Logique pour l'Intelligence Artificielle

Logique des Prédicats (LP1)

Bernard ESPINASSE
Professeur à l'Université d'Aix-Marseille

2008

- **Système formel LP1**
- **Spécialisation dans LP1**
- **Interprétation dans LP1**
- **Décidabilité dans LP1**
- **Théorèmes de limitation**

Logique des prédicats (log. fonctionnelle)

- Permet représentation et interprétation de la connaissance plus riches
- Utilisé par de nombreux **systèmes experts** et **langages (Prolog, Snark, Ops5,....)**
- Proche de la **logique des classes** (J.Piaget)
- **Système Formel (SF) contenant :**
  - des êtres logiques susceptibles d'être liés dans la proposition :
    objets, individus ou variables prédicatives
  - des êtres logiques susceptibles de lier les précédents dans la proposition :
    les prédicats, fonctions propositionnelles
- **Exemple:**

"tout x qui à la propriété d'être homme est mortel" s'écrit:

$\forall$ x (homme (x)) $\supset$ (mortel(x))

avec:

homme, mortel = *prédicats*

x = *variable prédicative*

$\forall$ = *quantificateur universel*

SF de la logique des prédicats du 1°ordre (LP1)

- **Aspect générateur :** *un alphabet $\sum$:*
  - séparateurs: ( ) ,
  - constantes: a, b, c, d...bloc, Pierre,...
  - variables prédicatives: x, y, z, t...
  - prédicats: P, Q, R...SUR, ENTRE, PERE
  - fonctions: f, g, successeur, poids, précédent,...
  - opérateur logique: ¬, $\supset$
  - quantificateur universel: $\forall$ (quelque soit)
- **Remarques:**
  - à chaque prédicat P ou fonction f on associera un poids k ou arité de P ou f = nombre d'arguments de P *(entier positif)*
  - *une constante = fonction d'arité 0 (ex: bleu) ; une proposition = prédicat d'arité 0 (ex:vide)*
  - on peut définir le quantificateur existentiel $\exists$: $\exists$x A par ¬$\forall$x ¬A

LP1 : aspect générateur (suite):

- **Termes (procédé de construction):**
  - une constante est un terme
  - une variable est un terme
  - f(t1, t2, ..., tn) est un terme si f est un symbole fonctionnel et si t1,... tn sont des termes

    ex:

    f(x); g(x,a); f(g(a,f(b))); g(g(x,y),f(x)); suivant(7); suivant(x);....
- **Atomes (procédé de construction):**
  - les propositions (prédicats d'arité 0) sont des atomes
  - P(t1,t2,...tn) est un atome si P est un symbole prédicat et si t1,...tn sont des termes

    ex:

    P(a); P(x); P(f(a)); P(f(y)); Q(a,f(x),g(b,f(y))); Pere(jean, paul); Sur(table,voisin(b)); entre(table,x,appui(fenêtre));...

    contre-ex:

    successeur(x); appui(fenêtre);...

LP1 : aspect générateur (suite):

- **Formules bien formées (fbf):**
  - un atome est une fbf
  - si A et B sont des fbf alors ¬A, A∨B, A∧B, ... sont des formules
  - si A est une formule et x une variable alors (∃x) A et (∀x) A sont des formules

    (∃x)(∀y) ((P(x,y)V(Q(x,y)...R(x)) ; ((¬(P(a)⊃P(b)))⊃¬(P(b))

    (∀x) (homme(x)⊃mortel(x)∧homme(Paul)⊃mortel(Paul)

    contre exemple : (¬f(a)); f(P(a))

- dans une formule:
  - **variable liée** : si elle occure dans la portée d'un quantificateur
  - **variable libre** : si elle n'est pas liée

    (∀x) (∃y) plus_petit (x,y); → ***x et y liées***

    (∀x) (Q(x)⊃R(x)); → ***x liée***

    (∀x) P(x,y); y libre, → ***x liée***

    (∀x) P(x,y)∧(∀x) Q(y);

    y libre ***y liée***

  - **formule close**: toutes ses variables sont liées; ex: (∀x) (∀y) aime (x,y)

Logique des prédicats et ordres

- **Prédicats du premier ordre:**
  - seules ces variables prédicatives, peuvent être quantifiées :

∀x (P(x,y) ...

- **Prédicats du deuxième ordre:**
  - les prédicats eux-mêmes peuvent être quantifiés :

∀P ∀x (P(x,y))...

- **Dans les ordres supérieurs:**
  - les quantifications peuvent agir sur des prédicats de prédicats et ainsi de suite.

Prédicats et Représentation de la Connaissance (RdC)

- **Permettre une représentation de la connaissance plus riche que les propositions**

- **Chaque prédicat introduit un domaine de définition :**

  = ensemble des objets qui, substitués aux lettres qui y figurent, fournissent un assemblage, vrai ou faux, présentant globalement une signification.

- **Un prédicat portant sur une seule variable x sera appelé propriété, exemple:**

  "x est vert", "x est un oiseau", "x est un canari"...

- **Un prédicat portant sur plusieurs variables x,y,z,t,...sera une relation, par exemple:**

  relation binaire: *"x appartient à y"*

  relation ternaire: *"x donne y à z"*

  relation ....

- **Distinction entre relations et propriétés : fondamental** dans la représentation de la connaissance *(ignorée en logique des propositions)*

Spécialisation (particularisation) des prédicats

- **Spécialisation d'un prédicat P(x,y,z) c'est:**
  - donner aux lettres x,y,z, un **système de valeurs** objectives x1,y1,z1, appartenant à un domaine de définition:
    - on obtient alors la proposition P(x1,y1,z1)
    - (x1,y1,z1) satisfont à la relation P(x,y,z) .
  - la signification de cette proposition dépend de x1,y1,z1, considérés alors comme variables libres

- **Quantification universelle ∀ :**

∀ x,y P(x,y)

  - signifie tout x, tout y, satisfont à la relation P(x,y)

  → tout système de valeurs objectives attribué à l'ensemble des lettres x,y et prélevé dans le domaine de définition de P **le particularise**

Interprétation dans LP1

- **Une formule est interprétée sur un domaine D non vide s'il est possible d'assigner à chaque :**
  - constante → un élément de D
  - fonction d'arité n → une image de D^n->D
  - prédicat d'arité n → une image D^n->{V,F}

  Remarque:

  (∀x) est interprété par "pour tous les éléments de D"

  (∃x) est interprété par "il y a un élément dans D"
- **Ex : soit une formule G:(∀x) (R(x)⊃T(f(x),a)) et D3={4,5} une interprétation possible de G sur D3 pourra être: a=4; f(4)=5; f(5)=4; R(4)=V; R(5)=F; T(4,4)=V; T(4,5)=F; T(5,4)=V; T(5,5)=V;**
- **Evaluation des formules sur un domaine d'interprétation D:**
  - si la valeur de vérité des formules A et B est évaluée alors ¬A, A∨B, A∧B, ... sont évaluées par des tables de vérité
  - **(∀x) A** est évalué à Vrai si A est évalué à Vrai pour tous les éléments d de D; sinon A est évalué à Faux
  - **(∃x) A** est évalué à Vrai si A est évalué à Vrai pour au moins un élément d de D; sinon A est évalué à Faux

Particularité de LP1

- **Formule valide, satisfiable, insatisfiable (cf. LP0)**
- **Ensemble de formules consistant, inconsistant (cf. LP0)**
- **Identité logique:**
  - obtenu en remplaçant dans une tautologie de la logique des propositions tout ou partie des propositions P,Q,R... qui y figurent par les prédicats qu'on leur associe arbitrairement :

    Principe de l'identité : P⊃ P soit F(xi,yj) ⊃ F(xi,yj) :

    ∀ x,y tel que [F(x,y)⊃F(x,y)], (∃ x) (∃ y) tel que [F(x,y)⊃F(x,y)]
- **Règles d'équivalence dans LP1: les mêmes que LP0**

plus...

- **Négation des quantificateurs:**

¬(∃ x P(x))	*équivalent à*	**∀ x (¬P(x))**
¬(∀ x P(x))	*équivalent à*	**∃ x (¬P(x))**

SF - LP1 : aspects déductifs

- **Une axiomatique (de Frege - Lukasiewicz):** les **3 axiomes de LP0** sont repris:

  A1 : P ⊃ (Q ⊃ P)

  A2 : (P ⊃ (Q ⊃ R)) ⊃ ((P ⊃ Q) ⊃ (P ⊃ R))

  A3 : (¬P ⊃ ¬Q) ⊃ (Q ⊃ P)

  avec P, Q, R sont des formules quelconques de LP1
- **+ les 2 axiomes suivants :**

  A4 : ∀x P(x) ⊃ P(y) *axiome de particularisation*

  A5 : (Q ⊃ R) ⊃ (Q ⊃ ∀x R)

  avec P, R deux formules quelconques de LP1, et Q une formule n'ayant pas x pour variable libre
- **2 règles de déduction :**

  Modus Ponens :

  P, P ⊃ Q l- Q

  Règle de généralisation:

  P l- ∀x P (x est une variable libre dans m1)

  où P, Q sont des formules quelconques de LP1 et x une variable non libre de P.

Exemple de déduction dans LP1

- **Pour indiquer qu'il existe une déduction de B à partir des hypothèses A1, A2,...An on écrira:**

  A1, A2,... An l- B
- **Montrons que:**

  ∀x ∀y p(x,y) l- ∀z p(z,z)

f1: ∀x ∀y p(x,y)	hypothèse
f2: ∀x ∀y p(x,y) ⊃ ∀y p(z,y)	A4
f3: ∀y p(z,y)	modus ponens f1,f2
f4: ∀y p(z,y)) ⊃ p(z,z)	A4
f5: p(z,z)	modus ponens f3,f4
f6: ∀z p(z,z)	généralisation

Résultats en LP1

Premier théorème de GODEL (1930):

→ dans LP1, les théorèmes coïncident avec les formules logiquement valides, c.a.d. celles qui sont vraies dans toutes les interprétations

• **LP1 est semi-décidable :**

→ car pour les énoncés qui sont effectivement des théorèmes, on possède une procédure finie qui les démontre, procédure identifiée à un algorithme, une fonction récursive (thèse de CHURCH)

• **Les théorèmes de limitation :** il existe des SF où :

- **2° théorème de Gödel (1931) :** il existe des mots **m** tels que ni **m** ni **¬m** ne soit démontrables
- **Théorème de Tarski (1935) :** pour toute interprétation on a des énoncés vrais non démontrables
- **Théorème de Church (1936)** : montre que des SF (LP1) peuvent être indécidables (ou non résolubles). c.a.d. il est impossible de trouver des procédures capables de séparer les théorèmes des non-théorèmes

Ces 3 théorèmes affirment que certains problèmes sont insolubles avec les moyens mathématiques actuelles, limite valable tant pour l'homme que pour la machine.