

Logique des propositions

.

La logique des propositions est un langage formel constitué d'une syntaxe et d'une sémantique.

- La syntaxe décrit l'ensemble des formules qui appartiennent au langage.
- La sémantique permet de donner un sens aux formules du langage.

Logique des propositions - syntaxe

.

Le vocabulaire de la logique des propositions est constitué :

- d'atomes, ou propositions que l'on désignera par les lettres minuscules de l'alphabet a, b, c, d, \dots, z
- de connecteurs logiques ($\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$),
- de parenthèses

Logique des propositions - syntaxe

.

Les règles de formation des formules de la logique des propositions sont :

- Tout atome est une formule
- si E_1 et E_2 sont des formules alors
 - $\neg E_1$ est une formule
 - $E_1 \vee E_2$ est une formule
 - $E_1 \wedge E_2$ est une formule
 - $E_1 \rightarrow E_2$ est une formule
 - $E_1 \leftrightarrow E_2$ est une formule
- si E est une formule alors (E) est une formule.
- rien d'autre n'est une formule.

Logique des propositions - syntaxe

.

On définit un ordre de précedence entre les connecteurs :

$$\neg > \wedge > \vee > \rightarrow > \leftrightarrow$$

Exemples de formules :

a

$a \vee b$

$$\neg a \vee b \equiv (\neg a) \vee b$$

$$a \vee b \wedge c \equiv a \vee (b \wedge c)$$

$$a \vee b \rightarrow c \wedge d \equiv (a \vee b) \rightarrow (c \wedge d)$$

Logique des propositions - syntaxe

.

• L'ensemble des formules peut être généré à l'aide de la grammaire hors-contexte $G = \langle \Sigma, \{F\}, P, F \rangle$ où :

• $\Sigma = \{a, b, \dots, z, (,), \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

• $P = \left\{ \begin{array}{l} F \rightarrow a|b|\dots|z \\ F \rightarrow \neg F \\ F \rightarrow F \vee F \\ F \rightarrow F \wedge F \\ F \rightarrow F' \rightarrow' F \\ F \rightarrow F \leftrightarrow F \\ F \rightarrow (F) \end{array} \right.$

Logique des propositions - syntaxe

.

Le même langage peut être généré par la grammaire non ambiguë $G' = \langle \Sigma, \{F, G, H, I, J, K\}, P, F \rangle$ où :

- $\Sigma = \{a, b, \dots, z, (,), \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

- $P = \left\{ \begin{array}{l|l} F \rightarrow F \leftrightarrow G & G \\ G \rightarrow G' \rightarrow' H & H \\ H \rightarrow H \vee I & I \\ I \rightarrow I \wedge J & J \\ J \rightarrow \neg J & K \\ K \rightarrow (F) & \\ K \rightarrow a|b|\dots|z & \end{array} \right.$

Logique des propositions - syntaxe

.

G et G' sont faiblement équivalentes :

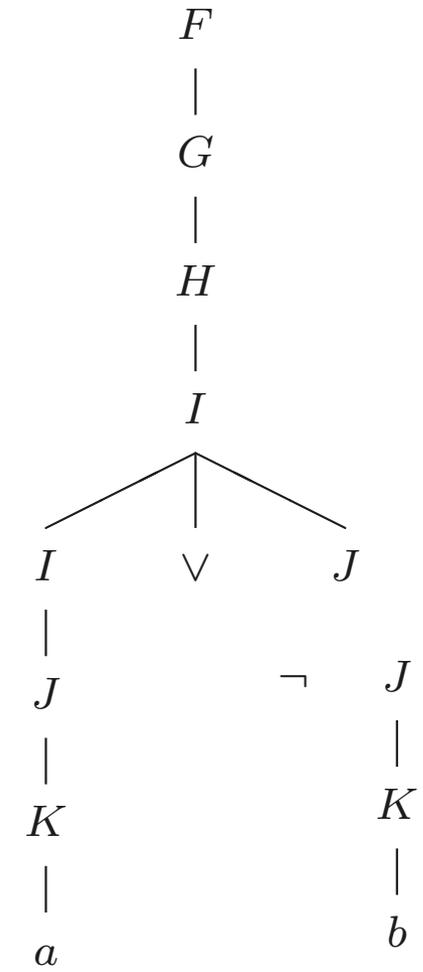
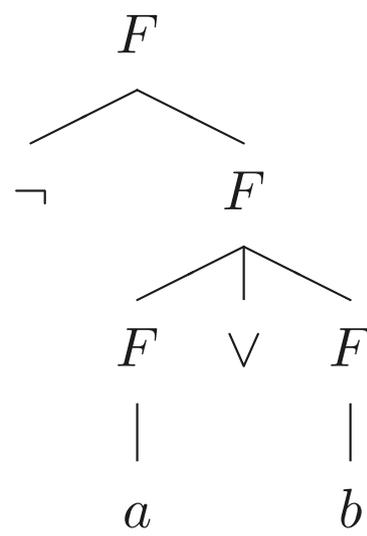
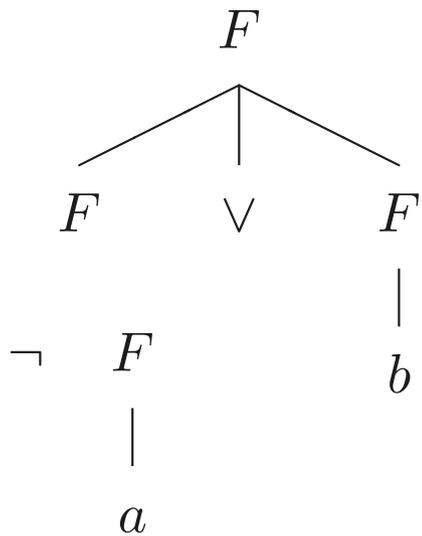
- Elles reconnaissent le même langage.
- Mais peuvent associer des arbres différents à un même mot.

Logique des propositions - syntaxe

.

G

G'



Logique des propositions - sémantique

.

La sémantique consiste à donner un sens aux différents éléments du langage :

- on donne à chaque atome une **valeur de vérité** :
vrai (v) ou faux (f)
- on associe à chaque connecteur une **table de vérité**.

La valeur d'une formule peut être calculée à partir des valeurs de vérité des atomes, grâce aux tables de vérité des connecteurs.

Logique des propositions

.

- La table de vérité d'un connecteur unaire \circ_1 permet de calculer la valeur de $\circ_1 F$ étant donné la valeur de F .
- La table de vérité d'un connecteur binaire \circ_2 permet de calculer la valeur de $F_1 \circ_2 F_2$ étant donné les valeurs de F_1 et F_2 .

| F_1 | F_2 | $F_1 \vee F_2$ | $F_1 \wedge F_2$ | $\neg F_1$ | $F_1 \rightarrow F_2$ | $F_1 \leftrightarrow F_2$ |
|-------|-------|----------------|------------------|------------|-----------------------|---------------------------|
| v | v | v | v | f | v | v |
| v | f | v | f | f | f | f |
| f | v | v | f | v | v | f |
| f | f | f | f | v | v | v |

Logique des propositions - sémantique

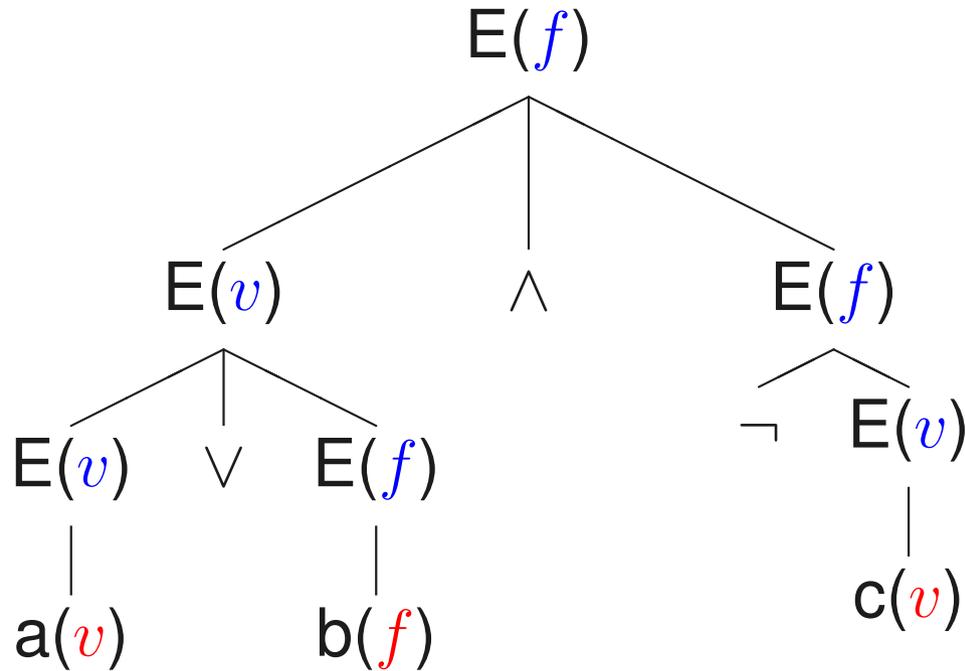
.

- Les tables de vérité des connecteurs sont toujours les mêmes.
- Les valeurs de atomes peuvent changer, elles sont déterminées par une **fonction d'évaluation**.
- On appelle fonction d'évaluation d'un ensemble d'atomes A , une fonction V de A dans $\{v, f\}$.
- Pour **évaluer** une formule F , il faut définir une fonction d'évaluation des atomes qui figurent dans F .
- On dit que V **satisfait** F si l'évaluation de F étant donné V est égale à v .

Logique des propositions

.

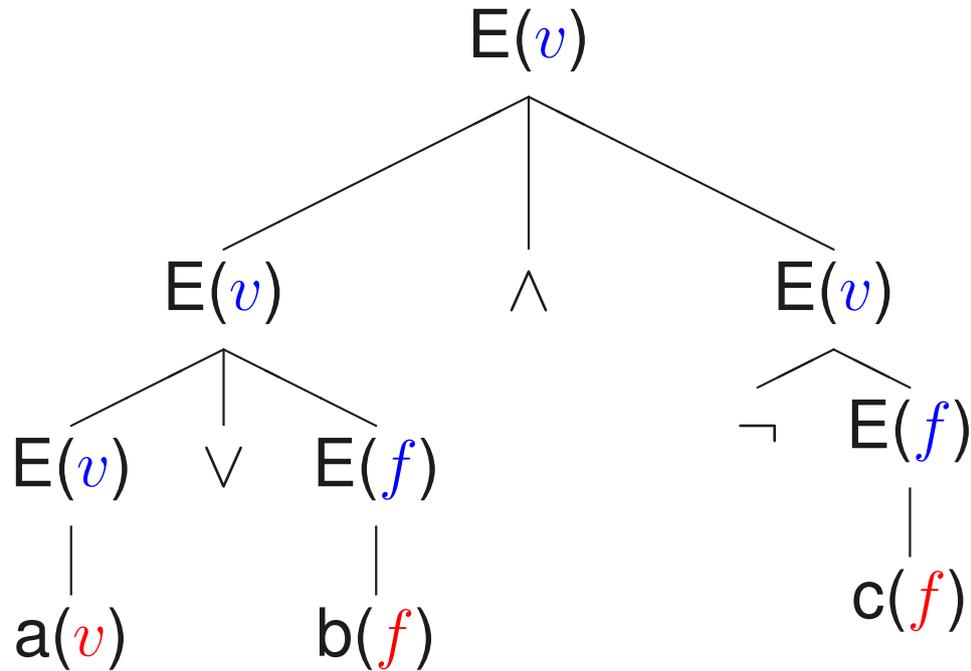
• $V = \{(a, v), (b, f), (c, v)\}$ ne satisfait pas $a \vee b \wedge \neg c$



Logique des propositions

.

$V = \{(a, v), (b, f), (c, f)\}$ satisfait $a \vee b \wedge \neg c$



Logique des prédicats

.

En logique des prédicats, les éléments de base du langage ne sont plus des propositions mais des prédicats.

la mer est bleue
sujet prédicat

Un prédicat peut être vu comme une **fonction propositionnelle** $bleu(x)$ qui prend la valeur v lorsque x est *la mer* et f lorsque x est *le soleil*.

Le prédicat *aimer* prend deux arguments : l'être aimant et l'être ou la chose aimée.

On appelle **arité** d'un prédicat, le nombre d'argument qu'il requiert.

Logique des prédicats

.

Le vocabulaire de la logique des prédicats est constitué de cinq classes de symboles :

- les constantes ($a, b, c, d \dots$)
- les variables ($w, x, y \dots$)
- les symboles de prédicats d'arité positive ou nulle ($A, B \dots$)
- les connecteurs logiques
- les quantificateurs (\forall, \exists)
 - \forall est appelé le quantificateur **universel**
 - \exists est appelé le quantificateur **existential**

Logique des prédicats

.

• Un terme est :

- une variable
- ou une constante

• Si $t_1 \dots t_n$ sont des termes et si A est un prédicat d'arité n , alors $A(t_1, \dots, t_n)$ est un **atome** ou formule atomique.

Logique des prédicats

.

une **formule** est définie récursivement :

- tout atome est une formule
- si φ et ψ sont des formules, alors : $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi$ sont des formules.
- si φ est une formule alors $\neg\varphi$ est un formule.
- si φ est une formule et si x est une variable, alors $\forall x\varphi$ et $\exists x\varphi$ sont des formules. φ est appelé la **portée** du quantificateur $\forall x$ et $\exists x$.
- toute formule est obtenue par l'application des règles précédentes un nombre fini de fois.

Logique des prédicats - syntaxe

.

On définit un ordre de précedence entre les connecteurs :

$$\forall, \exists > \neg > \wedge > \vee > \rightarrow > \leftrightarrow$$

Exemples de formules :

$$\forall x A(x) \equiv \forall x (A(x))$$

$$\forall x \exists y B(y) \vee H(a) \equiv \forall x (\exists y (B(y))) \vee H(a)$$

$$\neg \forall x H(x) \rightarrow P(x) \equiv \neg (\forall x (H(x))) \rightarrow P(x)$$

Logique des prédicats

.

• Dans la formule $\forall x J(x, y)$, x est dans la portée du quantificateur universel. Elle est dite **liée**, la variable y est **libre**.

• L'ensemble des variables liées d'une formule φ (noté $\mathcal{B}(\varphi)$) se définit de la façon suivante :

- si φ est un atome, $\mathcal{B}(\varphi) = \emptyset$
- si φ est de la forme $\chi \vee \psi$, $\chi \wedge \psi$, $\chi \rightarrow \psi$, $\chi \leftrightarrow \psi$ alors $\mathcal{B}(\varphi) = \mathcal{B}(\chi) \cup \mathcal{B}(\psi)$.
- si φ est de la forme $\neg\psi$ alors $\mathcal{B}(\varphi) = \mathcal{B}(\psi)$
- si φ est de la forme $\forall x\psi$ ou $\exists x\psi$ alors $\mathcal{B}(\varphi) = \{x\} \cup \mathcal{B}(\psi)$

Logique des prédicats

.

• L'ensemble des variables libres d'une formule φ (noté $\mathcal{F}(\varphi)$) se définit de la façon suivante :

- si φ est un atome, $\mathcal{F}(\varphi)$ est égal à l'ensemble des variables apparaissant dans φ
- si φ est de la forme $\chi \vee \psi$, $\chi \wedge \psi$, $\chi \rightarrow \psi$, $\chi \leftrightarrow \psi$ alors $\mathcal{F}(\varphi) = \mathcal{F}(\chi) \cup \mathcal{F}(\psi)$.
- si φ est de la forme $\neg\psi$ alors $\mathcal{F}(\varphi) = \mathcal{F}(\psi)$
- si φ est de la forme $\forall x\psi$ ou $\exists x\psi$ alors $\mathcal{F}(\varphi) = \mathcal{F}(\psi) - \{x\}$

• Une formule φ telle que $\mathcal{F}(\varphi) = \emptyset$ est dite **close** ou **fermée**.

Domaine de discours, interprétation, modèle

.

- Pour évaluer la formule $\forall x H(x)$ il faut connaître l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable x .
- Cet ensemble est appelé le **domaine de discours**, noté \mathcal{D}
- L'évaluation d'une formule φ nécessite la spécification d'un domaine de discours \mathcal{D} et d'une **fonction d'interprétation** I qui associe :
 - à chaque symbole de constante un élément de \mathcal{D}
 - à chaque symbole de prédicat P d'arité n , la définition d'une fonction de $\mathcal{D}^n \rightarrow \{v, f\}$ définissant P .
- Un domaine de discours et une fonction d'interprétation constituent un **modèle**.

Assignment

.

- Pour évaluer une formule comportant des variables, il est nécessaire de donner à ces dernières des valeurs dans \mathcal{D} .
- On appelle **assignment**, une fonction qui associe à toute variable une valeur dans \mathcal{D} .
- Etant donné l'assignment g , on note $g[y \leftarrow d]$ l'assignment g' qui associe la valeur d à la variable y et associe les mêmes valeurs que g à toutes les autres variables.

Evaluation d'une formule

.

L'évaluation d'une formule nécessite la spécification de :

- Un modèle M
- Une fonction d'assignation g

Interprétation de termes

.

Si t est un terme, on définit la fonction d'interprétation, étant donné un modèle $M = \langle \mathcal{D}, I \rangle$ et une assignation g , de la manière suivante :

$$[[t]]_{\langle M, g \rangle} = \begin{cases} I(t) & \text{si } t \text{ est une constante} \\ g(t) & \text{si } t \text{ est une variable} \end{cases}$$

Evaluation

.

- $V_{\langle M, g \rangle}(P(t_1, \dots, t_n)) = v$ **ssi**
 $\langle [[t_1]]_{\langle M, g \rangle}, \dots, [[t_n]]_{\langle M, g \rangle} \rangle \in [[P]]_{\langle M, g \rangle}$
- $V_{\langle M, g \rangle}(\neg\varphi) = v$ **ssi** $V_{\langle M, g \rangle}(\varphi) = f$
- $V_{\langle M, g \rangle}(\varphi \vee \psi) = v$ **ssi** $V_{\langle M, g \rangle}(\varphi) = v$ **ou** $V_{\langle M, g \rangle}(\psi) = v$
- $V_{\langle M, g \rangle}(\varphi \wedge \psi) = v$ **ssi** $V_{\langle M, g \rangle}(\varphi) = v$ **et** $V_{\langle M, g \rangle}(\psi) = v$
- $V_{\langle M, g \rangle}(\varphi \rightarrow \psi) = v$ **ssi** $V_{\langle M, g \rangle}(\varphi) = f$ **ou** $V_{\langle M, g \rangle}(\psi) = v$
- $V_{\langle M, g \rangle}(\varphi \leftrightarrow \psi) = v$ **ssi** $V_{\langle M, g \rangle}(\varphi) = V_{\langle M, g \rangle}(\psi)$
- $V_{\langle M, g \rangle}(\forall x\varphi) = v$ **ssi** pour tout $d \in \mathcal{D}$, $V_{\langle M, g[x \leftarrow d] \rangle}(\varphi) = v$
- $V_{\langle M, g \rangle}(\exists x\varphi) = v$ **s'il existe au moins un** $d \in \mathcal{D}$ **tel que**
 $V_{\langle M, g[x \leftarrow d] \rangle}(\varphi) = v$