TD: Ensembles, applications, dénombrement

1 Ensembles et fonctions

1. On suppose que l'ensemble de tous les ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes existe, et on l'appelle X ; autrement dit, $X = \{x | x \notin x\}$.
   (a) A-t-on $X \in X$? A-t-on $X \notin X$?
   (b) Quel est le lien avec le paradoxe de Russel ?

2. On rappelle que les éléments de $\mathbb{B}$ sont 0 et 1.
   (a) A-t-on $\mathbb{B} \in \mathbb{B}$?
   (b) Quels sont les éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{B})$?
   (c) Quels sont les éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{B}))$?

3. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les ensembles A et B sont égaux :
   (a) $A = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ — $B = \{x \in \mathbb{R} | x \geq |x|\}$
   (b) $A = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ — $B = \{x \in \mathbb{R} | x < |x|\}$
   (c) $A = \mathbb{Z}$ — $B = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 - x$ pair $\}$
   (d) $A = \{x \in \mathbb{N}_{20} | x$ impair et non divisible par $3\}$ — $B = \{x \in \mathbb{N}_{20} | 24$ divise $x^2 - 1\}$

4. Définir les ensembles suivants en compréhension :
   (a) $A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$
   (b) $B = \{1, 2, 7, 14\}$
   (c) $C = \{4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 18, 20\}$

5. Définir les ensembles suivants en extension :
   (a) $A = \{x \in \mathbb{R} | x(x + 5) = 14\}$
   (b) $B = \{x \in \mathbb{N} | x(2x + 3) = 14\}$
   (c) $C = \{x \in \mathbb{N}_{10} | x^4 - 1$ divisible par $5\}$

6. Interpréter chacune des situations suivantes au moyen d'une fonction. Pour cela, on définira deux ensembles A et B et une fonction $f : A \to B$.
   (a) Le résultat d'une course de tiercé
   (b) Le registre d'un hôtel qui possède 55 chambres
   (c) Le numéro d'INSEE
   (d) La parité d'un entier naturel
   (e) Un livre
   (f) La table des matières d'un livre

7. Que peut-on dire de B^A quand B est un singleton ?

8. Soient A et B deux ensembles, avec A non vide. Construire une injection de B vers B^A.

9. Soit $f : A \to B$. Montrer qu'il existe toujours un ensemble C, une surjection $g : A \to C$ et une injection $h : C \to B$ tels que $f = h \circ g$.

10. Dans chaque cas suivant, indiquer si l'application $f : A \to B$ est injective, surjective ou bijective. Dans le cas d'une bijection, donner l'application réciproque.
    (a) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, et $f(x) = x + 7$
    (b) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, et $f(x) = x^2 + 2x - 3$
    (c) $A = \{x \in \mathbb{R} | 9 \geq x \geq 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | 96 \geq x \geq 21\}$, et $f(x) = x^2 + 2x - 3$
    (d) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, et $f(x) = 3x - 2|x|$

(e) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, et $f(x) = e^x + 1$

(f) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$, et $f(x) = x(x+1)$

11. Montrer qu'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.

12. Soient A, B, C et D des ensembles, et $f : A \to B$, $g : B \to C$, et $h : C \to D$ trois applications. Démontrer que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

13. Soient A, B et C des ensembles non vides, et deux applications $f : A \to B$, et $g : B \to C$.

    (a) On suppose $g \circ f$ injective : montrer que f est injective. Est-ce que g est obligatoirement injective ?

    (b) On suppose $g \circ f$ surjective : montrer que g est surjective. Est-ce que f est obligatoirement surjective ?

    (c) Si f et g sont bijectives, montrer que $g \circ f$ est bijective. Quelle est son application réciproque ?

    (d) On suppose $g \circ f$ bijective. Que peut-on dire de f et de g ? Sont-elles bijectives ?

2 Construction d'ensembles

1. Dans chacun des cas suivants, faire la réunion des ensembles A et B

    (a) $A = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ impair }\}$ et $B = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ non divisible par } 3\}$

    (b) $A = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 3\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x \leq 1\}$

    (c) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x + y \leq 2\}$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 2 < 3x - y\}$

2. Quel est l'ensemble qui est l'intersection de tous les rectangles et de tous les losanges ?

3. On se donne trois ensembles A, B et C tels que $A \cap B \cap C = \emptyset$. Sont-ils obligatoirement disjoints deux à deux ? Donner des exemples.

4. A tout nombre réel a on associe l'ensemble $E_a = \{x \in \mathbb{R} | (1-a)^2 \leq x \leq (1+a)^2\}$, ce qui donne une famille d'ensembles indexée par $\mathbb{R}$. Déterminer la réunion et l'intersection des ensembles de la famille.

5. Dans chacun des cas suivants, indiquer s'il existe une injection d'un ensemble dans l'autre :

    (a) $A = \mathcal{P}(E \times F)$ et $B = \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$

    (b) $A = \mathcal{P}(E \cup F)$ et $B = \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$

    (c) $A = \mathcal{P}(E \cap F)$ et $B = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$

3 Cardinal d'ensembles

1. Dans sa dernière exposition, Caroline D. a présenté 120 tableaux dont 64 étaient à vendre. Les tableaux étaient numérotés de 1 à 120 dans un ordre voulu par l'artiste. Allez savoir pourquoi, elle ne voulait pas que deux tableaux vendables portent des numéros dont la différence est 7. Pourquoi ce désir ne fut-il pas satisfait ?

2. Démontrer que si x et y sont deux entiers naturels, il en est de même de

    $$\frac{(x+y)(x+y+1)}{2}$$

    Soit A l'ensemble des points du plan dont les deux coordonnées x et y sont des entiers naturels. Démontrer que l'application $f : A \to \mathbb{N}$ ci-après est bijective :

    $$f(x,y) = x + \frac{(x+y)(x+y+1)}{2}$$

3. Démontrer que l'ensemble des mots binaires est dénombrable

4. Sachant que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, démontrer que $\mathbb{N}^n$ est dénombrable quel que soit n

5. On associe à tout couple (x,y) de $\mathbb{N}^2$ l'entier naturel $u = 2^y(2x+1) - 1$.

    (a) Lorsque $x = 5$ et $y = 3$, écrire x et u en base 2.

    (b) Dans le cas général, quelle est l'écriture de u en base 2 ?

    (c) En déduire que l'application qui associe u au couple (x,y) est une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$.

6. On se donne n points distincts sur un cercle.

   (a) Combien de cordes définissent-ils ?

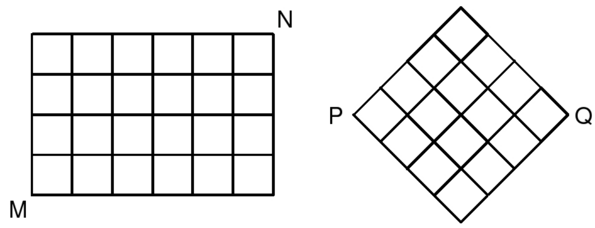
   (b) On suppose que ces cordes se coupent en des points distincts à l'intérieur du cercle. Combien y-a-t'il de points d'intersection ?

7. Un dimanche matin, un parieur prend 5000 paris différents pour le tiercé de l'après-midi. Que peut-on dire du nombre de chevaux engagés dans la course ?

8. Pour aller de M à N, une fourmi se déplace le long des mailles d'un grillage.

   (a) Si elle va toujours de la gauche vers la droite, et du bas vers le haut, combien d'itinéraires différents peut-elle suivre sachant que le grillage comprend n mailles en largeur et p mailles en hauteur ?

   (b) Un autre jour elle va de P à Q en suivant un autre grillage. Elle progresse toujours de la gauche vers la droite mais cette fois, elle peut monter ou descendre. Combien d'itinéraires différents peut-elle suivre sachant que le grillage est un carré de n mailles de côté ?



9. L'objectif est de comprendre nos chances dans certains jeux de hasard et d'argent...

   (a) Combien y-a-t'il de combinaisons possibles au Loto, sachant qu'un résultat est un ensemble de six nombres pris entre 1 et 49 ?

   (b) Combien y-a-t'il de combinaisons possibles à l'Euromillion, sachant qu'un résultat est un ensemble de cinq nombres pris entre 1 et 50 et un ensemble de deux chiffres entre 1 et 9 ?

   (c) Soit n le nombre de joueurs au loto, un vendredi 13 donné. Pour quelle valeur de n peut-on être certain qu'au moins deux joueurs auront proposé la même grille ?

10. Démontrer le théorème vu en cours : un ensemble qui possède n éléments possède 2^n parties.

11. Démontrer la relation de Pascal vue en cours :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

12. Démontrer que l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

13. Montrer que $\binom{n}{p}$ représente le nombre d'applications strictement croissantes d'un ensemble de cardinal p vers un ensemble de cardinal n.

14. On se donne deux nombres entiers p et r. Si les nombres $x_1, x_2, \cdots, x_p$ sont des entiers naturels inconnus, combien y-a-t'il de solutions distinctes à l'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n$?

15. Soient $m, n \leq 1$ deux entiers naturels. On note $S_{m,n}$ le nombre de façons de répartir m objets numérotés de 1 à m entre n personnes de telle sorte que chaque personne ait au moins un objet (certaines peuvent en recevoir plusieurs).

    (a) Quel est le lien avec les applications surjectives ?

    (b) Calculer $S_{3,4}$, puis $S_{3,1}$ et $S_{3,3}$.

    (c) Déterminer $S_{m,n}$ quand $n > m$. Que valent $S_{m,1}$ et $S_{m,m}$?

    (d) Que vaut $S_{m,2}$ quand $m \geq 2$?

(e) Soit p entier tel que $1 \leq p \leq n$. On répartit encore les m objets entre les n personnes, mais cette fois sans vérifier que chacune reçoit au moins un objet. Combien y-a-t'il de répartitions pour lesquelles p personnes seulement sont servies ? Etablir la formule

$$n^m = \binom{n}{1} S_{m,1} + \binom{n}{2} S_{m,2} + \cdots + \binom{n}{n} S_{m,n}$$

(f) Déduire des résultats précédents la valeur de $S_{m,p}$ pour $m \leq 4$

(g) Démontrer que $S_{m,n} = n(S_{m-1,n} + S_{m-1,n-1})$

(h) Calculer les premiers nombres $S_{m,p}$ en les disposant selon un tableau inspiré du triangle de Pascal. Retrouver les valeurs déjà connues.