Logique pour l'Intelligence Artificielle

Introduction à la logique formelle et aux SYSTEMES FORMELS

Bernard ESPINASSE
Professeur à l'Université d'Aix-Marseille

2008

- **Introduction à la logique formelle**
- **Formes propositionnelle et implicative**
- **Définition d'un système formel**
- **Déduction dans un système formel**
- **Décidabilité dans un système formel**
- **Interprétation d'un système formel**
- **Logiques standards et non-standards**

Logique et Intelligence Artificielle

Utilisation de la logique "standard" pour :

- représenter les connaissances et effectuer des déductions
- comme base pour de nouveaux langages de programmation symbolique
- fonder le raisonnement des systèmes experts
- représenter la sémantique des langages naturels
- ...

Utilisation de logiques "non-standards" pour raisonner sur les processus :

- évaluant le temps
- portant sur des faits possibles mais non certain (théorie des possibilités, logique floue,...)
- sur des modalités de la connaissance (logique modale,...)
- ...

Logique formelle

- **Objet de la logique :**

  traite du raisonnement, de la démonstration , de la preuve

- **Logique classique : (antiquité)**

  Aristote, Abelard, Kant, Liebniz,
  logique = branche de la philosophie

- **Logique moderne: (siècle dernier)**
  - notions et méthodes introduites par Boole, Venn, Morgan, Freege, Russell, Whitehead,..
  - théorie des raisonnement valides: logique = discipline autonome différente de l'argumentation parlée ou écrite (J.B.Grize)
  - les raisonnement sont considérés indépendamment de leur contenu sémantique, mais uniquement dans leur forme

logique formelle ou symbolique
=
branche de la mathématique

Logique formelle

- **Par exemple le syllogisme traditionnel :**

  tout homme est mortel,
  Socrate est un homme,
  alors Socrate est mortel

- **Validité du raisonnement non lié au personnage sur qui il porte :**

  -> On peut ainsi remplacer :
  - \- **Socrate** par un symbole; la **lettre x** (variable individuelle),
  - \- les concepts **homme**, **mortel** par les **symboles f et g** (variables conceptuelles)

  -> On obtient un modèle abstrait de raisonnement = **forme propositionnelle**:

  tout f est g,
  x est un f,
  alors x est g

Forme propositionnelle ou inférentielle

tout f est g,
x est un f,
alors x est g

Alors :

- la notion de ***vérité*** semble avoir disparu,
- seulement susceptible de ***validité***,

Notons que :

- les formes propositionnelles ne deviendront des propositions que lorsqu'on aura assigné aux variables des valeurs
- les propositions seront vraies ou fausses selon valeurs affectées aux variables

Forme implicative

- pour retrouver avec ces variables une notion de vérité, il faut passer de la forme propositionnelle à la **forme implicative** :

forme implicative:

forme complexe, énonçant une relation entre:
les **prémisses** (impliquant)
et
la **conclusion** (impliqué).

- soit la formule :

SI tout f est g et SI x est f, ALORS x est g

prémisses conclusion

- forme *implicative*:

SI tout f <u>est</u> g et SI x <u>est</u> f, ALORS x <u>est</u> g

forme implicative = proposition unique comportant une seule assertion toujours vraie (**vérité logique ou tautologie ou vérité formelle**)

Logique formelle

- **Ainsi la formalisation du raisonnement nécessite :**
  - **variables** (conceptuelles ou individuelles),
  - **mots de liaison** comme si, alors, ou, et, car, donc...
  - **verbes** comme est, appartient, implique,....

*mots, verbes = symboles **non** substituables = **opérateurs***

- **Ambiguïtés liées au langage parlé dans l'expression :**
  - des **opérateurs**, (*ou* exclusif, *ou* inclusif)
  - des **verbes** (*être* = l'égalité, = appartenance...)

⇨ **L'objectif de la logique formelle sera de :**

- "dépister" ces <u>ambiguïtés</u>
- permettre l'étude <u>des pas de raisonnement</u> (ou inférences), un à un
- en démontrant rigoureusement leur <u>validité</u> sans laisser place au jeu des interprétations ou à une quelconque lacune associée à une étape non <u>justifiée</u>.

Historique

- **1913 : B.Russell & A.Whitehead auteurs de "Principia mathematica":**
  - la logique prend ses distances du langage parlé et s'érige en discipline autonome
  - ceci pose les problèmes fondamentaux :
  - l'étude de la logique pour elle-même, et donc raisonner sur une formalisation du raisonnement ne constitue-t-elle pas un cercle vicieux?
  - dans quel mesure peut-on faire reposer l'ensemble des mathématiques sur la logique?
- **1931: Théorème de K.Godel montre que ceci est impossible**
  - Il posera ainsi les limites internes de la logique formelle, de la théorie de la démonstration et des formalismes en général
  - Il en reste pas moins :
    - Comment passer d'un formalisme logique, vide de sens à une interprétation concrète du monde réel?
    - C'est tout le problème de ***l'interprétation d'un système formel***

Système formel

Définition:

- ensemble **abstrait**,
- sans liens avec l'univers extérieur,

… décrivant :

- un ensemble de **règles** manipulant de façon uniquement **syntaxique** (sans considération de sens)...
- un ensemble de **symboles**

Un système formel se compose:

de façon générative:

d'un ensemble **EF** d'expressions ou *formules bien formées (fbf)* ou mots construits à partir de :

- un alphabet $\sum$:
  - des expressions primitives ou symboles
  - d'opérateurs, quantificateurs

selon certaines :

- règles de formation ou de substitution

de façon déductive:

d'un ensemble de **thèses** (ou expression bien formées) composées :

- d'**axiomes** **A** ou thèses primitives constituant des mots
- de **théorèmes**, qui sont des thèses démontrées à partir de définitions et des axiomes, ou d'autres théorèmes préalablement démontrés, selon des
- de règles de déduction (ou de dérivation) R

Notion de déduction dans un système formel

- **Preuve (ou démonstration):**
  - suite finie de mots, M1, M2,...Mp
  - dans laquelle chaque Mi est:
  - • soit un axiome
  - • soit se déduit par applications d'une des règles des mots précédents Mj avec j < i,
- **Un théorème:**
  - est un mot T, tel qu'il existe une preuve avec Mr=T
  - tout axiome est un théorème
  - T est un théorème, est noté: $\vdash$ T
- **Les règles de déduction:**
  - appelées aussi règles de dérivation, règles d'inférences
  - permettent de distinguer les théorèmes des mots quelconques :

{**théorèmes**} compris dans {**mots**}

Règles de déduction (ou de dérivation)

- **Règles de production :**

Règles qui portent sur des mots dans leur totalité, par exemple la règle:

" x < y et y < z → x < z"

(→ pour "entraîne")

- **Règles de réécriture :**

Portant sur toute partie d'un mot constituant elle-même un mot du système formel, par exemple la règle:

" x - x → 0 "

- **Règle de substitution :**

Soit un mot M d'un SF et une régle G → D :

- Pour appliquer la règle au mot M d'un SF, il faut faire **coïncider** le membre gauche G de la règle avec M
- Pour cela on a le droit d'effectuer des ***substitutions*** dans G et/ou dans M
- Une substitution consiste à remplacer toutes les occurrences d'une variable par un mot quelconque d'un système formel qui ne contient pas cette variable.

Exemples de système formel

Soit le système formel suivant (D.Hofstadter : Godel Escher et Bach, InterEditions):

Aspect génératif :

- **Σ** alphabet : { M,U,I }
- **EF** {formules bien formées}: toute suite de lettres de cet alphabet

Aspect déductif :

- **A** axiome : MI
- **R** règles de déduction :
  - R 1: f I —> f I U (règle de production)
  - R 2:M f —> M f f (règle de production)
  - R 3:fI I I g —> fUg (règle de réécriture)
  - R 4:fU Ug —> fg (règle de réécriture)

avec f et g étant des expressions bien formées quelconques de EF

Dérivations

- A partir du mot "**MUI**", par la règle **R2**, on obtient le **théorème** "**MUIUI**", sous réserve que "**MUI**" soit d'abord un **théorème**
- La règle **R3** permet de passer du mot "**MUIIIUM**" à "**MUUUM**"
- **R4** permet de passer de "**MUUUUMM**" à "**MMM**"

On peut aussi faire "**fonctionner**" le système formel à partir de **l'axiome** de départ :

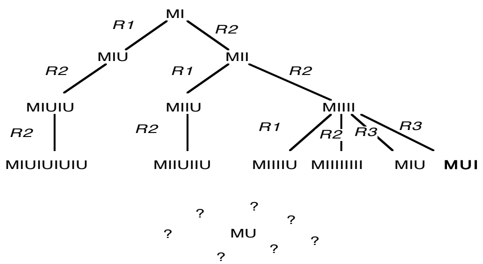
1 • MI;	axiome de départ
2 • MII;	R2 sur 1
3 • MIIII;	R2 sur 2
4 • MIIIIU;	R1 sur 3
5 • MIUU;	R3 sur 4 en troisième position
6 • MI;	R4 sur 5

Dérivations

D. Hofstadter nous propose de :

- montrer que MUI est un théorème et en trouver la preuve
- UM est-il un théorème ?
- montrer que MU n'est pas un théorème

Arbre de dérivation:



procédure de décision ????

Décidabilité des systèmes formels

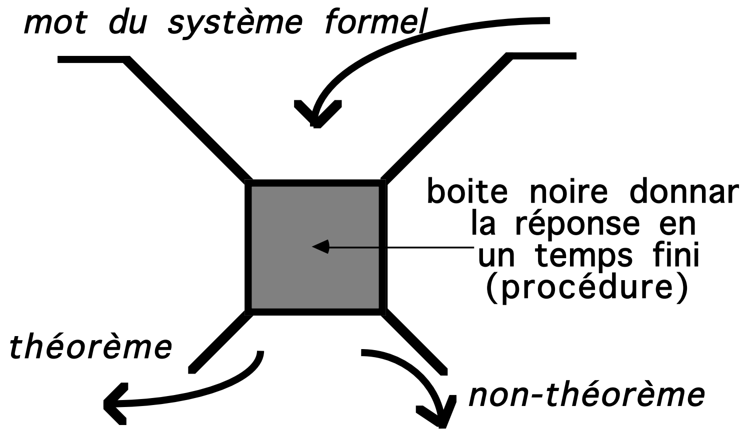
- **Un système formel permet de construire un certain nombre d'énoncés ou mots**
- **Inversement:**

Considérant un énoncé du système formel décider si :

- cet énoncé est démontrable ou non, c'est-à-dire
- si celui-ci est un **théorème ou non**,
- l'existence d'une procédure permettant une telle décision conduit à qualifier le système formel de **décidable**
- une telle procédure de décidabilité n'existe pas toujours :

- **logique des propositions : SF décidable (tables de décision)**
- **logique des prédicats du premier ordre: SF semi-décidable :**
  - s'il est possible, par application itérative des règles de déduction sur les axiomes d'énumérer l'ensemble (pouvant être infini) des théorèmes possibles
  - → il n'existe aucun procédé semblable pour générer l'ensemble des non-théorèmes

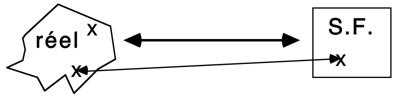
Décidabilité des systèmes formels



Interprétation d'un système formel

Interprétation d'un système formel c'est :

• sa mise en rapport avec l'univers réel



afin de :

• donner un sens à tout symbole de son alphabet, soit établir un homomorphisme entre ces derniers et des objets de l'univers,

• interpréter tout théorème et axiome, c.a.d. théorème et axiome = un énoncé (une proposition jugée comme vraie ou fausse)

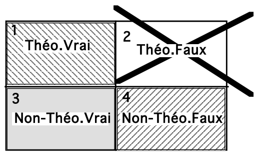
Système formel <u>intéressant</u> :

• il existe de nombreuses interprétations : la démonstration d'un théorème, fournira autant de résultats dans des univers réels différents,

=> système général constituant alors un **modèle**

Interprétation d'un système formel

<u>Démonstration et valeur de vérité</u>: *distinction profonde entre concepts de **preuve** et de **vérité***



Cas sympathiques :

1• interprétation vrai du théorème OK ! ...

2• à éliminer par définition dans un SF: interprétation correctes <-> théorème valeur vrai

idéal *:*

4 • associer valeur faux à tous les non-théorèmes souhaitable (log. des propositions)

Problème ! :

3 • il peut exister des non-théorèmes d'un S.F. qui dans certaines interprétations sont vraies...il existe même (théorème de limitation) des SF dans lesquels cette case n'est vide pour aucune interprétation !

Propriétés des systèmes formels

Soit un système formel S:

• l'ensemble des théorème de S est noté Ts

• f une formule bien formée de S

Système formel décidable

Système formel consistant (non contradictoire):

• doit comporter un **symbole de négation**

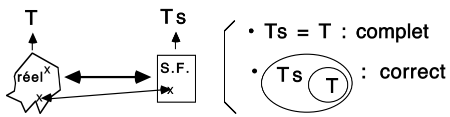
• il n'existe **aucune formule** bien formée f telle que : |- f et |- ¬f

Système formel saturé:

• pour toute f non élément de Ts, le système S' obtenu en ajoutant f aux axiomes de S est inconsistant

Système formel complet:

• soit à modéliser une situation qu'on voudrait obtenir comme ensemble T fixés à l'avance de théorème de S, S est complet si Ts=T (correct si Ts contient T)



Système formel et théorie

- **Formaliser une théorie (arithmétique, théorie scientifique, ...) c'est :**
  - construire un système formel (SF)
  - montrer que la théorie préexistante est une interprétation de SF

  ainsi :
  - un système formel est indépendant d'une théorie
  - un système formel peut avoir plusieurs interprétations
  - plusieurs systèmes formels peuvent servir à formaliser une même théorie
- **Soit une théorie T**
  - T interprétation d'un système formel SF
  - soit **A** les axiomes propres de T, soit **a** les axiomes propres de SF
- **Déduction dans la théorie T:**
  - généralisation de la notion de déduction
  - les f_i déduits peuvent l'être dans (a) ou dans (A)

Si $T = \{h_1, h_2, ..h_n\}$ on écrira : T l- g ou $h_1, h_2, ..h_n$ l- g

Système formel et théorie

- **Applications:**
  - déduction de g à partir de $h_1, h_2, ..h_n$
  - gestion d'hypothèses
  - cf. base de faits dans un système expert

Théorie inconsistante:
- la négation (¬) existe dans SF
- T est inconsistante si il existe une formule f telle que T l- f et Tl- ¬f

Système formel S1

Génératif :
- $\Sigma = \{p_0, p_1, ...p_n ...\}$ U {¬,v} ***avec ¬ = négation et v = ou***
- **EF** ensemble de toute les formules de la forme : $q_1 \vee q_2 \vee ..... \vee q_n$

avec

$q_i = p_k$ ou $q_i = \neg p_k$

si n = 0 alors "formule vide") notée

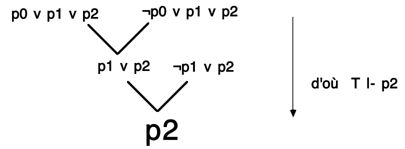
Déductif :
- **A = Ø** (aucun axiome)
- **R** = {pr,s}

avec pour toute formule de EF; f,g,f',g':

- *pr = règle de résolution* : f v pi v f' , g v ¬pi v g' -> f v f' v g v g'
- *s = règle de simplification* : f v g v f' v g v g' -> f v g v f' v g'

Exemple de déduction dans S1

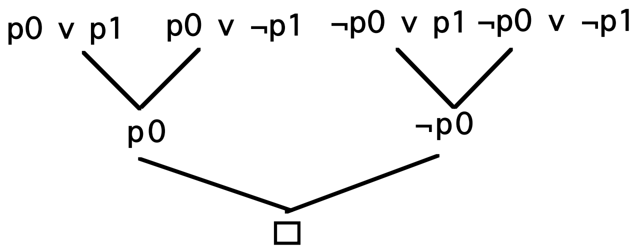
Axiomes propres:
- $p_0 \vee p_1 \vee p_2$ (h1)
- $\neg p_0 \vee p_1 \vee p_2$ (h2)
- $\neg p_1 \vee p_2$ (h3)



- f_1: $p_0 \vee p_1 \vee p_2$ (h1)
- f_2: $\neg p_0 \vee p_1 \vee p_2$ (h2)
- f_3: $p_1 \vee p_2$ (pr avec f_1 et f_2)
- f_4: $\neg p_1 \vee p_2$ (h3)
- f_5: p_2 (pr avec f_3 et f_4)

Autre exemple de déduction dans S1

$p_0 \vee p_1\ ,\ p_0 \vee \neg p_1\ ,\ \neg p_0 \vee p_1\ ,\ \neg p_0 \vee \neg p_1$ |- *(formule vide)*



Représentation des connaissances en logique formelle

Présentation de 2 systèmes formels :

- logique des **propositions**
- logique des **prédicats**

de la façon suivante :

- **alphabet et règles de formation** (représentation des connaissances)
- **organisation déductive** (interprétation des connaissances)

Systèmes formels - aspects génératif et déductif :

- évocation succincte des contenus génératifs de chaque système formel
- organisation formalisée pour la conduite du raisonnement.
- chacune de ces logiques, en tant que système formel, dispose aussi d'une organisation déductive, associée aux règles déductives, qui nous permettra de formaliser certains types de raisonnements, principalement déductifs.

Logiques standards et non-standards

- **Logiques « standards » :**
  - logique des propositions, logique des prédicats,
- **Logiques « non-standards » :**

  2 groupes (d'après S. HAACK: philosophy of logics):

  - ***logiques étendues*** : étendre la logique standard en ajoutant un nouveau vocabulaire logique:
    - logiques modales: "nécessaire" et "possible",
    - logiques temporelles: "il se pourrait que" et "il arrivera que"
    - logiques déontiques: "obligatoire", "permis"
    - logiques épistémiques (de la connaissance, croyances): "sait que", "pense que",...
  - ***logiques alternatives*** : s'écartent de la logique standard:
    - logiques multivalentes, intuitionnistes, floue,...
    - le principe du tiers exclu n'est plus valable....