3. Systèmes Combinatoires ou de Réécriture

Bernard ESPINASSE
Professeur à l'Université d'Aix-Marseille
1998

- **Introduction**
- **Production et schéma de production**
- **Productions Semi-Thueiennes**
- **Productions normales et antinormales**
- **Système combinatoire**
- **Propriétés des systèmes combinatoires ou de réécriture**
  - **Systèmes monogéniques**
  - **Ambiguïté d'une démonstration**

Production

Soit X* l'ensemble des mots défini sur l'alphabet X : $X = \{x_i \,/\, i \in \{1,n\}\}$; $\wedge$ le mot vide ($|\wedge| = 0$); les règles de Thue (définies sur X*) notées ~, P ~ Q avec $P \in X^*$ et $Q \in X^*$ (~ pas supposée orientée : P ~ Q $\Leftrightarrow$ Q ~ P)

La **production** = une règle de substitution orientée telle que :

Soit :

- (G, H, K ; G', H', K') un sextuplet de mots $\in X^*$,
- U un mot de la forme : U = GPHQK dans lequel P et Q peuvent représenter n'importe quelle occurrence de mots appartenant à X*.

elle permet en remplaçant dans U les occurrences (G, H, K) par les occurrences (G', H', K') d'obtenir un nouveau mot V : V = G' P H'Q K'

Cette transformation orientée permettant de passer de U à V définit un **schéma de production** ou **production** que l'on note → :

G P H Q K → G' P H' Q K'

On dit que le sextuplet **(G, H, K; G', H', K')** fournit le **schéma de production** et que G' P H' Q K' est une **conséquence** de G P H Q K par la production.

Productions Semi-Thueiennes

On définit le sextuplet particulier : **($\wedge$, H, $\wedge$; $\wedge$, H', $\wedge$)**

G P H Q K → G' P H' Q K' devient : **$\wedge$ P H Q $\wedge$ → $\wedge$ P H' Q $\wedge$** soit :

P H Q → P H' Q

- on obtient une règle de Thue orientée d'où le terme de semi Thueiennes

cette **production semi thueienne** s'exprime sous la forme :

H → H'

Productions normales

On définit le sextuplet particulier : **(H, $\wedge$, $\wedge$; $\wedge$., $\wedge$, H')**

G P H Q K → G' P H' Q K' devient : **H P $\wedge$ Q $\wedge$ → $\wedge$ P $\wedge$ Q H'** soit :

H P Q → P Q H'

Cette **production normale** s'exprime sous la forme :

HP → PH'

Productions antinormales

On définit le sextuplet particulier : **($\wedge$, $\wedge$, H ; H', $\wedge$, $\wedge$)**

Elle s'exprime sous la forme :

PH → H'P

Cette production antinormale est dite aussi production **Inverse** d'une production Normale

Exemples :

Soit les mots suivants :

- le schéma normal HP → PH' donne, pour P = 'mate' :

'tomate' → 'matelot'

H = 'to'

H' = 'lot'

- le schéma antinormal PH → H'P donne, pour P = 'mate' :

'matelot' → 'tomate'

H = 'lot'

H' = 'to'

Système combinatoire ou de réécriture

système combinatoire = système formel défini par les données suivantes :

a) un alphabet X ∪ β dans lequel

- X est appelé **alphabet du système** (X est fini)
- β est appelé **alphabet auxiliaire**, sert à l'écriture des règles

b) un **seul axiome** (ou thèse primitive) représenté par un mot non vide.

c) un **ensemble de règles** (règles de déduction) défini par un nombre fini de schémas de productions

Remarques : 2 systèmes combinatoires se différencient essentiellement par la définition de leurs schémas de productions

Grandes classes de systèmes combinatoires ou de réécriture

- **système semi thueien** : ne comporte que des productions semi thueiennes.
- **système thueien** = système semi thueien qui, pour toute production qu'il contient, contient la production inverse.
- **système normal** : ne comporte que des productions normales.
- **système de Post** : ne contient que des productions normales et leurs inverses.

Exemple de systèmes combinatoires ou de réécriture

Soit le système combinatoire :

- X = {a, b} = alphabet du système
- β = {s} = alphabet auxiliaire
- Axiome : le mot s
- Règles primitives : 2 productions semi thueiennes :

  (P 1) : s → asb

  (P 2) : s → ab

- (P1) conduit à une formule ∈ du vocabulaire (X ∪ β)* qui peut fournir une conséquence
- (P2) conduit à une formule ∈ X* qui n'admet pas de conséquence: on dit P2= **règle de fermeture**

L'application de Pl et P2 va permettre de rechercher {**formules VRAIES}** de ce système, et en particulier l'ensemble τ des **thèses du système**.

Exemple de systèmes combinatoires ou de réécriture

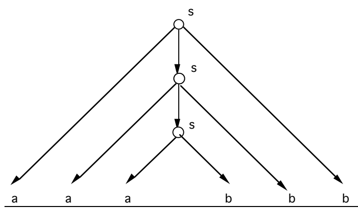
- Démontrer que **aaabbb** est une thèse, soit : **I- aaabbb** :

s → P1 → a s b

a s b → P2 → a a s b b

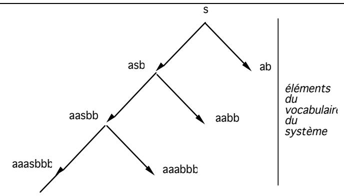
a a s b b → P3 → **a a a b b b**

la démonstration aboutit à la thèse τ et peut être représentée par : **un arbre**



- les éléments terminaux ∈ X (alphabet système)
- les éléments génériques ∈ β (alphabet auxiliaire)
- représentation possible car règles ont une partie gauche formée d'un mot de longueur 1

représentation dans le cas général :



Exemple de systèmes combinatoires ou de réécriture

- Terminologie de l'exemple :
  - le terme de vocabulaire, à la place d'alphabet, composé de mots,
  - les phrases du langage à la place des mots ou formules.
- Soit le système combinatoire :
  - vocabulaire du système υ est formé des mots du langage naturel
  - vocabulaire auxiliaire : (PH, GN, GV, AR, NO,VE} avec :
    PH pour *Phrase,* CN pour *Groupe Nominal* , GV pour *Groupe Verbal* , AR pour *Article* , NO pour *Nom* , VE pour *Verbe*
  - Axiome : le mot PH
  - 6 Règles : les règles de productions semi-thueiennes suivantes ("l" = ou) :

    PH → GN GV (1)

    GN → AR NO (2)

    GV → VE GN (3)

    AR → un l une l le l la l l' (4)

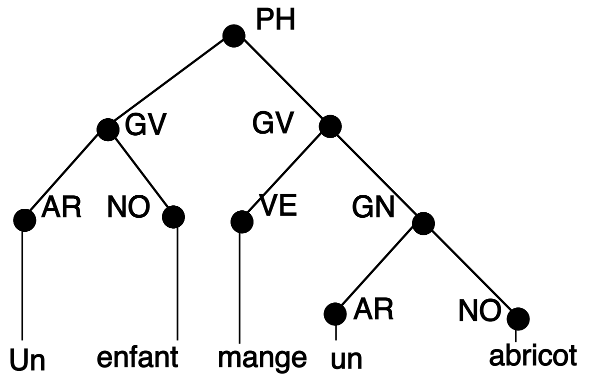
    NO → nom du vocabulaire du système (5)

    VE → verbe du vocabulaire du système (6)

Remarques :

- Règles (1) (2) (3) correspondent à des règles de syntaxe française
- Règles (4) (5) (6) = règles de fermeture permettant génération des phrases du système

Exemple de systèmes combinatoires ou de réécriture



PH → GN GV → (AR NO) GV → (AR NO) (VE GN) → (AR NO) (VE) (AR NO)
→ <un enfant mange un abricot >

Un tel système fournit des phrases qui sont correctes sur le plan syntaxique mais pas sur le plan sémantique, ainsi :

"l'abricot mange l'enfant".

Démonstration et Théorème

• Soit S un système combinatoire

une suite ∑ de mots X_1, X_2, ... $X_{i\text{-}j}$, X_i, ... X_n est une **démonstration** ssi :

• X_1 est **l'axiome** de S

• Xj est une **conséquence** de Xj-i par rapport à une production de S

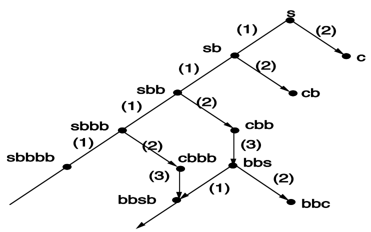
le dernier mot X_n s'appelle **théorème**

Exemple 3 de système combinatoire

- Alphabet : X = {s, b, c}
- Axiome : s
- Règles : de Productions semi-thueiennes
  - s → sb (1)
  - s → c (2);
  - cbb → bbs (3)

bbsb thèorème (l- bbsb) ???

- **Graphe généré** à l'aide :
  - de (1) du haut vers la gauche,
  - par (2) du haut vers la droite,
  - par (3) à "l'intérieur du graphe" et vers le bas
- Production des **mots vrais** du système
  (graphe et non arbre car partie gauche de (3) contient un mot dont le degré >1).



la formule **bbsb** est obtenue par 2 chemins sur le graphe :

1) **s** —(1)→ sb —(1)→ sbb —(1)→ sbbb —(2)→ cbbb —(3)→ **bbsb**
2) **s** —(1)→ sb —(1)→ sbb —(2)→ cbb —(3)→ bbs —(1)→ **bbsb**

-> 2 démonstrations différentes aboutissant au même théorème (ou dérivation) bbsb

Systèmes combinatoires monogéniques

Un système combinatoire est **monogénique** si chaque théorème admet **au plus une conséquence** par rapport aux productions du système.

Exemple 1

- (X ∪ β)* = {a, b, s}
- Axiome : s
- Productions :
  - s → asb (1)
  - s → ab (2)

→ le même mot **s** a **2** conséquences différentes **asb** et **ab**

⇒ il n'est pas monogénique.

Exemple 2

- X = {a, b, c}
- β = {s, t, u}
- Axiome : s
- Productions :
  - s → atb (1)
  - atb → aaubb (2)
  - u → c (3)

les théorèmes de ce système sont : s → atb (T1) → aaubb (T2) → aacbb (T3)

→ Ce système possède 3 théorèmes et de plus :

⇒ il est monogénique.

Ambiguïté d'une démonstration.

On a vu :

- **démonstration** dans un système combinatoire = suite ∑, de mots X_1, X_2, ... X_{i-j}, X_i, ... X_n dans laquelle :
  - X_1 est **l'axiome** de système
  - Xj est une **conséquence** de Xj-i par rapport à une production du système S
  - le dernier mot Xn s'appelle **théorème**

- **théorème ambigu**

  un théorème est **ambigu** (au plus haut degré de généralité) **s'il existe au moins 2 démonstrations distinctes**

- **démonstration distincte**

  2 démonstrations sont **distinctes** si elles diffèrent l'une de l'autre :
  - par les mots qu'elle contiennent
  - ou par l'ordre de ces mots
  - ou par les 2

Ambiguïté d'une démonstration.

Exemple

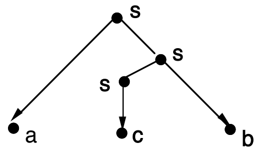
Soit le système combinatoire :

- X = {a, b, c, s}
- Axiome : s
- Productions :

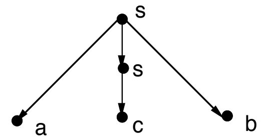
  s → as (1)
  s → sb (2)
  s → asb (3)
  s → c (4)

Le théorème **acb** est ambigu ; en effet :

1° démonstration :
s —(1)→ as —(2)→ asb —(4)→ acb

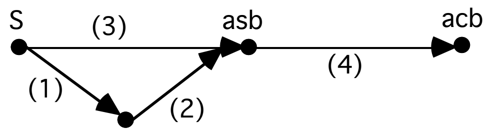


2° démonstration :
s —(3)→ asb —(4)→ acb



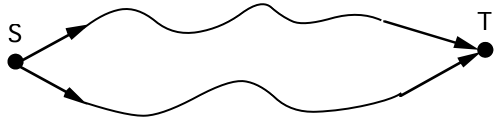
Ambiguïté d'une démonstration.

On a ainsi 2 "chemins possibles" pour aller de s à acb :



la prod.(3) "intègre" le résultat de l'application des productions (1) et (2) :

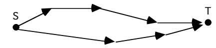
⇒ la démonstration du théorème **acb** est **<u>ambiguë</u>** car il existe au moins 2 chemins (c à d. 2 démonstrations) entre l'axiome du système et le théorème :



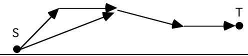
Les différents cas d'ambiguïté

Cas 1 :
les branchements créant les 2 chemins sont issus de l'axiome, la convergence de ces deux branchements vers le théorème peut se faire à 2 niveaux :

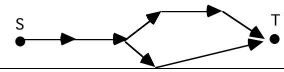
a) Sur le théorème lui-même



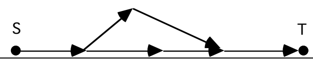
b) En amont du théorème



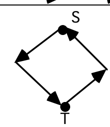
Cas 2 :
les branchements créant les deux chemins sont issus d'un mot (lui-même théorème) de la démonstration



Cas 3 :
combinaison de (1) et (2)



Cas 4 :
l'axiome et le théorème se trouvent sur un cycle. T est ambigu car peut être obtenu en circulant plus d'une fois sur le cycle



Cas (1) (2) (3)** : il existe au moins un théorème possédant plus d'une conséquence ⇒ systèmes **non monogéniques

***Cas 4**: système peut être monogénique car chaque mot (sommet du cycle) de la démonstration conduit à une seule conséquence*

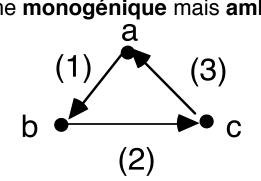
Exemple d'ambiguïté(cas 4)

Soit le système combinatoire :

- X = {a, b, c}
- Axiome : a
- Productions :

  a → b (1)
  b → c (2)
  c → a (3)

Système **monogénique** mais **ambigu**.



ainsi pour le théorème b c'est ambiguë

⇒ notion d'ambiguïté introduite est trop **vague** ;

elle exprime seulement, à ce niveau de généralité, une dépendance entre certaines productions du système combinatoire.