Aix*Marseille université	Domaine Sciences et Technologies LICENCE D'INFORMATIQUE **Automates et circuits : TD 1** **Code UE : ENSIN2U2**
Année 2012-13	**Systèmes de numération et codage**

Exercice 1

Sur la lointaine planète Infok les Informatoks jouent à un jeu très populaire. Mais dans chaque région d'Infok où se joue un match, les Informatoks ont la mauvaise habitude de ne pas utiliser la même technique d'affichage des scores. Néanmoins les scores doivent apparaître sur toute la planète. L'objectif de cet exercice est d'aider les Informatoks chargés des affichages à s'y retrouver.

Infok est composée de quatre régions :

- Les Binoks n'utilisent que des lampes éteintes ou allumées pour afficher les résultats. Ils sont donc en base 2.
- Les Octoks, toujours étourdis, ont malencontreusement perdu les chiffres 8 et 9. Ils sont donc en base 8.
- Les Hexoks, réputés pour leur avarice, ne veulent utiliser que deux caractères pour afficher les scores par mi-temps, ainsi la base 16 leur suffit.
- Enfin les Décoks, qui sont la honte des Informatoks, n'utilisent que des chiffres dans une bête base 10.

Question 1.1 Avant tout, il faut aider les Informatoks à optimiser leurs calculs. Leur rappeler le moyen *le plus simple* pour passer :

1. d'une base 10 à une base 2
2. d'une base 2 à une base 8
3. d'une base 8 à une base 16
4. d'une base 16 à une base 10
5. d'une base 2 à une base 10

Question 1.2 Il y a eu un match dans chaque région ; afficher les scores pour les autres régions :

1. chez les Binoks : score 10110 à 111101,
2. chez les Octoks : score 53 à 102
3. chez les Hexoks : score 1E à 39
4. chez les Décoks : score 172 à 240

Question 1.3 Un indice dans l'énoncé permet de déterminer le nombre de points maximum que l'on peut marquer dans ce sport en une mi-temps. Quel est-il ?

Question 1.4 Lors d'un match particulièrement serré, les supporters n'étaient pas d'accord sur le total des scores des mi-temps et donc sur le vainqueur. Donner le score final et le vainqueur des différents matchs (Les opérations seront à effectuer dans la base correspondant au score, en évitant de revenir à la base honteuse des Décoks !).

Région	Equipe	1ère mi-temps	2ème mi-temps	— total —
Binoks	Biclars	1001011	11001	
	Bihell	101110	10001001	
Octoks	Octeurs	156	75	
	Ocarinas	23	134	
Hexoks	Hexoux	90	BB	
	Hextoir	F1	76	

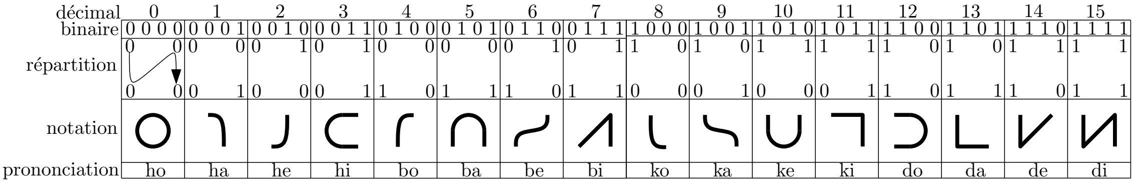
Exercice 2

Parce que seize peut s'écrire 2^{2^2}, et puisque l'on parle de binaire pour la base 2, Boby Lapointe estimait qu'on pouvait parler de *Bi-Binaire* pour la base 4, et de *Bi-Bi-Binaire* pour la base 16, terme qu'il abrègea en **Bibi**.

A partir de ce postulat, Boby Lapointe inventa la notation et la prononciation de seize chiffres. A l'aide de quatre consonnes et de quatre voyelles, on obtient les seize combinaisons nécessaires :

HO	HA	HE	HI	BO	BA	BE	BI	KO	KA	KE	KI	DO	DA	DE	DI
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

La figure ci-après indique le moyen de conversion du décimal vers le bibinaire, en passant par le binaire et l'héxadécimal.



Pour définir un nombre, il suffit d'énumérer les chiffres (hexadécimaux) qui le composent. Par exemple, le nombre 2000 se traduit 7D0 en hexadécimal, et ainsi BIDAHO en Bibi.

Question 2.1 Quel jour sommes-nous en bibinaire ?

Question 2.2 Convertir les nombres suivants de la base 10 au bibinaire, et vice-versa :

Décimal	— Bibinaire —
0	
3	
89	
4875	
1048577	

Bibinaire	— Décimal —
DODO	
KOKA	
BIBADE	
HAHIKIDO	
KIHADIDODO	

Question 2.3 Calculs en bibinaire :

1. Calculer DO+BE, puis HAHE+HA. Poser alors l'addition DODO+BEBE et la calculer à partir des deux sommes précédentes.

2. Calculer BE×DO, puis BOKO+BO. Poser alors la multiplication DODO×BEBE et la calculer à partir des deux résultats précédents.

Question 2.4 On admet que HAHAHA $= 273_{10}$. En déduire rapidement les valeurs de HAHAHAHA et de HAHAHAHAHA en justifiant la méthode utilisée. Qu'en est-il du calcul de HIHIHIHIHI à partir de HIHIHI ? Généraliser cette méthode à toute base β.

Exercice 3

Question 3.1 Donner la représentation de $(-122)_{10}$ en binaire. On utilisera la représentation des entiers négatifs avec un bit pour le signe sur 1 octet.

Question 3.2 Donner la représentation de $(-122)_{10}$ en binaire. On utilisera la représentation des entiers négatifs avec le complément à 2 sur 1 octet.

Exercice 4

Question 4.1 Montrer que dans tout système de numération de base $\beta > 3$, le nombre 1331 est un cube.

Question 4.2 Soit $x = (12321)_\beta$ un nombre représenté en base $\beta \geq 4$. Pour quelles valeurs de β, x est-il un nombre premier ?

Question 4.3 Quelles sont les bases $\beta > 3$ pour lesquelles $1_\beta + 10_\beta \times 11_\beta \times 12_\beta \times 13_\beta = (131_\beta)^2$?

Exercice 5

On pose $x = 1000\ldots01_2$ (n digits 0 encadrés par deux digits 1). Comment s'écrivent x^2 et x^3 en binaire ?

Exercice 6

Démontrer que $(1111000001)_2$ est un carré. Quelle est sa racine carrée ?

Exercice 7

On note x le nombre réel qui s'écrit $x = 0, \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\ldots$ en base β (où α est un chiffre de la base β). Montrer que x est rationnel et déterminer une fraction qui le représente. Que peut-on dire de plus si $\alpha = \beta - 1$?

Exercice 8 Pour poursuivre la question précédente : on note $y = 0, \alpha\gamma\alpha\gamma\alpha\gamma\alpha\gamma\alpha\gamma\alpha\gamma\alpha\gamma\ldots$ en base β. Montrer que y est rationnel et déterminer une fraction qui le représente.

Exercice 9

- Soit $x = b_n b_{n-1} b_{n-2} \cdots b_2 b_1 b_0$ écrit dans la base β.
- Si $b_n \neq 0$, on note $n + 1 = N_\beta(x)$ le nombre de chiffres nécessaires pour exprimer x dans la base β.

Montrer ce théorème. vu en cours : $N_\beta(x)$ est le plus petit entier strictement supérieur à $\mathrm{Log}_\beta(x)$.

Exercice 10

On cherche à graver sur un bluray un flux vidéo non compressée. On suppose que le flux vidéo est de 1920×1080 pixels, que chaque pixel est codé sur 3 octets (codage rgb), qu'il y a 30 images par secondes et qu'un bluray peut stocker 50 giga-octets de données (50×2^{30} octets).

Question 10.1 Quelle est la durée maximale de vidéo que l'on peut stocker sur le bluray ?

Question 10.2 On souhaite transmettre le flux vidéo via un connexion wifi d'un débit de 100 Mégabits par seconde. Quel est le nombre d'images que l'on peut transmettre par seconde via cette connexion.

Exercice 11

Question 11.1 Combien y a-t-il d'octets différents (mots de 8 bits) ?

Question 11.2 Quel est le nombre minimum de bits nécessaires pour pouvoir coder 1000 mots différents ?

Exercices supplémentaires

Exercice 12

Montrer que 10101 est divisible par 111 dans tout système de numération. Exprimer le quotient au moyen de la base.

Exercice 13

Existe-t-il un système de numération dans lequel le produit de 24 par 42 s'écrit 1401 ? Si oui, lequel ?

Exercice 14

Existe-t-il une base dans laquelle le nombre 276 est un carré ?