TD. Treillis, Algèbres de Boole et $\mathcal{P}(E)$

1 Treillis

1. Soit x un élément complémenté d'un treillis A et $\bar{x}$ un de ses compléments. Démontrer que $\bar{x}$ est complémenté et donner un de ses compléments.

2. Soit N un nombre entier strictement positif quelconque. On munit A, l'ensemble des diviseurs entiers positifs de N de la relation de divisibilité.

   (a) Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre.

   (b) Dessiner le diagramme de Hasse quand $N = 25$ et $N = 6509$.

   (c) Démontrer que A est un treillis distributif. Que sont $x \vee y$ et $x \wedge y$?

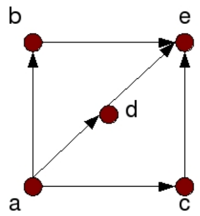
   (d) Quels sont les éléments complémentés de A ? Quel est le complément d'un élément x ?

   (e) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur N pour que le treillis soit complémenté.

3. Un treillis est modulaire si l'on a toujours $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$ quand $x \preceq z$.

   (a) Démontrer que les treillis distributifs sont modulaires.

   (b) Le treillis ci-dessous est-il modulaire ?



2 Algèbres de Boole

1. Soit B et X deux algèbres de Boole. Sur l'ensemble $B \times X$, on définit les trois opérations :

$$(a, x) \wedge (b, y) = (a \wedge b, x \wedge y)$$

$$(a, x) \vee (b, y) = (a \vee b, x \vee y)$$

$$\overline{(a, x)} = (\bar{a}, \bar{x})$$

   Démontrer qu'avec ces opérations, $B \times X$ est une algèbre de Boole.

2. Sur toute algèbre de Boole on peut définir une quatrième opération notée Λ, en posant :

$$x \Lambda y = (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y)$$

   (a) Démontrer que Λ possède les propriétés suivantes :

$$x \Lambda x = \perp$$

$$x \Lambda y = y \Lambda x$$

$$x \Lambda \perp = x$$

$$(x \Lambda y) \Lambda z = x \Lambda (y \Lambda z)$$

$$x \wedge (y \Lambda z) = (x \wedge y) \Lambda (x \wedge z)$$

   (b) Réciproquement, une opération Λ qui possède ces propriétés est-elle nécessairement définie par $x \Lambda y = (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y)$?

3. Soit x un élément d'une algèbre de Boole.

   (a) Que peut-on dire d'un élément y qui vérifie $x \wedge y = \bot$?
   (b) Que peut-on dire d'un élément y qui vérifie $x \vee y = \top$?

4. Dire si les égalités suivantes sont vérifiées dans toute algèbre de Boole :

   (a) $\bar{x} \vee (x \wedge y) = \bar{x} \vee y$
   (b) $(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{z}) = (x \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y)$
   (c) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (x \vee y \vee z)$
   (d) $(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee z \wedge x)$
   (e) $x \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z} \wedge u) = (x \vee y \vee z \vee u)$

5. En utilisant les formules de De Morgan, déterminer les compléments de :

   (a) $(\bar{y} \wedge z) \vee (z \wedge d)$
   (b) $(y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{y} \wedge x) \vee (x \wedge z)$
   (c) $(y \wedge \overline{(x \vee y)}) \vee (\overline{(\bar{x} \vee y) \wedge z})$
   (d) $x \wedge \overline{y \vee \bar{x} \vee \overline{(x \vee (\bar{y}))}}$

6. Dans une algèbre de Boole, un élément peut-il être égal à son complément ?

7. Que peut-on dire d'un élément x d'une algèbre de Boole qui vérifie $x \preceq \bar{x}$? Que peut-on dire si deux éléments d'une algèbre de Boole vérifient $x \wedge y = x \vee y$?

8. Si deux éléments a et b d'une algèbre de Boole vérifient $a \preceq b$, montrer que :

$$(x \wedge a) \preceq (x \wedge b)$$

$$(x \vee a) \preceq (x \vee b)$$

$$\bar{b} \preceq \bar{a}$$

9. On étudie l'équation $a \vee x = b$ où a et b sont donnés et x est inconnu.

   (a) Montrer que $a \preceq b$ est une CNS pour que cette équation ait au moins une solution.
   (b) On pose $y = x \vee \bar{a}$. Montrer que $x = b \wedge y$ et $\top = b \vee y$.
   (c) Si x est une solution, montrer qu'on a nécessairement $(\bar{a} \wedge b) \preceq x \preceq b$. Démontrer la réciproque.
   (d) Démontrer que les solutions de l'équation sont tous les éléments de la forme $x = b \wedge c$ avec $\bar{a} \preceq c$.
   (e) Reprendre l'étude pour l'équation $a \wedge x = b$.

10. Un élément a d'une algèbre de Boole étant donné, quelles sont les solutions de l'équation

$$(a \wedge x) \vee (\bar{a} \wedge \bar{x}) = \top$$

11. Soit $\mathcal{B}$ un ensemble de cardinal 2^n. Combien peut-on mettre de relations d'ordre sur $\mathcal{B}$ pour en faire une algèbre de Boole ?

12. On considère une algèbre de Boole qui possède n atomes. Si x est un élément quelconque, on note $d(x)$ le plus petit nombre de flèches qu'il faut suivre pour aller de $\bot$ à x dans le diagramme de Hasse.

   (a) Que valent $d(\bot), d(\top)$ et $d(a)$ quand a est un atome ?
   (b) Si x est un élément quelconque, exprimer $d(x)$ en fonction du nombres d'atomes inférieurs à x.
   (c) Démontrer la formule $d(x \vee y) = d(x) + d(y) - d(x \wedge y)$.

3 Parties d'un ensemble

1. En utilisant d'abord un diagramme de venn, puis les fonctions caractéristiques, déterminer s'il y a égalité entre les deux ensembles situés sur la même ligne :

1.	$B \cap (A \cup C)$	$[(A \cap B) \cup C] \cap B$
2.	$\bar{A} \cap B \cap C$	$[(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B)] \cap C$
3.	$A \cup (B \cap C)$	$[(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{C})] \cup A$

2. Dessiner un diagramme de Venn qui illustre chacune des situations suivantes :
   (a) $A \cup B = A \cup C$ avec $B \neq C$
   (b) $(A \cup B) \subseteq (A \cup C)$ avec $B \nsubseteq C$
   (c) $A \cap B = A \cap C$ avec $B \neq C$
   (d) $(A \cap B) \subseteq (A \cap C)$ avec $B \nsubseteq C$

3. Si $A \cap B = A \cup B$ que peut-on dire des parties A et B ?

4. Les symboles χ_A et χ_B désignent les fonctions caractéristiques de A et de B, les lettres a, b, c et d, des nombres inconnus. Quand l'application $f = a + b\chi_A + c\chi_B + d\chi_A\chi_B$ est-elle une fonction caractéristique ? De quelle partie ?

5. Les élèves d'une école étudient 0, une ou plusieurs langues : on sait que :
   (a) les cours d'anglais sont suivis par 416 élèves,
   (b) les cours d'espagnol sont suivis par 212 élèves,
   (c) Il y a 276 garçons dans l'école,
   (d) parmi les garçons, 103 font de l'anglais, et 78 font de l'espagnol,
   (e) 98 élèves font à la fois de l'anglais et de l'espagnol, et parmi eux 30 sont des garçons.

   Combien de filles étudient au moins une des deux langues, anglais ou espagnol ?