1 \in X_1$ *et* $\forall x_2, y_2 \in X_2$,
$(x_1, x_2) \succsim (y_1, x_2) \Leftrightarrow (x_1, y_2) \succsim (y_1, y_2)$,
$(x_1, x_2) \succsim (x_1, y_2) \Leftrightarrow (y_1, x_2) \succsim (y_1, y_2)$.

Représentons dans l'espace $X_1 \times X_2$ les courbes d'indifférence de $\succsim$, c'est-à-dire les courbes dont tous les points sont indifférents entre eux. Alors, si $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$, l'axiome d'indépendance signifie simplement que si un point (par exemple A) est préféré à un autre point sur une même ligne verticale (disons C), alors pour

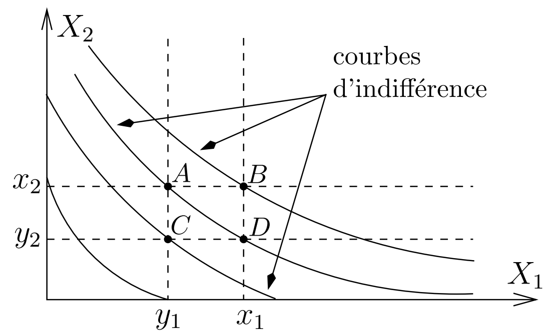

Figure 1 – Courbes d'indifférence de $\succsim$ et indépendance

tous les couples de points B et D formant un rectangle $ABCD$ (cf. la figure 1), B doit aussi être préféré à D. De la même manière, si B est préféré à A, alors pour tous les couples de points C, D, formant un rectangle $ABCD$, D doit être préféré à C.

L'axiome d'indépendance est d'une importance capitale pour la décomposabilité additive. Pour s'en convaincre, il suffit de se placer dans un système de coordonnées légèrement différent : soit $u(x_1, x_2) = u_1(x_1) + u_2(x_2)$ une fonction d'utilité additive représentant $\succsim$. Lorsque l'on fixe x_2, u ne dépend plus que de son premier paramètre ; appelons $u_{[x_2]}$ la fonction ainsi obtenue en fixant la valeur du deuxième paramètre à x_2, alors $u_{[x_2]}(x_1) = u(x_1, x_2)$ est une fonction de $X_1 \mapsto \mathbb{R}$. On peut donc la représenter dans le repère classique $X_1 \times \mathbb{R}$. C'est ce que propose la figure 2.

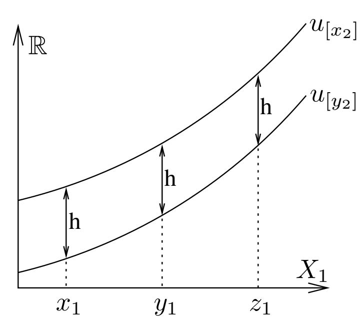

Figure 2 – Qu'est-ce qu'une fonction d'utilité additive ?

La décomposition additive de u implique que :

$$\forall x_1 \in X_1,\ \forall x_2, y_2 \in X_2,\ u(x_1, x_2) - u(x_1, y_2) = u_2(x_2) - u_2(y_2).$$

Cette valeur ne dépendant pas de x_1, sur la figure 2, les graphes des différentes fonctions $u_{[x_2]}$, $x_2 \in X_2$, se déduisent les uns des autres par des translations verticales. Réciproquement, si les fonctions $u_{[x_2]}$, $x_2 \in X_2$, se déduisent les unes des autres par translation verticale, alors u est additive. En effet, dans ce cas, pour $x_2^0 \in X_2$ fixé, $\forall (x_1, x_2) \in X$, $u(x_1, x_2) = u(x_1, x_2^0) +$ constante $h(x_2)$. Or, pour x_2^0 fixé, $u(x_1, x_2^0)$ ne dépend que de x_1. Donc $u(x_1, x_2)$ est la somme d'une fonction de x_1, à savoir $u(x_1, x_2^0)$, et d'une fonction de x_2, $h(x_2)$. Par conséquent, la décomposabilité additive peut s'exprimer grâce à la proposition suivante :

Proposition 1 (décomposabilité additive): *Soit $\succsim$ une relation de préférence sur $X_1 \times X_2$ représentable par une fonction d'utilité u. Alors u est additive si et seulement si, pour tous $x_2, y_2 \in X_2$, le graphe de $u_{[x_2]}$ dans le repère $X_1 \times \mathbb{R}$ se déduit de celui de $u_{[y_2]}$ par une translation verticale.*

Mais revenons à l'axiome d'indépendance : $(x_1, x_2) \succsim (x_1, y_2) \Leftrightarrow (y_1, x_2) \succsim (y_1, y_2)$ se traduit, en termes d'utilités, par $u_{[x_2]}(x_1) \geq u_{[y_2]}(x_1) \Leftrightarrow u_{[x_2]}(y_1) \geq u_{[y_2]}(y_1)$. Cela signifie que si le graphe de $u_{[x_2]}$ est ≪ au dessus ≫ de celui de $u_{[y_2]}$ pour un point x_1 donné, il doit encore l'être pour tous les autres points de X_1. Or, si les courbes $u_{[\cdot]}$ sont suffisamment serrées les unes par rapport aux autres, une légère variation de hauteur entre deux courbes — qui implique que u n'est pas additive — résultera immanquablement en une intersection de deux courbes différentes, ce que, précisément, exclut l'axiome d'indépendance.

Sous certaines conditions, on peut montrer que, lorsque l'ensemble des conséquences possède au moins trois attributs, les courbes deviennent ≪ suffisamment serrées les unes par rapport aux autres ≫ pour que l'indépendance entraîne, presque à elle seule, la décomposabilité additive. Malheureusement, lorsque $X = X_1 \times X_2$, ce n'est pas le cas, et l'on doit faire appel à d'autres conditions, comme la condition de Thomsen : supposons, là encore, qu'il existe une fonction d'utilité additive u. Alors, $\forall x_1, y_1, z_1 \in X_1$, $\forall x_2, y_2, z_2 \in X_2$,

$$\begin{array}{l}(x_1, z_2) \sim (z_1, y_2) \Leftrightarrow u_1(x_1) + u_2(z_2) = u_1(z_1) + u_2(y_2) \\ (z_1, x_2) \sim (y_1, z_2) \Leftrightarrow u_1(z_1) + u_2(x_2) = u_1(y_1) + u_2(z_2)\end{array}$$

En sommant les deux égalités à droite des signes d'équivalence on obtient :

$$u_1(x_1) + u_2(z_2) + u_1(z_1) + u_2(x_2) = u_1(z_1) + u_2(y_2) + u_1(y_1) + u_2(z_2),$$

ce qui, en éliminant les termes se retrouvant de part et d'autre du signe d'égalité, nous donne $u_1(x_1) + u_2(x_2) = u_1(y_1) + u_2(y_2)$, et par conséquent $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$. D'où la condition suivante :

Axiome 2 (condition de Thomsen): $\forall x_1, y_1, z_1 \in X_1$, $\forall x_2, y_2, z_2 \in X_2$, $[(x_1, z_2) \sim (z_1, y_2)$ *et* $(z_1, x_2) \sim (y_1, z_2)] \Rightarrow (x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$.

En rajoutant la condition de Thomsen à l'indépendance, si l'on a suffisamment de relation d'indifférences ($\sim$), on peut parvenir à faire en sorte que les distances verticales entre les différentes courbes $u_{[\cdot]}$ soient constantes. La condition de Thomsen peut être illustrée graphiquement dans l'espace des courbes d'indifférence : elle précise que si $A \sim B$ et $C \sim D$ alors $E \sim F$.

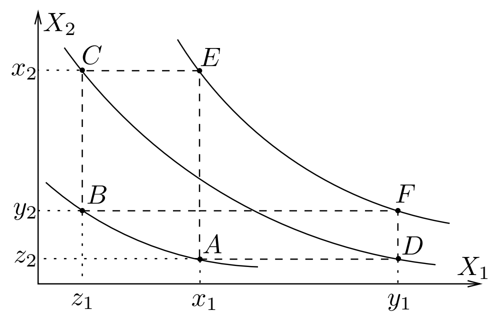

FIGURE 3 – La condition de Thomsen

Il reste toutefois encore un problème important à régler pour assurer la décomposabilité additive : il faut que $\succsim$ n'ait pas « beaucoup plus » de courbes d'indifférence qu'il n'existe de nombres réels. En effet, puisque tous les points d'une même courbe d'indifférence sont, par définition, indifférents entre eux, ils doivent avoir la même utilité, autrement dit, on leur associe un même nombre réel. Mais s'il existe beaucoup plus de courbes d'indifférence qu'il n'existe de nombres réels, comment va-t-on faire pour associer à chaque courbe un nombre différent ? L'axiome suivant, de type archimédien, va nous permettre de garantir que ce genre de situation n'apparaîtra jamais. Supposons que $\succsim$ soit représentable par une fonction d'utilité additive u. Soient deux éléments de X, (x_1^0, x_2^0) et (x_1^0, x_2^1), tels que

$$(x_1^0, x_2^0) \prec (x_1^0, x_2^1).$$

S'il existe $x_1^1 \in X_1$ tel que $(x_1^1, x_2^0) \sim (x_1^0, x_2^1)$ alors, en terme de fonctions d'utilité, cette relation d'indifférence est équivalente à

$$u_1(x_1^1) = u_1(x_1^0) + (u_2(x_2^1) - u_2(x_2^0)).$$

Posons $\alpha = u_2(x_2^1) - u_2(x_2^0)$. Puisque u représente $\succsim$, $\alpha > 0$. De plus, l'existence même d'une fonction d'utilité additive garantit que l'axiome d'indépendance est vérifié. Donc, comme X est un produit cartésien, (x_1^1, x_2^1) appartient à X et vérifie :

$$(x_1^1, x_2^0) \prec (x_1^1, x_2^1).$$

On peut alors réitérer le processus : s'il existe $x_1^2 \in X_1$ tel que $(x_1^2, x_2^0) \sim (x_1^1, x_2^1)$, alors

$$u_1(x_1^2) = u_1(x_1^1) + \alpha = u_1(x_1^0) + 2\alpha.$$

Par récurrence, on crée une séquence, dite standard, $\{x_1^0, x_1^1, \ldots, x_1^k\}$, telle que $u_1(x_1^k) = u_1(x_1^0) + k\alpha$. Aussi, puisque α est strictement supérieur à 0, lorsque k tend vers $+\infty$, $u_1(x_1^k)$ doit tendre vers $+\infty$. S'il existait un élément $z \in X$ tel que, quel que soit k, $(x_1^k, x_2^0) \prec z$, alors l'utilité de z devrait être égale à $+\infty$, ce qui est bien évidemment impossible. Par conséquent, l'axiome suivant est nécessaire à la décomposabilité additive :

Définition 2 (séquence standard par rapport au 1$^{\text{er}}$ attribut): *Pour tout ensemble d'entiers consécutifs (positifs ou négatif, fini ou infini), N, un ensemble $\{x_1^k : x_1^k \in X_1, k \in N\}$ est une séquence standard par rapport au premier attribut si et seulement si Non$((x_1^0, x_2^0) \sim (x_1^0, x_2^1))$ et $(x_1^k, x_2^1) \sim (x_1^{k+1}, x_2^0)$ $\forall k, k+1 \in N$. On dit que la séquence admet pour base (ou encore, est relative à) $\{x_2^0; x_2^1\}$. Des définitions analogues existent pour les autres attributs.*

Axiome 3 (archimédien): *Toute séquence standard bornée est finie, c'est-à-dire que si (x_1^k) est une séquence standard de base $\{x_2^0; x_2^1\}$ telle qu'il existe $y, z \in X$ tels que $z \precsim (x_1^k, x_2^0) \precsim y$ $\forall k \in N$, alors la séquence (x_1^k) est de cardinal fini.*

La figure 4 montre l'interprétation géométrique de cette propriété : la cons-

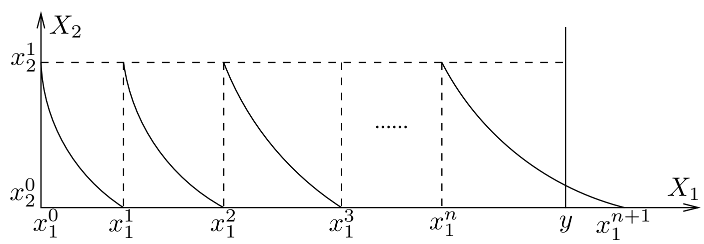

FIGURE 4 – La condition archimédienne

truction de la séquence standard consiste à partir du point inférieur gauche. Si l'on se déplace verticalement, lorsqu'on atteint la ligne horizontale en pointillés, on a augmenté l'utilité de $\alpha > 0$. Lorsque l'on suit les courbes en trait plein (ce sont les courbes d'indifférences), l'utilité reste constante. Par conséquent, la suite d'actions déplacement vertical puis descente le long d'une courbe d'indifférence permet de construire une séquence de points (x_1^k) dont l'utilité augmente toujours de α : c'est une séquence standard.

Pour pouvoir utiliser l'axiome archimédien, il faut avoir la possibilité de construire des séquences standard, or cela ne peut, bien évidemment, se faire que s'il existe $x_2^1 \succ x_2^0$ et $x_1^1 \succ x_1^0$. Aussi, l'axiome suivant doit-il être associé à l'axiome archimédien :

Axiome 4 (essentialité): *X_1 est essentiel si et seulement s'il existe $a_1, b_1 \in X_1$, et $x_2 \in X_2$ tels que $(a_1, x_2) \succ (b_1, x_2)$.*
Des axiomes similaires existent pour les autres attributs.

L'axiome archimédien et la condition de Thomsen apportent énormément de structure à l'ensemble des conséquences. Malheureusement, pour être utiles dans leur forme actuelle, ils requièrent que beaucoup de points de l'espace X soient indifférents entre eux. Lorsque ce n'est pas le cas, ces axiomes deviennent inutiles et on ne peut parvenir à la décomposabilité additive. Ainsi, lorsque $X = \mathbb{R} \times \{0, 2, 4, 6\}$ et que $\succsim$ est représentable par la fonction d'utilité :

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2 & \text{si} \quad x_2 \leq 4 \\ 0,5(x_1 \bmod 2)^2 + \lfloor x_1/2 \rfloor + 6,5 & \text{si} \quad x_2 = 6 \end{cases}$$

Il n'y a pas suffisamment d'indifférences et, bien que l'axiome d'indépendance soit vérifié, la condition de Thomsen, elle, ne l'est pas. De la même manière, si $X = [0, 2] \times \mathbb{N}$ et si $\succsim$ vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{l} \succsim \text{ est représentable par } u(x_1, x_2) = x_1 + 2^{x_2} \text{ sur } [0, 2] \times \mathbb{N}^*, \\ \succsim \text{ est représentable par } u(x_1, x_2) = x_1 \text{ sur } [0, 1] \times \{0\}, \\ (x_1, 0) \succ (y_1, y_2) \ \forall x_1, y_1 \in [0, 2] \text{ et } \forall y_2 \neq 0, \end{array}$$

alors l'axiome archimédien est totalement inutile car il est impossible de construire des séquences standard de plus de deux éléments, et il n'existe pas de fonction d'utilité additive représentant $\succsim$. Afin de redonner tout leur sens à ces deux axiomes, nous allons exiger que l'axiome suivant soit aussi vérifié. Il entraînera l'existence d'un nombre incalculable de relations d'indifférence :

Axiome 5 (solvabilité (restreinte) par rapport au 1er attribut):
$\forall y_1^0, y_1^1 \in X_1$, $\forall y_2 \in X_2$ et $\forall x \in X$, si $(y_1^0, y_2) \precsim x \precsim (y_1^1, y_2)$, alors il existe $z_1 \in X_1$ tel que $x \sim (z_1, y_2)$.
Des axiomes analogues existent pour les autres attributs.

La solvabilité restreinte peut s'interpréter graphiquement d'une manière très simple en dimension 2, comme le montre la figure 5 : si (y_1^0, y_2) et (y_1^1, y_2) sont de part et d'autre de la courbe d'indifférence sur laquelle se trouve x, alors la droite passant par (y_1^0, y_2) et (y_1^1, y_2) intersecte la courbe d'indifférence.

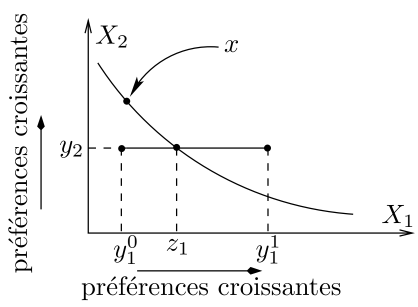

FIGURE 5 – La solvabilité restreinte

Ces axiomes, combinés entre eux, sont suffisamment puissants pour engendrer la représentabilité additive de $\succsim$, comme le montre la proposition suivante (cf. Krantz et al. [KLST71, chapitre 6]) :

Proposition 2 (existence et unicité d'utilités additives): *Soit $X = X_1 \times X_2$ un ensemble de conséquences, et soit $\succsim$ une relation binaire sur $X \times X$ vérifiant la solvabilité restreinte par rapport à X_1 et X_2. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\succsim$ est un préordre large total vérifiant la condition de Thomsen et, pour chaque attribut, l'axiome d'indépendance, l'essentialité ainsi que l'axiome archimédien ;*
2. *il existe une fonction d'utilité additive $u = u_1 + u_2$ représentant $\succsim$. De plus, celle-ci est unique à une transformation affine strictement positive près. Autrement dit, s'il existe une autre utilité additive $v = v_1 + v_2$, alors il existe $\alpha > 0$ et $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ tels que $v_1(\cdot) = \alpha u_1(\cdot) + \beta_1$ et $v_2(\cdot) = \alpha u_2(\cdot) + \beta_2$.*

Comme on l'a vu précédemment, l'assertion 2 implique la 1. Pour la réciproque, l'intuition de cette proposition est la suivante (cf. la figure 6) : on part

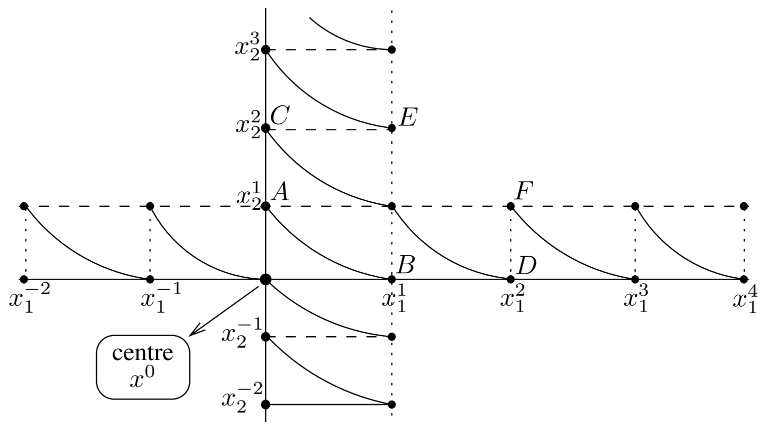

Figure 6 – Intuitions de la proposition 2

d'un point quelconque $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ de X et on lui affecte une utilité égale à 0. Par essentialité, il existe $x_2^1 \succ x_2^0$. Au point (x_1^0, x_2^1), on associe une utilité égale à 1. En utilisant l'axiome archimédien et la solvabilité, on construit une séquence (x_1^k) avec $u_1(x_1^k) = k$. De la même manière, on peut construire une séquence standard verticale de base $\{x_1^0; x_1^1\}$, appelons-la (x_2^r), telle que $u_2(x_2^r) = r$. Grâce à la condition de Thomsen, on peut s'assurer que ce que l'on a construit est cohérent puisque, si le décideur est indifferent entre A et B, et entre C et D, il doit l'être aussi entre E et F, et le principe de construction assure que les utilités associées à E et F sont précisément égales. Plus généralement, il nous assure que l'on a bien construit une utilité sur l'ensemble des points d'une grille (x_1^k, x_2^r). Deux cas peuvent alors se présenter : soit cette grille représente l'ensemble des conséquences X, et l'on a construit une utilité additive représentant $\succsim$ sur X, soit il existe des points dans X en dehors de cette grille. Dans ce cas, on raffine le modèle en doublant le maillage : dans le principe, on s'arrange pour trouver un point $(x_1^{1/2}, x_2^{1/2})$ tel que, dans les séquences standard de base $\{x_2^0; x_2^{1/2}\}$ et $\{x_1^0; x_1^{1/2}\}$, un élément sur deux correspond à un de ceux des séquences (x_1^k) et (x_2^r) définies précédemment. On en déduit alors que $u_1(x_1^{1/2}) = u_2(x_2^{1/2}) = 1/2$. Et on recommence ainsi jusqu'à ce que l'on ait défini une utilité pour tous les points de l'espace. Cette technique est en particulier utilisée par Wakker [Wak89].

2.2 Extension de l'additivité en dimension 2

Nous allons maintenant voir brièvement deux extensions de la sous-section précédente, à savoir la décomposabilité additive pour des ensembles de conséquences de plus de deux attributs, et le cas où X n'est pas un produit cartésien, mais seulement un sous-ensemble d'un produit cartésien.

Il y a très peu de différences entre la décomposabilité additive pour deux attributs et pour plus de deux attributs. La principale est que les courbes $u_{[\cdot]}$, qui n'étaient pas obligatoirement très sérrées les unes par rapport aux autres, vont le devenir obligatoirement en dimension ≥ 3. Ainsi, la condition de Thomsen devient inutile : elle est impliquée par les autres axiomes. Ces derniers perdurent et leur expression est adaptée à la dimension de X. Seule l'indépendance peut être adaptée de plusieurs manières :

Axiome 6 (indépendance ou indépendance en coordonnées):
$\forall i,\ \forall z_i, t_i \in X_i$ *et* $\forall x_j, y_j \in X_j,\ j \neq i,$

$$\begin{aligned} & (x_1, \ldots, x_{i-1}, z_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \succsim (y_1, \ldots, y_{i-1}, z_i, y_{i+1}, \ldots, y_n) \\ \Leftrightarrow & (x_1, \ldots, x_{i-1}, t_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \succsim (y_1, \ldots, y_{i-1}, t_i, y_{i+1}, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

ou

Axiome 7 (séparabilité faible):
$\forall i,\ \forall z_i, t_i \in X_i$ *et* $\forall x_j, y_j \in X_j,\ j \neq i,$

$$\begin{aligned} & (x_1, \ldots, x_{i-1}, z_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \succsim (x_1, \ldots, x_{i-1}, t_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \\ \Leftrightarrow & (y_1, \ldots, y_{i-1}, z_i, y_{i+1}, \ldots, y_n) \succsim (y_1, \ldots, y_{i-1}, t_i, y_{i+1}, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

Il est bien évident que l'axiome 6 implique l'axiome 7. En revanche, la réciproque est fausse et l'axiome 7 se révèle trop pauvre pour garantir l'existence d'utilités additives. Aussi doit-on étendre l'indépendance de la sous-section précédente par l'axiome 6. Cela dit, comme nous le verrons plus loin, la séparabilité faible peut aussi être utilisée dans certains théorèmes de représentation.

Désignons par X_J l'ensemble des attributs dont les indices appartiennent à $J \subset N = \{1, ..., n\}$. Désignons aussi par $x_J y$ la conséquence de X ayant les coordonnées x_j pour $j \in J$ et les coordonnées y_j pour $j \in N - J$. Lorsque $J = \{j\}$, on écrit $x_j y$ au lieu de $x_J y$. L'axiome d'indépendance peut donc se reformuler de la manière suivante :

Axiome 6 (indépendance):

$$\forall i,\ \forall z_i, t_i \in X_i \ \textit{et}\ \forall x, y \in X,\ z_i x \succsim z_i y \Leftrightarrow t_i x \succsim t_i y.$$

La proposition 2 de la sous-section précédente peut maintenant être étendue de la manière suivante :

Proposition 3 (existence et unicité d'utilités additives):
Soit $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$, $n \geq 3$, un ensemble de conséquences, et soit $\succsim$ une relation binaire sur $X \times X$ vérifiant la solvabilité restreinte par rapport à tous les attributs. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. *$\succsim$ est un préordre large total vérifiant, pour chaque attribut, l'axiome d'indépendance (axiome 6), l'essentialité ainsi que l'axiome archimédien ;*
2. *il existe une fonction d'utilité additive $u = \sum_{i=1}^{n} u_i$ représentant $\succsim$. De plus, celle-ci est unique à une transformation affine strictement positive près. Autrement dit, s'il existe une autre utilité additive $v = \sum_{i=1}^{n} v_i$, alors il existe $\alpha > 0$ et $\beta_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, tels que $v_i(\cdot) = \alpha u_i(\cdot) + \beta_i$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$.*

Ce théorème, dont on trouve la démonstration dans le chapitre 6 de Krantz et al. [KLST71], est restrictif à deux égards : tout d'abord, dans certains cas, l'hypothèse de solvabilité restreinte sur l'ensemble des attributs peut être contestable. C'est le cas par exemple lorsque certains attributs sont définis sur des continuums (argent, temps, etc.) tandis que d'autres le sont sur des ensembles discrets (nombre de pièces dans un appartement, attributs qualitatifs comme la profession d'un individu, etc.). Dans de tels cas, des extensions du théorème ci-dessus ne nécessitant que la solvabilité d'un petit nombre d'attributs (cf. Gonzales [Gon00, Gon03]) ou bien des variantes substituant une notion de densité à la solvabilité (cf. Nakamura [Nak02]) peuvent être appliquées, mais leur utilisation s'avère plus complexe en pratique. La deuxième restriction concerne l'hypothèse que X est un produit cartésien : lorsque X n'en est seulement qu'un sous-ensemble, les axiomes utilisés jusqu'à maintenant perdent singulièrement de leur puissance structurelle. Prenons par exemple l'axiome archimédien : sans la solvabilité, on avait vu qu'il devenait inutile si X ne possédait pas suffisamment de couples d'éléments indifférents pour assurer l'existence de « longues » séquences standard. Dans le cas de sous-ensembles de produits cartésiens, si X a une forme « exotique », comme par exemple celle d'une tour Eiffel inclinée à 45 degrés (cf. Wakker [Wak93]), le même problème resurgit. Aussi la décomposabilité additive requiert l'ajout de nouvelles hypothèses structurelles sur $(X, \succsim)$.

Peu d'articles ont été écrits sur le sujet. Tout d'abord parce qu'on peut souvent supposer que X est un produit cartésien, même si la réalité est légèrement différente. En effet, X correspond à l'ensemble des conséquences tel que le décideur peut se le représenter, et ce dernier peut, cognitivement, se représenter des conséquences qui, dans la réalité, sont impossibles à atteindre. Ensuite, d'une manière générale, la décomposabilité additive sur des sous-ensembles de produits cartésiens requiert des axiomes beaucoup plus contraignants que ceux présentés jusqu'à maintenant. En outre, ceux-ci n'ont pas de véritable signification quant aux préférences du décideur, mais ils traduisent plutôt des besoins dans les démonstrations mathématiques. Par exemple, Chateauneuf et Wakker [CW93] montrent la proposition 4 ci-dessous. Avant de la formuler, nous avons besoin d'une nouvelle notion. D'après l'axiome d'indépendance (axiome 6), ou bien plus simplement d'après la séparabilité faible (axiome 7), quel que soit i,

$$\begin{aligned}&(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \succsim (x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)\\ \Leftrightarrow\ &(y_1, \ldots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \ldots, y_n) \succsim (y_1, \ldots, y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, \ldots, y_n).\end{aligned}$$

Puisque cette préférence est vérifiée quelle que soient les $x_j, y_j \in X_j$, $j \neq i$, cela signifie que le décideur ne compare les conséquences qu'en se fondant sur les attributs qui diffèrent. C'est pourquoi on peut définir une relation de préférence $\succsim_i$, quel que soit i, telle que la comparaison ci-dessus est équivalente à $x_i \succsim_i y_i$.

Proposition 4 (représentabilité additive sur des ensembles ouverts): *Soit $X \subset \prod_{i=1}^n X_i$. Soit $\succsim$ un préordre large total sur X. On suppose que les X_i sont munis de la topologie de l'ordre par rapport à $\succsim_i$. On suppose que X est muni de la topologie produit, que c'est un ouvert, que $\succsim$ est continue sur X et que, de plus, les ensembles suivants sont connexes :*

1. *int(X), l'intérieur de X ;*
2. *tous les ensembles de la forme $\{x \in \text{int}(X) : x_i = s_i\}$ $\forall i, s_i$;*
3. *toutes les classes d'équivalence de int(X) par rapport à $\sim$.*

Alors, si, sur tout produit cartésien inclus dans X, $\succsim$ est représentable par une fonction d'utilité additive, $\succsim$ l'est sur l'ensemble de X.

Comme on peut le remarquer, les hypothèses de cette proposition sont assez difficilement interprétables. L'idée sous-jacente est de construire une fonction d'utilité sur un petit produit cartésien, puis d'étendre cette construction sur un autre produit cartésien « voisin » du premier. L'hypothèse sur la connexité de l'intérieur de X permet alors de d'assurer que, si l'on itère suffisamment longtemps ce procédé, l'extension finira par couvrir l'ensemble de X, etc.

Chateauneuf et al. et Segal [CW93, Seg94] proposent d'autres théorèmes de représentation pour des ensembles encore plus généraux. Cela dit, les axiomes utilisés sont, là encore, techniques et n'ont toujours pas de réelle signification du point de vue du décideur. Il existe tout de même des sous-ensembles dans lesquels l'existence d'utilités additives peut être dérivée simplement des théorèmes sur les produits cartésiens. C'est le cas, par exemple, des ensembles ordonnés selon le rang, c'est-à-dire des ensembles dans lesquels les n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ ont la propriété suivante : tous leurs attributs appartiennent au même ensemble X_1 et il existe un préordre large total $\succsim'$ sur X_1 tel que $x_1 \succsim' x_2 \succsim' \cdots \succsim' x_n$ (cf. Wakker [Wak91]).

3 Décompositions dans l'incertain

Alors que la section 2 se place dans le cas où chaque acte conduit à une conséquence unique avec certitude, la présente section considère le cas, avec incertitude, où chaque acte a $m > 1$ conséquences possibles dépendant de la réalisation d'un état de la nature donné. Ainsi, l'acte qui donne la conséquence x^i

si l'événement E_i se réalise s'écrit $(x^1, E_1; ...; x^m, E_m)$, où la famille $\{E_1, ..., E_m\}$ constitue une partition de l'ensemble des états de la nature considérés par le décideur. Rappelons que le critère d'utilité espérée dans le risque (cf. von Neumann et Morgenstern [vNM44]) suppose que les probabilités des événements sont données à l'avance, alors que le critère d'utilité subjective de Savage [Sav54] permet d'affecter à chaque événement une probabilité subjective qui reflète les croyances du décideur. Lorsque l'ensemble des états de la nature est doté d'une mesure de probabilité, l'acte $(x^1, E_1; ...; x^m, E_m)$ induit la loterie $(x^1, p_1; ...; x^m, p_m)$, où p_i désigne la probabilité de l'événement E_i. Dans l'axiomatique Savagienne, on peut aussi travailler avec des actes dont le support n'est pas nécessairement fini. Par ailleurs, il est important de souligner que dans ces deux axiomatiques de l'utilité espérée, les conséquences peuvent être qualitatives ou quantitatives, unidimensionnelles ou multidimensionnelles.

Dans ce qui va suivre, nous allons considérer que X est l'ensemble des conséquences possibles, et que celui-ci est égal au produit Cartésien $\prod_{i=1}^n X_i$ considéré dans la section 2. L'ensemble des loteries $(x^1, p_1; ...; x^m, p_m)$ sur X est noté $\mathbb{P}$. Ce dernier est muni de la relation de préférence large $\succsim$ habituelle. L'indifférence $\sim$ et la préférence stricte $\succ$ sont définies comme précédemment. L'utilisation du critère d'utilité espérée nécessite l'existence d'une fonction d'utilité $u : X \to \mathbb{R}$, définie à l'origine et à l'unité près, telle que :

$$\forall P, Q \in \mathbb{P},\ P \succsim Q \Longleftrightarrow E(u, P) \geq E(u, Q).$$

où $E(u, P)$ et $E(u, Q)$ désignent les espérances mathématiques d'utilité des loteries P et Q respectivement.

Comme dans le certain, la construction effective de la fonction multi-attributs u pose de nombreux problèmes pratiques. Prenons le cas d'un décideur confronté à h conséquences possibles $x^1, ..., x^h$. Théoriquement, le critère d'utilité espérée permet d'affecter des utilités à chaque conséquence comme suit. Supposons que x^0 et x^* représentent la conséquence la moins préférée et la conséquence la plus préférée respectivement. Sachant que u est définie à l'origine et à l'unité près, on pose $u(x^0) = 0$ et $u(x^*) = 1$. Pour chaque conséquence x^i, on peut déterminer la probabilité p_i qui implique l'indifférence entre recevoir x^i avec certitude et posséder le billet de loterie qui donne la conséquence x^* avec la probabilité p_i et la conséquence x^0 avec la probabilité $1 - p_i$. L'application du critère d'utilité espérée à cette indifférence implique $u(x^i) = p_i$ pour $i = 1, ..., h$.

En raison des capacités cognitives limitées des décideurs, on ne voit pas comment on peut appliquer la méthode d'encodage ci-dessus lorsque l'on a affaire à un nombre élevé d'attributs. En outre, même si le nombre d'attributs est petit, il n'est pas certain que le nombre de conséquences auxquelles se trouve confronté le décideur l'est. On ne voit donc pas comment l'analyste peut échapper à une décomposition simple de u en fonctions mono-attribut beaucoup plus faciles et intuitives à encoder (cf. Pollak, Keeney et Keeney et Raiffa, et von Winterfeldt et Edwards [Pol67, Kee68, KR93, vWE93] entre autres). Evidemment, la possibilité de décomposer une fonction d'utilité dans l'incertain passe par l'imposition de conditions supplémentaires aux préférences du décideur. Une approche de décomposition des fonctions d'utilité fondée sur des modèles qui généralisent le modèle d'utilité espérée est proposée par Miyamoto et Wakker [MW96].

3.1 Décomposition de dimension 2

L'additivité de la fonction d'utilité de von Neumann-Morgenstern requiert une notion d'indépendance plus générale que dans le cas certain. En effet, sous l'hypothèse d'utilité espérée, si $u = u_1 + u_2$, avec u_i définie sur X_i et à valeurs dans $\mathbb{R}$ pour $i = 1, 2$, alors, quels que soient $x_1, x_1', y_1, y_1' \in X_1$ et $x_2, z_2 \in X_2$,

$$\begin{gathered}
((x_1, x_2), \frac{1}{2}; (x_1', x_2), \frac{1}{2}) \succsim ((y_1, x_2), \frac{1}{2}; (y_1', x_2), \frac{1}{2}) \\
\Updownarrow \\
\frac{1}{2}u(x_1, x_2) + \frac{1}{2}u(x_1', x_2) \geq \frac{1}{2}u(y_1, x_2) + \frac{1}{2}u(y_1', x_2) \\
\Updownarrow \\
\frac{1}{2}u(x_1, z_2) + \frac{1}{2}u(x_1', z_2) \geq \frac{1}{2}u(y_1, z_2) + \frac{1}{2}u(y_1', z_2) \\
\Updownarrow \\
((x_1, z_2), \frac{1}{2}; (x_1', z_2), \frac{1}{2}) \succsim ((y_1, z_2), \frac{1}{2}; (y_1', z_2), \frac{1}{2}).
\end{gathered}$$

Les équivalences ci-dessus signifient que la préférence entre des loteries ne différant que sur l'attribut X_1 ne dépend pas du niveau commun sur l'attribut X_2. On dit dans ce cas que l'attribut X_1 est *indépendant en utilité* de l'attribut X_2. Un raisonnement similaire implique que quels que soient $x_1, z_1 \in X_1$, x_2, x_2' et $y_2, y_2' \in X_2$,

$$\begin{gathered}
((x_1, x_2), \frac{1}{2}; (x_1, x_2'), \frac{1}{2}) \succsim ((x_1, y_2), \frac{1}{2}; (x_1, y_2'), \frac{1}{2}) \\
\Updownarrow \\
((z_1, x_2), \frac{1}{2}; (z_1, x_2'), \frac{1}{2}) \succsim ((z_1, y_2), \frac{1}{2}; (z_1, y_2'), \frac{1}{2}),
\end{gathered}$$

dans ce cas, on dit que l'attribut X_2 est indépendant en utilité de l'attribut X_1. Lorsque X_1 est aussi indépendant en utilité de X_2, on dit qu'il y a *indépendance mutuelle en utilité*. Remarquons que l'axiome 1 qui énonce l'indépendance dans le cas certain est un cas particulier d'indépendance mutuelle en utilité où la probabilité $\frac{1}{2}$ est remplacée par la probabilité 1.

Sous l'hypothèse d'utilité espérée, l'indépendance en utilité de l'attribut X_1 de l'attribut X_2 signifie que pour x_2 et x_2' deux conséquences distinctes et données de X_2, les fonctions d'utilité $u(., x_2)$ et $u(., x_2')$ représentent les mêmes préférences (sur X_1). On peut donc en déduire qu'elles sont identiques à l'origine et à l'unité près, ou encore que $u(., x_2) = \alpha u(., x_2') + \beta$ où $\alpha > 0$ et β dépendent des seules conséquences (données) x_2 et x_2'. Si l'on suppose que x_2 varie et que x_2' est fixé à un niveau de référence x_2^0, on peut alors être plus explicite et écrire que

$$\forall(x_1,x_2) \in X_1 \times X_2,\ u(x_1,x_2) = \alpha(x_2)u(x_1,x_2^0) + \beta(x_2) \tag{3}$$

où $\alpha(.) > 0$ et $\beta(.) \in \mathbb{R}$ et dépendent implicitement de la conséquence de référence x_2^0. D'une manière similaire, si l'attribut X_2 est indépendant en utilité de l'attribut X_1, alors, pour une conséquence de référence x_1^0, on peut aussi écrire que

$$\forall(x_1,x_2) \in X_1 \times X_2,\ u(x_1,x_2) = \gamma(x_1)u(x_1^0,x_2) + \delta(x_1) \tag{4}$$

où $\gamma(.) > 0$ et $\delta(.) \in \mathbb{R}$ et dépendent implicitement de la conséquence de référence x_1^0.

Supposons maintenant que $u(x_1^0,x_2^0) = 0$. Compte tenu des équations (3) et (4), on a $\beta(x_2) = u(x_1^0,x_2)$, $\delta(x_1) = u(x_1,x_2^0)$ et l'équation

$$u(x_1,x_2^0)[\alpha(x_2) - 1] = u(x_1^0,x_2)[\gamma(x_1) - 1].$$

Cette équation est naturellement satisfaite si $x_1 = x_1^0$ ou $x_2 = x_2^0$. Dans le cas contraire, c'est-à-dire $x_1 \neq x_1^0$ et $x_2 \neq x_2^0$, on obtient l'égalité

$$\frac{\alpha(x_2) - 1}{u(x_1^0,x_2)} = \frac{\gamma(x_1) - 1}{u(x_1,x_2^0)} = k$$

où k est une constante indépendante des variables x_1 et x_2. D'où l'on déduit que $\alpha(x_2) = ku(x_1^0,x_2) + 1$. En substituant dans (3), on obtient

$$\forall(x_1,x_2) \in X_1 \times X_2,\ u(x_1,x_2) = u(x_1,x_2^0) + u(x_1^0,x_2) + ku(x_1,x_2^0)u(x_1^0,x_2) \tag{5}$$

où $u(\cdot,x_2^0)$ et $u(x_1^0,\cdot)$ sont des fonctions d'utilité mono-attribut. La constante k représente un facteur d'interaction entre les attributs X_1 et X_2. Comme le montrent Keeney et Raiffa [KR93, page 240], le signe de cette constante explicite la nature de cette interaction. Ainsi, lorsque $u(\cdot,x_2^0)$ et $u(x_1^0,\cdot)$ sont croissantes en x_1 et x_2 respectivement, un k positif (resp. négatif) signifie que les attributs X_1 et X_2 sont complémentaires (resp. substituables). La proposition qui suit introduit la forme multilinéaire ci-dessus sous une forme (similaire) légèrement différente à travers le remplacement de $u(x_1,x_2^0)$ et $u(x_1^0,x_2)$ par $k_1u_1(x_1)$ et $k_2u_2(x_2)$ respectivement, où k_1 et k_2 sont des *constantes d'échelle* qui dépendent implicitement des conséquences utilisées pour la normalisation des fonctions $u_i(.)$, $i = 1,2$, cf. Fishburn [Fis65] et Keeney et Raiffa [KR93, pages 234–235].

Proposition 5: *Si les attributs X_1 et X_2 sont mutuellement indépendants en utilité, alors la fonction d'utilité u s'écrit sous la forme multilinéaire suivante*

$$\forall(x_1,x_2) \in X_1 \times X_2,\ u(x_1,x_2) = k_1u_1(x_1) + k_2u_2(x_2) + kk_1k_2u_1(x_1)u_2(x_2).$$

où
- $u_i(.)$ est une fonction d'utilité mono-attribut normalisée par $u_i(x_i^0) = 0$ et $u_i(x_i^*) = 1$, $i = 1,2$, pour x_1^* et x_2^* telles que $(x_1^*,x_2^0) \succ (x_1^0,x_2^0)$ et $(x_1^0,x_2^*) \succ (x_1^0,x_2^0)$.
- $k_1 = u(x_1^*,x_2^0) > 0$, $k_2 = u(x_1^0,x_2^*) > 0$ et $k_1 + k_2 + kk_1k_2 = 1$.

On voit d'après ce qui précède que la seule indépendance mutuelle des attributs ne suffit pas à l'obtention d'une fonction d'utilité additive. En effet, cette dernière forme nécessite la nullité de la constante k. Afin d'expliciter une condition suffisante qui permette, en présence de l'indépendance mutuelle en utilité, l'obtention d'une fonction d'utilité additive, supposons qu'il *existe* des conséquences $x_1, x'_1 \in X_1$ et $x_2, x'_2 \in X_2$ telles que

$$((x_1, x_2), \frac{1}{2}; (x'_1, x'_2), \frac{1}{2}) \sim ((x_1, x'_2), \frac{1}{2}; (x'_1, x_2), \frac{1}{2}). \qquad (6)$$

En passant par l'utilité espérée et en simplifiant, on obtient l'égalité

$$k[u(x_1, x_2^0) - u(x'_1, x_2^0)][u(x_1^0, x_2) - u(x_1^0, x'_2)] = 0.$$

Si l'on impose $Non[(x_1, x_2^0) \sim (x'_1, x_2^0)]$ et $Non[(x_1^0, x_2) \sim (x_1^0, x'_2)]$, on obtient la contrainte recherchée, c'est-à-dire $k = 0$.

Lorsque $k \neq 0$, la forme multilinéaire (5) peut s'écrire comme suit

$$v(x_1, x_2) = v(x_1, x_2^0) v(x_1^0, x_2)$$

où $v(x_1, x_2) = 1 + ku(x_1, x_2)$. Ce qui montre que l'indépendance mutuelle en utilité permet une décomposition *multiplicative* de la fonction d'utilité.

En utilisant des constantes d'échelle k_i comme dans la proposition 5, le modèle s'écrit aussi :

$$1 + ku(x_1, x_2) = \prod_{i=1}^{2} [1 + kk_i u_i(x_i)].$$

Sachant que les constantes d'échelle k_1 et k_2 appartiennent à l'intervalle unité et que $1 + k_1 = \prod_{i=1}^{2}[1 + kk_i]$, la constante $k = [1 - (k_1 + k_2)]/k_1 k_2$ doit être comprise entre -1 et 0 pour $k_1 + k_2 > 1$ et supérieure à 0 pour $k_1 + k_2 < 1$.

Une généralisation de la validité de la condition énoncée par l'indifférence (6) permet d'obtenir une nouvelle condition, appelée *indépendance additive*, suffisante pour l'additivité de la fonction d'utilité u.

Définition 3: *On dit que les attributs X_1 et X_2 sont additivement indépendants si l'indifférence (6) est satisfaite quelles que soient les conséquences $x_1, x'_1 \in X_1$ et $x_2, x'_2 \in X_2$.*

Remplaçant la conséquence (x'_1, x'_2) par la conséquence de référence (x_1^0, x_2^0) dans l'indifférence (6), on obtient l'indifférence

$$((x_1, x_2), \frac{1}{2}; (x_1^0, x_2^0), \frac{1}{2}) \sim ((x_1, x_2^0), \frac{1}{2}; (x_1^0, x_2), \frac{1}{2}).$$

En posant $u(x_1^0, x_2^0) = 0$ et en utilisant la règle d'utilité espérée, on obtient

$$\forall (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2,\ u(x_1, x_2) = u(x_1, x_2^0) + u(x_1^0, x_2) \qquad (7)$$

La proposition qui suit reformule (7) en introduisant des constantes d'échelle.

Proposition 6: *Si les attributs X_1 et X_2 sont additivement indépendants, alors la fonction d'utilité u s'écrit sous la forme*

$$\forall (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2,\ u(x_1, x_2) = k_1 u_1(x_1) + k_2 u_2(x_2),$$

où
- $u_i(.)$ est une fonction d'utilité mono-attribut normalisée par $u_i(x_i^0) = 0$ et $u_i(x_i^*) = 1$, $i = 1, 2$, pour x_1^* et x_2^* telles que $(x_1^*, x_2^0) \succ (x_1^0, x_2^0)$ et $(x_1^0, x_2^*) \succ (x_1^0, x_2^0)$.
- $k_1 = u(x_1^*, x_2^0) > 0$, $k_2 = u(x_1^0, x_2^*) > 0$ et $k_1 + k_2 = 1$.

On voit d'après ce qui précède que le fait d'avoir affaire à deux attributs dans un problème de décision particulier pose le problème du choix de la décomposition adéquate de la fonction d'utilité. Très souvent, l'analyste est amené à vérifier auprès du décideur s'il y a indépendance mutuelle en utilité des attributs. Une démarche simple consiste à vérifier si l'équivalent certain par rapport à un attribut donné d'une loterie qui donne deux conséquences avec des chances égales sur cet attribut dépend ou non du niveau commun auquel est fixé l'autre attribut. Plus précisément, supposons que $X_i = [x_i^0, x_i^*]$ pour $i = 1, 2$. Pour vérifier si l'attribut X_1 est indépendant en utilité de l'attribut X_2, il suffit de choisir trois niveaux équidistants $\overline{x}_2, \overline{x}'_2, \overline{x}''_2$ dans $[x_2^0, x_2^*]$ et de construire les équivalents certains des loteries $((x_1^*, a), \frac{1}{2}; (x_1^1, a), \frac{1}{2})$, $a = \overline{x}_2, \overline{x}'_2, \overline{x}''_2$. Des équivalents certains identiques (à l'erreur près) permettent de supposer raisonnablement que l'attribut X_1 est indépendant en utilité de l'attribut X_2. L'indépendance en utilité dans l'autre sens peut être testée à l'aide d'une démarche similaire où les rôles des attributs sont inversés.

Si l'on a des raisons de penser que le modèle adéquat est additif, on peut directement commencer par vérifier si la condition d'indépendance additive est satisfaite en fixant trois ou quatre conséquences équidistantes dans chacun des intervalles $X_i = [x_i^0, x_i^*]$, $i = 1, 2$, et en testant la condition (6) pour les éléments du produit cartésien (fini) qui en résulte.

3.2 Extension de la décomposition de dimension 2

La décomposition d'une fonction d'utilité de von Neumann-Morgenstern ayant plus de deux attributs fait appel à des extensions relativement simples des concepts et outils utilisés dans le cas à deux attributs. Pour ce faire, nous avons besoin d'introduire de nouvelles notations.

Rappelons que, si $J \subset N = \{1, ..., n\}$, $x_J y$ représente la conséquence de X ayant les coordonnées x_j pour $j \in J$ et les coordonnées y_j pour $j \in N - J$. De plus, lorsque $J = \{j\}$, on écrit $x_j y$ au lieu de $x_J y$. Enfin, la notation $x_i x_j y$ signifie que la i-ème coordonnée et la j-ème coordonnée de y ont été remplacées par x_i et x_j respectivement. La notation x_J désigne la (sous-)conséquence constituée des coordonnées x_j avec $j \in J$.

Définition 4: *On dit que l'ensemble d'attributs X_J, $J \subset N$, est indépendant* *en utilité si* $\forall\ x, x', y, y', t, z \in X$

$$(x_J t, \frac{1}{2}; y_J t, \frac{1}{2}) \succsim (x'_J t, \frac{1}{2}; y'_J t, \frac{1}{2}) \Leftrightarrow (x_J z, \frac{1}{2}; y_J z, \frac{1}{2}) \succsim (x'_J z, \frac{1}{2}; y'_J z, \frac{1}{2}). \quad (8)$$

On dit qu'il y a indépendance mutuelle des attributs de X *si* X_J *est indépendant en utilité pour tout* $J \subset N$.

L'indépendance dans le certain (axiome 6) est un cas particulier de l'indépendance en utilité dans lequel l'équivalence (8) ci-dessus devient $x_J t \succsim x'_J t \Longleftrightarrow x_J z \succsim x'_J z$. Il est aussi facile de montrer que sous l'hypothèse d'additivité de u, l'équivalence (8) est satisfaite pour tout $J \subset N$.

Sous l'hypothèse d'utilité espérée et pour un J donné, l'indépendance en utilité de X_J implique que pour t et z deux conséquences distinctes et données de X, les fonctions d'utilité $u(., t_{-J})$ et $u(., z_{-J})$ représentent les mêmes préférences. Comme dans le cas à deux attributs, on peut en déduire qu'elles sont identiques à l'origine et à l'unité près. Si l'on suppose que t_{-J} varie et que z_{-J} est fixé à un niveau de référence x^0_{-J}, on peut alors écrire que

$$\forall x \in X,\ u(x) = \alpha_J(x_{-J})u(x_J x^0) + \beta_J(x_{-J})$$

où $\alpha_J(.) > 0$ et $\beta_J(.) \in \mathbb{R}$ et dépendent implicitement de la conséquence de référence x^0_{-J}.

En présence de l'indépendance mutuelle en utilité, un raisonnement très similaire à celui utilisé dans le cas à deux attributs permet d'obtenir la décomposition suivante

$$\forall x \in X,\ u(x) = u(x_1 x^0) + \textstyle\sum_{j=2}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} [ku(x_i x^0) + 1] u(x_j x^0) \quad (9)$$

où k est une constante qui joue un rôle similaire à celui dans (5). Lorsque celle-ci est nulle, l'équation ci-dessus donne naissance à la décomposition additive

$$\forall x \in X,\ u(x) = \textstyle\sum_{j=1}^{n} u(x_j x^0)$$

Comme dans le cas à deux attributs, lorsque $k \neq 0$ ($\sum_i k_i \neq 1$), l'équation (9) peut être reformulée comme suit

$$v(x) = \textstyle\prod_{j=1}^{n} v(x_j x^0)$$

où $v(x_j y) = 1 + ku(x_j y)$ pour tout $x_j \in X_j$, $j = 1, ..., n$, et $y \in X$. On peut aussi faire apparaître des constantes d'échelle $k_1, ..., k_n$ en remplaçant $u(x_j x^0)$ par $k_j u_j(x_j)$ pour $j = 1, ..., n$. D'où la forme multiplicative (équivalente)

$$ku(x) + 1 = \textstyle\prod_{j=1}^{n} [kk_j u_j(x_j) + 1] \quad (10)$$

où $u_j(x^0_j) = 0$ et $u_j(x^*_j) = 1$, $j = 1, \ldots, n$.

A titre d'illustration, dans le cas à trois attributs X_1, X_2 et X_3, la décomposition de la fonction d'utilité impliquée par (10) est donnée par

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, x_3) = {} & k_1 u_1(x_1) + k_2 u_2(x_2) + k_3 u_3(x_3) + kk_1 k_2 u_1(x_1) u_2(x_2) \\ & + kk_1 k_3 u_1(x_1) u_3(x_3) + kk_2 k_3 u_2(x_2) u_3(x_3) \\ & + k^2 k_1 k_2 k_3 u_1(x_1) u_2(x_2) u_3(x_3) \end{aligned}$$

où, comme dans le cas à deux attributs, u_1, u_2 et u_3 sont des fonctions d'utilité mono-attribut et $k_1 + k_2 + k_3 + kk_1k_2k_3 + k^2k_1k_2k_3 = 1$. Mais, lorsque l'indépendance mutuelle est abandonnée au profit de l'indépendance en utilité de X_J pour $J = \{1\}, \{2\}, \{3\}$, la décomposition de la fonction d'utilité qui en résulte est beaucoup plus riche. En effet, on montre que le coefficient k qui représente l'interaction des attributs est remplacé par des coefficients d'interaction spécifiques k_{12}, k_{13}, k_{23} et k_{123} comme suit

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, x_3) = {} & k_1u_1(x_1) + k_2u_2(x_2) + k_3u_3(x_3) + k_{12}k_1k_2u_1(x_1)u_2(x_2) \\ & + k_{13}k_1k_3u_1(x_1)u_3(x_3) + k_{23}k_2k_3u_2(x_2)u_3(x_3) \\ & + k_{123}k_1k_2k_3u_1(x_1)u_2(x_2)u_3(x_3). \end{aligned}$$

La complexité relative de la décomposition ci-dessus explique pourquoi Keeney et Raiffa [KR93, p.298] comme d'autres, suggèrent de se restreindre dans les décompositions à un choix entre les formes multiplicative et additive pour $n \geq 4$. La proposition qui suit généralise la proposition 5 (cf. Fishburn [Fis65]).

Proposition 7: *Sous l'hypothèse d'indépendance mutuelle en utilité la fonction d'utilité u s'écrit sous la forme (9).*

Lorsque l'indépendance mutuelle en utilité est satisfaite, l'obtention d'une fonction d'utilité additive pour $m > 2$ attributs nécessite la vérification d'une condition similaire à celle explicitée par l'indifférence (6). En effet, on montre que s'il existe des conséquences $y \in X$, $x_i, x'_i \in X_i$ et $x_j, x'_j \in X_j$, avec $i \neq j$, telles que

$$(x_ix_jy, \frac{1}{2}; x'_ix'_jy, \frac{1}{2}) \sim (x_ix'_jy, \frac{1}{2}; x'_ix_jy, \frac{1}{2}),$$

alors la fonction d'utilité u doit être additive (cf. Keeney et Raiffa [KR93]).

En l'absence de l'indépendance mutuelle en utilité, l'additivité de la fonction u nécessite une généralisation de la condition dite d'indépendance additive introduite dans le cas à deux attributs. Les attributs $X_1, ..., X_n$ sont additivement indépendants si, quelles que soient les conséquences $x, x', y, y' \in X$ et $J \subset N$,

$$(x_Jy, \frac{1}{2}; x'_Jy', \frac{1}{2}) \sim (x_Jy', \frac{1}{2}; x'_Jy, \frac{1}{2}).$$

Pollak [Pol67] propose une condition légèrement différente, nécessaire et suffisante à l'indépendance additive.

Comme dans le cas d'un problème de décision avec deux attributs, le choix entre un modèle multiplicatif ou additif pour plus de deux attributs nécessite de vérifier si les conditions correspondantes sont approximativement satisfaites par les préférences du décideur. La tâche est cependant un peu plus compliquée, puisqu'elle fait appel à un effort cognitif plus important de la part du décideur. Keeney et Raiffa [KR93, p. 292] donnent un certain nombre de conditions qui permettent de tester l'indépendance en utilité d'une manière plus économique que celles qui résultent directement de la définition donnée dans la présente sous-section.

4 Encodage des fonctions d'utilité

L'objectif de l'encodage d'une fonction d'utilité multi-attributs dans un contexte de décision est de pouvoir affecter des scores ou utilités aux actions potentielles auxquelles fait face le décideur. Ces scores permettent ensuite de classer les actions de la moins désirable à la plus désirable ou vice-versa. La possibilité de construire tels scores à partir de fonctions d'utilité mono-attribut nécessite cependant la vérification de conditions d'indépendance spécifiques. Dans la présente section, nous allons nous contenter de l'encodage de la fonction d'utilité dans le cas de deux attributs. Les méthodes utilisées dans le cas de plus de deux attributs sont similaires à celles exposées ci-dessous.

4.1 Encodage dans le certain

Supposons que le décideur soit confronté à des choix possibles faisant intervenir deux attributs et que ses préférences peuvent être représentées à l'aide du modèle additif donné par

$$\forall x, y \in X_1 \times X_2,\ x \succsim y \Longleftrightarrow u_1(x_1) + u_2(x_2) \geq u_1(y_1) + u_2(y_2).$$

Nous savons que s'il existe deux fonctions v_1 et v_2 qui satisfont l'équivalence ci-dessus à la place de u_1 et u_2 respectivement, alors il existe $\alpha > 0$ et $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ tels que $v_i(.) = \alpha u_i(.) + \beta_i$ pour $i = 1, 2$. Ce qui signifie que l'on peut fixer des origines qui peuvent être distinctes et une unité commune pour les échelles d'utilité induites par u_1 et u_2. Supposons que x_i^0 est la plus petite conséquence de l'ensemble X_i pour $i = 1, 2$.

La première étape dans l'encodage de u_1 et u_2 consiste à fixer les origines des échelles d'utilité correspondantes comme suit

$$u(x_1^0, x_2^0) = u_1(x_1^0) = u_2(x_2^0) = 0. \tag{11}$$

L'encodage de la fonction d'utilité mono-attribut u_1 nécessite que l'on fixe une conséquence $R_2 \succ x_2^0$ et que l'on cherche une conséquence x_1^1 telle que

$$(x_1^1, x_2^0) \sim (x_1^0, R_2). \tag{12}$$

Intuitivement, plus la conséquence R_2 est proche de x_2^0 en termes de préférence, plus la conséquence x_1^1 est proche de x_1^0. L'étape suivante dans l'encodage de u_1 consiste à trouver une nouvelle conséquence x_1^2 telle que

$$(x_1^2, x_2^0) \sim (x_1^1, R_2). \tag{13}$$

En appliquant le modèle additif aux indifférences (12) et (13) et retranchant membre à membre les équations qui en résultent, on obtient l'égalité

$$u_1(x_1^1) - u_1(x_1^0) = u_1(x_1^2) - u_1(x_1^1). \tag{14}$$

En résumé, l'encodage de u_1 consite à construire une séquence standard de conséquences $x_1^0, x_1^1, ..., x_1^{s_1}$ qui « couvre » X_1 à partir des indifférences

$$(x_1^i, x_2^0) \sim (x_1^{i-1}, R_2),\ i = 1, ..., s^1.$$

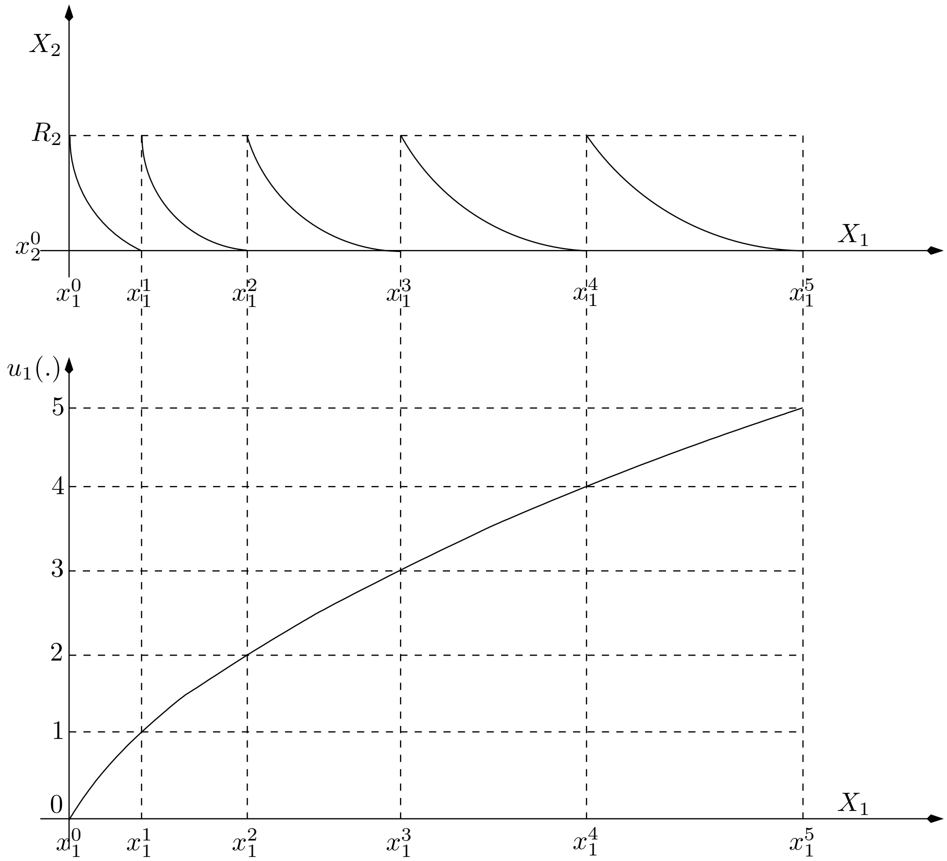

FIGURE 7 – Encodage de la fonction $u_1(.)$

En posant $u_1(x_1^1) = 1$, on obtient $u_1(x_1^i) = i$, $i = 2, ..., s^1$. La figure 7 illustre le processus d'encodage décrit ci-dessus.

L'encodage de la fonction u_2 démarre en fixant une conséquence $R_1 \succ x_1^0$ et en cherchant la conséquence x_2^1 telle que

$$(x_1^0, x_2^1) \sim (R_1, x_2^0). \tag{15}$$

Après la construction de l'indifférence de démarrage (15), le processus d'encodage continue à travers la construction d'une séquence standard de conséquences $x_2^0, x_2^1, ..., x_2^{s_2}$ qui « couvre » X_2 à partir des indifférences

$$(x_1^0, x_2^i) \sim (R_1, x_2^{i-1}), \ i = 1, ..., s^2.$$

La figure 8 décrit graphiquement ce processus.

Si l'on choisit $R_1 = x_1^1$, cela conduit nécessairement à $R_2 = x_2^1$ (compte tenu des indifférences (12) et (15)). Ce choix nous conduit aussi à conclure que $u_2(x_2^i) = i$, $i = 1, ..., s^2$.

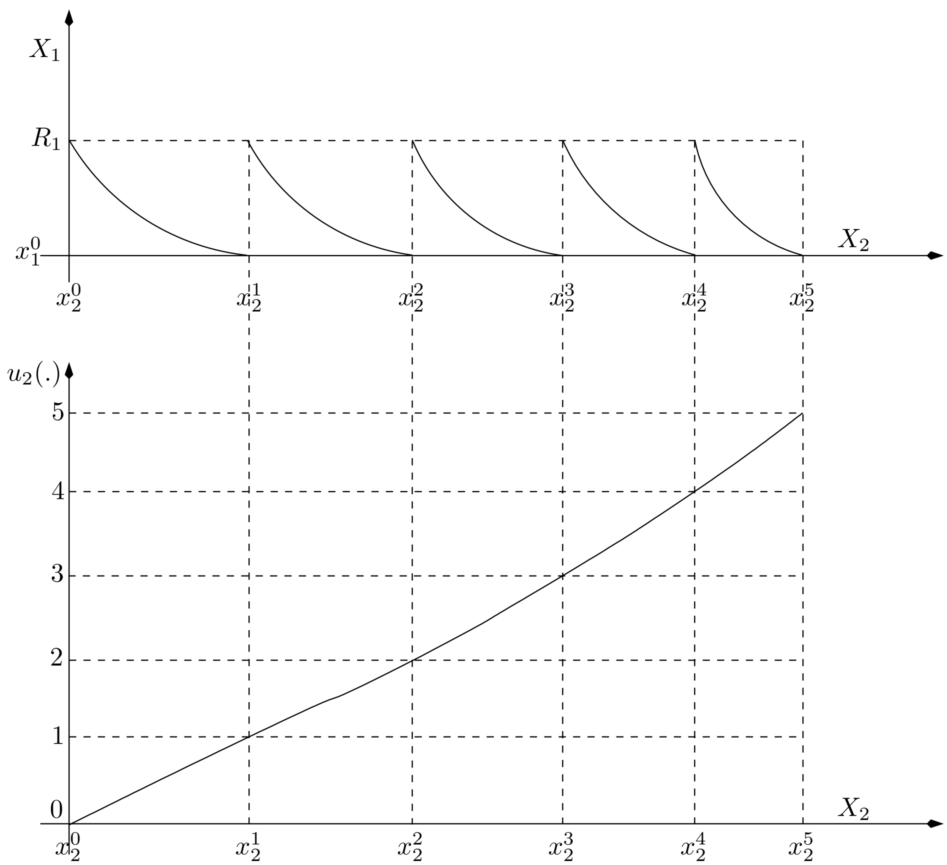

FIGURE 8 – Encodage de la fonction $u_2(.)$

On peut aussi choisir un R_1 différent de x_1^1, ce qui conduit à avoir $x_2^1 \neq R_2$. Dans ce cas, on utilise le modèle additif

$$\forall x \in X_1 \times X_2,\ u(x_1, x_2) = k_1 u_1(x_1) + k_2 u_2(x_2) \tag{16}$$

où $k_1 > 0$ et $k_2 > 0$ sont des *constantes d'échelle* telles que $k_1 + k_2 = 1$. Ces constantes introduisent un degré de liberté supplémentaire qui permet de fixer pour u_2 une unité d'utilité indépendante de celle issue de $u_1(x_1^1) = 1$ en posant $u_2(x_2^1) = 1$. La détermination des constantes d'échelle nécessite l'utilisation (ou la construction) d'une indifférence. Ainsi, en utilisant l'indifférence (15) et en passant par le modèle décrit par (16), on obtient l'égalité

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{u_1(R_1) - u_1(x_1^0)}{u_2(x_2^1) - u_2(x_2^0)} = u_1(R_1).$$

Sachant que l'on dispose de $u_1(R_1)$ et que $k_1 + k_2 = 1$, on peut donc déterminer les constantes d'échelle. Celles-ci permettent de relier entre elles les échelles d'utilité issues de u_1 et u_2.

4.2 Encodage dans l'incertain

L'hypothèse fondamentale sur laquelle repose le modèle d'aide à la décision fondé sur la théorie de l'utilité espérée est que le décideur dispose de préférences fondamentales suffisamment stables pour pouvoir être observées à travers des choix risqués simples. Ces préférences sont révélées par l'intermédiaire de la fonction d'utilité du décideur, utilisée par l'analyste pour extrapoler les préférences de base du décideur à l'ensemble des actions potentielles auxquelles ce dernier se trouve confronté. Ne pas pouvoir encoder la « bonne » fonction d'utilité pourrait aboutir à proposer au décideur des classements d'actions potentielles qui n'ont rien à voir avec ses propres préférences fondamentales.

Dans ce qui va suivre, nous allons supposer que $X_i = [x_i^0, x_i^*]$ pour $i = 1, ..., n$. Toutes les fonctions d'utilité considérées sont normalisées comme suit $u_i(x_i^0) = 0$ et $u_i(x_i^*) = 1$, $i = 1, ..., n$. Ces normalisations nécessitent la présence de constantes d'échelle comme dans le cas certain.

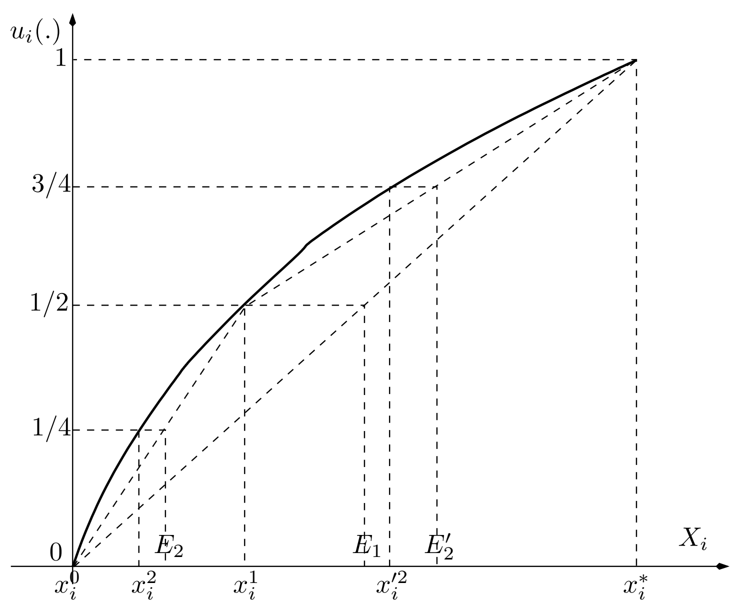

FIGURE 9 – Encodage de $u_i(.)$ à l'aide de la méthode des fractiles

La méthode la plus populaire d'encodage de fonctions d'utilité mono-attribut est la *méthode des fractiles*. Elle consiste à fixer une probabilité p, dite probabilité de référence, et à demander au décideur de spécifier la conséquence x_i^1 dans l'intervalle $[x_i^0, x_i^*]$ qui implique son indifférence entre la conséquence certaine (ou loterie dégénérée) x_i^1 et la loterie $(x_i^*, p; x_i^0, 1 - p)$, désignée désormais par

$(x_i^*, p; x_i^0)$. En passant par la règle de l'utilité espérée, on obtient $u_i(x_i^1) = p$. En appliquant une procédure similaire aux intervalles $\left[x_i^0, x_i^1\right]$ et $\left[x_i^1, x_i^*\right]$, on peut déterminer deux autres points de la fonction d'utilité. En effet, l'indifférence $x_i^2 \sim (x_i^1, p; x_i^0)$ implique $u_i(x_i^2) = p^2$ et l'indifférence $x_i'^2 \sim (x_i^*, p; x_i^1)$ implique $u_i(x_i'^2) = 2p - p^2$. Par itérations successives, on obtient autant de points $(x_i^j, u_i(x_i^j))$ qu'on le désire pour l'encodage de la fonction u_i sur l'intervalle $[x_i^0, x_i^*]$. La figure 9 représente une fonction d'utilité encodée avec une probabilité de référence $p = 1/2$ ($\mathrm{E}_1 = px_i^* + (1-p)x_i^0$, $\mathrm{E}_2' = px_i^* + (1-p)x_i^1$, $\mathrm{E}_2 = px_i^1 + (1-p)x_i^0$).

L'accumulation de résultats expérimentaux défavorables à la théorie de l'utilité espérée a fini par attirer l'attention d'un certain nombre de chercheurs intéressés par les applications de cette théorie en aide à la décision. En effet, dès le début des années 1980, MacCord et de Neufville [MdN83] ont montré qu'il y avait un rapport direct entre les violations de la règle d'utilité espérée et les incohérences systématiques observées dans l'encodage des fonctions d'utilité mono-attribut. Parmi les incohérences observées, on a relevé une dépendance systématique entre les fonctions d'utilité et les probabilités de référence utilisées pour les encoder. Plus cette probabilité est élevée, plus la fonction d'utilité encodée est concave.

Une longue série de résultats expérimentaux commençant depuis la fin des années 1940 (Preston et Barrata [PB48]) révèle une tendance systématique des individus confrontés à des choix risqués simples à transformer subjectivement les probabilités (utilisées dans les loteries). Aujourd'hui, ce phénomène est pris en compte dans une multitude de modèles de décision dans le risque à travers l'introduction d'une fonction de transformation des probabilités en plus de la fonction d'utilité (qui transforme les conséquences). Ainsi, dans les modèles à utilité dépendante du rang (Quiggin, Tversky et Kahneman [Qui82, TK92]) comme dans le modèle de Gul [Gul91], la loterie $P = (x, p; y)$, $x \succ y$, est évaluée grâce à l'utilité définie comme suit

$$V(P) = w(p)u(x) + (1 - w(p))u(y) \tag{17}$$

où la fonction de transformation des probabilités w est une fonction croissante définie de $[0, 1]$ vers $[0, 1]$, avec $w(0) = 0$ et $w(1) = 1$. En l'absence de transformation des probabilités, c'est-à-dire $w(p) = p$ pour tout $p \in [0, 1]$, on a $V(P) = E(u, P)$. Dans ce modèle, les probabilités p et $1-p$ sont remplacées par les *poids de décisions* $w(p)$ et $(1 - w(p))$ respectivement. Sachant que $x \succ y$, on voit bien que le poids associé à une conséquence dépend du rang de celle-ci.

Le modèle explicité par (17) ne peut cependant pas être utilisé pour encoder la fonction u, à l'aide de la méthode des fractiles ou d'une méthode similaire, sans la connaissance préalable de la fonction w. Seule la méthode dite des tradeoffs (TO), initialement proposée par Wakker et Deneffe [WD96], peut éviter ce problème.

L'encodage de la fonction d'utilité par la méthode des TO consiste à construire une séquence standard de conséquences. Une séquence standard de conséquences monétaires positives (gains) est généralement construite comme suit. On commence par déterminer la conséquence x_1 qui implique l'indifférence du décideur entre les loteries $(x_0, p; R)$ et $(x_1, p; r)$, avec $0 \leq r < R < x_0 < x_1$ et $p \in]0,1[$; r, R et x_0 étant maintenues fixées. Comme le montre la figure 10, ceci signifie que le désavantage de la substitution de la conséquence r à la conséquence R sur l'« axe $(1-p)$ » est exactement compensé par l'avantage issu de la substitution de x_1 à x_0 sur l'« axe p ».

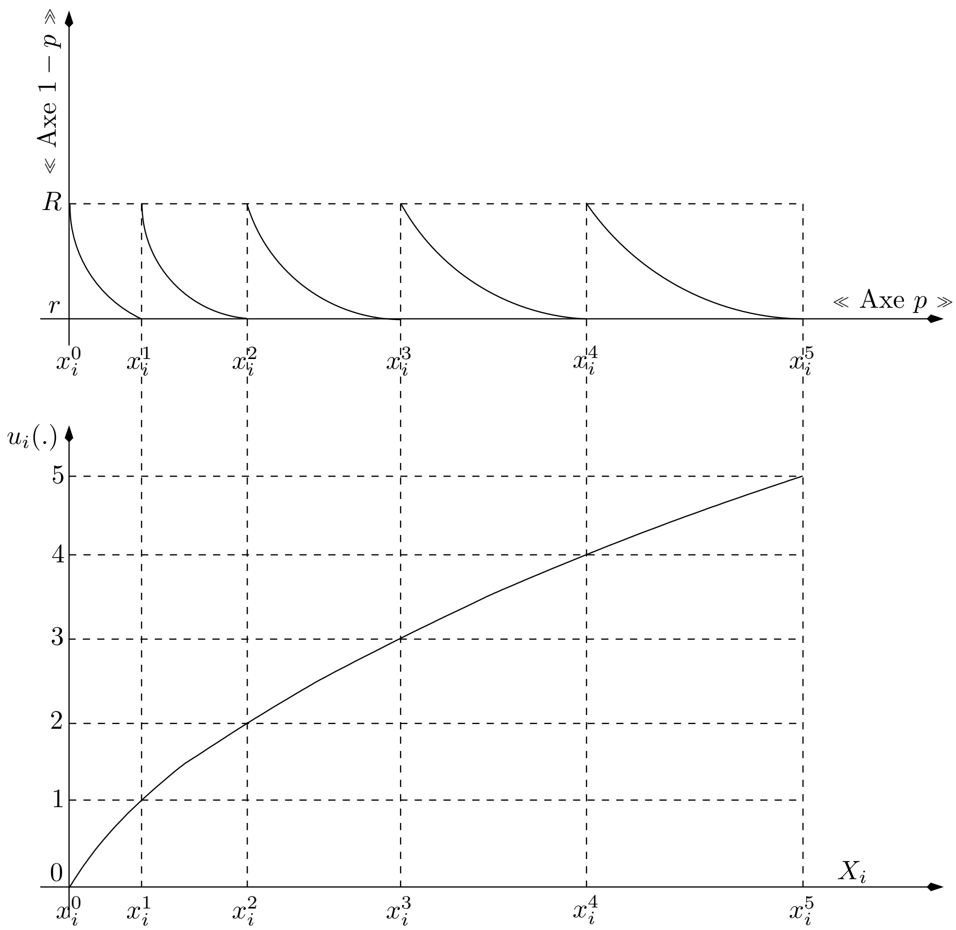

FIGURE 10 – Encodage de la fonction $u_i(.)$

Ensuite, on détermine la conséquence x_i^2 telle que le sujet soit indifférent entre $(x_i^1, p; R)$ et $(x_i^2, p; r)$. En passant par le modèle général (17), les deux indifférences construites ci-dessus donnent les équations suivantes

$$w(p)u_i(x_i^0) + (1 - w(p))u_i(R) = w(p)u_i(x_i^1) + (1 - w(p))u_i(r) \qquad (18)$$

$$w(p)u_i(x_i^1) + (1 - w(p))u_i(R) = w(p)u_i(x_i^2) + (1 - w(p))u_i(r) \qquad (19)$$

Après combinaison et simplification, ces équations impliquent

$$u_i(x_i^1) - u_i(x_i^0) = u_i(x_i^2) - u_i(x_i^1). \tag{20}$$

Il en résulte que la conséquence x_i^1 est exactement à mi-chemin en terme d'utilité entre les conséquences x_i^0 et x_i^2. Les conséquences x_i^0, x_i^1, x_i^2 constituent donc une séquence standard. Cette conclusion est évidemment vérifiée sous l'hypothèse d'utilité espérée. Ainsi, la construction d'une suite standard de conséquences $x_i^0, ..., x_i^q$ nécessite la construction de q indifférences $(x_i^{j-1}, p; R) \sim (x_i^j, p; r)$, $j = 1, ..., q$. En posant $u_i(x_i^0) = 0$ et $u_i(x_i^q) = 1$, on obtient $u_i(x_i^j) = j/q$, $j = 1, ..., q$.

Miyamoto et Wakker [MW96] montrent que les propositions qui permettent la décomposition de la fonction d'utilité Neumanienne restent valables même en présence de transformation subjective des probabilités. Cela justifie la combinaison de la nouvelle méthode d'encodage des fonctions d'utilité qu'est la méthode des TO avec certaines techniques classiques d'encodage des constantes d'échelle.

La détermination des constantes d'échelle peut se faire de deux manières différentes, souvent combinées par les praticiens. Ces deux méthodes peuvent être facilement illustrées dans le cas multiattribut à deux dimensions ($n = 2$). Supposons qu'il y a indépendance mutuelle en utilité des attributs. D'après ce qui précède, on a

$$U(x_1, x_2) = k_1 u_1(x_1) + k_2 u_2(x_2) + k k_1 k_2 u_1(x_1) u_2(x_2)$$

avec $X_i = [x_i^0, x_i^*]$, $u_i(x_i^0) = 0$, $u_i(x_i^*) = 1$ pour $i = 1, 2$ et $k_1 + k_2 + k k_1 k_2 = 1$. La constante k joue le rôle de facteur d'interaction entre les attributs X_1 et X_2.

En effet, trois constantes d'échelle nécessitent trois équations pour les déterminer. Comme on dispose déjà de l'équation $k_1 + k_2 + k k_1 k_2 = 1$, nous n'avons besoin que de deux équations indépendantes et donc de deux indifférences dans le certain et/ou l'incertain.

Supposons que $(x_1^0, x_2^*) \succ (x_1^*, x_2^0)$, c'est-à-dire que $k_2 > k_1$. Compte tenu de la monotonicité, $(x_1^0, x_2^0) \prec (x_1^*, x_2^0)$. On peut donc trouver une conséquence $x_2^{\downarrow}$ $(< x_2^*)$ telle que $(x_1^0, x_2^{\downarrow}) \sim (x_1^*, x_2^0)$. En passant par la décomposition multilinéaire ci-dessus, on obtient l'équation

$$k_2 u_2(x_2^{\downarrow}) = k_1. \tag{21}$$

Une deuxième équation, indépendante de la première, peut être obtenue en remplaçant x_2^0 (dans $(x_1^0, x_2^*) \succ (x_1^*, x_2^0)$) par $x_2^{\uparrow}$ $(> x_2^0)$ telle que $(x_1^0, x_2^*) \sim (x_1^*, x_2^{\uparrow})$. D'une manière similaire, on obtient l'équation suivante

$$k_2 = k_1 + k_2 u_2(x_2^{\uparrow}) + k k_1 k_2 u_2(x_2^{\uparrow}). \tag{22}$$

Combinées avec l'équation $k_1 + k_2 + k k_1 k_2 = 1$, les deux dernières équations permettent la détermination des constantes d'échelle.

Dans le cas incertain, on peut aussi déterminer k_1 et k_2 en trouvant les probabilités p_1 et p_2 telles que

$$(x_1^*, x_2^0) \sim ((x_1^*, x_2^*), p_1; (x_1^0, x_2^0), 1 - p_1),$$
$$(x_1^0, x_2^*) \sim ((x_1^*, x_2^*), p_2; (x_1^0, x_2^0), 1 - p_2).$$

En passant par le modèle d'utilité espérée, on obtient

$$k_i = p_i,\ i = 1, 2. \tag{23}$$

En présence de transformation des probabilités, on doit avoir $k_i = w(p_i)$, ce qui nécessite l'encodage de la fonction w (cf. Abdellaoui [Abd00]).

Lorsqu'on a affaire à plus de deux attributs, la détermination des constantes d'échelle est compliquée par la nécessité de disposer d'équations indépendantes et compatibles pour évaluer les constantes d'échelle. Keeney et Raiffa [KR93, p. 301-307] décrivent plusieurs procédures qui permettent d'éviter les pièges de la redondance et de l'incompatibilité (de ces équations) dans les modèles additif et multiplicatif.

5 Conclusion

Le survol de la théorie de l'utilité multi-attributs présentée dans ce chapitre est une introduction que nous espérons la plus homogène possible à une littérature riche et variée. Les lecteurs intéressés par les applications des techniques décrites dans ce chapitre peuvent se reporter aux chapitres 7 et 8 de Keeney et Raiffa [KR93], aux chapitres 15 et 16 de Clemen [Cle96]. Les lecteurs peuvent aussi se reporter au chapitre 12 de von Winterfeldt et Edwards [vWE93].

Références

[AAW86] Stig K Andersen, Steen Andreassen, and Marianne Woldbye. Knowledge representation for diagnosis and test planning in the domain of electromyography. In *Proceedings of the 7th European Conference on Artificial Intelligence*, pages 357–368, Brighton, 1986.

[Abd00] Mohammed Abdellaoui. Parameter-free elicitation of utilities and probability wheighting functions. *Management Science*, 46 :1497–1512, 2000.

[Ble96] Han Bleichrodt. *Applications of Utility Theory in the Economic Evaluation of Health Care.* PhD thesis, Erasmus University, Rotterdam, the Netherlands, 1996.

[BP02] Denis Bouyssou and Marc Pirlot. Nontransitive decomposable conjoint measurement. *Journal of Mathematical Psychology*, 46 :677–703, 2002.

[Cle96] Robert T Clemen. *Making Hard Decisions : An Introduction to Decision Analysis.* Duxbury, 2nd edition, 1996.

[CW93] Alain Chateauneuf and Peter P Wakker. From local to global additive representation. *Journal of Mathematical Economics*, 22 :523–545, 1993.

[Deb54] Gerard Debreu. Representation of a preference ordering by a numerical function. In R Thrall, C H Coombs, and R Davies, editors, *Decision Processes*, pages 159–175, New York, 1954. Wiley.

[Deb60] Gerard Debreu. Topological methods in cardinal utility theory. In K J Arrow, S Karlin, and P Suppes, editors, *Mathematical Methods in the Social Sciences*, pages 16–26. Stanford University Press, 1960.

[Edw71] Ward Edwards. Social utilities. *Engeenering Economist, Summer Symposium Series*, 6 :119–129, 1971.

[Far81] Peter H Farquhar. Multivalent preference structures. *Mathematical Social Sciences*, 1 :397–408, 1981.

[Fis65] Peter C Fishburn. Independence in utility theory with whole product sets. *Operations Research*, 13 :28–45, 1965.

[Fis70] Peter C Fishburn. *Utility Theory for Decision Making.* Wiley, NewYork, 1970.

[Fis75] Peter C Fishburn. Nondecomposable conjoint measurement for bisymmetric structures. *Journal of Mathematical Psychology*, 12 :75–89, 1975.

[Fis91] Peter C Fishburn. Nontransitive additive conjoint measurement. *Journal of Mathematical Psychology*, 35(1) :1–40, 1991.

[FR91] Gebhard Fuhrken and Marcel K Richter. Additive utility. *Economic Theory*, 1 :83–105, 1991.

[Gon00] Christophe Gonzales. Two factor additive conjoint measurement with one solvable component. *Journal of Mathematical Psychology*, 44(2) :285–309, 2000.

[Gon03] Christophe Gonzales. Additive utility without restricted solvability on every component. *Journal of Mathematical Psychology*, 47(1) :47–65, 2003.

[Gul91] Faruk Gul. A theory of disappointment aversion. *Econometrica*, 59(3) :667–686, 1991.

[Kee68] Ralph L Keeney. Quasi-separable utility functions. *Naval Research Logistics Quarterly*, 15 :551–565, 1968.

[KLST71] David H Krantz, R Duncan Luce, Patrick Suppes, and Amos Tversky. *Foundations of Measurement (Additive and Polynomial Representations)*, volume 1. Academic Press, New York, 1971.

[KR93] Ralph L Keeney and Howard Raiffa. *Decisions with Multiple Objectives - Preferences and Value Tradeoffs.* Cambridge University Press, 1993. (Version originale en 1976 chez Wiley).

[LT64] R Duncan Luce and John W Tukey. Simultaneous conjoint measurement : A new type of fondamental measurement. *Journal of Mathematical Psychology*, 1 :1–27, 1964.

[MdN83] Mark R McCord and Richard de Neufville. Fundamental deficiency of expected utility decision analysis. In S French, R Hartley, and D J Thomas, L C White, editors, *Multi-Objective Decision Making*, pages 279–305. Academic Press, New York, 1983.

[MW96] John Miyamoto and Peter P Wakker. Multiattribure utility theory without expected utility foundations. *Operations Research*, 44(2) :313–326, 1996.

[Nak90] Yutaka Nakamura. Bilinear utility and a threshold structure for non-transitive preferences. *Mathematical Social Sciences*, 19 :1–21, 1990.

[Nak02] Yutaka Nakamura. Additive utilities on densely ordered sets. *Journal of Mathematical Psychology*, 46(5) :515–530, 2002.

[PB48] Malcolm G Preston and Philippe Baratta. An experimental study of the auction value of an uncertain outcome. *American Journal of Psychology*, 61 :183–193, 1948.

[Pol67] Robert A Pollak. Additive von Neumann-Morgenstern utility functions. *Econometrica*, 35 :485–494, 1967.

[Qui82] John Quiggin. A theory of anticipated utility. *Journal of Economic Behavior and Organization*, 3 :332–343, 1982.

[Rai69] Howard Raiffa. Preferences for multi-attributed alternatives. Technical Report RM-58-68-DOT/RC, The Rand Corporation, Santa Monica, Californie, 1969.

[Sav54] Leonard J Savage. *The Foundations of Statistics*. Dover, 1954.

[Seg94] Uzi Segal. A sufficient condition for additively separable functions. *Journal of Mathematical Economics*, 23 :295–303, 1994.

[TK92] Amos Tversky and Daniel Kahneman. Advances in prospect theory : Cumulative representation of uncertainty. *Journal of Risk and Uncertainty*, 5 :297–323, 1992.

[Tve69] Amos Tversky. Intransitivity of preferences. *Psychological Review*, 76 :31–48, 1969.

[vNM44] John von Neumann and Oskar Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behaviour*. Princetown University Press, Princetown, New Jersey, 1944.

[vWE93] Detlof von Winterfeldt and Ward Edwards. *Decision Analysis and Behavioral Research*. Cambridge, 1993.

[Wak89] Peter P Wakker. *Additive Representations of Preferences, A New Foundation of Decision Analysis*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989.

[Wak91] Peter P Wakker. Additive representations on rank-ordered sets. I. the algebraic approach. *Journal of Mathematical Psychology*, 35 :501–531, 1991.

[Wak93] Peter P Wakker. Additive representations on rank-ordered sets. II. the topological approach. *Journal of Mathematical Economics*, 22 :1–26, 1993.

[WD96] Peter P Wakker and Daniel Deneffe. Eliciting von Neumann-Morgenstern utilities when probabilities are distorted or unknown. *Management Science*, 42 :1131–1150, 1996.