Domaine Sciences et Technologies
LICENCE D'INFORMATIQUE

Automates et circuits : TD 6
Code UE : ENSIN2U2

Année 2012-13

Ordres, Treillis et Algèbre de Boole

Exercice 1 Soit E un ensemble ordonné. A tout élément de $x \in E$ on associe $M(x)$ l'ensemble des majorants de x, ce qui définit une application $M : E \to \mathcal{P}(E)$.

Question 1.1 Caractériser les éléments maximaux de E en fonction de M.

Question 1.2 Caractériser le plus petit élément de E en fonction de M.

Question 1.3 L'application M est-elle injective ?

Exercice 2 Soit la relation $\preceq$ définie sur $\{(x, y) \mid x, y \in \{1, 2, 3, 4\}$ et $x \leq y\}$ de la façon suivante : $(x, y) \preceq (x', y') \Leftrightarrow x \geq x'$ et $y \leq y'$

Question 2.1 Prouver que $\preceq$ est une relation d'ordre.

Question 2.2 Donner le ou les élément minimaux de $\preceq$.

Question 2.3 Est-ce-que $\preceq$ a un plus grand élément ?

Question 2.4 Dessiner le diagramme de Hasse de la relation d'ordre $\preceq$.

Exercice 3 On définit une relation $\preceq$ sur $\mathbb{B}^*$ (mots binaires) de la façon suivante.

Soit $\mathbb{B}^*$ les mots binaires (les suites de 0,1), avec $0 < 1$. Soit ϵ le mot de longueur nulle. Soit $m \in \mathbb{B}^*$, $m = m_1 m_2 m_3 \ldots m_p$ et $w \in \mathbb{B}^*$, $w = w_1 w_2 w_3 \ldots w_q$ (pour tout i, $m_i, w_i \in \{0, 1\}$).

1. pour tout w de $\mathbb{B}^*$, $\epsilon \preceq w$.
2. pour tout m différent de ϵ,

$$m \preceq w \text{ si } \begin{cases} p \leq q \text{ et pour tout } 1 \leq i \leq p,\ w_i = m_i \\ \textit{ou} \\ \text{il existe } s, 1 \leq s \leq p, q \text{ tel que pour tout } 1 \leq i \leq s-1,\ w_i = m_i \text{ et } m_s < w_s \end{cases}$$

Question 3.1 Démontrer qu'il s'agit bien d'une relation d'ordre.

Question 3.2 Le mot 111 a-t-il un successeur immédiat ? Est-il le successeur immédiat d'un autre mot ?

Question 3.3 Quels mots se trouvent entre 111 et 1111 ?

Exercice 4 Parmi les dessins de la figure 1, lesquels sont des diagrammes de Hasse ?

Exercice 5 Les relations définies par les représentations cartésiennes de la figure 2 sont-elles des relations d'ordre ? Si oui, dessiner leur diagramme de Hasse.

Exercice 6 Combien y a-t-il de formes différentes du diagramme de Hasse pour un ensemble à quatre éléments ?

Exercice 7 On considère deux ensembles ordonnés A et B. On note $\preceq$ leur relation d'ordre. Sur le produit $A \times B$, on définit une relation $\mathcal{R}$ en déclarant : $(a, b)\mathcal{R}(\alpha, \beta)$ si $a \preceq \alpha$ et $b \preceq \beta$.

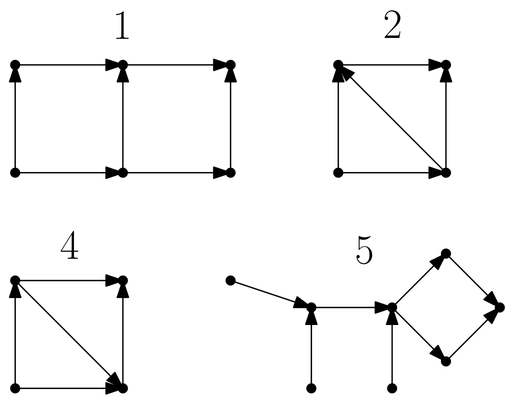

FIGURE 1 – Six diagrammes : sont-ils des diagrammes de Hasse ?

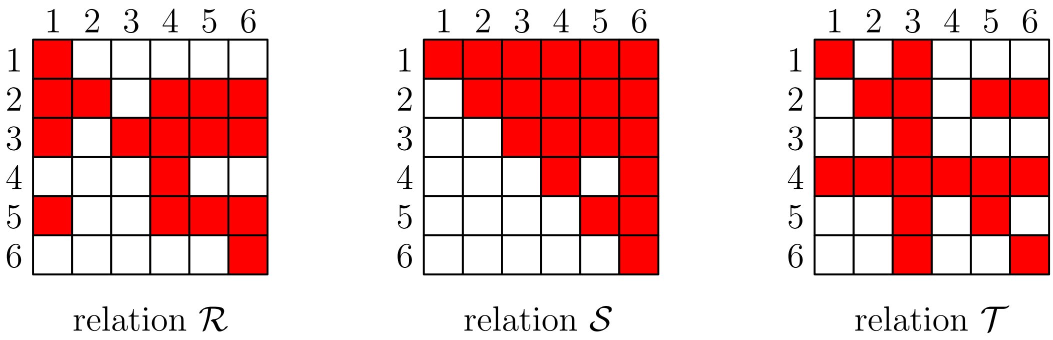

FIGURE 2 – Trois relations sur $\mathbb{N}_6^*$

Question 7.1 Démontrer qu'il s'agit bien d'une relation d'ordre.

Question 7.2 Est-ce que que $A \times B$ est totalement ordonné si A et B le sont ?

Question 7.3 Quels sont les éléments minimaux et maximaux de $A \times B$?

Question 7.4 A quelle condition $A \times B$ a-t-il un plus grand élément ?

Exercice 8 Soient A un ensemble non vide quelconque et B un ensemble non-vide ordonné par une relation d'ordre $\mathcal{R}$. Si f et g sont deux applications de A dans B, on écrit $f \Sigma g$ si l'on a $f(x)\mathcal{R}g(x)$ pour tout $x \in A$.

Question 8.1 Démontrer que Σ est une relation d'ordre sur B^A.

Question 8.2 A quelle condition B^A est-il totalement ordonné par cette relation ?

Exercice 9

Question 9.1 Combien peut-on mettre de relations d'ordre total sur $\mathbb{N}_n^*$?

Exercice 10 On note $E = \mathbb{N} \cup \{\omega\}$. Autrement dit, E est l'ensemble des entiers naturels, plus un élément ω qui n'est pas un entier. On munit E d'une relation d'ordre notée $\preceq$ en déclarant que ω est le plus grand élément de E et que si x et y sont deux entiers naturels, on a $x \preceq y$ si et seulement si $x \leq y$ dans $\mathbb{N}$.

Question 10.1 Démontrer que $\preceq$ est bien une relation d'ordre.

Question 10.2 Démontrer que E muni de $\preceq$ est un ensemble *bien ordonné*, c'est-à-dire que toute partie non vide de E possède un plus petit élément par $\preceq$.

Question 10.3 Quels éléments de E ne sont pas les successeurs d'autres éléments ?

Exercice 11 On note A l'ensemble des relations sur E de cardinal n. Si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont deux relations, on note $\mathcal{S} \wedge \mathcal{T}$ la relation définie par pour tout $a, b \in A$ $a(\mathcal{S} \wedge \mathcal{T})b$ ssi $a\mathcal{T}b$ et $a\mathcal{S}b$; on note $\mathcal{S} \vee \mathcal{T}$ la relation définie par pour tout $a, b \in A$ $a(\mathcal{S} \vee \mathcal{T})b$ ssi $a\mathcal{T}b$ ou $a\mathcal{S}b$. Enfin, on dit qu'une relation $\mathcal{S}$ est *plus fine* qu'une relation $\mathcal{T}$ si l'on a $a\mathcal{T}b$ à chaque fois que $a\mathcal{S}b$. On écrira cette propriété $\mathcal{S} \Longrightarrow \mathcal{T}$.

Question 11.1 Comment voit-on que $\mathcal{S} \Longrightarrow \mathcal{T}$ sur les représentations cartésiennes de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{T}$?

Question 11.2 Si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont des relations d'équivalence, à quoi reconnaît-on, sur leurs classes d'équivalence, que $\mathcal{S} \Longrightarrow \mathcal{T}$?

Question 11.3 Si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont des relations d'équivalence, est-ce que $\mathcal{S} \wedge \mathcal{T}$ et $\mathcal{S} \vee \mathcal{T}$ sont aussi des relations d'équivalence ? Si oui, comment peut-on obtenir leurs classes d'équivalence à partir de celles de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$?

Question 11.4 Démontrer que $\Longrightarrow$ est une relation d'ordre. Quel est son plus petit élément ? Quel est son plus grand élément ? Dans le cas où $E = \{a, b\}$, faire la liste des relations sur E et dessiner le diagramme de Hasse de la relation $\Longrightarrow$.

Question 11.5 Si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont deux relations d'ordre, en est-il de même des relations $\mathcal{S} \wedge \mathcal{T}$ et $\mathcal{S} \vee \mathcal{T}$?