A. Nasr, F. Nouioua, F. Olive

TD nº 1

Résiduels

Exercice 1.1 Calculer les résiduels suivants :

1. Résiduels de $\{\varepsilon, abb, baaba\}$ par rapport aux mots ε, a, b, ab, ba et bb.
2. Résiduels du langage dénoté par $aa(a+b)^*bb$ par rapport à ε, a, b, ab, aa, ba et bb.
3. Résiduels de $\{a^p b^q, p, q \geq 0\}$ par rapport à tout mot $u \in \{a,b\}^*$.
4. Résiduels de $\{a^n b^n, n \geq 0\}$ par rapport à tout mot $u \in \{a,b\}^*$.

Exercice 1.2 Démontrer que pour tous $X, Y \subseteq V^*$, $u, v \in V^*$ et $a \in V$, on a :

1. $X/uv = (X/u)/v$
2. $(X \cup Y)/u = (X/u) \cup (Y/u)$
3. si $\varepsilon \notin X$: $(XY)/a = (X/a)Y$
4. si $\varepsilon \in X$: $(XY)/a = (X/a)Y \cup Y/a$
5. $\forall n > 0 : X^n/a = (X/a)X^{n-1}$
6. $X^*/a = (X/a)X^*$

Exercice 1.3 Soient $L \subseteq V^*$ et $w \in V^*$. Montrer que si L/w est infini, alors pour tout préfixe u de w, L/u est infini.

Exercice 1.4 Soit L un langage sur l'alphabet $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_p\}$. Montrer que

$$L \setminus \{\varepsilon\} = a_1(L/a_1) \oplus \cdots \oplus a_p(L/a_p),$$

où $\oplus$ dénote l'union disjointe.

Exercice 1.5 Donner si c'est possible des exemples de langages tels que :

1. $\{L/\alpha,\ \alpha \in V^*\}$ est fini et chaque L/α est fini ;
2. $\{L/\alpha,\ \alpha \in V^*\}$ est fini et chaque L/α est infini ;
3. $\{L/\alpha,\ \alpha \in V^*\}$ est infini et chaque L/α est fini ;
4. $\{L/\alpha,\ \alpha \in V^*\}$ est infini et chaque L/α est infini.

Exercice 1.6 Soient $L \subseteq V^*$ un langage régulier et $\alpha \in V^*$. Les langages suivants sont-ils réguliers ?
(i) L/α ; (ii) $\{\beta \in L \mid \beta$ admet α comme préfixe$\}$; (iii) $\{\beta \mid \beta$ est préfixe d'un mot de $L\}$.

Exercice 1.7 Construire l'automate des résiduels des langages suivants :

i) $0+1(0+1)^*0$.
ii) $0^*1(10^*1+0)^*$.
iii) $(aa+bb+cc)(a+b+c)^*$.
iv) $(a+b)^*aba$.
v) $(ba^+)^+$
vi) $\{u \in \{a,b\}^*$ t.q. $|u|_a \in 2\mathbb{N}$ et $|u|_b \in 3\mathbb{N}\}$.
vii) $aa(a+b)^*bb$.
viii) $a(a+b)^*b+b(a+b)^*a$.
ix) $\{u \in \{a,b\}^*$ t.q. dans u, tout bloc de a est de longueur $3\}$.
x) $\{u \in \{a,b\}^*$ t.q. dans u, tout a est suivi de deux b exactement$\}$.
xi) $\{u \in \{a,b\}^*$ t.q. u ne contient pas le facteur $aba\}$.
xii) $(00)^*+(000)^*$.