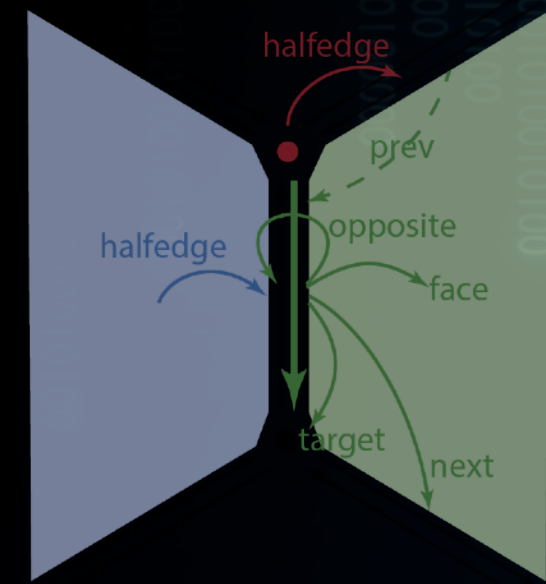


MODELISATION GEOMETRIQUE



Alexandra Bac

POLYTECH 4A INFORMATIQUE **REVA**

5 – MODÉLISATION IMPLICITE

Certaines illustrations sont issues du livre « polygon mesh processing »

« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - MODÉLISATION IMPLICITE

Chapitre 2

MAILLAGES



Chapitre 4

GÉOMÉTRIE DES
SURFACES

Chapitre 1

MODÉLISATION DES
SURFACES

Chapitre 3 (+ 5A)

SURFACES
PARAMÉTRIQUES



Chapitre 5

SURFACES
IMPLICITES

GÉNÉRALITÉS

MODÉLISER UNE SURFACE

Eq. param. sphère

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(\vartheta, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$L, \mathcal{S} = \{ f(\vartheta, \varphi) \dots \} = \text{Im } f$$

MODÈLES EXPLICITES

Accès explicite
aux points

MODÈLES IMPLICITES

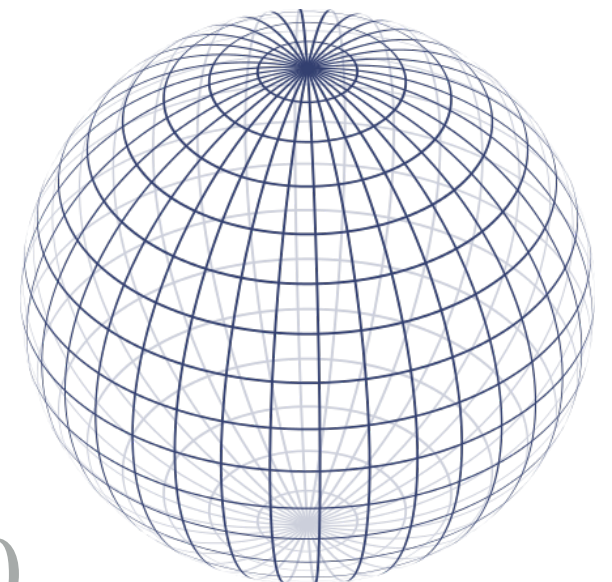
↑
pts : résoudre éq.

MAILLAGES

SURFACES PARAMÉTRIQUES

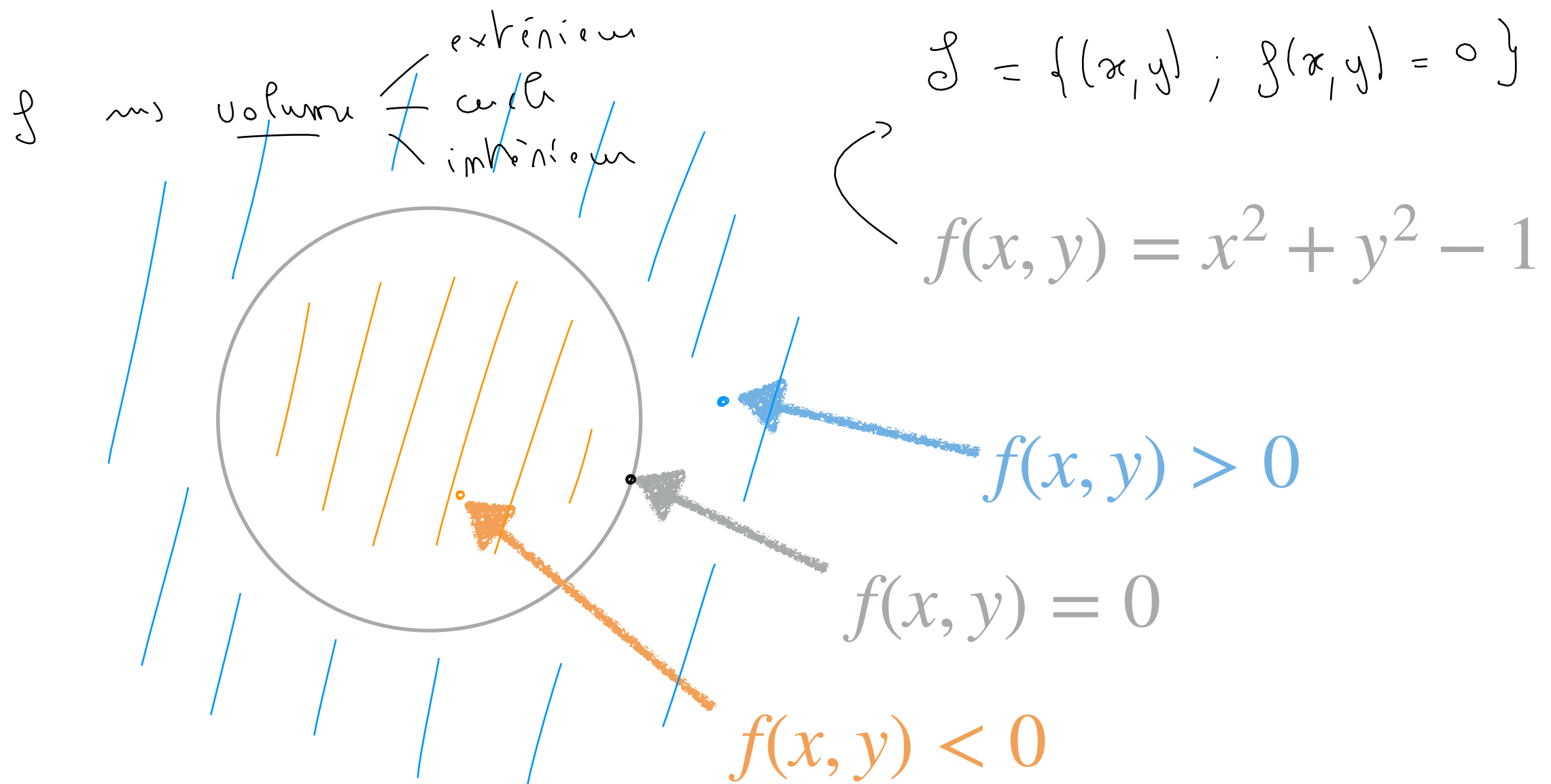
$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \mathcal{S} = \{ x \in \mathbb{R}^3; \\ f(x) = 0 \}$$

$$\overbrace{x^2 + y^2 + z^2}^f - r^2 = 0$$



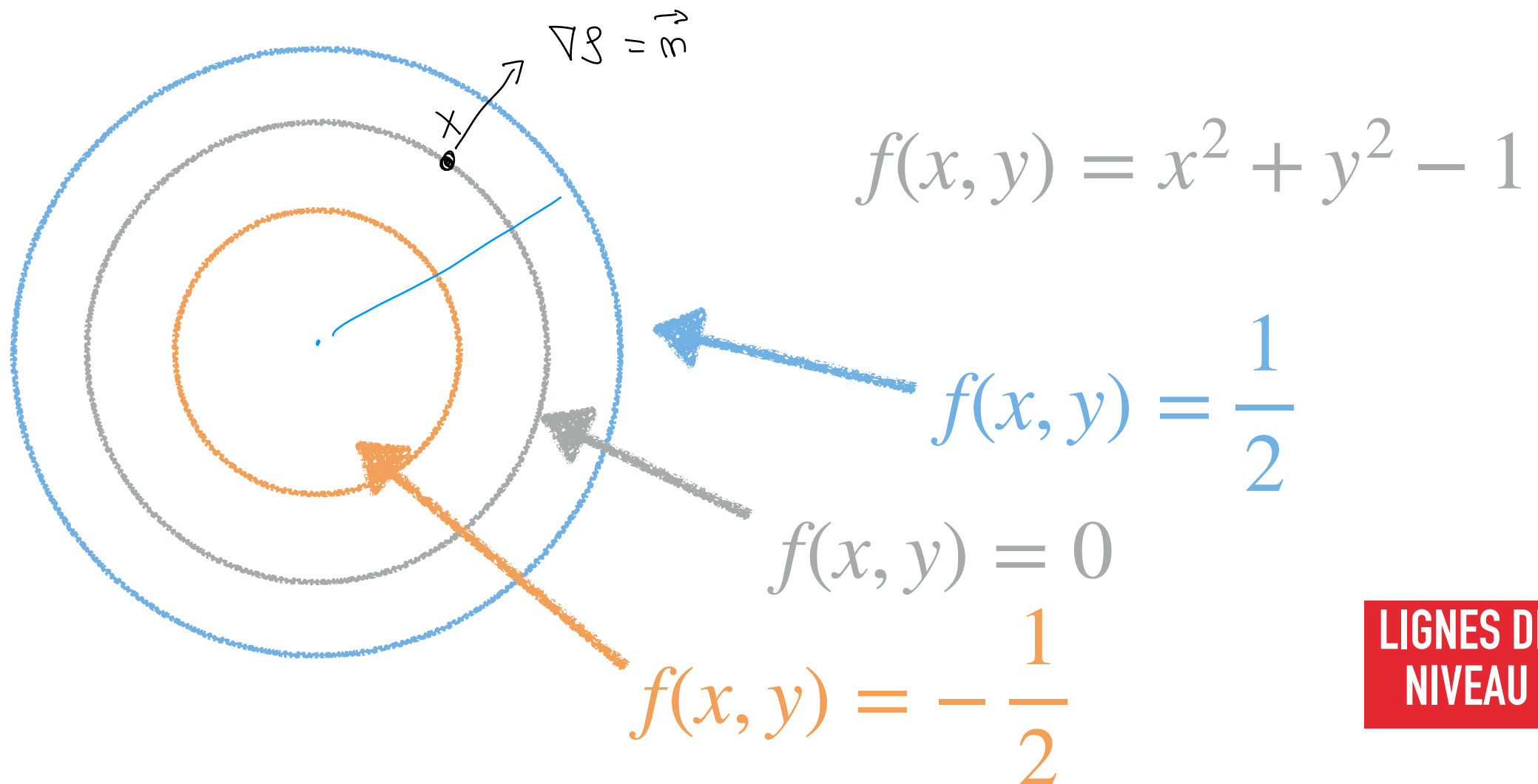
SURFACE IMPLICITE : LIGNE DE NIVEAU 0

Exemple 2D : cercle de centre 0 et rayon $r = 1$



SURFACE IMPLICITE : LIGNE DE NIVEAU 0

Exemple 2D : cercle de centre 0 et rayon r



LIGNES DE
NIVEAU

AVANTAGES / INCONVÉNIENTS

► Pas de problème de paramétrisation

► Surfaces lisses — $f \in C^0, C^1, \dots$

► Gestion du bruit, de l'échantillonnage, occlusions, discontinuités

↳ s'appuyer sur les "maths" de la fonction

► Accès à la géométrie simple (normales, courbures ...)

► Raytracing simple

$$\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$$

param

→ formules propres aux surf. implicites

► Calculs de volumes, d'opérations binaires

approx

x_0, x_1, x_2, x_3

$f(t) \sim$ courbe des pts (passe par proche)

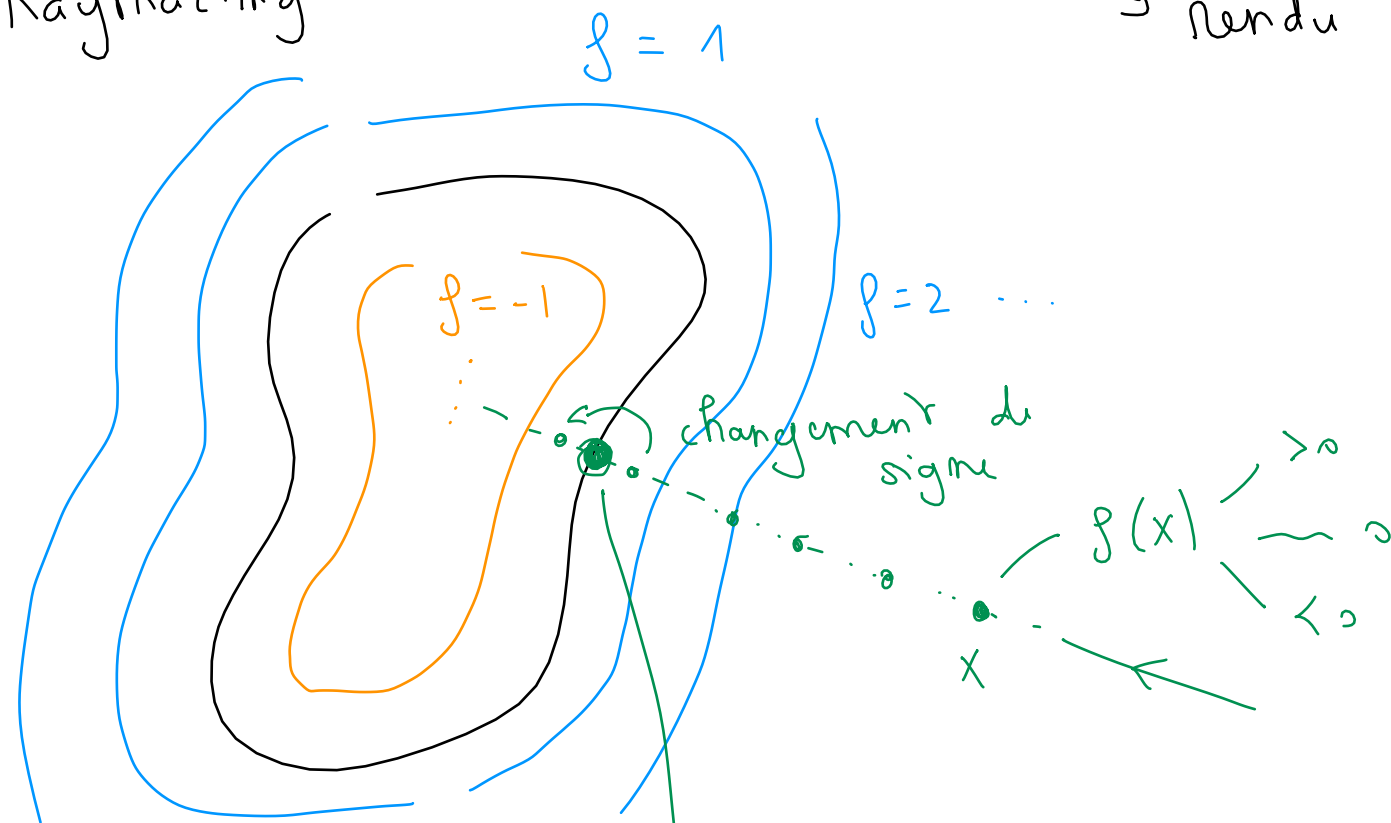
$f(\frac{t_i}{3}) = x_i$ à quel temps?

maillage surf. implicite f

$$\vec{n}_p = \nabla f_p$$

⋮

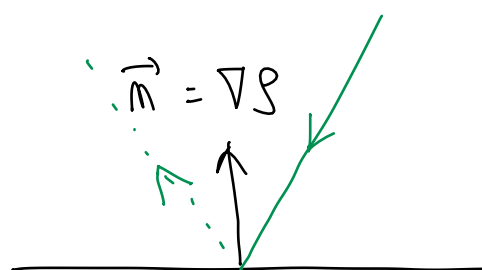
Raytracing $\rightarrow$ rendu 2D image

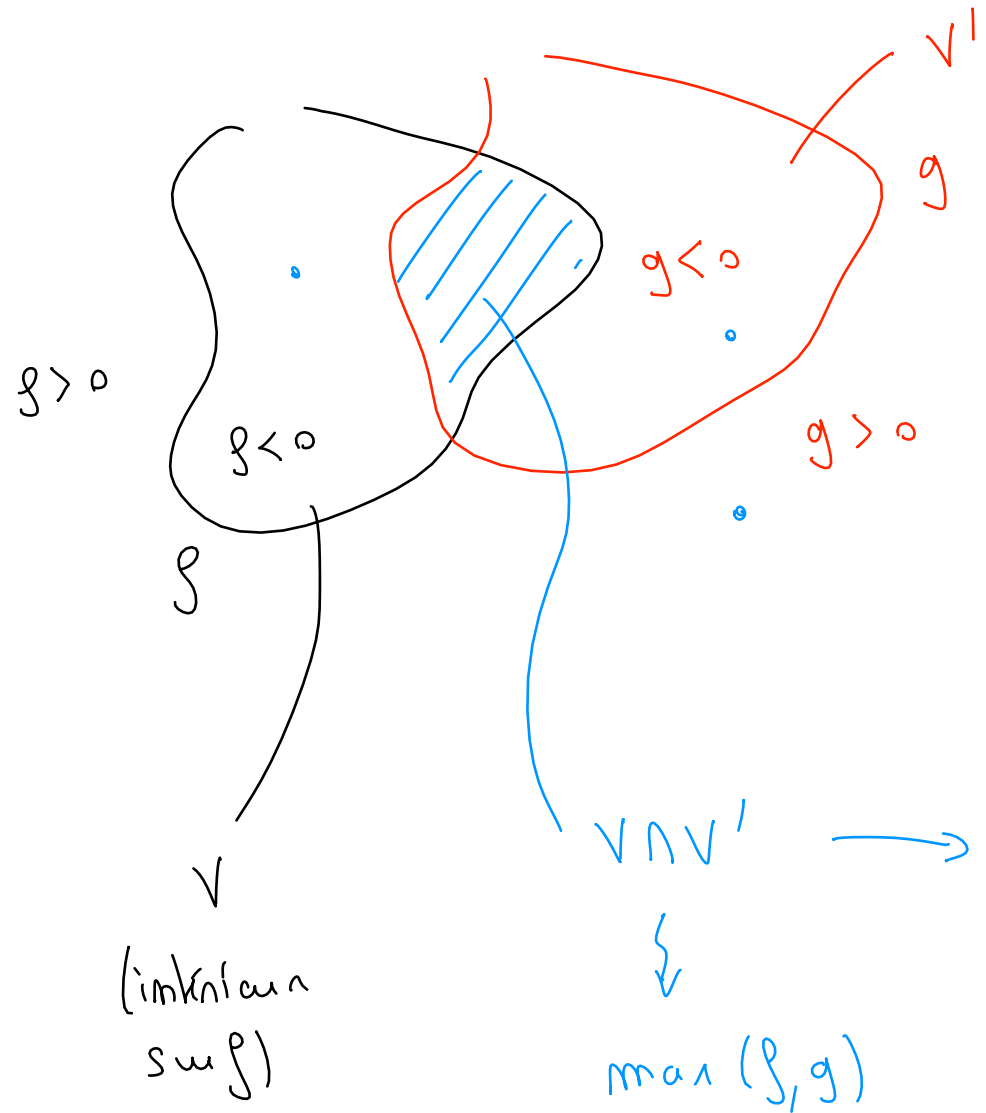


f

pt d'impact

$f(x) = 0$
changement de signe





$$\min(f, g)$$

$$\{ V \cup V' \}$$

$$V \cap V' \rightarrow \text{eq. implicite}$$

$$\downarrow$$

$$\max(f, g)$$

$$\begin{aligned} & f \text{ ou } g > 0 \\ & \updownarrow \\ & \begin{cases} f \text{ et } g > 0 \\ f \text{ ou } g < 0 \end{cases} \\ & \text{à l'ext} - \\ & \text{à l'intérieur} - (f \text{ et } g < 0) \end{aligned}$$

$$\max(f, g)$$

+	-	→	+
-	+	→	+
+	+	→	+
-	-	→	-

AVANTAGES / INCONVÉNIENTS

► Extraction d'un maillage ...

$x \in \mathcal{S}$ p_i $f(x) = 0$ $\xrightarrow{\text{mise à l'échelle}} \text{alge approx}$

► Modèles pas très souples

► Lignes saillantes, cassures, détails pas forcément faciles à modéliser

f $g^0, g^1 \dots$

$\downarrow$

$\max(f, g)$

$\downarrow$

pas g^1

f respectant une forme donnée ...

**COMMENT EN
« FABRIQUER » ?**



Une équation $f(x, y, z)$ c'est vaste ...

TYPES DE SURFACES IMPLICITES

Années 80

SURFACES ALGÈBRIQUES

Equation
algébrique

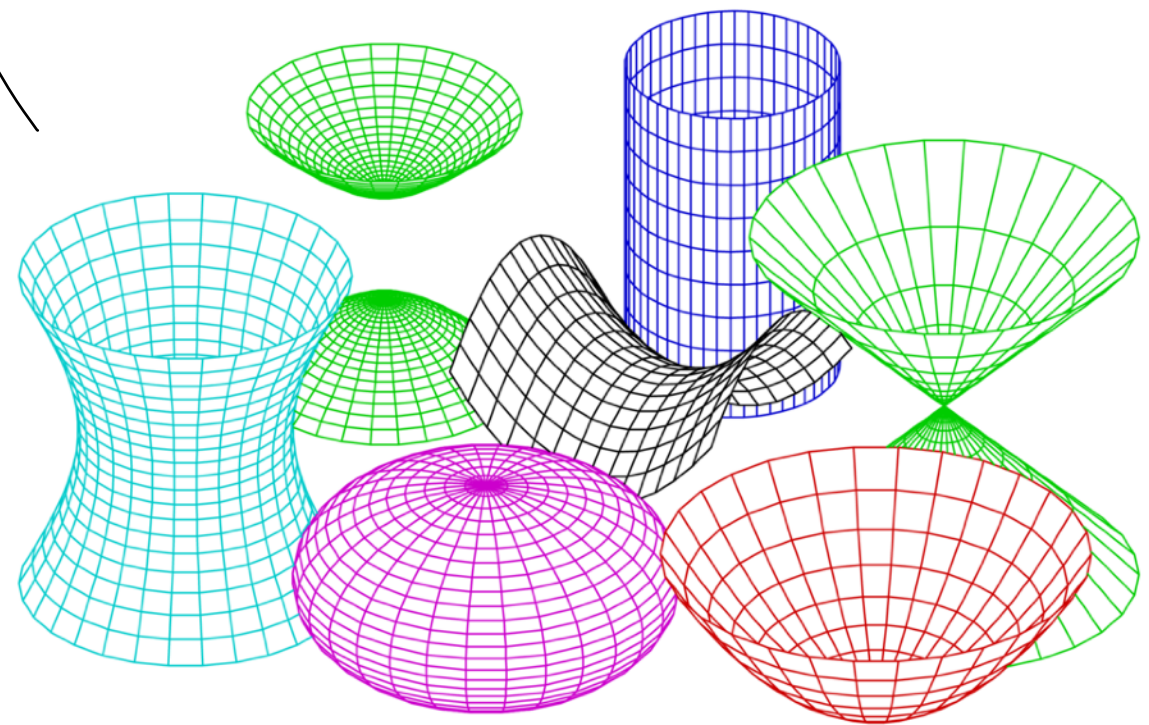
Polynômes

d° 2 en x, y, z

Quadriques

$$a_0 x^2 + a_1 y^2 + a_2 z^2 + a_3 xy + \dots = \text{cte}$$

inter / union ... op. booléennes



formes possibles pour des quadriques

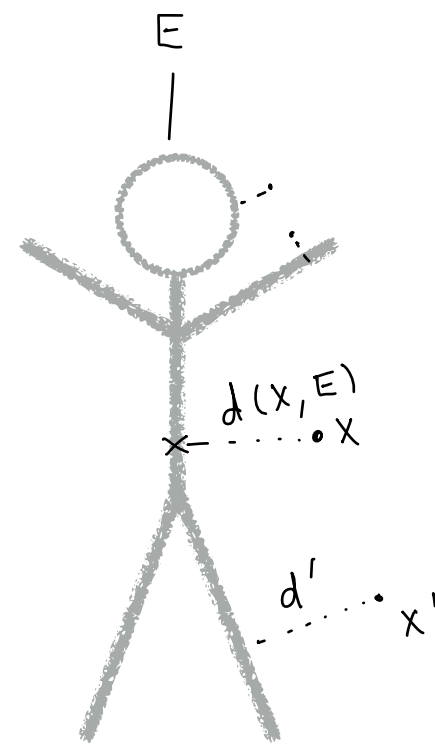
TYPES DE SURFACES IMPLICITES

SURFACES ALGÈBRIQUES

« BLOBBY » SURFACES

Approche 1

Surfaces de
convolution



Squelette

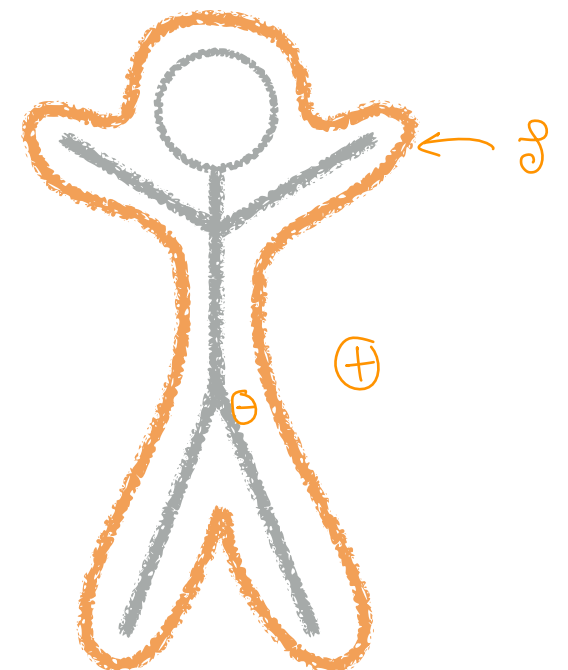
$f(x, y, z)$:
distance au squelette



Epaisseur autour
de ce squelette

$$g(x) = (f(x) - \delta)$$

$$f(x, y, z) = \delta$$



TYPES DE SURFACES IMPLICITES

SURFACES ALGÈBRIQUES

« BLOBBY » SURFACES

BASES DE
FONCTIONS

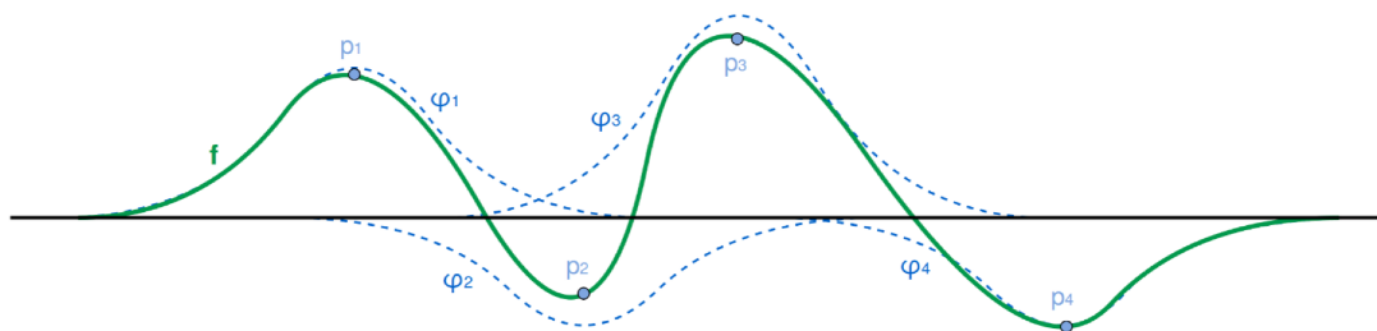
$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

ev. dim ∞

Approche 2

est. fct
dim.
finie

Choix de fonctions
de base ϕ_i



$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(\vec{x})$$

calculer la c.t. α_i /
forme

TYPES DE SURFACES IMPLICITES

SURFACES ALGÈBRIQUES

- CAO (opérations booléennes sur formes simples)
- Très limité ...

« BLOBBY » SURFACES

- Relativement simples
- Manipulées par le squelette
- CAO, animation, particules / fluides
- Ajustement précis difficile

BASES DE FONCTIONS

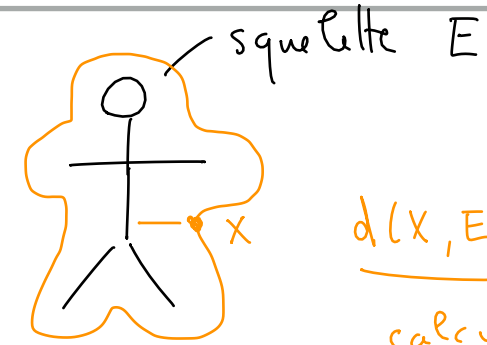
f ~ proche de pts de données

- Beaucoup plus expressives
- Reconstruction, approximation
- Algorithmique plus complexe

*↓
systèmes linéaires / optim*

LES « BLOBBY »
SURFACES

UN EXEMPLE BASIQUE



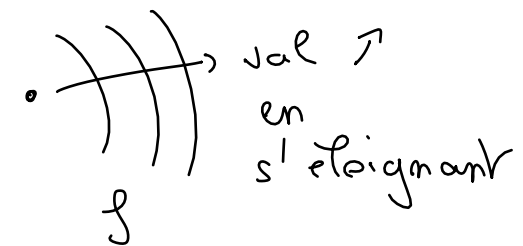
$d(x, E)$
calcul d'une dist) cher...
pt → ens

- Blobs de Blinn : somme de gaussiennes

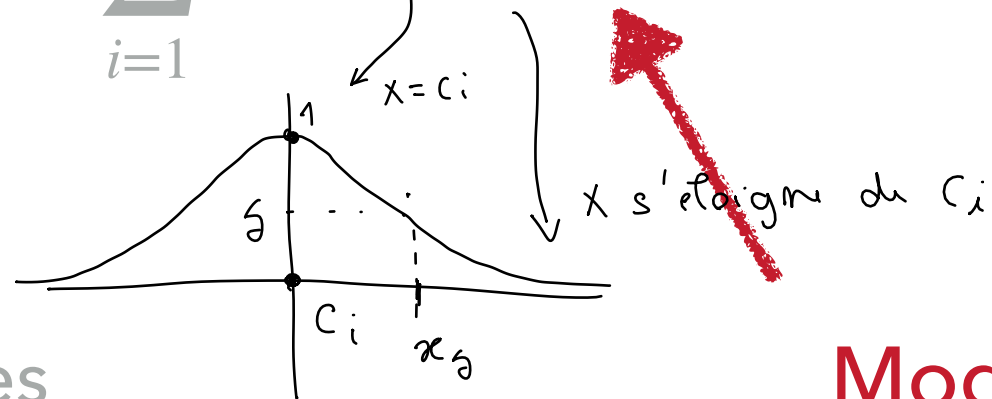
squelette : des pts → C_i

$$f(X) = \sum_{i=1}^n e^{-a_i \|X - C_i\|^2}$$

fonction variant avec la dist.

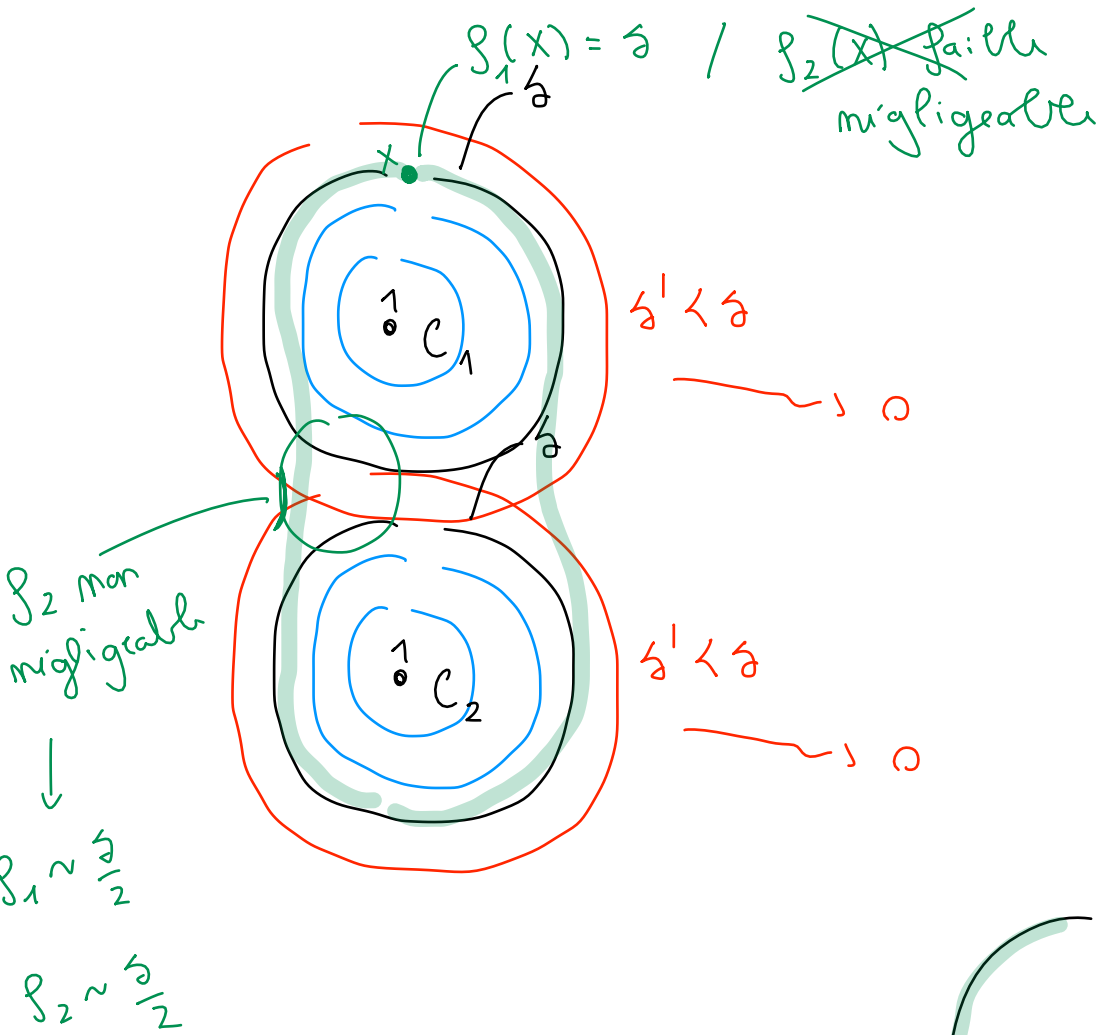


- Exemple :

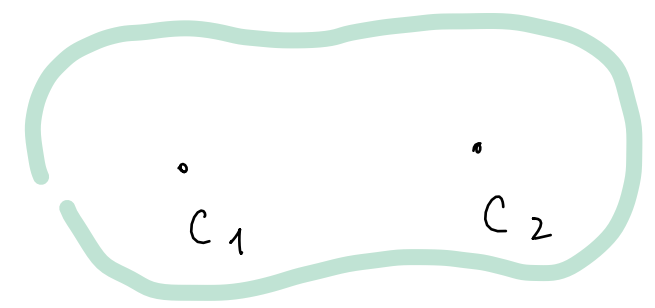
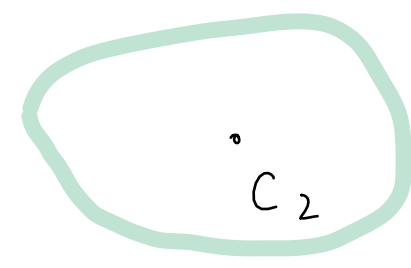
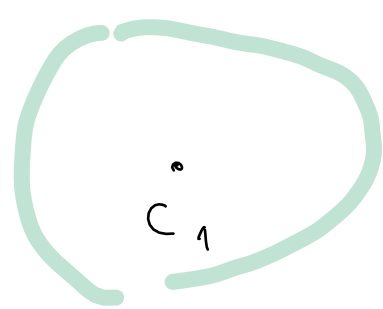
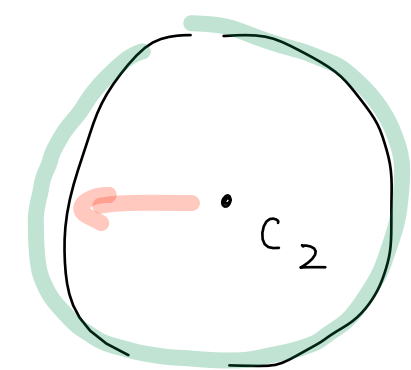
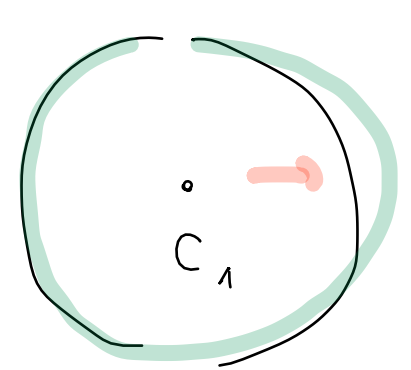


- Trajectoire des centres
- $a_i = 0,7$ / isosurface 0,7

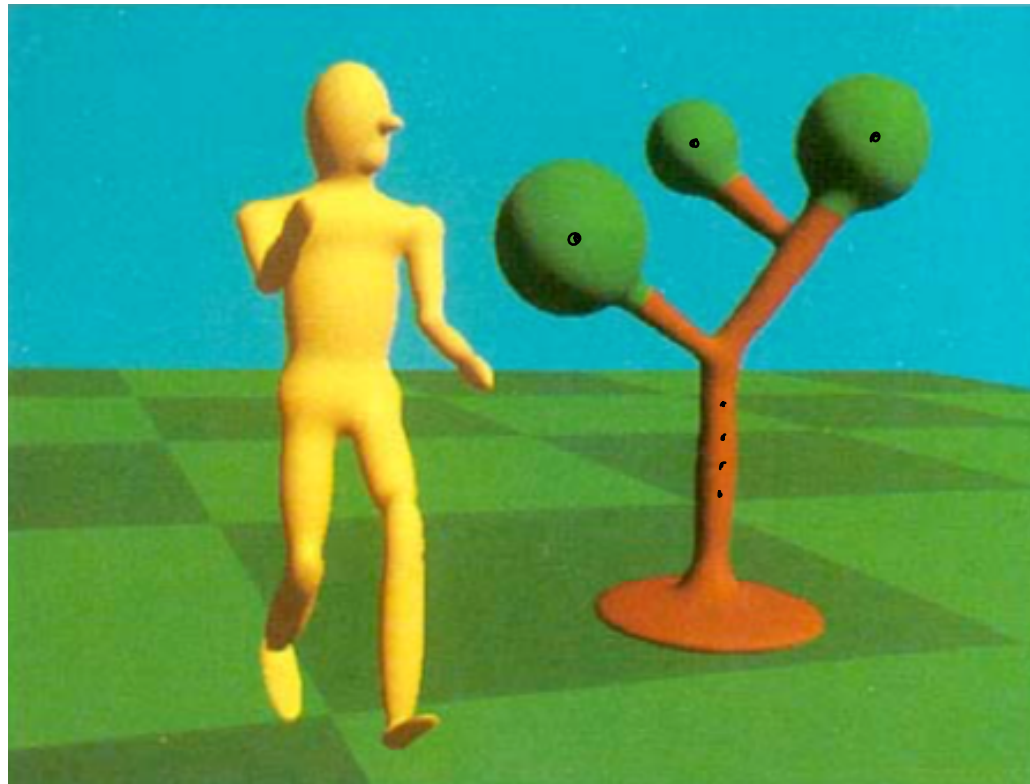
**Modélisation
basée sur des
points (centres)**



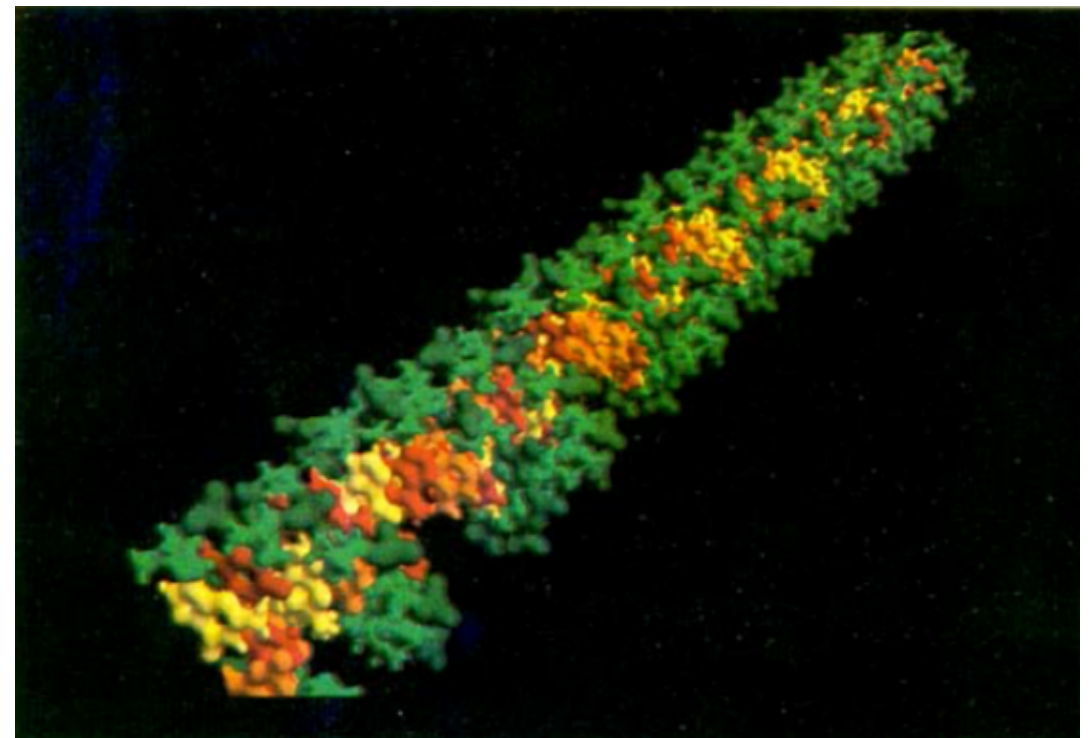
$a_i = 1$
 $f(x) = \frac{e^{-\|x - c_1\|^2}}{f_1} + \frac{e^{-\|x - c_2\|^2}}{f_2}$
 $f(x) = \sigma$



UN EXEMPLE BASIQUE

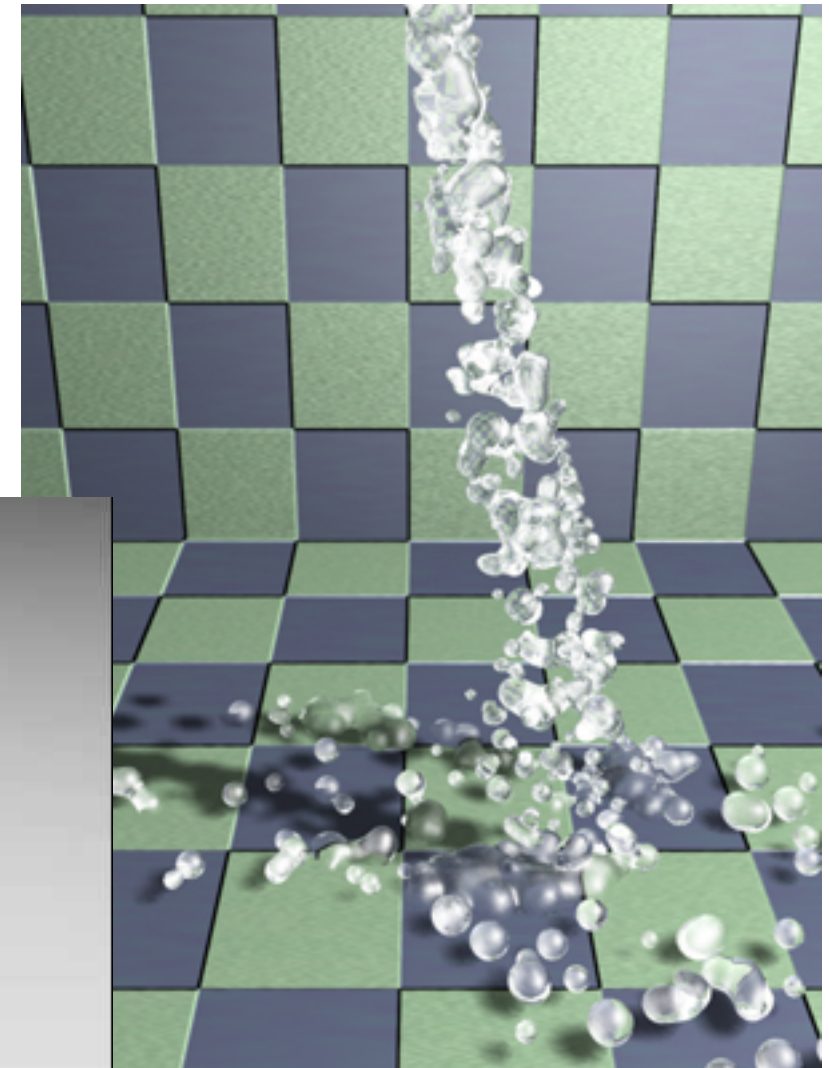


Molecules



ET APRÈS ?

Metaballs de Nishimura



Soft objects

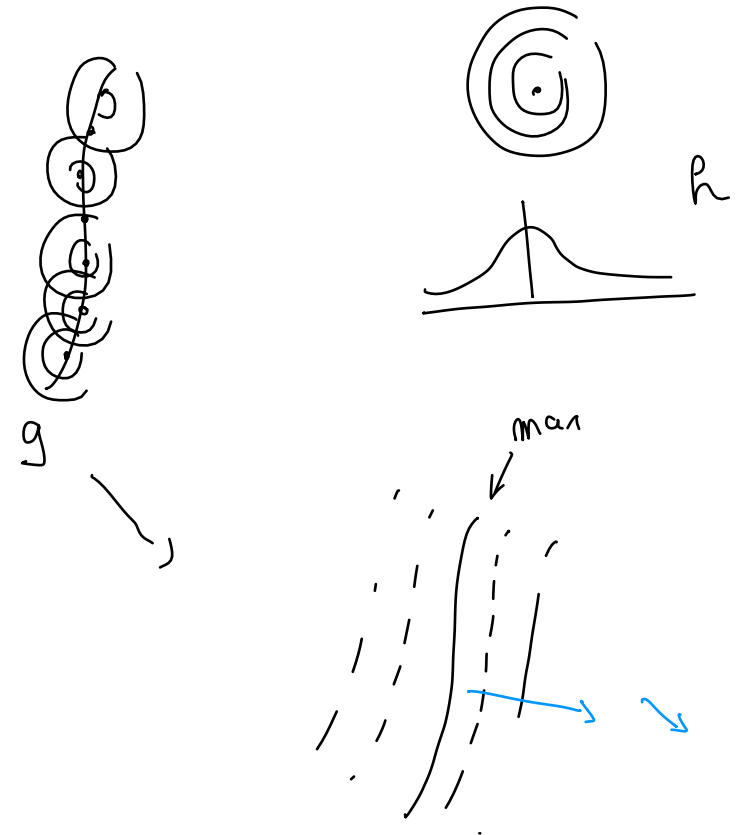
ET APRÈS ??

Surfaces de convolution

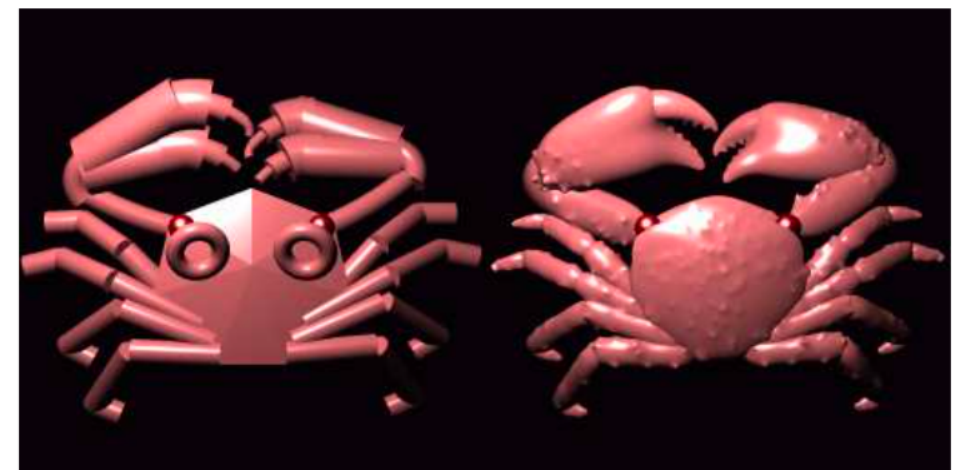
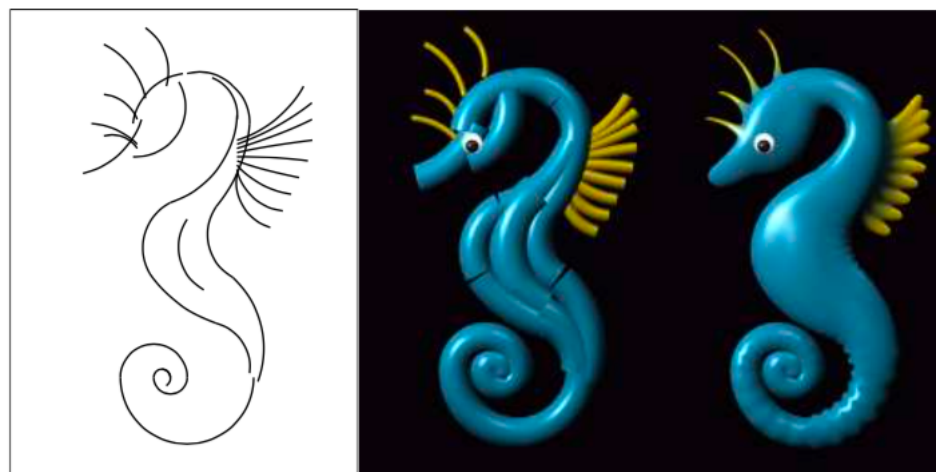
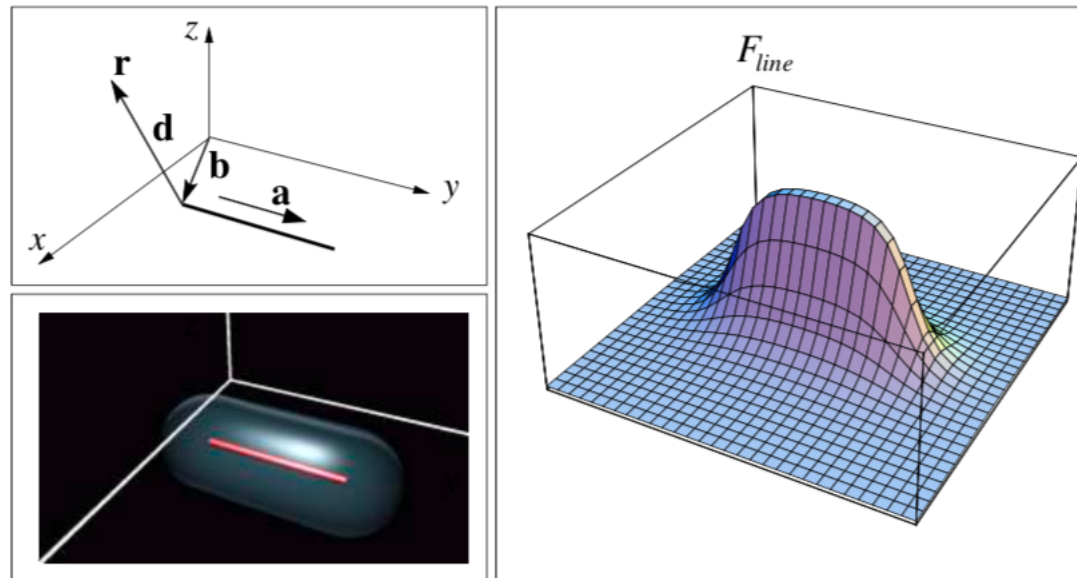
Modélisation
basée sur des squelettes

$$f(\vec{x}) = G(\vec{x}) \star h(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} g(\vec{r}) h(\vec{x} - \vec{r}) d\vec{r}$$

Noyau de convolution $\sim$ gaussienne



ET APRÈS ??



BASES DE FONCTIONS

BASE DE FONCTIONS ?

$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
ev. dim. ∞

Base de fonctions N els : φ
ev dim $N < \infty$

Théorie de l'interpolation

$$g(x) = \sum_i \alpha_i \cdot \varphi_i(x)$$

Fonctions à base radiale (RBF)

$\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

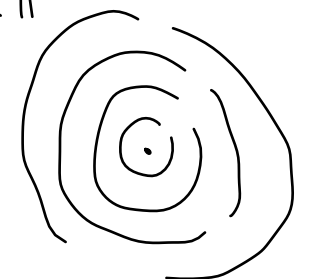
$$\phi(r) \rightarrow \Phi(X) = \phi(\|X\|)$$

Les fonctions ne dépendent
que de $\|x\|$

Choix de points (colocations)

centres

$\{c_i\}_{i=1 \dots n}$ pts de $\mathbb{R}^3$



lignes de
niveau
circulaires

$$f(X) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \phi(\|X - c_i\|) + P_m(X)$$

choix α_i

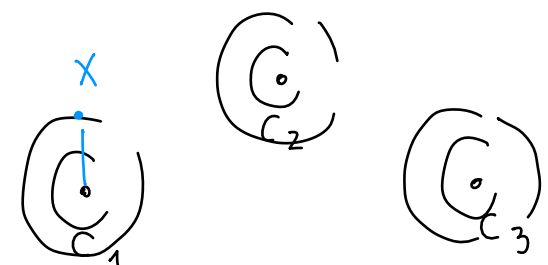
$\varphi_i(x)$

1 fonction φ
base radiale

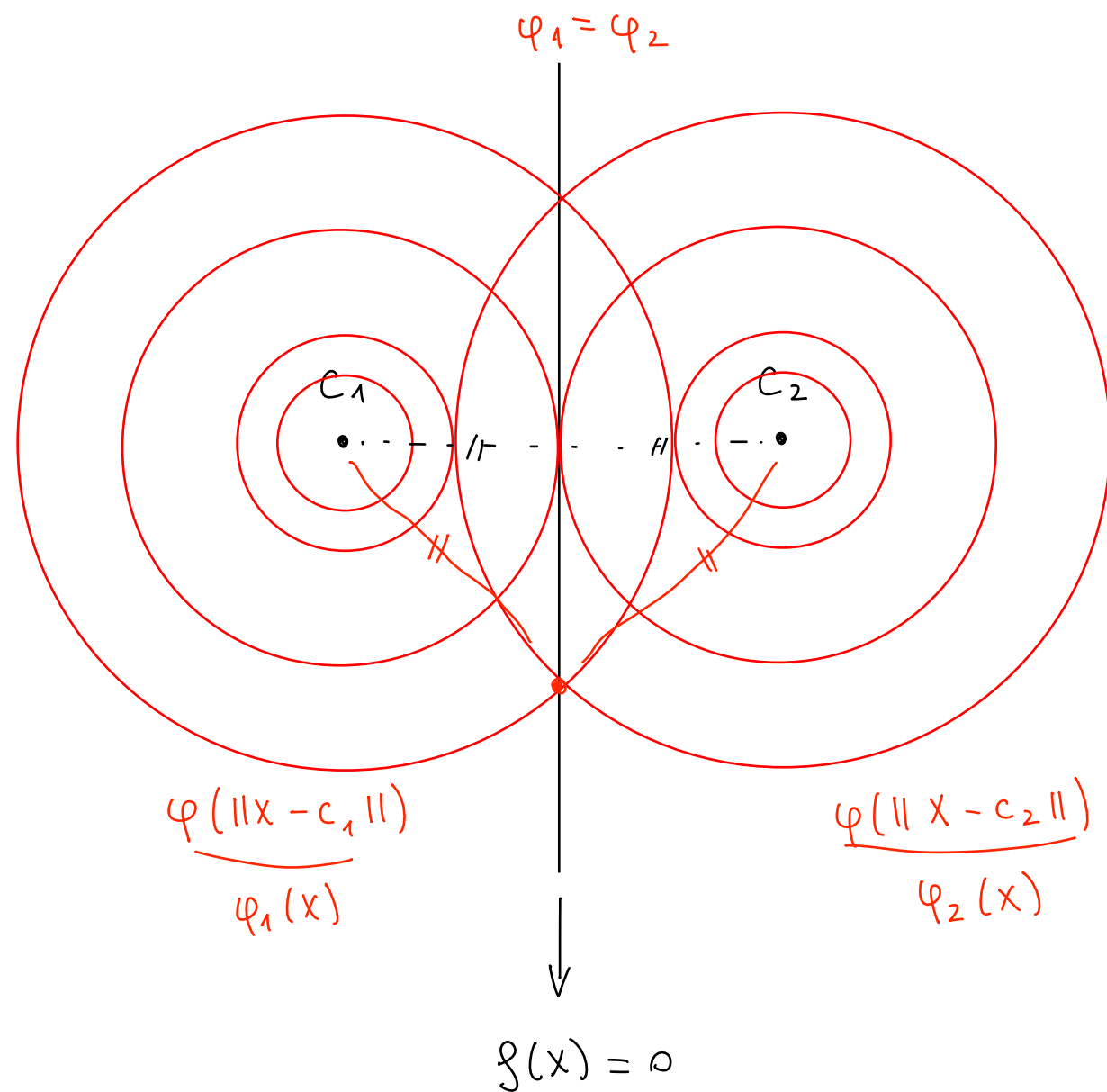
centrée
en c_i

(TD)

poly



Modellieren im Plan



$$\alpha_2 = -\alpha_1$$

$$f = \alpha_1 \cdot \varphi_1 + \alpha_2 \cdot \varphi_2$$

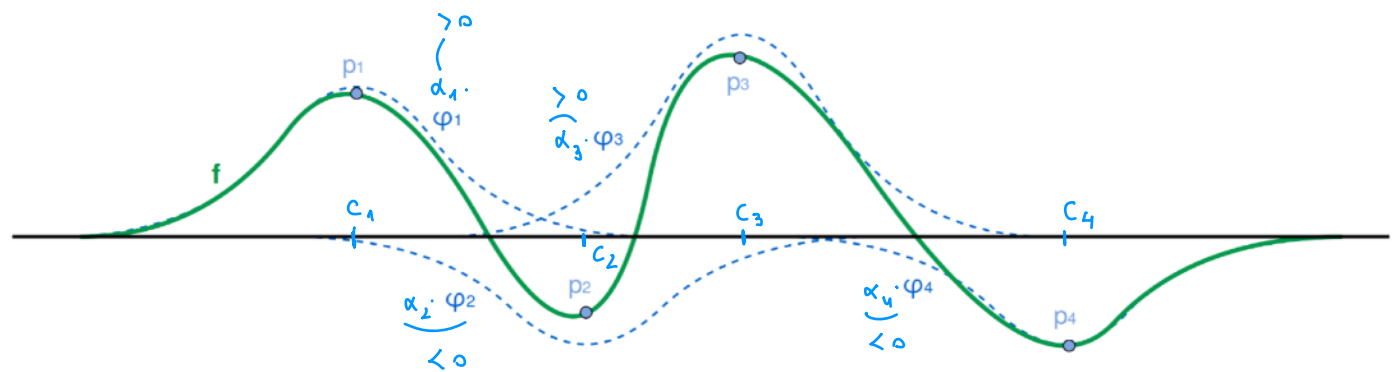
$$f(x) = 0 \text{ nur in } \varphi_1 - \varphi_2$$

$$f(x) = \alpha_1 \cdot \varphi_1(x) - \alpha_1 \cdot \varphi_2(x)$$

$$f(x) = 0 \leadsto \text{Plan.}$$

BASE DE FONCTIONS ?

$$f(X) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \phi(\|X - c_i\|)$$



Théorie de l'interpolation

TP $\leadsto$ reconstruction

Thin plate spline $\phi(r) = r^2 \log(r)$

$\hookrightarrow$ minimise naturellement énergie de plaque mince

Gaussienne $\phi(r) = e^{-r^2}$

Multiquadrique inverse $\phi(r) = (1 + r^2)^{\frac{b}{2}} \quad b < 0$

(fonctions
Wendland

CSRBF

fonction à base
radiale à

support
compact



BASE DE FONCTIONS ?

Intérêt ?

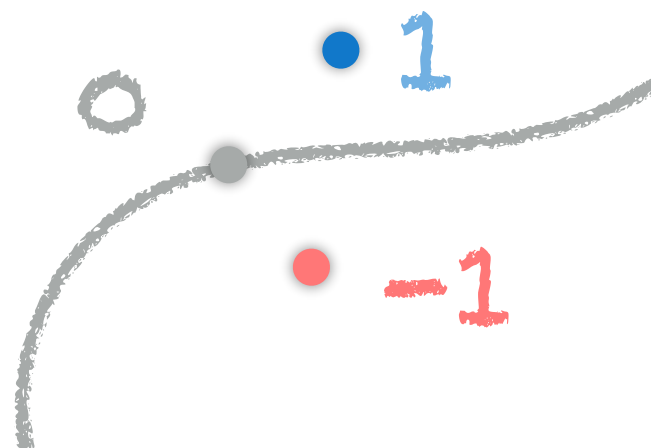
$$f(X) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \phi(\|X - c_i\|)$$

On peut garantir l'interpolation
de n points

$$\forall j \quad f(X_j) = 0$$

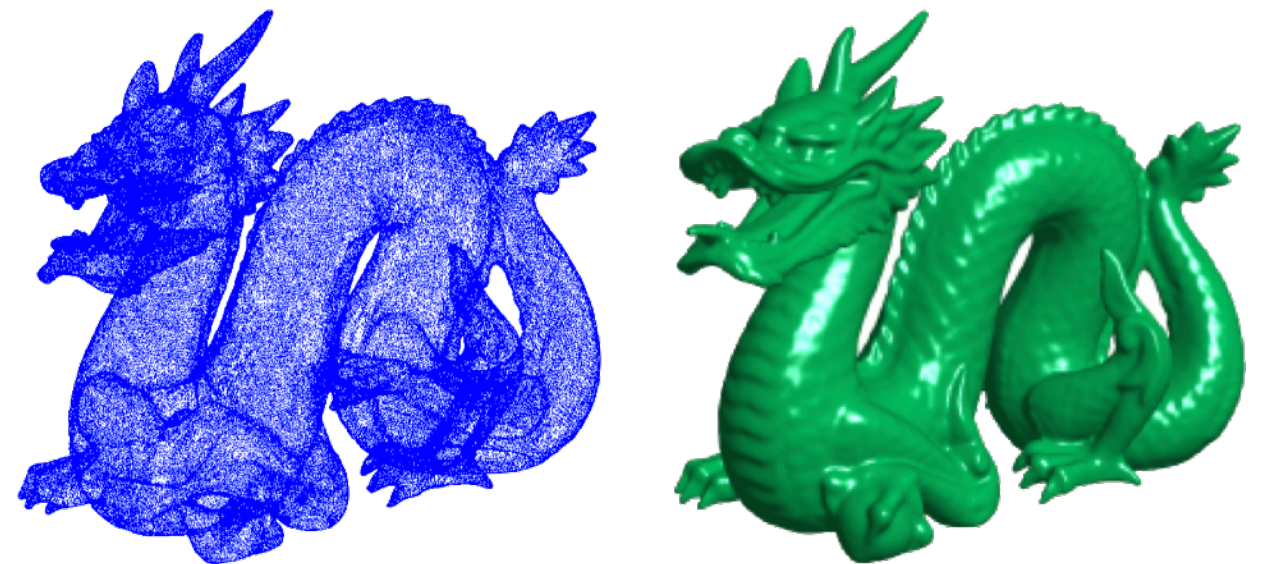
α_i définis à un facteur près ...

$$\forall j \quad f(X_j) = v_j$$



ET ALORS ?

Approche de Carr et al.



Approche Ohtake et al.



ET ALORS ?

Reconstruction de Poisson (Kazhdan et al.)



VISUALISATION

LE PROBLÈME ...

Surface :

Ensemble des points $X = (x, y, z)$
tels que $f(x, y, z) = 0$

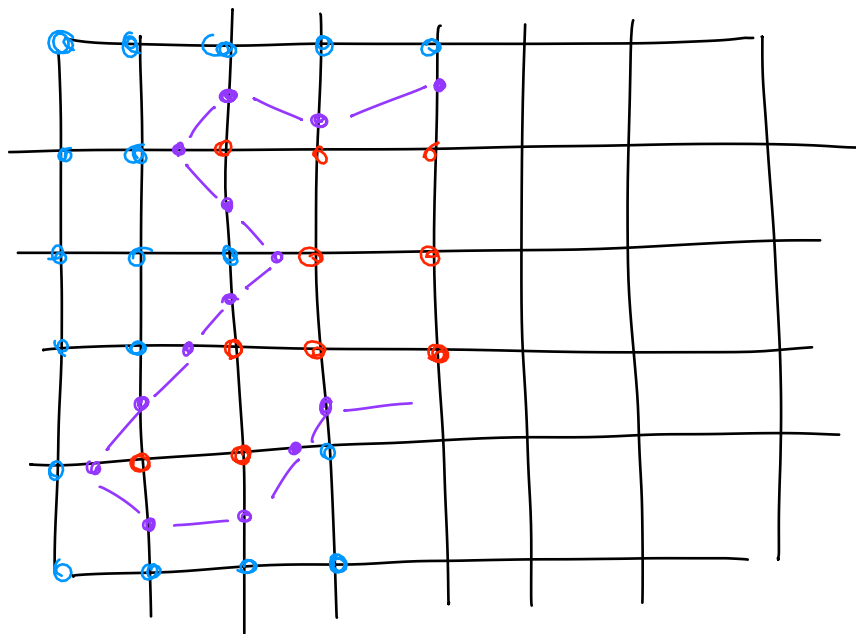


On ne sait pas résoudre !

↳ approcher les pts de la surface

$$f(x) = 0$$

↳ représenter la surf. ds 1 fenêtre — doit englober le zéro



Marching cubes

discr. grille rig.

éval $f(x)$ par chaque sommet

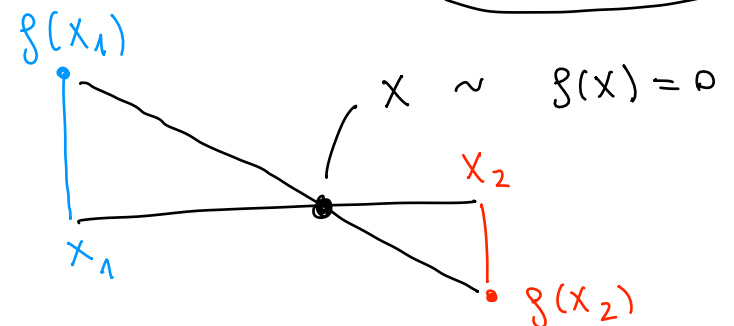
$\oplus$ $\ominus$

$f \in \mathbb{R}^0$

$f(x) = 0$ —
th. val.
interm.

changements de
signe

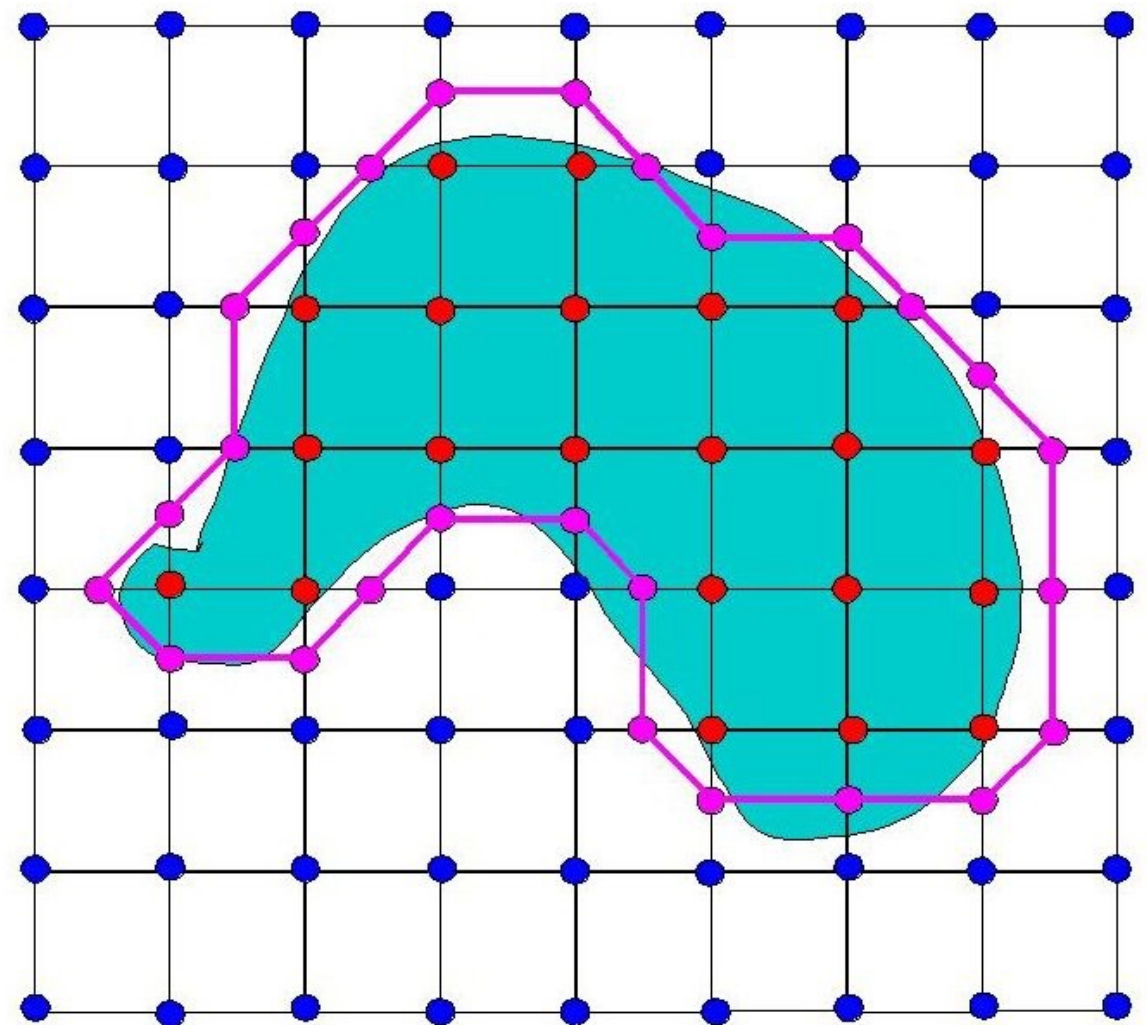
obtenir la position du pt lg
 $f(x) = 0$ par (interpolation
linéaire)



MARCHING CUBES (SQUARES)

Principe de base :

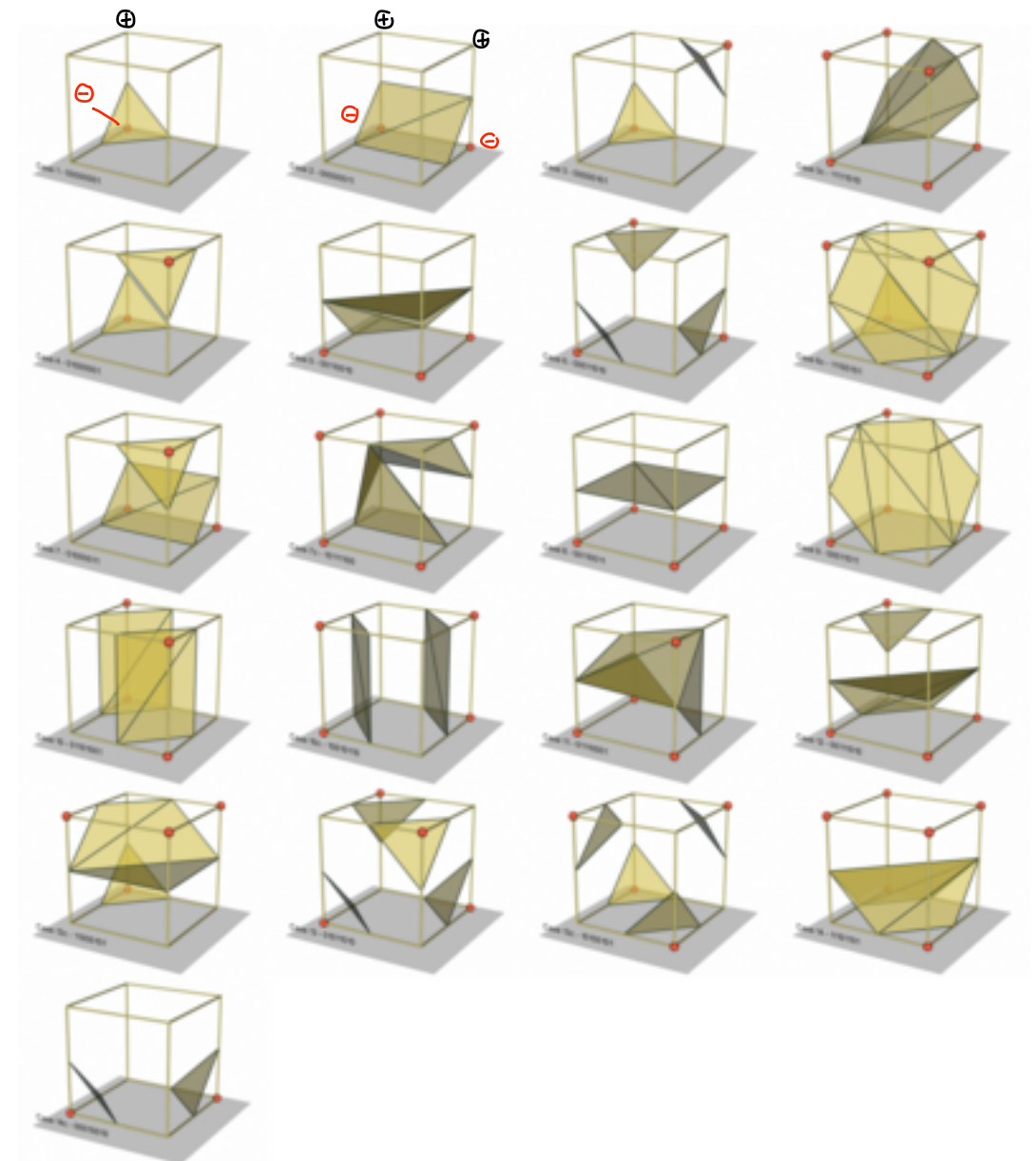
- ▶ Discrétiser la boîte englobante par une grille régulière
- ▶ Calculer la valeur de f en chaque point ($f > 0$, $f < 0$)
- ▶ La surface coupe les arêtes où le signe change
→ reconstruire la topologie



MARCHING CUBES (SQUARES)

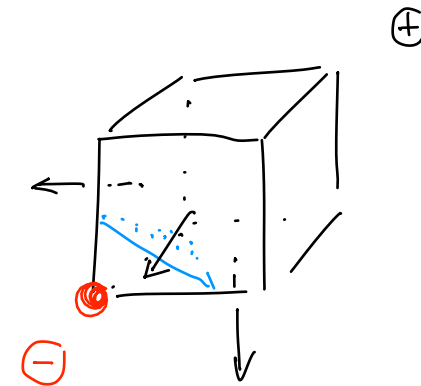
Reconstruction de la topologie en 3D :

- ▶ Comment connecter les points ?
- ▶ Table fonction des signes aux sommets

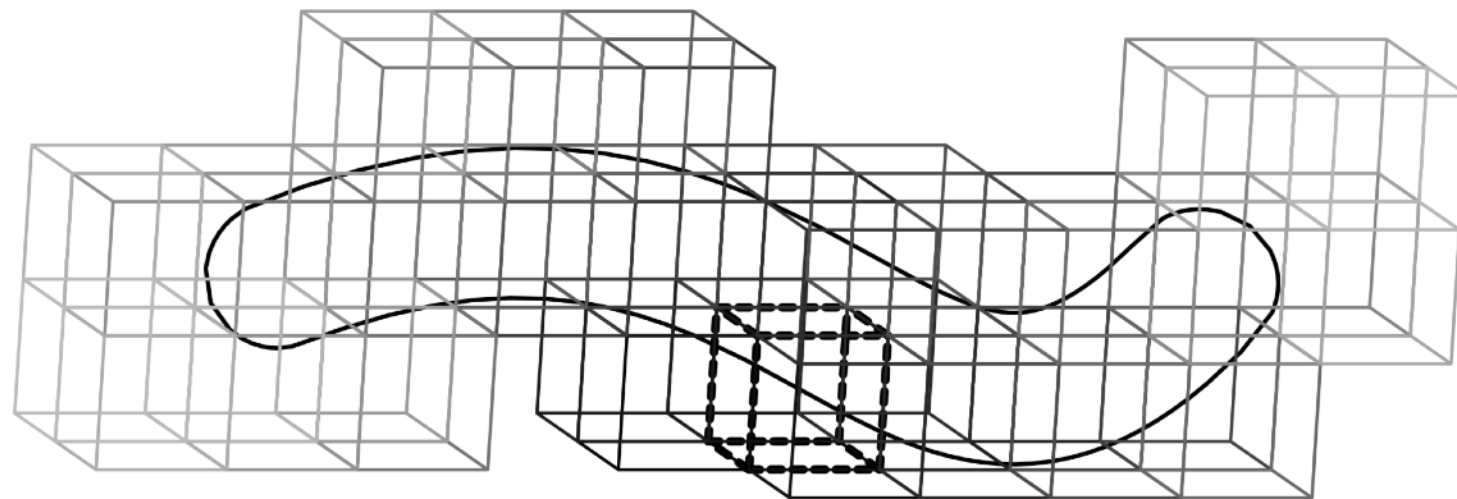


MAIS ENCORE ?

- ▶ Eviter l'exploration exhaustive
- ▶ Raffiner quand nécessaire



→ Algorithme de Bloomenthal



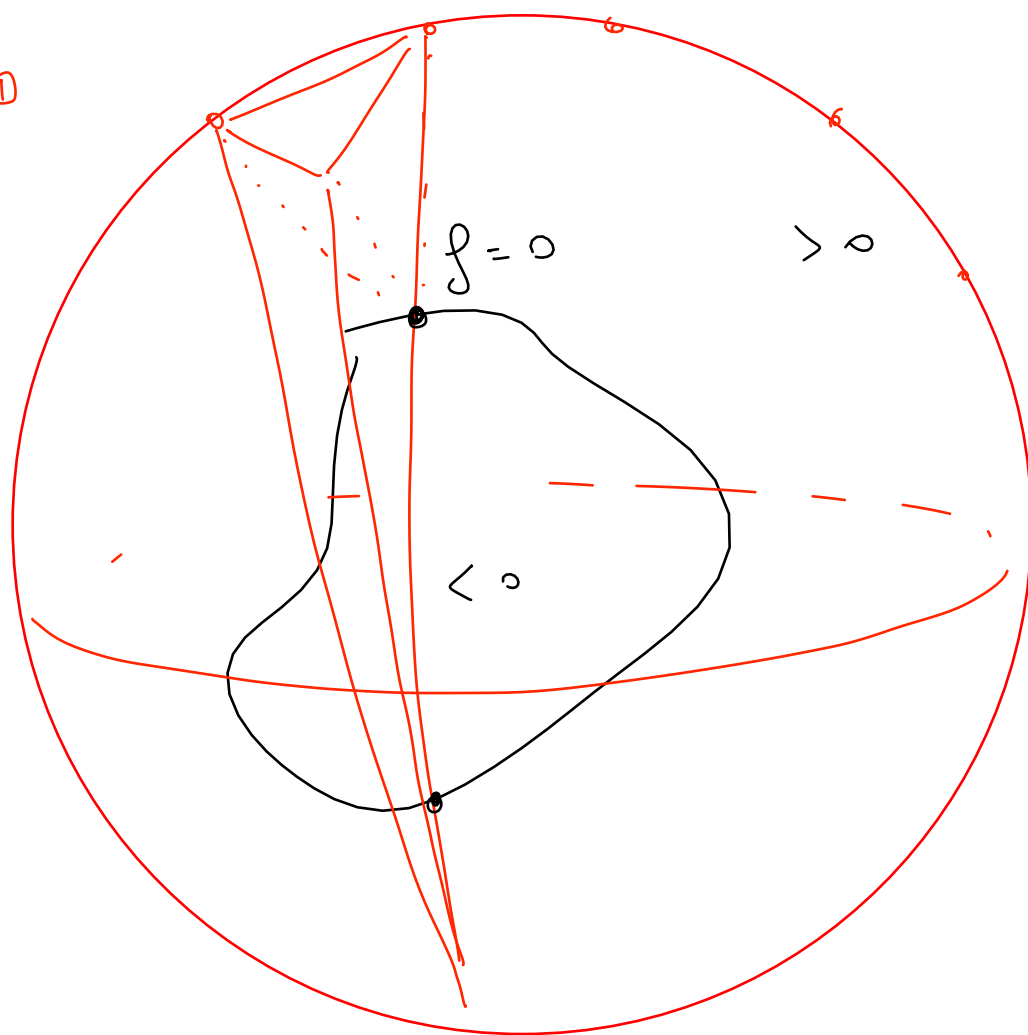
→ Dual contouring

← meilleurs ns.

TP

CGAL

↳ Delaunay 3D



Modèles implicites

→

IA génératives

NERF