TD: Ensembles, applications, dénombrement

1 Ensembles et fonctions

1. On suppose que l'ensemble de tous les ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes existe, et on l'appelle X ; autrement dit, $X = \{x | x \notin x\}$.

   (a) A-t-on $X \in X$? A-t-on $X \notin X$?
   Solution : Non aux deux questions. Si $X \in X$ alors $X \notin X$ par la définition de X. Si $X \notin X$ alors $X \in X$ par la définition de X.

   (b) Quel est le lien avec le paradoxe de Russel ?
   Solution : Russel, version le Barbier vu en cours : même paradoxe, appelé auto-référentiel

2. On rappelle que les éléments de $\mathbb{B}$ sont 0 et 1.

   (a) A-t-on $\mathbb{B} \in \mathbb{B}$?
   Solution : Non car $\mathbb{B} = \{0, 1\}$

   (b) Quels sont les éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{B})$?
   Solution : $\mathcal{P}(\mathbb{B}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}$

   (c) Quels sont les éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{B}))$?
   Solution : $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{B})) = \{\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{0\}\}$, $\{\{1\}\}$, $\{\{0, 1\}\}$,
   $\{\emptyset, \{0\}\}$, $\{\emptyset, \{1\}\}$, $\{\emptyset, \{0, 1\}\}$, $\{\{0\}, \{1\}\}$, $\{\{0\}, \{0, 1\}\}$, $\{\{1\}, \{0, 1\}\}$,
   $\{\emptyset, \{0\}, \{1\}\}$, $\{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$, $\{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\}$, $\{\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$, $\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$

3. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les ensembles A et B sont égaux :
   (a) $A = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ $\quad B = \{x \in \mathbb{R} | x \geq |x|\}$
   Solution : Non car $0 \notin A$ et $0 \in B$
   (b) $A = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ $\quad B = \{x \in \mathbb{R} | x < |x|\}$
   Solution : Non car $-6 \notin A$ et $6 \in B$
   (c) $A = \mathbb{Z}$ $\quad B = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 - x$ pair $\}$
   Solution : Oui car $x^2 - x = x(x - 1)$ est toujours pair (x ou x-1 est pair)
   (d) $A = \{x \in \mathbb{N}_{20} | x$ impair et non divisible par $3\}$ $\quad B = \{x \in \mathbb{N}_{20} | 24$ divise $x^2 - 1\}$
   Solution : Oui par énumération. $A = B = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

4. Définir les ensembles suivants en compréhension :

   (a) $A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$
   Solution : les puissances de 2 inférieures ou égales à 64, $\{x \in \mathbb{N} | \exists n \in \mathbb{N}_6$ t.q. $x = 2^n\}$

   (b) $B = \{1, 2, 7, 14\}$
   Solution : Les diviseurs de 14, $\{x \in \mathbb{N} | \exists n \in \mathbb{N}$ t.q. $x = 14/n\}$

   (c) $C = \{4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\}$
   Solution : Les entiers inférieurs ou égaux à 20 qui ont au moins trois diviseurs

5. Définir les ensembles suivants en extension :

   (a) $A = \{x \in \mathbb{R} | x(x + 5) = 14\}$
   Solution : $A = \{2, -7\}$

   (b) $B = \{x \in \mathbb{N} | x(2x + 3) = 14\}$
   Solution : $B = \{2\}$

   (c) $C = \{x \in \mathbb{N}_{10} | x^4 - 1$ divisible par $5\}$
   Solution : $C = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

6. Interpréter chacune des situations suivantes au moyen d'une fonction. Pour cela, on définira deux ensembles A et B et une fonction $f : A \to B$.

   (a) Le résultat d'une course de tiercé
   Solution : $A = \mathbb{N}_3$, $B =$ l'ensemble des chevaux ayant couru, f qui associe le cheval correspond à la place du podium

(b) Le registre d'un hôtel qui possède 55 chambres
Solution : $A = \mathbb{N}_{55}$, $B =$ l'ensemble des clients, f qui associe le client occupant actuellement la chambre

(c) Le numéro d'INSEE
Solution : $A =$ l'ensemble des personnes ayant un numéro, $B =$ l'ensemble des suites de 14 chiffres, f qui associe à chaque personne son numéro

(d) La parité d'un entier naturel
Solution : $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{B}, f$ qui associe à chaque entier naturel 0 s'il est impair, 1 s'il est pair

(e) Un livre
Solution : $A = \mathbb{N}_n$ où n est le nombre de symboles qui constituent le livre (la taille du livre), $B =$ l'ensemble des symboles utilisés pour écrire le livre, et f associe à chaque rang dans le livre le symbole qui l'occupe

(f) La table des matières d'un livre
Solution : $A =$ l'ensemble des titres de paragraphes, $B = \mathbb{N}_n$ où n est le nombre de pages numérotées du livre, et f associe à chaque paragraphe sa page

[Bonus : lesquelles sont des applications ? Quelles propriétés pour les applications ?]

7. Que peut-on dire de B^A quand B est un singleton ?
Solution : B^A est l'ensemble des applications de A vers B. Si B est un singleton, alors il n'existe qu'une application de A dans B, qui consiste à associer à chaque élément de B l'unique élément de B. Donc B^A est un singleton.

8. Soient A et B deux ensembles, avec A non vide. Construire une injection de B vers B^A.
Solution : La plus simple : à chaque élément b de B, on associe l'application constante qui ne prend que la valeur b, *i.e.* $f : A \to B : \forall a \in A, f(a) = b$. On vérifie que c'est bien une injection.

9. Soit $f : A \to B$. Montrer qu'il existe toujours un ensemble C, une surjection $g : A \to C$ et une injection $h : C \to B$ tels que $f = h \circ g$.
Solution : C est l'image de f – on restreint donc B à ses seuls éléments qui ont un antécédent par f dans A, alors $g(x) = f(x)$. Alors h est l'injection de C vers B, injection car certains éléments de B ont disparu dans C.

10. Dans chaque cas suivant, indiquer si l'application $f : A \to B$ est injective, surjective ou bijective. Dans le cas d'une bijection, donner l'application réciproque.

(a) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, et $f(x) = x + 7$
Solution : Bijective, $f^{-1}(x) = x - 7$

(b) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, et $f(x) = x^2 + 2x - 3$
Solution : Ni injective ni surjective

(c) $A = \{x \in \mathbb{R} | 9 \geq x \geq 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | 96 \geq x \geq 21\}$, et $f(x) = x^2 + 2x - 3$
Solution : Bijective, $f^{-1}(x) = -1 + \sqrt{4 + x}$

(d) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, et $f(x) = 3x - 2|x|$
Solution : Bijective, $f^{-1}(x) = \frac{3x+2|x|}{5}$

(e) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, et $f(x) = e^x + 1$
Solution : Injective (nombres < 1 ne sont pas des images)

(f) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$, et $f(x) = x(x + 1)$
Solution : Injective, les images ne sont que des entiers pairs

11. Montrer qu'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.
Solution : $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ avec $f(n) = \frac{n(-1)^{n+1}}{2} + \frac{1-(-1)^n}{4}$ est bijective.

12. Soient A, B, C et D des ensembles, et $f : A \to B$, $g : B \to C$, et $h : C \to D$ trois applications. Démontrer que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
Solution : On vérifie qu'elles prennent toujours les mêmes valeurs

13. Soient A, B et C des ensembles non vides, et deux applications $f : A \to B$, et $g : B \to C$.

(a) On suppose $g \circ f$ injective : montrer que f est injective. Est-ce que g est obligatoirement injective ?
Solution : Si $f(x) = f(y)$ avec $x \neq y$, on a $g(f(x)) = g(f(y))$ ce qui n'est pas possible puisque $g \circ f$ est injective. La fonction g n'est pas forcément injective, par exemple si A n'a qu'un seul élément, $g \circ f$ reste injective quelle que soit la nature de g.

(b) On suppose $g \circ f$ surjective : montrer que g est surjective. Est-ce que f est obligatoirement surjective ?
Solution : L'image de $g \circ f$ est un sous-ensemble de l'image de g, donc si l'image de g n'est pas C tout entier (*i.e.* g non surjective), alors $g \circ f$ n'est pas surjective donc contradiction. La fonction f n'est pas forcément surjective : prendre l'exemple où C n'a qu'un élément.

(c) Si f et g sont bijectives, montrer que $g \circ f$ est bijective. Quelle est son application réciproque ?
Solution : $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

(d) On suppose $g \circ f$ bijective. Que peut-on dire de f et de g ? Sont-elles bijectives ?
Solution : On sait seulement que f est injective et g surjective...

2 Construction d'ensembles

1. Dans chacun des cas suivants, faire la réunion des ensembles A et B

   (a) $A = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ impair } \}$ et $B = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ non divisible par } 3\}$
   Solution : $A \cup B = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ non divisible par } 6\}$

   (b) $A = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 3\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x \leq 1\}$
   Solution : $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x \leq 3\}$

   (c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y \leq 2\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 2 < 3x - y\}$
   Solution : Union de deux demi-plans à dessiner

2. Quel est l'ensemble qui est l'intersection de tous les rectangles et de tous les losanges ?
   Solution : Les carrés

3. On se donne trois ensembles A, B et C tels que $A \cap B \cap C = \emptyset$. Sont-ils obligatoirement disjoints deux à deux ? Donner des exemples.
   Solution : Non, par exemple $A = \{0, 1\}, B = \{1, 2\}, C = \{0, 2\}$

4. A tout nombre réel a on associe l'ensemble $E_a = \{x \in \mathbb{R} | (1 - a^2) \leq x \leq (1 + a^2)\}$, ce qui donne une famille d'ensembles indexée par $\mathbb{R}$. Déterminer la réunion et l'intersection des ensembles de la famille.
   Solution : Union=$\mathbb{R}$ et intersection=$\{1\}$. $\bigcup_{a \in \mathbb{R}} (E_a) = \mathbb{R}$ et $\bigcap_{a \in \mathbb{R}} (E_a) = \{1\}$.

5. Dans chacun des cas suivants, indiquer s'il existe une injection d'un ensemble dans l'autre :

   (a) $A = \mathcal{P}(E \times F)$ et $B = \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$
   Solution : $f : B \to A$ (à un couple de parties (U, V) avec $U \subset E$ et $V \subset F$, on associe la partie de $E \times F$ formée des couples (u, v) avec $u \in U$ et $v \in V$).

   (b) $A = \mathcal{P}(E \cup F)$ et $B = \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$
   Solution : $f : B \to A$ (un élément de $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$, c'est-à-dire une partie de E ou une partie de F, peut être vu comme une partie de $E \cup F$).

   (c) $A = \mathcal{P}(E \cap F)$ et $B = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$
   Solution : $A = B$ (une partie de E qui est aussi une partie de F est une partie commune à E et F et réciproquement).

3 Cardinal d'ensembles

1. Dans sa dernière exposition, Caroline D. a présenté 120 tableaux dont 64 étaient à vendre. Les tableaux étaient numérotés de 1 à 120 dans un ordre voulu par l'artiste. Allez savoir pourquoi, elle ne voulait pas que deux tableaux vendables portent des numéros dont la différence est 7. Pourquoi ce désir ne fut-il pas satisfait ?
   Solution : Numéros possibles, modulo bijection de $\mathbb{N}_{120}$ dans lui-même : $[1; 7]$, $[15; 21]$, $[29; 35]$, $[43; 49]$, $[57; 63]$, $[71; 77]$,$[85; 91]$, $[99; 105]$, $[113; 119]$. On a donc $7 * 9 = 63$ numéros possibles.

2. Démontrer que si x et y sont deux entiers naturels, il en est de même de

$$\frac{(x + y)(x + y + 1)}{2}$$

   Solution : $n(n + 1)$ est pair car un des deux multiplieurs l'est

   Soit A l'ensemble des points du plan dont les deux coordonnées x et y sont des entiers naturels. Démontrer que l'application $f : A \to \mathbb{N}$ ci-après est bijective :

$$f(x, y) = x + \frac{(x + y)(x + y + 1)}{2}$$

   Solution : A voir avec une figure où on représente les premières valeurs de f. On observe que f compte les sommets des quadrillages pris dans un certain ordre, ce qui fait que f est bijective.... Complexe A NE PAS FAIRE

3. Démontrer que l'ensemble des mots binaires est dénombrable
Solution : Il nous faut une bijection entre ces mots binaires de taille quelconque et $\mathbb{N}$... Facile : la formule magique du premier cours, conversion binaire vers décimal, par exemple (attention, ajouter 1 devant le mot binaire pour traiter les mots binaires commençant par 0).

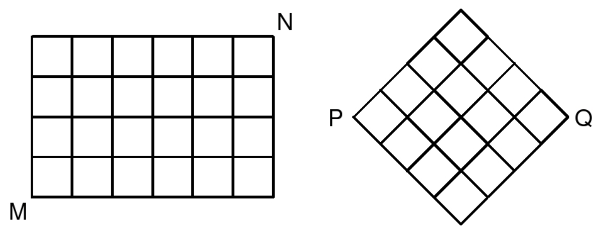
4. Sachant que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, démontrer que $\mathbb{N}^n$ est dénombrable quel que soit n
Solution : Par récurrence.

5. On associe à tout couple (x, y) de $\mathbb{N}^2$ l'entier naturel $u = 2^y(2x+1) - 1$.
   (a) Lorsque $x = 5$ et $y = 3$, écrire x et u en base 2.
   Solution : $x = 101$ et $u = 1010111$
   (b) Dans le cas général, quelle est l'écriture de u en base 2 ?
   Solution : Les bits de u sont ceux de x, puis un 0, puis autant de 1 que y
   (c) En déduire que l'application qui associe u au couple (x, y) est une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$.
   Solution : On peut retrouver x et y à partir de n'importe quel u et d'une seule façon, par exemple, $u = 111001111$: $x = 14_{10}$ et $y = 5_{10}$

6. On se donne n points distincts sur un cercle.
   (a) Combien de cordes définissent-ils ?
   Solution : Une corde est obtenue en choisissant deux points parmi n, il y a donc $\binom{n}{2}$ cordes
   (b) On suppose que ces cordes se coupent en des points distincts à l'intérieur du cercle. Combien y-a-t'il de points d'intersection ?
   Solution : On suppose qu'il n'y a pas de cordes parallèles. Choisir un point d'intersection, c'est choisir deux cordes distinctes, c'est donc choisir 4 points distincts parmi n : $\binom{n}{4}$ points d'intersection

7. Un dimanche matin, un parieur prend 5000 paris différents pour le tiercé de l'après-midi. Que peut-on dire du nombre de chevaux engagés dans la course ?
Solution : On cherche n tel que $A_n^3 = n(n-1)(n-2) \geq 5000$, avec n entier. On tombe sur $n \geq 19$

8. Pour aller de M à N, une fourmi se déplace le long des mailles d'un grillage.
   (a) Si elle va toujours de la gauche vers la droite, et du bas vers le haut, combien d'itinéraires différents peut-elle suivre sachant que le grillage comprend n mailles en largeur et p mailles en hauteur ?
   Solution : Quand la fourmi traverse un nœud du grillage, on repère la direction qu'elle prend en marquant la lettre V (vertical) ou H (horizontal), ce qui donne une suite de lettres V et H qui décrit son parcours. Comme son chemin doit comporter $n + p$ nœuds et qu'elle doit monter p fois on obtient un mot formé de $n + p$ lettres parmi lesquelles p sont des V. Il y a donc $\binom{n+p}{p}$ itinéraires possibles.
   (b) Un autre jour elle va de P à Q en suivant un autre grillage. Elle progresse toujours de la gauche vers la droite mais cette fois, elle peut monter ou descendre. Combien d'itinéraires différents peut-elle suivre sachant que le grillage est un carré de n mailles de côté ?
   Solution : Même résolution en tournant la figure... $\binom{2n}{n}$



9. L'objectif est de comprendre nos chances dans certains jeux de hasard et d'argent...
   (a) Combien y-a-t'il de combinaisons possibles au Loto, sachant qu'un résultat est un ensemble de six nombres pris entre 1 et 49 ?
   Solution : Nombre de façon de choisir 6 numéros parmi 49 = $\binom{49}{6}$
   (b) Combien y-a-t'il de combinaisons possibles à l'Euromillion, sachant qu'un résultat est un ensemble de cinq nombres pris entre 1 et 50 et un ensemble de deux chiffres entre 1 et 9 ?
   Solution : $\binom{50}{5}\binom{9}{2}$

(c) Soit n le nombre de joueurs au loto, un vendredi 13 donné. Pour quelle valeur de n peut-on être certain qu'au moins deux joueurs auront proposé la même grille ?
Solution : Principe des tiroirs : $\binom{49}{6}+1$

10. Démontrer le théorème vu en cours : un ensemble qui possède n éléments possède 2^n parties.
Solution : Il suffit de prendre $x = y = 1$ dans la formule du binôme vue en cours, et en établissant que $\binom{n}{p}$ est le nombre de parties possédant p éléments d'un ensemble de cardinal n

11. Démontrer la relation de Pascal vue en cours :
$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Solution :
$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p(p-1)!(n-1-p)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)(n-p-1)!} + \frac{(n-1)!}{p(p-1)!(n-1-p)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)(n-p-1)!}\frac{p}{p} + \frac{(n-1)!}{p(p-1)!(n-1-p)!}\frac{(n-p)}{(n-p)} \\
&= \frac{p(n-1)! + (n-p)(n-1)!}{p(n-p)(p-1)!(n-p-1)!} \\
&= \frac{n(n-1)}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}
\end{aligned}$$

12. Démontrer que l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.
Solution : A chaque partie finie A, on associe un entier unique : (1) on ordonne les éléments de A (2) puis on les traduit un par un en base 2 (3) et on écrit leurs bits l'un après l'autre en précédent chaque paquet par le chiffre 9 : la suite obtenue est alors le développement en base 10 de l'entier associé.

Par exemple, si $A = \{2, 5, 29\}$, on lui associe le nombre 9109101911101. Cette application est injective, donc l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.]

13. Montrer que $\binom{n}{p}$ représente le nombre d'applications strictement croissantes d'un ensemble de cardinal p vers un ensemble de cardinal n.
Solution : Soient X un ensemble de cardinal p, et Y un ensemble de cardinal n. Soit f une application strictement croissante de X dans Y, alors f est nécessairement injective (si deux éléments de X avaient la même image, f ne pourrait pas être strictement croissante). Pour construire f, il faut se donner une telle injection (A_n^p choix). Et parmi toutes ces injections, un certain nombre ont la même image $f(X)$: il y en a $p!$ (c'est le nombre de façons de permuter les p éléments de X). Or, parmi ces $p!$ injections de même image $f(X)$, une seule est strictement croissante : le nombre d'applications strictement croissantes de X dans Y est donc $\frac{A_n^p}{p!} = \binom{n}{p}$

14. On se donne deux nombres entiers p et r. Si les nombres $x_1, x_2, \cdots, x_p$ sont des entiers naturels inconnus, combien y-a-t'il de solutions distinctes à l'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n$?
Solution : $\binom{n+p-1}{p-1} = \frac{(n+p-1)!}{n!(p-1)!}$. Explication possible : soient les mots binaires de longueur $(n-p+1)$ possédant $(p-1)$ bits égaux à 1 ; ils sont en bijection avec les solutions de l'équation si l'on associe un mot à une solution en écrivant x_1 bits égaux à 0, puis un bit égal à 1, puis x_2 bits à 0, puis un bit à 1, etc. Par exemple, $5+2+3+1+0+0+4 = 15$ donne le mot binaire 000001001000101110000

15. Soint $m, n \leq 1$ deux entiers naturels. On note $S_{m,n}$ le nombre de façons de répartir m objets numérotés de 1 à m entre n personnes de telle sorte que chaque personne ait au moins un objet (certaines peuvent en recevoir plusieurs).

(a) Quel est le lien avec les applications surjectives ?
Solution : $S_{m,n}$ compte le nombre d'applications surjectives d'un ensemble à m èléments vers un ensemble à n éléments.

(b) Calculer $S_{3,4}$, puis $S_{3,1}$ et $S_{3,3}$.
Solution : $S_{3,4} = 0$, puis $S_{3,1} = 3! = 1$ et $S_{3,3} = 3! = 6$

(c) Déterminer $S_{m,n}$ quand $n > m$. Que valent $S_{m,1}$ et $S_{m,m}$?
Solution : $S_{m,n} = 0$ quand $n > m$. $S_{m,1} = 1$ et $S_{m,m} = m!$

(d) Que vaut $S_{m,2}$ quand $m \geq 2$?
Solution : $S_{m,2} = 2^m - 2$ car il suffit de choisir ce que l'on donne à la première personne, les objets restants étant donnés à la seconde, tout en évitant que l'une ne reçoive rien (d'où le -2).

(e) Soit p entier tel que $1 \leq p \leq n$. On répartit encore les m objets entre les n personnes, mais cette fois sans vérifier que chacune reçoit au moins un objet. Combien y-a-t'il de répartitions pour lesquelles p personnes seulement sont servies ?
Solution : On choisit d'abord les p personnes qui obtiennent quelquechose, ce qui fait $\binom{n}{p}$ choix, puis on fait la distribution parmi ces personnes, ce qui fait $S_{m,p}$ choix, d'où le résultat final : $\binom{n}{p} S_{m,p}$
Etablir la formule

$$n^m = \binom{n}{1} S_{m,1} + \binom{n}{2} S_{m,2} + \cdots + \binom{n}{n} S_{m,n}$$

[On l'obtient en triant les applications d'un ensemble à m éléments vers un ensemble à n éléments, selon le cardinal de leur image.]

(f) Déduire des résultats précédents la valeur de $S_{m,p}$ pour $m \leq 4$
Solution : Via (c) il n'y a pas beaucoup de valeurs à trouver, et les résultats des questions (b) et (d) les donnent toutes sauf $S_{4,3} = 36$ que l'on trouve en utilisant (e).

(g) Démontrer que $S_{m,n} = n(S_{m-1,n} + S_{m-1,n-1})$
Solution : On marque un des m objets. Il y a alors deux sortes de distributions : celles où l'objet marqué est donné à une personne qui n'en a pas d'autre (cas 1) et le cas contraire (cas 2). Pour faire une distribution dans le cas 1, on choisit la personne qui aura l'objet marqué (n choix) puis on distribue les autres objets ($S_{m-1,n-1}$ choix). Dans le second cas, on choisit la personne qui aura l'objet marqué (n choix), puis on distribue les autres objets ($S_{m-1,n}$ choix). D'où la formule.

(h) Calculer les premiers nombres $S_{m,p}$ en les disposant selon un tableau inspiré du triangle de Pascal. Retrouver les valeurs déjà connues.

Solution : L'analogue du triangle de Pascal redonne les valeurs connues

1							
1	2						
1	6	6					
1	14	36	24				
1	30	150	240	120			
1	62	540	1560	1800	720		
1	126	1806	8400	16800	15120	5040	
1	254	5796	40824	126000	191520	141120	40320