Fonctions

Introduction à l'apprentissage automatique
Master Sciences Cognitives
Aix Marseille Université

Alexis Nasr

Motivations

- La notion de fonction est très présente en apprentissage automatique
  - Les **classifieurs** et les **modèles de regression** sont généralement représentés par des fonctions.
  - La **fonction d'erreur** est centrale lors du processus d'apprentissage à partir de données.
- Les fonctions manipulées sont souvent **complexes** mais peuvent être vues comme des combinaisons de fonctions **simples**.

Objectifs

- Se familiariser avec la terminologie des fonctions.
- Connaître les fonctions élémentaires qui permettent de définir des fonctions complexes.
- Connaître les règles de combinaison permettant de combiner les fonctions élémentaires.
- Connaître la notion de limite d'une fonction en un point.
- Connaître la notion de continuité d'une fonction en un point.

Plan

Definitions

Fonctions élémentaires

Combinaison de fonctions

Limite et continuité

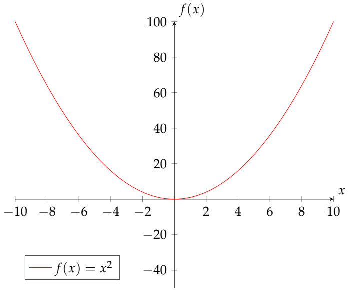
Fonctions

- La notion de fonction émerge dès lors qu'une quantité **dépend** d'une autre.
- Exemples :
  - La population P dans le monde **dépend** du temps t.
  - L'aire A d'un cercle **dépend** du rayon r de ce dernier.
  - Le coût d'affranchissement d'une lettre **dépend** de son poids p.

Quelques définitions

- Une fonction f est une **règle** qui attribue à tout élément, noté conventionnellement x, d'un ensemble D un élément et un seul, noté $f(x)$, d'un ensemble E.
- D est appelé **domaine** de la fonction f, noté $Dom(f)$.
- $f(a)$ est la **valeur** de la fonction en a.
- L'**image** de la fonction est l'ensemble des valeurs $f(x)$ lorsque x prend les différentes valeurs de son domaine. Il est noté $Im(f)$.
- Le **graphe** d'une fonction est l'ensemble des paires $\{(x, f(x)) | x \in D\}$.
- Une fonction $f(x)$ est **croissante** sur un intervalle I si $f(x_1) < f(x_2)$ lorsque $x_1 < x_2$ (x_1 et x_2 appartiennent à I)
- Une fonction $f(x)$ est **décroissante** sur un intervalle I si $f(x_1) > f(x_2)$ lorsque $x_1 < x_2$ (x_1 et x_2 appartiennent à I)

Représentation graphique d'une fonction



- Représentation graphique d'une fonction f dans le plan :
- chaque paire $(x, f(x))$ est représenté par le point de coordonnées (x, y) où $y = f(x)$.

Différentes manières de représenter une fonction

- verbalement, à l'aide d'une ou plusieurs phrases,
- **algébriquement**, à l'aide d'une formule.
- **numériquement**, à l'aide d'une table,
- visuellement, à l'aide d'un graphe,

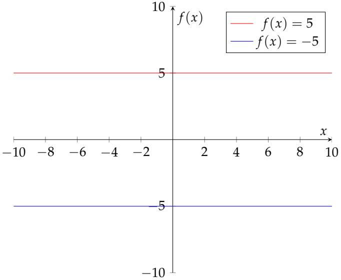
Fonctions élémentaires

- Il existe plusieurs types de fonctions permettant de modéliser des relations entre grandeurs observées dans le monde réel.
- Quelques unes, utiles dans le cadre de ce cours :

fonction	forme générale	exemple
constante	$f(x) = a$	$f(x) = 3$
linéaire	$f(x) = ax$	$f(x) = 7.5x$
puissance	$f(x) = x^a$	$f(x) = x^{12}$
exponentielle	$f(x) = a^x$	$f(x) = 4^x$
logarithme	$f(x) = \log_a(x)$	$f(x) = \log_{10}(x)$

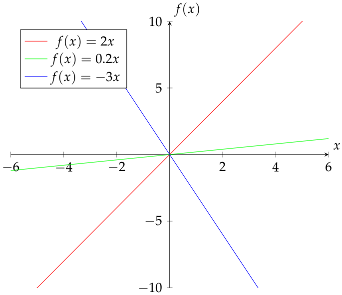
- a est appelé **paramètre** de la fonctions.
- Ce n'est pas une variable !
- On note parfois $f(x; a)$ pour indiquer que x est la variable et a un paramètre.

Fonction constante $f(x) = a$



- Le graphe de la fonction est une droite parallèle à l'axe des x
- $Dom(f) = \mathbb{R}$

Fonction linéaire $f(x) = ax$



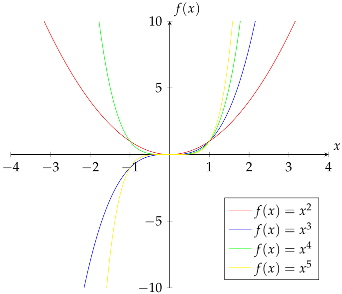
- Le graphe de la fonction est une droite
- $Dom(f) = \mathbb{R}$
- Le paramètre a est appelé **pente** de la droite
- Toutes les droites passent par le point origine $(0, 0)$

Fonction puissance $f(x) = x^a$

Deux cas :

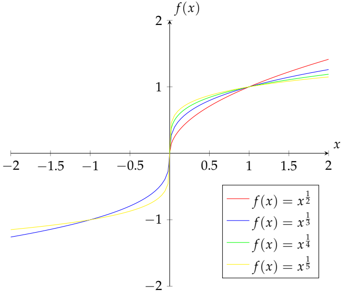
- x^n où n est entier positif
- $x^{\frac{1}{n}}$ où n est un entier positif
  - fonctions *racine*
  - $x^{\frac{1}{2}}$ est la fonction racine carrée, aussi notée $\sqrt{x}$
  - $x^{\frac{1}{3}}$ est la fonction racine cubique, aussi notée $\sqrt[3]{x}$

Fonction puissance $f(x) = x^n$



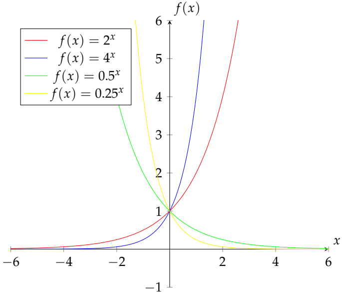
- $Dom(f) = \mathbb{R}$
- $Im(f) = \begin{cases} \mathbb{R}^+ & si\ n \text{ est pair} \\ \mathbb{R} & si\ n \text{ est impair} \end{cases}$
- Toutes les courbes passent par le point origine $(0, 0)$

Fonction puissance $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$



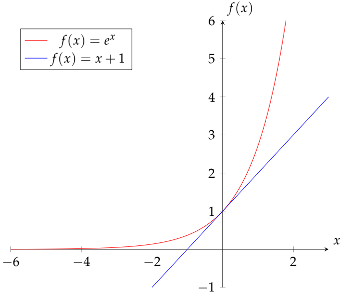
- $Dom(f) = \begin{cases} \mathbb{R}^+ & si\ n \text{ est pair} \\ \mathbb{R} & si\ n \text{ est impair} \end{cases}$
- $Im(f) = \begin{cases} \mathbb{R}^+ & si\ n \text{ est pair} \\ \mathbb{R} & si\ n \text{ est impair} \end{cases}$
- Toutes les courbes passent par le point origine $(0, 0)$

Fonction exponentielle $f(x) = a^x, a > 0$



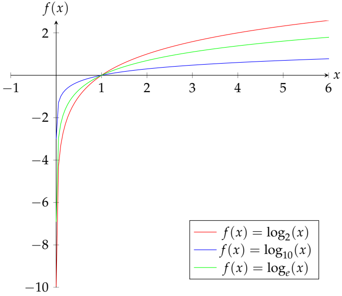
- $Dom(f) = \mathbb{R}$
- $Im(f) = \mathbb{R}^+$
- Si $0 < a < 1$ alors a^x est décroissante.
- Si $a > 1$ alors a^x est croissante.
- Toutes les courbes passent par le point $(0, 1)$

Un cas particulier $f(x) = e^x$



- e est appelé constante d'Euler, constante de Neper ou base du logarithme néperien
- $e \approx 2.71828$
- La pente de la tangente à la courbe au point $(0, 1)$ est égale à 1

Fonction logarithme $f(x) = \log_a(x)$

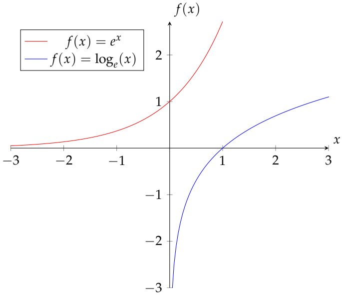


- Inverse de la fonction exponentielle :

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a(x)$$

- $Dom(\log_a(x)) = Im(a^x) = \mathbb{R}^+$
- Toutes les courbes passent par le point $(1, 0)$

Cas particulier $f(x) = \log_e(x)$



- $\log_e(x)$, noté aussi $\ln(x)$ est appelé logarithme néperien ou logarithme natuel

Combinaison de fonctions

Les fonctions élémentaires peuvent être combinées entre elles pour produire de nouvelles fonctions

- Combinaisons arithmétiques
- Composition
- Définition par morceaux

Combinaison arithmétique

fonction	définition	Domaine
$(f+g)(x)$	$f(x)+g(x)$	$Dom(f)\cap Dom(g)$
$(f-g)(x)$	$f(x)-g(x)$	$Dom(f)\cap Dom(g)$
$(f\times g)(x)$	$f(x)\times g(x)$	$Dom(f)\cap Dom(g)$
$(\frac{f}{g})(x)$	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$Dom(f)\cap Dom(g)-\{x\|g(x)=0\}$

Composition

- La fonction $h(x) = \sqrt{(3x+1)}$ ne peut être obtenue en combinant des fonctions élémentaires à l'aide d'opérations arithmétiques
- On peut la voir comme la **composition** de deux fonctions :
  - $g(x) = 3x + 1$
  - $f(x) = \sqrt{x}$
- On peut alors écrire :
  - $h(x) = f(g(x))$
  - ou bien $h(x) = f \circ g(x)$
- Il est parfois commode de passer par une variable intermédiaire :
  - $h(u) = \sqrt{u}$
  - $u = 3x + 1$
- $Dom(h) = \{x \in Dom(g) | g(x) \in Dom(f)\}$

Définition par morceaux

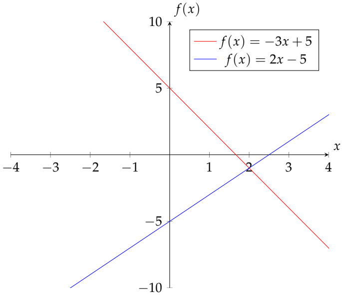
Une fonction est définie par morceaux si elle prend des formes différentes selon les valeurs que prend sa variable

- $f(x) = \begin{cases} g(x) & si\ x < 0 \\ h(x) & si\ x \geq 0 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} g(x) & si\ x \neq 0 \\ h(x) & si\ x = 0 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} g(x) & si\ x < 0 \\ h(x) & si\ x = 0 \\ i(x) & si\ x > 0 \end{cases}$

Quelques fonctions complexes

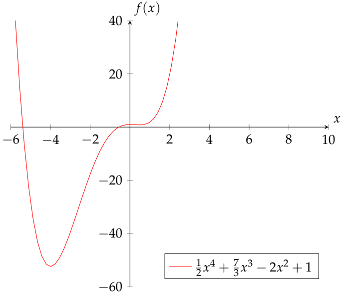
- fonctions affines
- fonctions polynômiales
- fonction sigmoïde
- tangente hyperbolique
- fonction de Heaviside
- Rectified Linear Unit

Fonction affine $f(x) = ax + b$



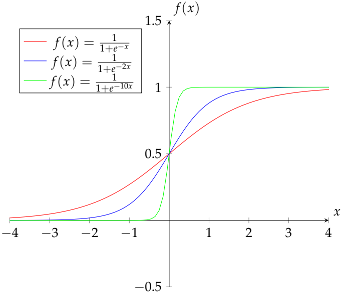
- deux paramètres : a et b
  - a est appelé **pente** de la droite
  - b est appelé **ordonnée à l'origine** de la droite

Fonctions polynômiales



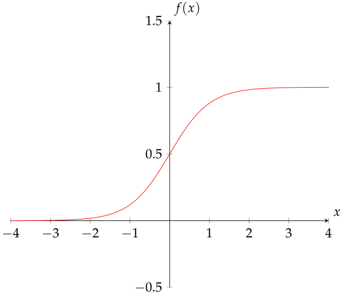
- Forme générale : $f(x) = \Sigma_{i=0}^{n} a_i x^i$
- La plus grande valeur de i pour laquelle $a_i \neq 0$ est appelée l'ordre du polynôme.

Fonction sigmoïde $f(x) = \frac{1}{1+e^{-ax}}$



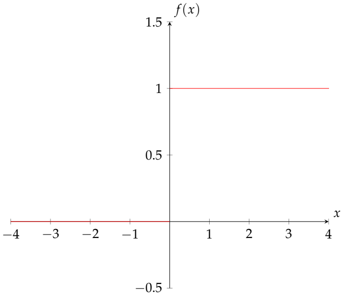
- Aussi appelée fonction écrasante ou *smashing function*
- Elle projette l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ sur l'intervalle $]0, 1[$.

Fonction tangente hyperbolique $\tanh(x) = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$



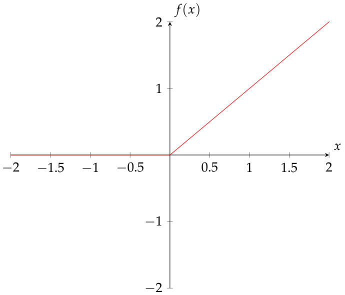
- Autre exemple de *smashing function*
- Elle projette l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ sur l'intervalle $]0, 1[$.

Fonction de Heaviside



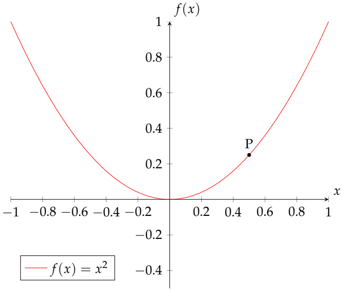
$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 1 & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

Rectified Linear Unit



$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ x & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

Limite d'une fonction



- Au fur et à mesure que x se rapproche de 0.5, $f(x)$ se rapproche de 0.25.
- On peut faire en sorte que $f(x)$ soit aussi proche de 0.25 que l'on souhaite, il existe une valeur de x correspondant.

Limite d'une fonction

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1	1	0	0
0.9	0.81	0.1	0.01
0.8	0.64	0.2	0.04
0.7	0.49	0.3	0.09
0.6	0.36	0.4	0.16
0.55	0.3025	0.45	0.2025
0.51	0.2601	0.49	0.2401
0.501	0.2510	0.499	0.249001

- Il est possible de trouver une valeur de x telle que $f(x)$ soit aussi proche que l'on veut de 0.25

Limite d'une fonction

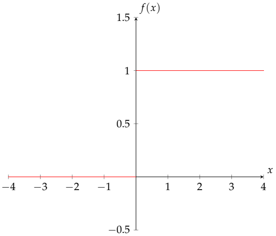
- Soit f une fonction définie sur un intervalle comprenant le nombre a, sans forcément être définie en a.
- On dit que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a vaut L, que l'on note

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

- si pour tout nombre $\varepsilon > 0$, aussi petit que l'on veut, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que :

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \text{ alors } |f(x) - L| < \varepsilon$$

Limite à gauche et limite à droite



- Dans certains cas, on n'obtient pas la même valeur selon que x tend vers a par la droite ou par la gauche.
- Dans le cas de la fonction de Heaviside ($H(x)$)
  - la limite de $H(x)$ lorsque x tend vers 0 par la gauche est 0
  - tandis que la limite de $H(x)$ lorsque x tend vers 0 par la droite est 1
- On note :

$$\lim_{x \to 0^-} H(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \to 0^+} H(x) = 1$$

Limite à gauche et limite à droite

- La limite d'une fonction $f(x)$ en a est égale à L si et seulement si :
  - sa limite à gauche en a est égale à L
  - et sa limite à droite en a est aussi égale à L.

$$\lim_{x \to a} = L \iff \lim_{x \to a^-} = L \text{ et } \lim_{x \to a^+} = L$$

- Si ce n'est pas le cas, on dit que la limite de $f(x)$ en a n'est pas définie (ou n'existe pas).

Continuité

- La limite d'une fonction f lorsque x tend vers a peut souvent être trouvée tout simplement en calculant $f(a)$!
- Les fonctions ayant cette propriété sont dites **continues** en a.
- Une fonction f est continue en a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

- Cela suppose que $f(a)$ existe et que $\lim_{x \to a} f(x)$ existe aussi.
- Une fonction est continue sur un intervalle si elle est continue pour tous les nombres de cet intervalle.
- La fonction de Heaviside n'est pas continue en 0.

Sources

- Stewart, James. Essential calculus : Early transcendentals. Cengage Learning, 8ème édition, 2012