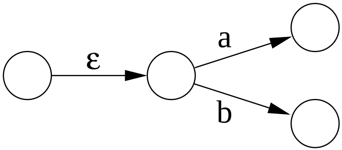
Théorie des langages

Alexis Nasr

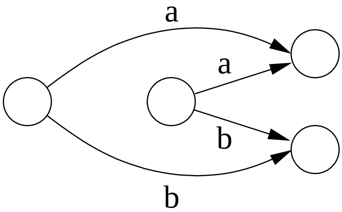
Déterminisation

- Soit $N = \langle Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N \rangle$ un automate non déterministe reconnaissant un langage L.
- On construit un automate détermisite $D = \langle Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D \rangle$ qui reconnaît le même langage.
- Idée générale : on crée des états qui correspondent à des ensembles d'états de N.
- Lorsque N peut transiter d'un état e vers les états $q_1, \ldots, q_i$ sur un symbole a, un nouvel état $q_{1,\ldots,i}$ correspondant à cet ensemble est créé et les différentes transitions sont remplacées par une transition de e vers $q_{1,\ldots,i}$ sur a.
- On procède en deux étapes :
  1. On élimine de N les éventuelles transitions-ε
  2. on réduit les transitions d'un même état sur un même symbole.

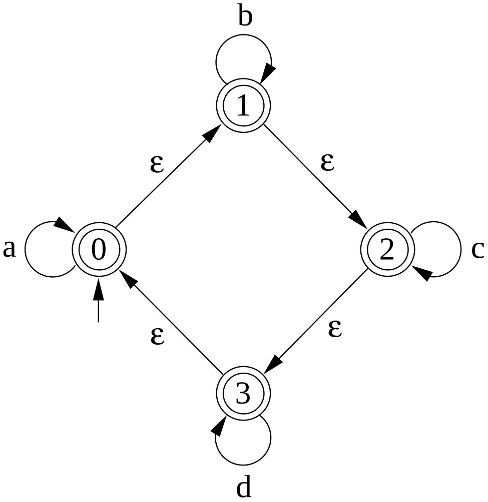
Elimination des transitions-ε



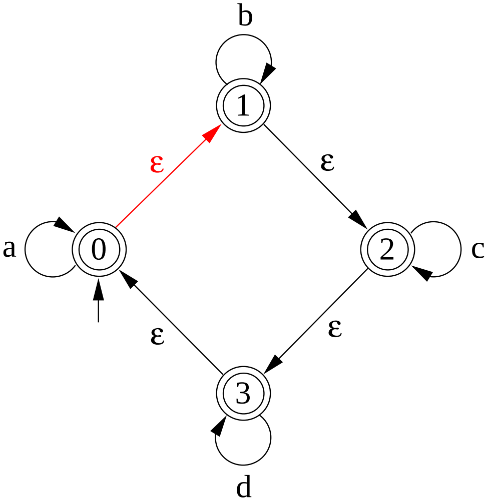
Elimination des transitions-ε



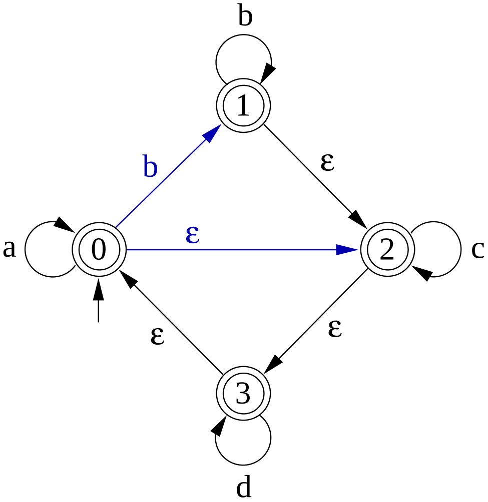
Exemple



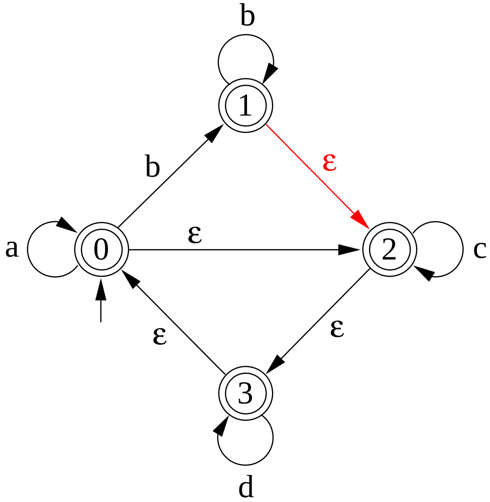
Exemple



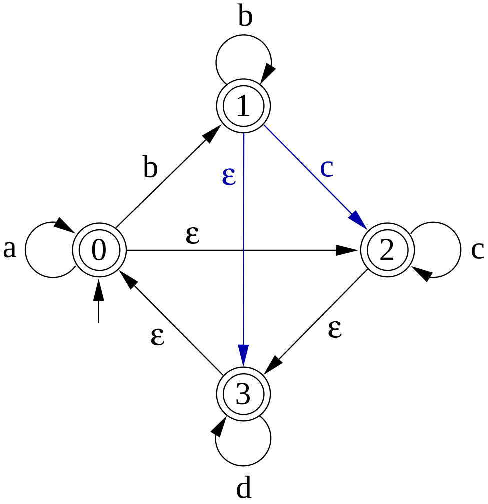
Exemple



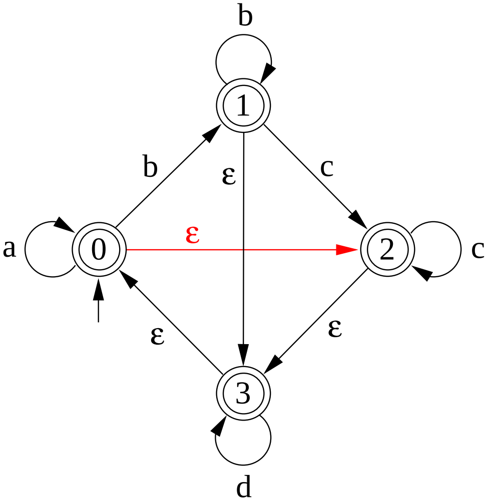
Exemple



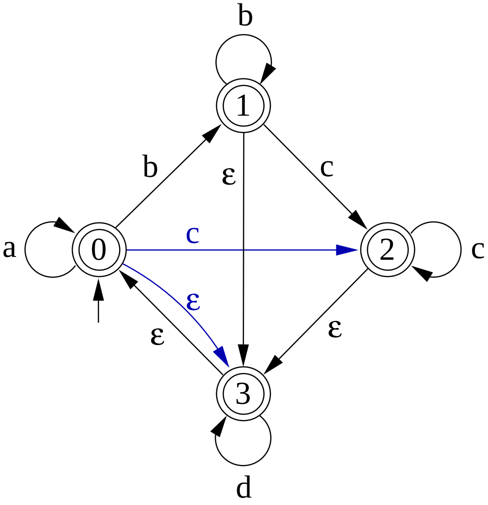
Exemple



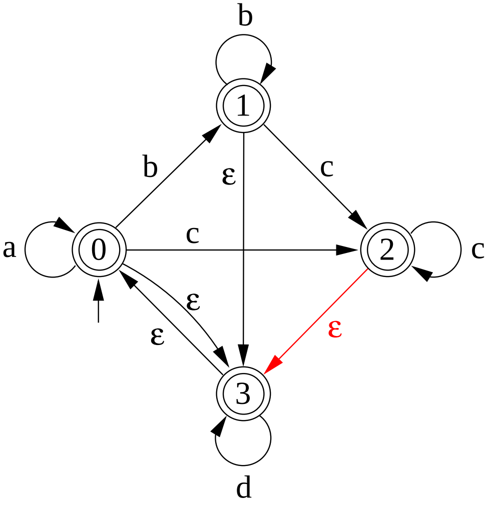
Exemple



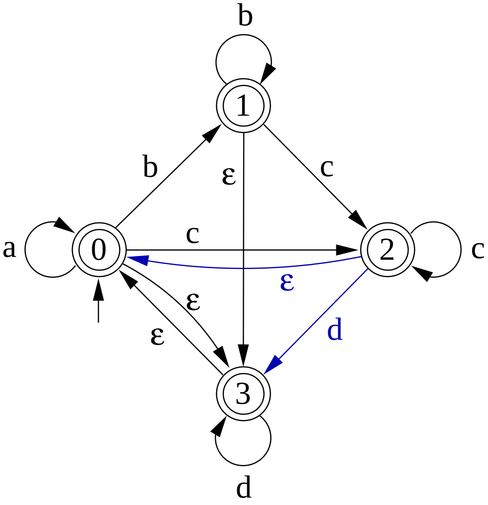
Exemple



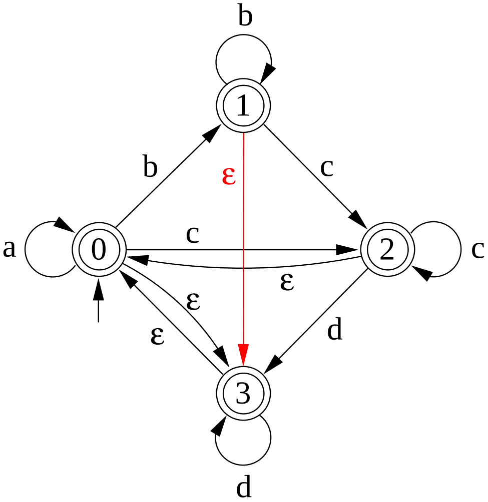
Exemple



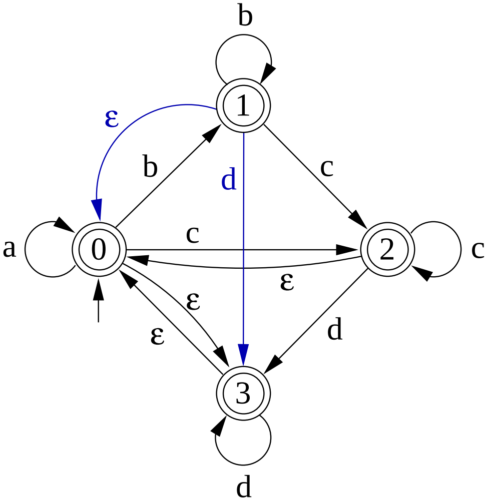
Exemple



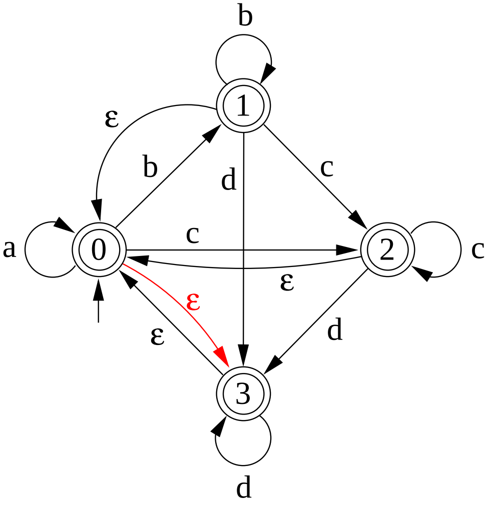
Exemple



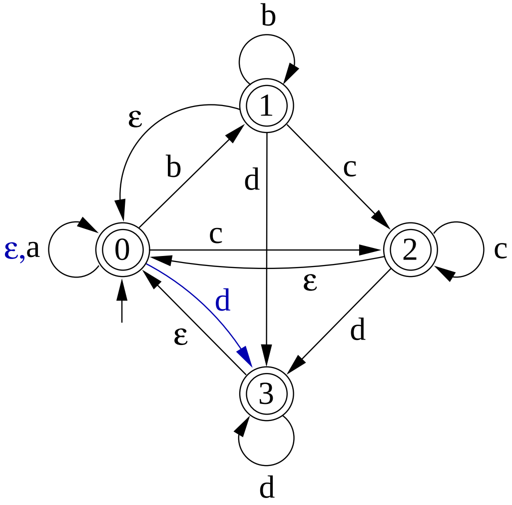
Exemple



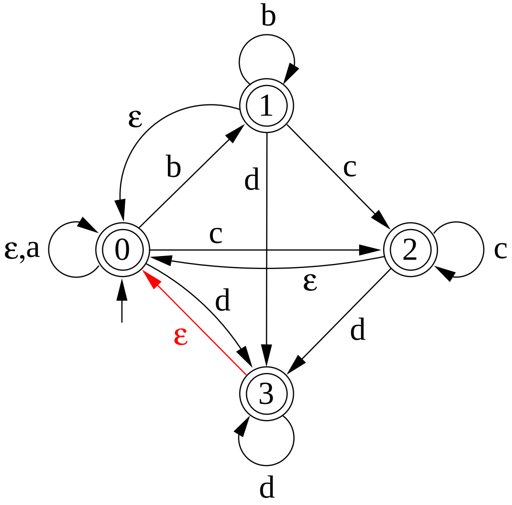
Exemple



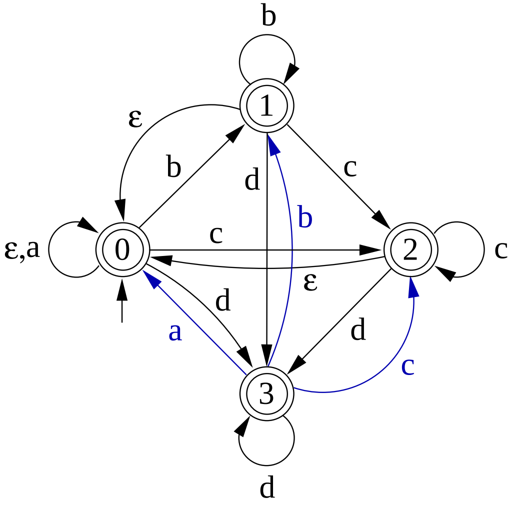
Exemple



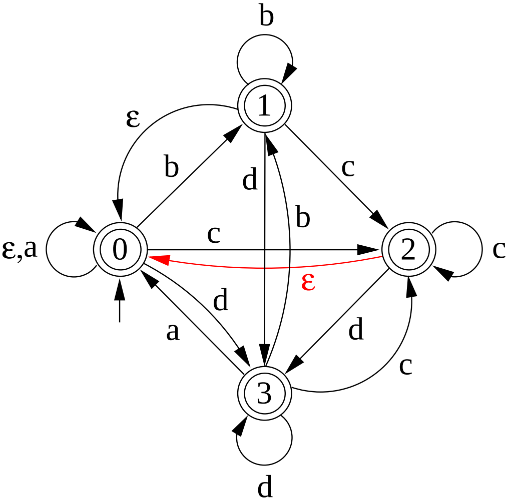
Exemple



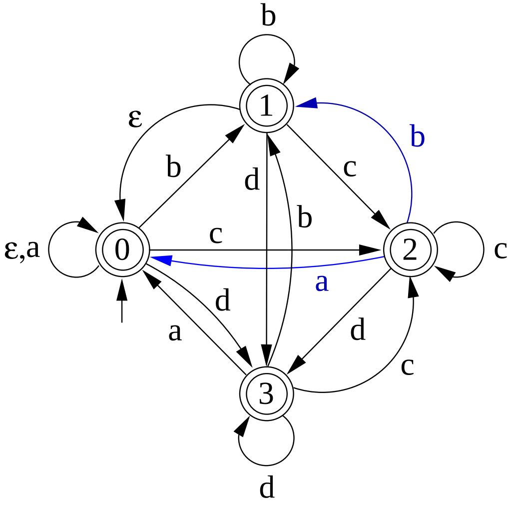
Exemple



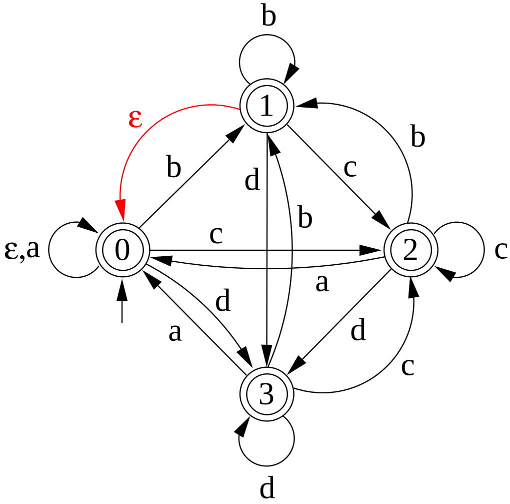
Exemple



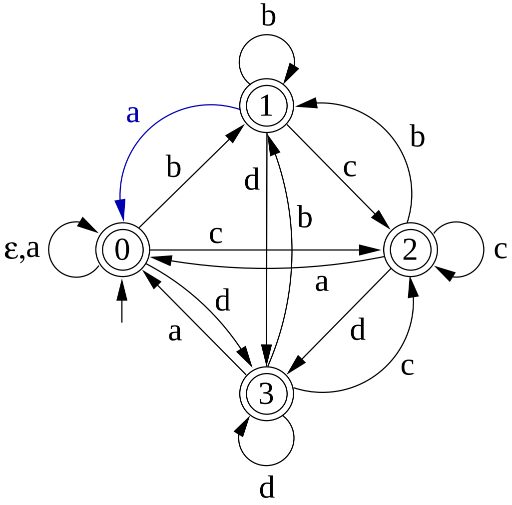
Exemple



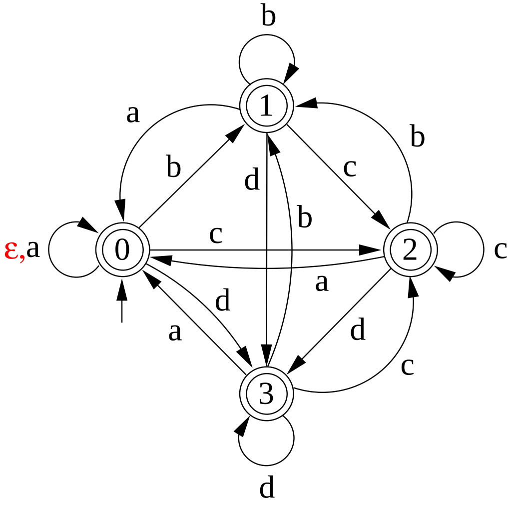
Exemple



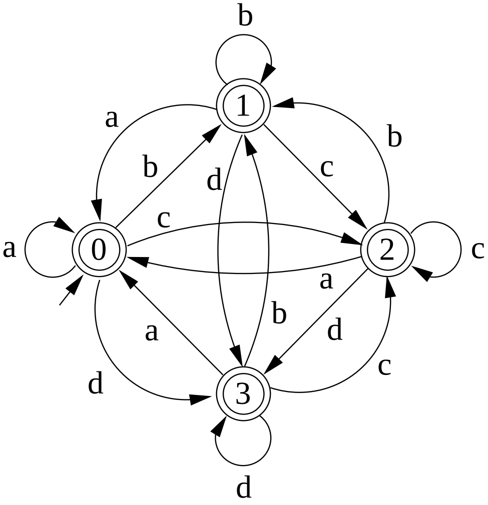
Exemple



Exemple



Exemple

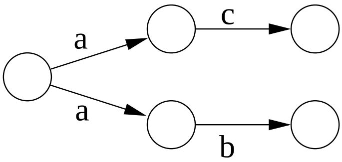


Elimination des transitions-ε

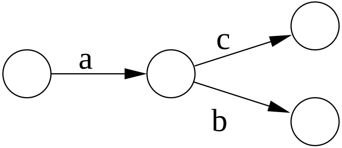
Etant donné un automate $N = \langle Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N \rangle$, on lui associe un automate
$N' = \langle Q_{N'}, \Sigma, \delta_{N'}, q_{N'}, F_{N'} \rangle$ sans transitions-ε en procédant comme suit :

- Tant qu'il existe au moins une transition-ε, on applique la procédure suivante :
- On choisit un état k dans lequel aboutit au moins une transition-ε
  - pour tout $q \in Q_N - \{k\}$ tel que $\delta(q, \varepsilon) = k$, et pour tous $r \in Q$ et $x \in \{\Sigma \cup \varepsilon\}$ tels que $\delta(k, x) = r$, on ajoute une transition $\delta(q, x) = r$.
  - on supprime les transitions $\delta(q, \varepsilon) = k$
  - si $k \in F$, on ajoute q à F
  - si k n'est plus accessible, on le supprime.

Réduction des transitions



Réduction des transitions



Réduction des transitions

Etant donné un automate N' sans transitions-ε, on lui associe un automate déterministe $D = \langle Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D \rangle$ défini comme suit :

1. $Q_D = \mathcal{P}(Q_{N'})$ Les états de D sont des ensembles d'états de N'.
2. Pour $R \in Q_D$ et $a \in \Sigma$, on calcule $\delta_D(R, a)$ de la façon suivante :

$$\delta_D(R, a) = \{q \in Q | q \in \delta_{N'}(r, a) \text{ avec } r \in R\}$$

$$\delta_D(R, a) = \bigcup_{r \in R} \delta_{N'}(r, a)$$

3. $q_D = \{q_{N'}\}$. L'état initial de D est l'ensemble constitué de l'état initial de N'.
4. $F_D = \{R \in Q_D | R \text{ contient un état d'acceptation de } N'\}$. Les états d'acceptation de D sont les ensembles qui contiennent au moins un état d'acceptation de N'.

Mise en œuvre

- Dans la pratique, lorsque l'on veut construire un automate déterministe D à partir d'un automate non déterministe sans transitions-ε N', on ne commence pas par créer tous les états de D, car ils peuvent être nombreux : $|\mathcal{P}(Q)| = 2^{|Q|}$!
- On construit plutôt les états de D au fur et à mesure de leur création en partant de l'état initial.

Exemple

		a	b
$\rightarrow$	0	$\{0,1\}$	$\{0\}$

		a	b
$\rightarrow$	0	$\{0,1\}$	0
	1	2	2
	2	3	3
$\leftarrow$	3	$\emptyset$	$\emptyset$

Exemple

		a	b
$\rightarrow$	0	$\{0,1\}$	0
	1	2	2
	2	3	3
$\leftarrow$	3	$\emptyset$	$\emptyset$

		a	b
$\rightarrow$	0	$\{0,1\}$	$\{0\}$
	$\{0,1\}$	$\{0,1,2\}$	$\{0,2\}$

Exemple

		a	b
$\rightarrow$	0	$\{0,1\}$	0
	1	2	2
	2	3	3
$\leftarrow$	3	$\emptyset$	$\emptyset$

		a	b
$\rightarrow$	0	$\{0,1\}$	$\{0\}$
	$\{0,1\}$	$\{0,1,2\}$	$\{0,2\}$
	$\{0,1,2\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,2,3\}$

Exemple

		a	b
$\rightarrow$	0	$\{0,1\}$	0
	1	2	2
	2	3	3
$\leftarrow$	3	$\emptyset$	$\emptyset$

		a	b
$\rightarrow$	0	$\{0,1\}$	$\{0\}$
	$\{0,1\}$	$\{0,1,2\}$	$\{0,2\}$
	$\{0,1,2\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,2,3\}$
	$\{0,2\}$	$\{0,1,3\}$	$\{0,3\}$

Exemple

		a	b
$\rightarrow$	0	$\{0,1\}$	0
	1	2	2
	2	3	3
$\leftarrow$	3	$\emptyset$	$\emptyset$

		a	b
$\rightarrow$	0	$\{0,1\}$	$\{0\}$
	$\{0,1\}$	$\{0,1,2\}$	$\{0,2\}$
	$\{0,1,2\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,2,3\}$
	$\{0,2\}$	$\{0,1,3\}$	$\{0,3\}$
$\leftarrow$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,2,3\}$

Exemple

		a	b
$\rightarrow$	0	$\{0,1\}$	0
	1	2	2
	2	3	3
$\leftarrow$	3	$\emptyset$	$\emptyset$

		a	b
$\rightarrow$	0	$\{0,1\}$	$\{0\}$
	$\{0,1\}$	$\{0,1,2\}$	$\{0,2\}$
	$\{0,1,2\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,2,3\}$
	$\{0,2\}$	$\{0,1,3\}$	$\{0,3\}$
$\leftarrow$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,2,3\}$
$\leftarrow$	$\{0,2,3\}$	$\{0,1,3\}$	$\{0,3\}$

Exemple

		a	b
$\rightarrow$	0	$\{0,1\}$	0
	1	2	2
	2	3	3
$\leftarrow$	3	$\emptyset$	$\emptyset$

		a	b
$\rightarrow$	0	$\{0,1\}$	$\{0\}$
	$\{0,1\}$	$\{0,1,2\}$	$\{0,2\}$
	$\{0,1,2\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,2,3\}$
	$\{0,2\}$	$\{0,1,3\}$	$\{0,3\}$
$\leftarrow$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,2,3\}$
$\leftarrow$	$\{0,2,3\}$	$\{0,1,3\}$	$\{0,3\}$
$\leftarrow$	$\{0,1,3\}$	$\{0,1,2\}$	$\{0,2\}$

Exemple

		a	b
$\rightarrow$	0	$\{0,1\}$	0
	1	2	2
	2	3	3
$\leftarrow$	3	$\emptyset$	$\emptyset$

		a	b
$\rightarrow$	0	$\{0,1\}$	$\{0\}$
	$\{0,1\}$	$\{0,1,2\}$	$\{0,2\}$
	$\{0,1,2\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,2,3\}$
	$\{0,2\}$	$\{0,1,3\}$	$\{0,3\}$
$\leftarrow$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,2,3\}$
$\leftarrow$	$\{0,2,3\}$	$\{0,1,3\}$	$\{0,3\}$
$\leftarrow$	$\{0,1,3\}$	$\{0,1,2\}$	$\{0,2\}$
$\leftarrow$	$\{0,3\}$	$\{0,1\}$	$\{0\}$

Exemple

On renumérote les états :

		a	b
$\rightarrow$	$\{0\}$	$\{0,1\}$	$\{0\}$
	$\{0,1\}$	$\{0,1,2\}$	$\{0,2\}$
	$\{0,1,2\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,2,3\}$
	$\{0,2\}$	$\{0,1,3\}$	$\{0,3\}$
$\leftarrow$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,2,3\}$
$\leftarrow$	$\{0,2,3\}$	$\{0,1,3\}$	$\{0,3\}$
$\leftarrow$	$\{0,1,3\}$	$\{0,1,2\}$	$\{0,2\}$
$\leftarrow$	$\{0,3\}$	$\{0,1\}$	$\{0\}$

Exemple

On renumérote les états :

		a	b
$\rightarrow$	0	$\{0,1\}$	0
	$\{0,1\}$	$\{0,1,2\}$	$\{0,2\}$
	$\{0,1,2\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,2,3\}$
	$\{0,2\}$	$\{0,1,3\}$	$\{0,3\}$
$\leftarrow$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,2,3\}$
$\leftarrow$	$\{0,2,3\}$	$\{0,1,3\}$	$\{0,3\}$
$\leftarrow$	$\{0,1,3\}$	$\{0,1,2\}$	$\{0,2\}$
$\leftarrow$	$\{0,3\}$	$\{0,1\}$	0

Exemple

On renumérote les états :

		a	b
$\rightarrow$	0	1	0
	1	$\{0,1,2\}$	$\{0,2\}$
	$\{0,1,2\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,2,3\}$
	$\{0,2\}$	$\{0,1,3\}$	$\{0,3\}$
$\leftarrow$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,2,3\}$
$\leftarrow$	$\{0,2,3\}$	1	$\{0,3\}$
$\leftarrow$	$\{0,1,3\}$	$\{0,1,2\}$	$\{0,2\}$
$\leftarrow$	$\{0,3\}$	1	0

Exemple

On renumérote les états :

		a	b
$\rightarrow$	0	1	0
	1	2	$\{0,2\}$
	2	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,2,3\}$
	$\{0,2\}$	$\{0,1,3\}$	$\{0,3\}$
$\leftarrow$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,2,3\}$
$\leftarrow$	$\{0,2,3\}$	1	$\{0,3\}$
$\leftarrow$	$\{0,1,3\}$	2	$\{0,2\}$
$\leftarrow$	$\{0,3\}$	1	0

Exemple

On renumérote les états :

		a	b
$\rightarrow$	0	1	0
	1	2	3
	2	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,2,3\}$
	3	$\{0,1,3\}$	$\{0,3\}$
$\leftarrow$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,2,3\}$
$\leftarrow$	$\{0,2,3\}$	1	$\{0,3\}$
$\leftarrow$	$\{0,1,3\}$	2	3
$\leftarrow$	$\{0,3\}$	1	0

Exemple

On renumérote les états :

		a	b
$\rightarrow$	0	1	0
	1	2	3
	2	4	$\{0,2,3\}$
	3	$\{0,1,3\}$	$\{0,3\}$
$\leftarrow$	4	4	$\{0,2,3\}$
$\leftarrow$	$\{0,2,3\}$	1	$\{0,3\}$
$\leftarrow$	$\{0,1,3\}$	2	3
$\leftarrow$	$\{0,3\}$	1	0

Exemple

On renumérote les états :

		a	b
$\rightarrow$	0	1	0
	1	2	3
	2	4	5
	3	$\{0,1,3\}$	$\{0,3\}$
$\leftarrow$	4	4	5
$\leftarrow$	5	1	$\{0,3\}$
$\leftarrow$	$\{0,1,3\}$	2	3
$\leftarrow$	$\{0,3\}$	1	0

Exemple

On renumérote les états :

		a	b
$\rightarrow$	0	1	0
	1	2	3
	2	4	5
	3	6	$\{0,3\}$
$\leftarrow$	4	4	5
$\leftarrow$	5	1	$\{0,3\}$
$\leftarrow$	6	2	3
$\leftarrow$	$\{0,3\}$	1	0

Exemple

On renumérote les états :

		a	b
$\rightarrow$	0	1	0
	1	2	3
	2	4	5
	3	6	7
$\leftarrow$	4	4	5
$\leftarrow$	5	1	7
$\leftarrow$	6	2	3
$\leftarrow$	7	1	0

Exemple 1

Exemple 1