TD: Relations

1 Relations, relations d'équivalence

1. Sur l'ensemble des mots de la langue française, on définit la relation : `le mot M est lié au mot N s'ils coïncident après qu'on ait inversé l'ordre des lettres de M`. Déterminer quelques couples de mots en relation, ainsi que des mots en relation avec eux-mêmes (ces derniers sont appelés des *palindromes*).
   Solution : M=BONS et N=SNOB, SAC et CAS, TROP et PORT. Exemples de palindromes : ROTOR, RADAR, ELLE, RESSASSER, ...

2. Sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, on définit deux relations, notées respectivement Σ et Δ, de la façon suivant :
   - $x\Sigma y$ quand la somme $x + y$ est paire
   - $x\Delta y$ quand la différence $x - y$ est paire

   Ces relations sont-elles égales ?
   Solution : Oui, car $(x + y) = (x - y) + 2y$.

3. En identifiant l'ensemble des relations entre A et B à l'aide de $\mathcal{P}(A \times B)$, déterminer le nombre de relations entre A et B en fonction du nombre d'éléments de A et de B.
   Solution : L'ensemble des relations entre A et B est l'ensemble des parties construites sur $A \times B$. Par exemple, $A = \{1, 2\}$ et $B = \{a, b, c\}$. Le cardinal de $A \times B$ est $|A| * |B|$, donc le nombre de relations entre A et B est $2^{|A|*|B|}$

4. Soient A et B deux ensembles et $\mathcal{R}$ une relation entre A et B. On associe à $\mathcal{R}$ une fonction $f : A \to \mathcal{P}(B)$ de la façon suivante : $f(a) = \{b \in B \mid a\mathcal{R}b\}$. On note ϕ l'application qui associe la fonction f à la relation $\mathcal{R}$. Démontrer que ϕ est bijective.
   Solution : Si deux relations donnent la même fonction, c'est que, $\forall a \in A$ les ensembles formés des éléments de B qui sont en relation avec a sont les mêmes pour les deux relations.

5. Si $\mathcal{R}$ est une relation binaire, on lui associe la relation ${}^t\mathcal{R}$, appelée transposée de $\mathcal{R}$, définie par : $x\,{}^t\mathcal{R}y$ si $y\mathcal{R}x$.
   (a) Quelle est la transposée de ${}^t\mathcal{R}$?
   Solution : $\mathcal{R}$
   (b) Comparer les représentations cartésiennes de $\mathcal{R}$ et ${}^t\mathcal{R}$.
   Solution : Elles sont symétriques par rapport à la diagonale
   (c) Que peut-on dire si $\mathcal{R}$ et ${}^t\mathcal{R}$ sont égales ?
   Solution : La relation $\mathcal{R}$ est symétrique
   (d) Si $\mathcal{R}$ est transitive, en est-il de même de ${}^t\mathcal{R}$? Même question pour l'anti-symétrie.
   Solution : Oui et oui

6. Les relations suivantes sont-elles réflexives, (anti)-symétriques et/ou transitives ?
   (a) $A = \mathbb{R}$ et $x\mathcal{R}y$ si $|x| = |y|$
   Solution : réflexive, symétrique et transitive.
   (b) $A = \mathbb{R}$ et $x\mathcal{R}y$ si $(\sin x)^2 + (\cos y)^2 = 1$
   Solution : réflexive.
   (c) $A = \mathbb{N}$ et $x\mathcal{R}y$ s'il existe p et q entiers strictement positifs tels que $y = px^q$
   Solution : réflexive, anti-symétrique et transitive.
   (d) A est l'ensemble des points du plan, et $x\mathcal{R}y$ si la distance de x à y est inférieure à 52,7 km.
   Solution : réflexive, symétrique

7. Combien y-a-t'il de relations binaires sur un ensemble à n éléments ?
   Solution : Cf exercice 1. : 2^{n^2}

8. Combien y-a-t'il de relations réflexives sur un ensemble à n éléments ?
   Solution : Toutes les relations R sur cet ensemble E telles que $xRx, x \in E$: donc on compte les parties sur $E^2 \backslash \{x \times x | x \in E\}$, de cardinal $n^2 - n$ donc au final le nombre de relations réflexives sur E est 2^{n^2-n}

9. Combien y-a-t'il de relations symétriques sur un ensemble à n éléments ?
Solution : Toutes les relations R sur cet ensemble E telles que si $xRy, x, y \in E$, alors on a aussi yRx : $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$

10. Sur $\mathbb{Z}$ on écrit : $x\mathcal{R}y$ quand $x + y$ est pair. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Décrire ses classes d'équivalence.
Solution : Réflexive car $x + x$ est toujours pair ; symétrique car $x + y = y + x$; transitive car $x + z = (x + y) + (y + z) - 2y$ donc si $x + y$ et $y + z$ sont pairs alors $x + z$ l'est aussi. Les deux classes d'équivalence = l'ensemble des entiers pairs et l'ensemble des entiers impairs.

11. Sur l'ensemble des mots binaires de longueur 7, on définit la relation $m\mathcal{R}n$ quand les mots m et n diffèrent par moins de 5 bits. S'agit-il d'une relation d'équivalence ?
Solution : Non, elle n'est pas transitive.

12. Sur l'ensemble des applications de $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on définit la relation $f\mathcal{R}g$ s'il existe deux constantes réelles *strictement positives* α et β telles que $\forall x, \alpha f(x) \leq g(x) \leq \beta f(x)$.

    (a) Démontrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.
    Solution : Réflexive avec $\alpha = \beta = 1$; symétrique car $\alpha f(x) \leq g(x) \leq \beta f(x)$ entraîne $\alpha^{-1}g(x) \leq f(x) \leq \beta^{-1}g(x)$ ok puisque coefficients > 0 ; transitive car si $\alpha_1 f(x) \leq g(x) \leq \beta_1 f(x)$ et $\alpha_2 g(x) \leq h(x) \leq \beta_2 g(x)$ alors $\alpha_1\alpha_2 f(x) \leq h(x) \leq \beta_1\beta_2 f(x)$ puisque les coefficients sont > 0.

    (b) Donner des exemples d'applications f et g qui sont équivalentes mais pas égales
    Solution : Par exemple, $f(x) = 3x^2 + 1$ et $g(x) = 8x^2 + 3$

2 Relations d'ordre

1. Que peut-on dire d'une relation qui est à la fois symétrique et antisymétrique ?
Solution : Les cases noircies de son diagramme cartésien sont situées sur la diagonale : si elle est réflexive, c'est l'égalité.

2. Disons qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble A possède la propriété (P) si l'on n'a jamais en même temps $y\mathcal{R}x$ et $x\mathcal{R}y$.

    (a) Une telle relation est-elle antisymétrique ?
    Solution : Oui

    (b) Une relation antisymétrique a-t-elle la propriété (P) ?
    Solution : Non car la propriété (P) implique aussi l'irreflexivité.

3. Soit E un ensemble ordonné. A tout élément de $x \in E$ on associe $M(x)$ l'ensemble des majorants de x, ce qui définit une application $M : E \to \mathcal{P}(E)$

    (a) Caractériser les éléments maximaux et le plus petit élément de E.
    Solution : Les éléments maximaux sont les x tels que $M(x)$ est un singleton ($M(x) = \{x\}$). Le plus petit élément de E est un élément x tel que $M(x) = E$.

    (b) L'application M est-elle injective ?
    Solution : Oui car $M(x)$ est un ensemble dont x est le plus petit élément.

4. Soit l'ordre lexicographique sur $\mathbb{B}^*$ (mots binaires) tel que défini ci-dessous.

    Définition :

    Soit $\mathbb{B}^*$ les mots binaires, avec l'ordre $0 < 1$

    Soit ϵ le mot de longueur nulle

    Soit $m, w \in \mathbb{B}^*$, $m = m_1m_2m_3\cdots m_p$ et $w \in \mathbb{B}^*, w = w_1w_2w_3\cdots w_q$

    - $\forall m \in \mathbb{B}^*$, $\epsilon \preceq m$
    - $m \preceq w$ si : $p \leq q$ et $\forall i, 1 \leq i \leq p, m_i = w_i$ (exemple : $011 \preceq 0110$)
    - $m \preceq w$ si : $\forall i, 1 \leq i \leq s - 1$ t.q. $s \leq p, q, m_i = w_i$ et $m_s < w_s$ (exemple : $001 \preceq 010$)

    Exemples :

    100100 $\preceq$ 1001001, 01000111 $\preceq$ 1100, 01101 $\preceq$ 01101, 101 $\preceq$ 110
    fa$\preceq$fa, poule $\preceq$ poulet, avion $\preceq$ train, livraison $\preceq$ livre, foot $\preceq$ fort

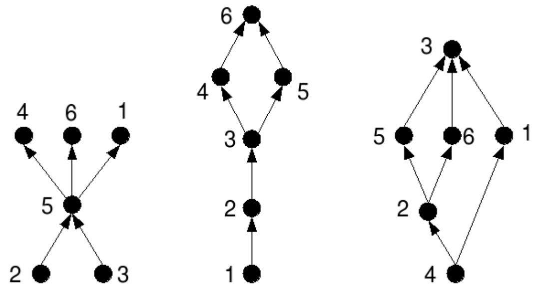
    (a) Démontrer qu'il s'agit bien d'une relation d'ordre.
    Solution : Transitive et symétrie en étudiant les trois cas de la définition, et réflexivité immédiate.

(b) Le mot 111 a-t-il un successeur immédiat ? Est-il le successeur immédiat d'un autre mot ?
Solution : Successeur immédiat $= 1110$. Il n'est le successeur immédiat d'aucun mot : $110 < 1100 < 11000 < 110000 < ... < 111$.

(c) Quels mots se trouvent entre 111 et 1111 ?
Solution : Tous les mots commençant par 1110, de n'importe quelle longueur.

(d) Généraliser en remplaçant $\mathbb{B}^*$ par n'importe quel ensemble fini totalement ordonné, par exemple l'ensemble des 26 lettres de l'alphabet.
Solution : Pareil : c'est un ordre. Si ζ est la plus grande lettre de l'alphabet, et si α est la plus petite, un mot $m = \zeta\zeta\cdots\zeta$ a comme successeur immédiat le mot $m\alpha$; mais m n'est le successeur d'aucun mot. Il y a une infinité de mots entre $m = \zeta\zeta\cdots\zeta$ et $m\zeta$.

5. Les relations définies par les représentations cartésiennes de la figure 1 sont-elles des relations d'ordre ? Si oui, dessiner leur diagramme de Hasse.
Solution : Ce sont toutes des relations d'ordre.



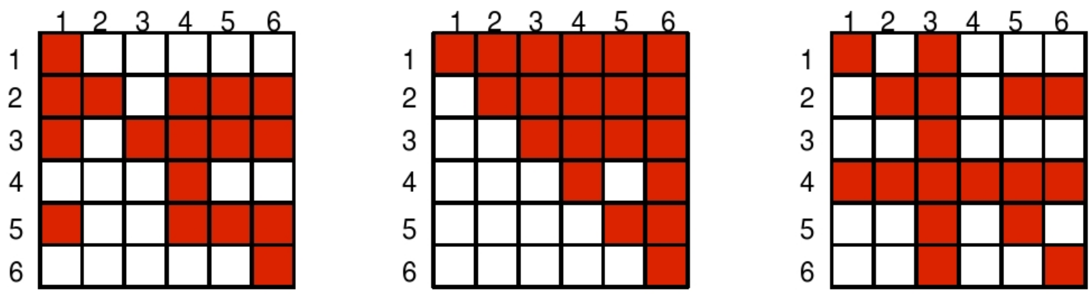
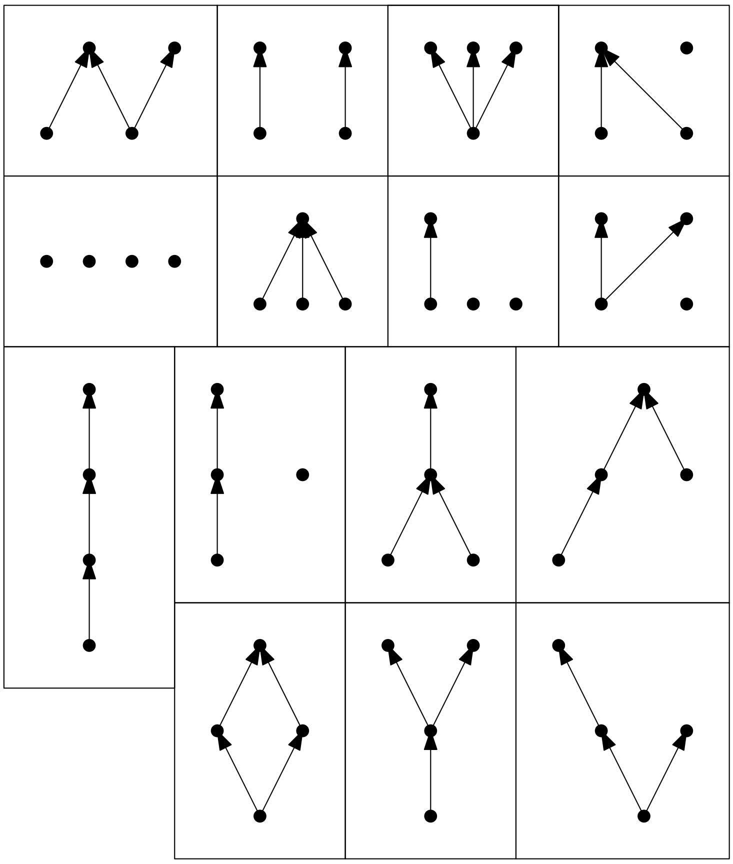


Figure 1: Trois relations sur $\mathbb{N}_6^*$

6. Combien y a-t-il de formes différentes du diagramme de Hasse pour un ensemble à quatre éléments ? Combien y a-t-il de relations d'ordre sur $\mathbb{N}_4^*$?



Solution : 15

7. Parmi les dessins de la figure 2, lesquels sont des diagrammes de Hasse ?

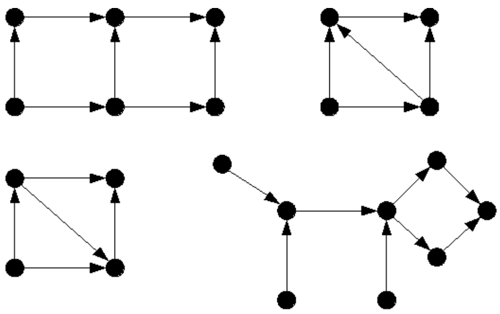


Figure 2: Quatre diagrammes : sont-ils des diagrammes de Hasse ?

Solution : De gauche à droite et de haut en bas : OUI, NON (flèches montantes de trop), NON (Idem), OUI

8. On considère deux ensembles ordonnés A et B. On note $\preceq$ leur relation d'ordre. Sur le produit $A \times B$, on définit une relation $\mathcal{R}$ en déclarant : $(a, b)\mathcal{R}(\alpha, \beta)$ si $a \preceq \alpha$ et $b \preceq \beta$.
   (a) Démontrer qu'il s'agit bien d'une relation d'ordre.
   Solution : Immédiat puisque $\preceq$ est une relation d'ordre, mais à développer quand même
   (b) Est-ce que que $A \times B$ est totalement ordonné si A et B le sont ?
   Solution : Non, par exemple si $A = B = \mathbb{N}$, les couples $(4, 6)$ et $(2, 7)$ sont incomparables par $\mathcal{R}$
   (c) Quels sont les éléments minimaux et maximaux de $A \times B$?
   Solution : Les maximaux sont les couples de maximaux et les minimaux sont les couples de minimaux. par exemple si $A = B = \mathbb{N}_{50}$, les minimaux sont $\{(0, 0\}$ et les maximaux sont $\{50, 50\}$.
   (d) A quelle condition $A \times B$ a-t-il un plus grand élément ?
   Solution : Il faut que A et B aient chacun un plus grand élément

9. Soient A un ensemble non vide quelconque et B un ensemble ordonné par une relation d'ordre $\mathcal{R}$. Si f et g sont deux applications de A dans B, on écrit $f\Sigma g$ si l'on a $f(x)\mathcal{R}g(x)$ pour tout $x \in A$. Démontrer que Σ est une relation d'ordre sur B^A. A quelle condition B^A est-il totalement ordonné par cette relation ?
   Solution : Relation d'ordre : immédiat. B^A est totalement ordonné si B l'est et si A n'a qu'un seul élément.

10. Combien peut-on mettre de relations d'ordre total sur $\mathbb{N}_n^*$?
Solution : Autant que de permutations de $\mathbb{N}_n^* = n!$

11. On note $E = \mathbb{N} \cup \{\omega\}$. Autrement dit, E est l'ensemble des entiers naturels, plus un élément ω qui n'est pas un entier. On munit E d'une relation d'ordre notée $\preceq$ en déclarant que ω est le plus grand élément de E et que si x et y sont deux entiers naturels, on a $x \preceq y$ si et seulement si $x \leq y$ dans $\mathbb{N}$.

   (a) Démontrer que $\preceq$ est bien une relation d'ordre.
   Solution : Immédiat, à développer.

   (b) Démontrer que E est un ensemble *bien ordonné*
   Solution : La partie réduite à ω possède un plus petit élément : lui-même. Les autres parties contiennent des entiers, elles ont donc toutes un plus petit élément

   (c) Quels éléments de E ne sont pas les successeurs d'autres éléments ?
   Solution : 0 et ω

12. On note A l'ensemble des relations sur E de cardinal n. Si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont deux relations, on note $\mathcal{S} \wedge \mathcal{T}$ celle dont le graphe est l'intersection des graphes de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{T}$; on note $\mathcal{S} \vee \mathcal{T}$ celle dont le graphe est la réunion des graphes de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{T}$. Enfin, on dit qu'une relation $\mathcal{S}$ est *plus fine* qu'une relation $\mathcal{T}$ si l'on a $a\mathcal{T}b$ à chaque fois que $a\mathcal{S}b$. On écrira cette propriété $\mathcal{S} \Longrightarrow \mathcal{T}$.

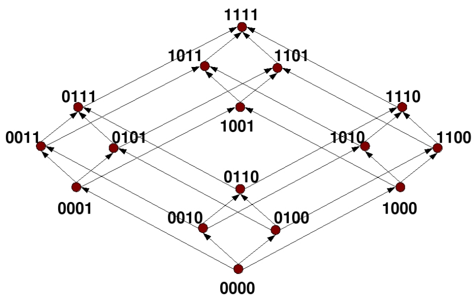
   (a) Comment voit-on que $\mathcal{S} \Longrightarrow \mathcal{T}$ sur les représentations cartésiennes de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{T}$?
   Solution : Toutes les cases noircies dans le diagramme de $\mathcal{S}$ sont aussi noircies dans celui de $\mathcal{T}$.

   (b) Si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont des relations d'équivalence, à quoi reconnaît-on, sur leurs classes d'équivalence, que $\mathcal{S} \Longrightarrow \mathcal{T}$?
   Solution : Chaque classe de $\mathcal{S}$ est contenue dans une classe de $\mathcal{T}$.

   Est-ce que $\mathcal{S} \wedge \mathcal{T}$ et $\mathcal{S} \vee \mathcal{T}$ sont aussi des relations d'équivalence ? Si oui, comment peut-on obtenir leurs classes d'équivalence à partir de celles de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$?
   Solution : Lorsque l'on a $a(\mathcal{S} \vee \mathcal{T})b$, cela signifie que l'on a soit $a\mathcal{S}b$, soit $a\mathcal{T}b$ (soit les deux) : c'est une relation réflexive et symétrique, mais pas forcément transitive car si l'on a $a(\mathcal{S} \vee \mathcal{T})b$ et $b(\mathcal{S} \vee \mathcal{T})c$ parce que, si $a\mathcal{S}b$ et $b\mathcal{T}c$, on n'a pas forcément $a\mathcal{S}c$ ou $a\mathcal{T}c$. Par contre, la relation $(\mathcal{S} \wedge \mathcal{T})$ est une relation d'équivalence, et la classe d'équivalence d'un élément s'obtient en faisant l'intersection de ses classes pour les deux relations.

   (c) Démontrer que $\Longrightarrow$ est une relation d'ordre. Quel est son plus petit élément ? Quel est son plus grand éément ? Dans le cas où $E = \{a, b\}$, faire la liste des relations sur E et dessiner le diagramme de Hasse de A.

   Solution : En ayant répondu à la première question, le résultat sur le graphe donne l'évidence que $\Longrightarrow$ est une relation d'ordre. Son plus petit élément est l'égalité. Son plus grand élément est la relation par laquelle tous les éléments sont liés. Quand $E = \{a, b\}$, l'ensemble ordonné des relations est le même que $\mathcal{P}(E^2)$ muni de l'intersection. C'est un ensemble à 16 éléments dont la forme est donnée ci-après en remplaçant 0 par a et 1 par b.



   (d) Si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont deux relations d'ordre, en est-il de même des relations $\mathcal{S} \wedge \mathcal{T}$ et $\mathcal{S} \vee \mathcal{T}$?
   Solution : Pas forcément pour $\mathcal{S} \vee \mathcal{T}$, oui pour $\mathcal{S} \wedge \mathcal{T}$.