Domaine Sciences et Technologies
LICENCE D'INFORMATIQUE

Automates et circuits : TD 8

Code UE : ENSIN2U2

Année 2012-13

Fonctions booléennes

Il faut avoir en tête les fonctions booléennes de $\mathcal{F}_2$ vues et nommées en cours :

$\mathbb{B}^2$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
00	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
01	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
10	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
11	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Exercice 1

Question 1.1 Déterminer les fonctions booléennes de deux variables qui sont symétriques (i.e. qui vérifient $f(ab) = f(ba)$ quels que soient les bits a et b).

Question 1.2 Existe-t-il des fonctions booléennes de trois variables qui se changent en leur complément quand on permute deux variables quelconques ? Généraliser à n variables.

Exercice 2 Une fonction booléenne de n variables est dite *paire* quand :

$$f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

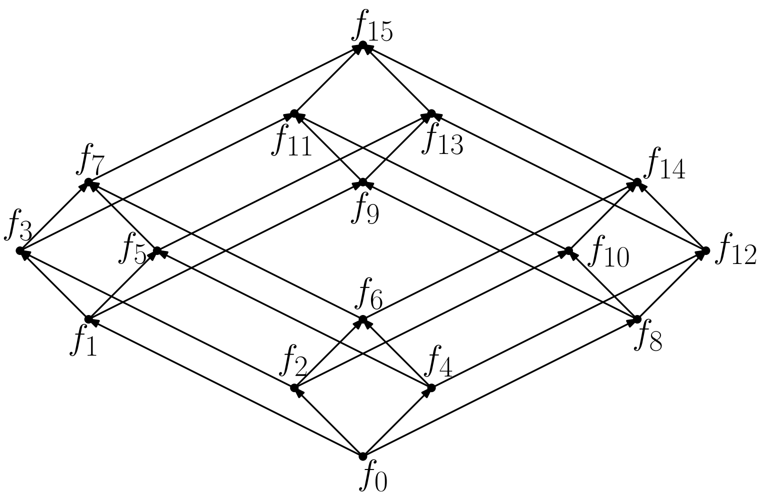
Question 2.1 Combien existe-t-il de fonctions paires de n variables ?

Question 2.2 Déterminer-les dans le cas $n = 2$.

Exercice 3 Soit f une fonction booléenne. On appelle *duale* de f la fonction f^* définie par :

$$f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)}$$

Question 3.1 Déterminer f^* pour chacune des fonctions de $\mathcal{F}_2$. Sur le diagramme de Hasse de la figure, à quoi correspond la transformation de f en f^* ?



A présent, on considère un nombre quelconque de variables.

Question 3.2 Calculer f^* pour la fonction constante égale à 1 et pour la fonction constante égale à 0.

Question 3.3 Que peut-on dire de $(f^*)^*$, de $(f \vee g)^*$ et de $(fg)^*$?

Question 3.4 Comparer $(\bar{f})^*$ et $\overline{(f^*)}$.

Question 3.5 Démontrer que la condition $f = f^*$ équivaut à f impaire.

Exercice 4

Question 4.1 Comment passe-t-on du cardinal de $\mathcal{F}_n$ à celui de $\mathcal{F}_{n+1}$?

Question 4.2 Combien de fonctions booléennes de 4 variables ont leur forme canonique disjonctive composée de huit min-termes ?

Question 4.3 En moyenne, combien y a-t-il de min-termes dans la forme canonique disjonctive d'une fonction booléenne de n variables ?

Exercice 5 On considère une fonction booléenne f de n variables est le produit de p littéraux distincts.

Question 5.1 Combien de min-termes y a-t-il dans sa forme canonique disjonctive ?

Question 5.2 Combien de fonctions booléennes de n variables la majorent ?

Exercice 6

Question 6.1 Déterminer les tables de vérité et les formes canoniques disjonctives des fonctions booléennes suivantes :

1. $ab \vee \bar{a}c$
2. $a\bar{b} \vee b\bar{c} \vee c\bar{a}$
3. $(a \vee bc) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b}\bar{c})$

Exercice 7

En appliquant la méthode des consensus, déterminer tous les implicants premiers des fonctions suivantes puis, en résolvant le problème de couverture, déterminer leurs formules polynomiales minimales.

1. $(abcd) \vee (\bar{a}b) \vee (a\bar{c}\bar{d}) \vee (b\bar{c}\bar{d})$
2. $(ab\bar{c}) \vee (a\bar{b}\bar{c}) \vee (\bar{a}bc) \vee (abc)$
3. $(ab\bar{d}) \vee (ab\bar{c}) \vee (\bar{a}bc) \vee (a\bar{b}c\bar{d}) \vee (\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d})$
4. $(\bar{c}\bar{d}) \vee (ab\bar{d}) \vee (\bar{a}b\bar{c}) \vee (\bar{a}\bar{b}c\bar{d}) \vee (a\bar{b}\bar{c}d) \vee (\bar{b}cd)$

Exercice 8

Dans une très grande pièce, on souhaite avoir deux interrupteurs pour la même lampe. Le principe est que le changement d'état d'un interrupteur (d'ouvert à fermé ou l'inverse) provoque le changement d'état de la lampe (de allumée à éteinte ou l'inverse). On supposera que lorsque les deux interrupteurs sont ouverts, la lampe est éteinte.

Question 8.1 On cherche tout d'abord à trouver une fonction booléenne qui décrit le comportement de ce système. On considère que les deux interrupteurs sont deux variables booléenne x et y. La variable à 0 représente l'interrupteur éteint alors que la variable à 1 signifie que l'interrupteur est fermé. Quelle fonction booléenne peut-on utiliser pour représenter le système.

Question 8.2 Dessiner la chaîne de contact correspondante.

Question 8.3 Peut-on généraliser avec un nombre quelconque d'interrupteurs ?