Modèles de Markov

Processus stochastique

- Un **processus stochastique** (ou processus aléatoire) est une séquence $X_1, X_2 \dots X_N$ de variables aléatoires fondées sur le même ensemble fondamental.
- Les valeurs possibles des variables aléatoires sont appelées les **états** possibles du processus.
- La variable X_t représente l'état du processus au temps t (on dit aussi l'observation au temps t).
- Les différentes variables aléatoires ne sont en général pas indépendantes les unes des autres.
- Ce qui fait réellement l'interêt des processus stochastiques est la dépendance entre les variables aléatoires.

Processus stochastique

- Pour spécifier entièrement un processus stochastique, il suffit de spécifier :
  1. la loi de probabilité de la première variable alétaoire X_1, qui spécifie donc l'état du processus lors de la première observation.
  2. pour toute valeur de $t > 1$ la probabilité conditionnelle :

$$P(X_t = j | X_1 = i_1, \ldots, X_{t-1} = i_{t-1})$$

Propriété de Markov

Une **chaîne de Markov** est un type particulier de processus stochastique qui vérifie deux conditions :

- L'état au temps t du processus ne dépend que de son état au temps $t-1$:

$$P(X_t = j | X_1 = i_1, \ldots, X_{t-1} = i_{t-1}) = P(X_t = j | X_{t-1} = i_{t-1})$$

- La probabilité de passage d'un état i à un état j est **constante**, elle ne varie pas avec le temps :

$$\forall t, 1 < t \leq N, \;\; P(X_t = j | X_{t-1} = i) = C$$

Processus de Markov

Un processus de Markov peut être décrit par

- une **matrice de transition** T telle que :

$$T(i,j) = P(X_t = j | X_{t-1} = i), 1 < t \leq N$$

$$\text{avec } T(i,j) \geq 0,\ \forall i,j$$

$$\text{et } \sum_{j=1}^{N} T(i,j) = 1\ \forall i$$

- L'état du processus à l'instant 1 donc la loi de probabilité, notée π, de la variable X_1 :

$$\pi(i) = P(X_1 = i)$$

Processus de Markov

On peut éviter le recours à la loi π en imposant que le processus débute toujours dans le même état 0, par exemple et en utilisant les transitions depuis cet état pour représenter les probabilités π :

$$T(0, i) = \pi(i), \text{ pour tout état i du processus}$$

Processus de Markov

Un processus de Markov peut aussi être représenté par un automate fini :

- Chaque état du processus est représenté par un état de l'automate
- Une transition de l'état i à l'état j est étiqueté par la probabilité $T(i, j)$.

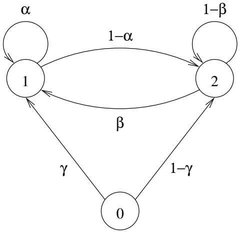
Exemple

- On admet que le fait que le temps qu'il fera demain ne dépend que du temps qu'il fait aujourd'hui.
- Plus précisément, s'il pleut aujourd'hui, il pleuvra demain aussi avec une probabilité de α et s'il ne pleut pas aujourd'hui la probabilité qu'il pleuve demain est β.
- On convient de dire que le système est dans l'état 1 s'il pleut et 2 s'il ne pleut pas. La situation peut être représentée par une chaîne de Markov à deux états dont la matrice de transition est :

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{vmatrix}$$

Exemple (suite)

- De plus, la probabilité que le processus soit dans l'état 1 à l'instant 1 est égale à γ.
- Le même processus peut être représenté par l'automate :



Probabilité d'une suite d'observations

- Les propriétés de Markov permettent de calculer simplement la probabilité qu'une suite d'états particulière de longueur T soit observée (la loi de probabilité conjointe de $(X_1, X_2, \ldots X_T)$) :

  $P(X_1, X_2, \ldots, X_T) =$ (règle de multiplication)
  $P(X_1)P(X_2|X_1)P(X_3|X_1, X_2) \ldots P(X_T|X_1, \ldots, X_{T-1}) =$
  $P(X_1)P(X_2|X_1)P(X_3|X_2) \ldots P(X_T|X_{T-1})$(hypothèse de Markov)

Exemple

- Etant donné le processus de Markov de l'exemple précédent, la probabilité d'avoir trois jours consécutifs de pluie est égale à :

$$
\begin{aligned}
P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) &= P(X_1 = 1)P(X_2 = 1|X_1 = 1)P(X_3 = 1|X_2 = 1) \\
&= \gamma \times \alpha \times \alpha \\
&= \gamma\alpha^2
\end{aligned}
$$