	Domaine Sciences et Technologies LICENCE D'INFORMATIQUE
Aix*Marseille université	**Automates et circuits** **1er Devoir Surveillé** **Durée : 2 heures**
Année 2012-13	**Seul document autorisé :** **notes de cours (une page A4 recto/verso)**

Nous vous recommandons de bien lire intégralement le sujet avant de commencer – Les exercices sont indépendants et le barème indicatif – les réponses devront être justifiées mais concises

Exercice 1 (Conversion [3 points])
Les quatre questions sont indépendantes.

Question 1.1 Convertir $(1789)_{10}$ de la base 10 vers la base 16.

Solution : $(1789)_{10} = (6FD)_{16}$

Question 1.2 Convertir $(1515)_{10}$ de la base 10 vers la base 2.

Solution : $(1515)_{10} = (10111101011)_2$

Question 1.3 Convertir $(ABCDEF)_{16}$ de la base 16 vers la base 2.

Solution : $(ABCDEF)_{16} = (101010111100110111101111)_2$

Question 1.4 Convertir $(666)_8$ de la base 8 vers la base 16.

Solution : $(666)_8 = (1B6)_{16}$

Exercice 2 (Représentation de nombre [3 points])
Les deux questions sont indépendantes.

Question 2.1 On considère des nombres représentés en base deux. Combien existe-t-il de nombres différents (de valeurs différentes) dont la représentation ne contient pas deux fois le même chiffre ?

Solution : *Il y a deux chiffres en base deux : 0 et 1. La représentation de nombres dont les chiffres sont tous différents est donc au plus de longueur 2. On a $0_2 = 0_{10}$, $1_2 = 1_{10}$, $01_2 = 1_{10}$ et $10_2 = 2_{10}$. Il y a donc trois nombres différents.*

Question 2.2 Pour quelle base $\beta \geq 5$, l'égalité suivante est-elle vérifiée ?

$$((11)_\beta)^4 - ((4)_\beta \times (1111)_\beta) - (10100)_\beta = (42)_\beta$$

Solution : *On a :*

$$\begin{aligned}
& ((11)_\beta)^4 - ((4)_\beta \times (1111)_\beta) - (10100)_\beta = (42)_\beta \\
\Leftrightarrow\ & (\beta+1)^4 - 4(\beta^3+\beta^2+\beta+1) - (\beta^4+\beta^2) = 4\beta+2 \\
\Leftrightarrow\ & \beta^4+4\beta^3+6\beta^2+4\beta+1-4\beta^3-4\beta^2-4\beta-4-\beta^4-\beta^2 = 4\beta+2 \\
\Leftrightarrow\ & \beta^2+4\beta-5=0
\end{aligned}$$

On doit résoudre l'équation $\beta^2+4\beta-5=0$. Cette équation a deux solutions 5 et -1. Il y a donc une seule base pour laquelle cette égalité est vraie : la base 5.

Exercice 3 (Codage [2 points])
Les deux questions sont indépendantes.

Question 3.1 Pour les besoins d'une implémentation d'un jeu de bridge, on cherche à coder une carte à jouer. Une carte est identifiée par une valeur (de 1 à 10 ou bien valet, dame, roi) et une couleur (pique, coeur, carreau ou trèfle). Combien de bits sont nécessaires pour coder une carte ?

> ***Solution :*** *Une carte peut avoir* $13 \times 4 = 52$ *valeurs différentes. Utiliser* 6 *bits suffit pour coder une carte car il existe* $2^6 = 64$ *mots binaires de longueur* 6*. On peut même séparer le codage de la couleur et la valeur en codant la couleur sur 2 bits et la valeur sur 4 bits. Il est impossible de coder la carte avec moins de bits car 5 bits sont insuffisants (*$2^5 = 32 < 52$*).*

Question 3.2 Quelle est le plus grand entier relatif que l'on peut coder sur un octet dans une représentation en complément à deux ? Quel est sa représentation binaire ?

> ***Solution :*** *Le plus grand entier relatif codé sur un octet dans une représentation en complément à deux est 127. Sa représentation binaire est* 0111 1111.

Exercice 4 (Dénombrement [3 points])

Un étudiant possède 7 livres de quatre matières différentes : 2 livres de mathématiques, 3 livres d'informatiques, 1 livre de biologie et 1 livre d'anglais. Il veut ranger ces livres sur une étagère.

Question 4.1 De combien de façon peut-il ranger ces livres sur un étagère ? Les livres sont placés sur une même étagère et deux rangements sont différents si l'ordre de gauche à droite des livres est différent.

> ***Solution :*** *Il a autant de façon de ranger ces 7 livres que de façons de ranger 7 objets distinct quelconques, c'est-à-dire* $A_7^7 = 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$ *rangements possibles.*

Question 4.2 De combien de façon peut-il le faire s'il range d'abord les livres d'anglais, puis ceux d'informatiques, puis ceux de mathématiques, et enfin ceux de biologie ?

> ***Solution :*** *Le rangement se déroule selon quatre étapes successives : il a* $A_1^1 = 1!$ *façons de ranger les livres d'anglais, puis* $A_3^3 = 3!$ *façons de ranger les livres d'informatiques, puis* $A_2^2 = 2!$ *façons de ranger les livres de mathématiques et enfin* $A_1^1 = 1!$ *de ranger les livres de biologie.*
> *Il y a donc :* $1! \times 3! \times 2! \times 1! = 3 \times 2 \times 2 = 12$ *rangements de ce type.*

Question 4.3 De combien de façon peut-il le faire s'il range les livres groupés par matière ? Les livres d'une même matière (comme les mathématiques) doivent être consécutifs dans l'ordre de rangement de gauche à droite.

> ***Solution :*** *Il faut prévoir une cinquième étape à la procédure de la question précédente. Une fois les rangements effectués dans chaque matière, il faut « ranger » les disciplines dans un ordre donné. Il y a 4! façons de le faire.*
> *Il y a donc :* $1! \times 3! \times 2! \times 1! \times 4! = 12 \times 4 \times 3 \times 2 = 288$ *rangements de ce type.*

Exercice 5 (Dénombrement [3 points])

Neuf personnes se présentent à la médecine du travail pour passer la visite annuelle. Deux médecins les reçoivent. Le premier médecin verra 4 personnes et le second médecin en verra 5.

Question 5.1 De combien de façons différentes les neuf personnes peuvent-elles être réparties entre les deux médecins ?

> ***Solution :*** *En fait il s'agit de choisir 4 personnes pour le premier médecin, les quatre autres personnes étant alors automatiquement affectées au deuxième médecin. On a :* $\binom{9}{4} = \frac{9\times 8\times 7\times 6}{4\times 3\times 2\times 1} = 3\times 7\times 6 = 126$ *façons d'effectuer ce choix.*

Question 5.2 Il y a 4 personnes portant des lunettes. De combien de façons différentes peut-on répartir les patients entre les deux médecins, sachant que chaque médecin devra voir exactement deux personnes portant des lunettes ?

> ***Solution :*** *Cette fois-ci encore on ne s'intéresse qu'au premier médecin. On choisit deux personnes parmi les quatre qui portent des lunettes, puis deux personnes parmi les cinq restantes qui ne portent pas de lunettes. On a donc* $\binom{4}{2}\binom{5}{2} = \frac{4\times 3}{2\times 1}\times\frac{5\times 4}{2\times 1} = 6\times 10 = 60$ *choix possibles.*

Question 5.3 Maintenant, on veut que M. Durand qui porte des lunettes et M. Dupond qui n'en porte pas, soient examinés par le même médecin. Combien de répartitions sont possibles ?

> ***Solution :*** *On a affaire à la réunion de deux évènements disjoints : soit M. Durand et M. Dupond sont avec le premier médecin, soit ils sont avec le second. S'ils sont avec le premier, on devra compléter le groupe par un porteur de lunettes sur les trois restants et par une personne sans lunettes sur les quatre restantes. S'ils sont avec le deuxième médecin, le premier groupe est constitué par deux porteurs de lunettes sur les 3 restants et par deux personnes sans lunette sur les 4 restantes. On a donc au total :* $\binom{3}{1}\binom{4}{1} + \binom{3}{2}\binom{4}{2} = 3\times 4 + 3\times 6 = 30$ *répartitions possibles.*

Exercice 6 (Fonctions [3 points])

Les deux questions sont indépendantes.

Question 6.1 Soit f une fonction de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ définie par $f((x,y)) = (x+y, x\times y)$. Montrer que f n'est ni injective, ni surjective.

> ***Solution :*** *On a* $f((1,0)) = (1+0, 1\times 0) = (1,0) = (0+1, 0\times 1) = f((0,1))$. *La fonction* f *n'est donc pas injective car* $(0,1)$ *et* $(1,0)$ *ont la même image et* $(1,0)\neq(0,1)$.
> *Considérons le couple* $(0,1)$. *Pour que le couple* $(0,1)$ *ait un antécédent par* f, *il faut qu'il existe* $x, y\in\mathbb{N}$ *tels que* $x+y=0$ *et* $x\times y = 1$. *La première égalité implique que* $x=y=0$ *alors que la seconde implique que* $x\neq 0$ *et* $y\neq 0$. *Le couple* $(0,1)$ *n'a donc pas d'antécédent par* f. *La fonction* f *n'est pas surjective.*

Question 6.2 Soit g la fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ définie par $g(n) = n + (-1)^n$. Montrer que $g(n)$ et n n'ont jamais la même parité. En déduire que g est injective.

> ***Solution :*** *Si* n *est pair alors* $g(n) = n + (-1)^n = n+1$ *est impair. Si* n *est impair alors* $g(n) = n+(-1)^n = n-1$ *est pair. Soit* $x, y\in\mathbb{N}$ *deux entiers distincts* ($x\neq y$). *Si* x *et* y *sont de parités différentes alors* $g(x)$ *et* $g(y)$ *sont de parités différentes et* $g(x)\neq g(y)$. *Si* x *et* y *sont tous les deux pairs alors* $g(x) = x+1$ *et* $g(y) = y+1$ *et on a* $g(x)\neq g(y)$. *Si* x *et* y *sont tous les deux impairs alors* $g(x) = x-1$ *et* $g(y) = y-1$ *et on a* $g(x)\neq g(y)$. *Dans tous les cas, on a* $x\neq y\Rightarrow g(x)\neq g(y)$. *La fonction* g *est donc injective.*

Exercice 7 (Fonctions et relations [3 points])

Dans la théorie des ensembles, les fonctions sont définies comme des relations binaires dans lesquelles chaque élément du premier ensemble est associé à au plus un élément du deuxième ensemble (on parle aussi de relation fonctionnelle).

Question 7.1 Dans ce contexte, peut-on dire :

- que toute fonction est un ensemble ?
- que toute relation d'ordre définit une fonction ?
- que toute relation d'ordre totale définit une fonction ?
- que toute relation d'équivalence définit une fonction ?
- que toute fonction définit une relation d'équivalence ?

Question 7.2 Si c'est possible (sinon expliquez pourquoi), donnez une relation binaire sur $\{0, 1\}$ qui :

- ne soit pas une fonction.
- soit une bijection.
- soit une application ni injective, ni surjective.
- soit une injection non bijective.
- soit une surjection non bijective.