Logique pour l'Intelligence Artificielle

Logique des Propositions (LP0)

Bernard ESPINASSE
Professeur à l'Université d'Aix-Marseille

2008

Notion de proposition

- **exemple de propositions:**
  Socrate est mortel, jean est client, ...
- **exprime avant tout une pensée,**
  "cette fleur est rouge",
- **possède une structure interne:**
  différents concepts articulés les uns aux autres:

  structure interne = forme attributive

  (forme apophantique):

  [Socrate] ***[est mortel]",***
  sujet **attribut**

Notion de proposition

la proposition :

- un acte indivisible de l'esprit qui la pose d'un seul coup; on peut dire que la proposition du fait même qu'elle énonce la pensée, l'unifie
- est appréciable au regard de la connaissance:
  possibilité d'une option: *une acceptation ou un refus*
- inséparable d'une évaluation:
  elle est à priori vraie ou fausse et doit donc être considérée comme :
  - **un énoncé**
  - **susceptible de recevoir une des deux valeurs logiques; vrai ou faux**

→ la logique propositionnelle est
bivalente et décidable.

Logique des propositions

- chaque proposition est un **énoncé indivisible**
- possède une **valeur logique vraie** ou **fausse**
- **on défini des connecteurs:**
  $\neg$ (non) ; $\vee$ (ou) ; $\wedge$ (et) ; $\supset$ (implique) ; <-> (équivalence);...
  - **les valeurs de vérité des formules : $\neg p$, $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \supset q$, p <-> q**
  - sont **déterminées uniquement** à partir des valeurs de vérité de p et de q (propriété de vérifonctionnalité)
  - de même pour **toute formule**

Tables de vérité

table de vérité des opérateurs élémentaires

a	b	¬a	¬b	a ∧ b	a ∨ b	a ⊃ b	a <-> b
V	V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	F
V	F	F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	F	V	V

d'où : $(a \supset b)$ équivalent à $(\neg a \vee b)$

SF LP0 de la logique des propositions

axiomatique de Lukasiewicz

- **aspects génératifs:**
- *alphabet* $\sum$:
  - lettres propositionnelles : p,q,r,..., variables représentant des <u>propositions primitives</u>
  - <u>opérateurs logiques</u> : $\neg$ (non), $\supset$ (implique),
  - <u>parenthèses</u> : (,),
- *règles de formation des propositions élaborées (mots)* R:
  - une lettre proposition est une proposition en soi
  - si p et q sont des propositions alors : **(p) ; $\neg$p ; p$\supset$ q** est une proposition
- possible d'utiliser d'<u>autres symboles équivalents</u>:
  - **$\wedge$ ("et" logique) et $\vee$ ("ou" logique):**
  - **$p \wedge q$ est équivalent par def. à $\neg p \supset q$**
  - **$p \vee q$ est équivalent par def. à $\neg(p \supset \neg q)$**
  - **$p <-> q$ est équivalent à $\neg((p \supset q) \supset \neg (q \supset p))$**
- l'<u>identité logique</u> notée "=" ainsi : p=q est équivalent à $(p\supset q)\wedge(q\supset p)$.

Détermination de valeurs logiques d'énoncés:

soit l'énoncé f: $(a \supset b) \supset (\neg b \supset \neg a)$

a	b	a ⊃ b	¬b	¬a	¬b ⊃ ¬a	f
V	V	V	F	F	V	**V**
V	F	F	V	F	F	**V**
F	V	V	F	V	V	**V**
F	F	V	V	V	V	**V**

- f **vraie** pour toutes les valeurs de vérité de a et b, alors f est une **tautologie**, notée I== f
- f **formule conséquence logique** de l'ens. des formules F car f vraie dès que toutes les formules de F sont simultanément vraies

p	q	p ⊃ q	f = q			
V	**V**	**V**	**V**			
V	F	F				
F	V	V				
F	F	V				

on a p , p ⊃ q I== q

- 2 formules **f** et **g** portant sur les mêmes propositions élémentaires, seront dites **équivalentes** ssi pour toute valuation v de ces propositions élémentaires, **v(f) = v(g)**:

f <=> g.

Tautologie et contradiction

- si un énoncé (proposition élaborée) est **toujours faux**, on parle alors de **contradiction**
- si un énoncé f est **toujours vrai** : **tautologie**
  - f est vraie pour toutes les valeurs de vérité de a et b
  - f est une <u>tautologie</u>, notée I== f
- la logique formelle se propose la détermination des lois du raisonnement valide indépendamment de leur sens,

$\rightarrow$ *objectif de la logique des propositions est la*

recherche de ces tautologies

- **tautologies remarquables:**

$p\supset p$ (principe d'identité)

$p\vee\neg p$ (principe du tiers exclu)

$\neg(p\wedge\neg p)$ (principe de non-contradiction)

$(p\wedge q)\supset p$ (principe de simplification)

Règles d'équivalence

- a **<=>** b signifie avoir même valeur de vérité soit avoir : a I== b et b I== a
- notons que l'on aura p <=> q ssi (p <--> q) est une **tautologie**
- **idempotence:**

  $p\vee p$ <=> p

  $p\wedge p$ <=> p
- **commutativité:**

  $p\vee q$ <=> $q\vee p$

  $p\wedge q$ <=> $q\wedge p$

  p<->q <=> q<->p
- **associativité:**

  $(p\vee q) \vee r$ <=> $p\vee (q \vee r)$

  $(p\wedge q) \wedge r$ <=> $p\wedge (q \wedge r)$
- **absorption:**

  $p\vee(p\wedge q)$ <=> p ; $p\wedge(p\vee q)$ <=> p

Règles d'équivalence (suite)

- **distributivité:**
  - $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
  - $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- **double négation:**
  - $\neg\neg p \Leftrightarrow p$
- **De morgan:**
  - $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
  - $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
- **élimination conditionnelle:**
  - $p \supset q \Leftrightarrow \neg p \vee q$
- **bi-élimination conditionnelle:**
  - $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \supset q) \wedge (q \supset p)$

SF- LP0 de la logique des propositions

axiomatique de Lukasiewicz (1930)

- **aspects déductifs :**

l'organisation déductive se repose sur:

- *une **axiomatique** (ici de Frege-Lukasiewicz-1930):*
  - (A1) $P \supset (Q \supset P)$
  - (A2) $(P \supset (Q \supset R)) \supset ((P \supset Q) \supset (P \supset R))$
  - (A3) $(\neg P \supset \neg Q) \supset (Q \supset P)$
- *une **unique règle de déduction** (ou d'inférence):* dite de "**modus-ponens**" (ou règle de détachement) :
  - si P et $P \supset Q$ sont des théorèmes, alors on déduit que Q est aussi un théorème
    (avec (et) = un élément métalinguistique)
  - **on note:** $P, P \supset Q \rightarrow Q$

Autres axiomatiques de LP0

- **Hilbert-Ackermann (1926)**
  - A1• $(p \vee p) \supset p$
  - A2• $p \supset (p \vee q)$
  - A3• $(p \vee q) \supset (q \vee p)$
  - A4• $(p \vee q) \supset ((r \vee p) \supset (r \vee q))$
  - avec ($\vee$) opérateur ou primitif;
    - ($\supset$) implication ($u \supset v$) désigne ($\neg u \vee v$)
- **Lukasiewicz (1929)**
  - A1• $(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$
  - A2• $(\neg p \supset p) \supset p$
  - A3• $p \supset (\neg p \supset q)$
  - avec ($\neg$) opérateur négation primitif
    - ($\supset$) implication
- **Nicod (1917)**

....

Principes et théorèmes connus...

- **les trois principes d'ARISTOTE**
  - sont des tautologies remarquables
  - lois fondamentales de la pensée déductive:
    - principe d'identité **($p \supset p$)**
    - principe de tiers exclu **($p \vee \neg p$)**
    - principe de non contradiction **($\neg(p \wedge \neg p)$)**

...sont démontrables

- **le théorème du raisonnement par l'absurde**

$(p \supset q) = (\neg p \vee q)$

  - indique que pour démontrer ($p \supset q$), il est équivalent de démontrer ($\neg p \vee q$).

... aussi démontrable

Méta-théorèmes

Il est possible de démontrer des méta-théorèmes, comme par exemple:

- $p \rightarrow \neg 2k\ p$
- p (et) $q \rightarrow p \wedge q$
- $(p \supset q)$ (et) $(q \supset r) \rightarrow (p \supset r)$

((et) = métaliguistique)

intérêt des méta-théorèmes:

- raccourcir les démonstrations
- permettre de définir de nouvelles règles de déduction (aussi méta-théorèmes):

par exemple:

$p \supset (q \supset r)$ -> $(q \supset (p \supset r))$

....

Interprétation dans LP0

interprétation dans LP0 :

toute application **i** telle que {p,q,r,....} $\rightarrow$ {V, F}
p, q, r, étant des propositions.

- **formule valide :**

pour toute interprétation i on a i[A] = V

- **formule satisfiable (consistante)**

il existe une interprétation i / on a i[A] = V

- **formule insatisfiable (inconsistante)**

pour toute interprétation i on a i[A] = F

- **ensemble de formules E insatisfiable:**

si $\forall$ interprétation i, $\exists$ A élément de E tel que i[A] = F
sinon :

- **ensemble de formules E insatisfiable**

Décidabilité de la logique des propositions

la logique des propositions est décidable:

- il est toujours possible de trouver une procédure permettant de montrer qu'un énoncé est un théorème ou non:

procédure de décidabilité:

consiste à utiliser les **tables de vérité**

- Pour montrer qu'un mot du système formel de la logique des propositions est un théorème, il faut et il suffit qu'il prenne la valeur d'interprétation "vrai (V)", quelles que soient les valeurs de variables propositionnelles qu'il contient (E.L.POST, 1932).

résultat fondamental:

- adéquation parfaite de la logique des propositions avec le raisonnement déductif et le langage habituel

$\rightarrow$ *la pensée et son discours sont, au moins en partie, formalisables et réductibles à des schémas purement symbolique*

Résultats de la logique des propositions

- **LP0 décidable**
- **LP0 non contradictoire :**

$\forall$ p ; p et ¬p ne sont pas simultanément dérivables

- **LP0 complète :**

$\forall$ p ; soit p ou soit ¬p dérivable

- **tout théorème est une tautologie:**

si |- p alors |== p

{théorèmes} du SF coïncide avec {tautologies (prop. dont la valeur de vérité est vraie},

ceci quelles que soient les valeurs de vérité (vrai ou faux) de toutes les variables propositionnelles sur lesquelles elles portent

- **complétude de la logique des propositions:**

si |== p alors |- p

toutes les tautologies sont des théorèmes

Limites de la logique des propositions

en logique des propositions:

• **on ne s'intéresse pas à la structure interne** de la proposition elle-même.

structure interne = forme attributive

(forme apophantique):

"[Socrate]   [est mortel]",
sujet   attribut

• **des <u>connaissances sont difficiles à exprimer</u> dans cette forme:**

exemple l'énoncé:

"Jean possède une montre",

• pour être exprimable en logique propositionnelle, cet énoncé doit être traduit ainsi:

"[Jean]   [est possédant d'une montre]"
sujet   attribut

Limites de la logique des propositions

forme apophantique => pas toujours réalisable:

• **car l'attribut isolé contient souvent des sujets potentiels:**

"[Jean] donne une [montre] à [Marie]"
montre est sujet possible

• **impossible de traduire l'énoncé suivant:**

"les hommes sont mortels"

cet énoncé fait intervenir une **variable quantifiée** "homme", dont le pluriel indique l'universalité:

*"tout **X** qui à la propriété d'être **homme** est **mortel**".*

=> besoin d'un système formel plus riche:
logique des prédicats