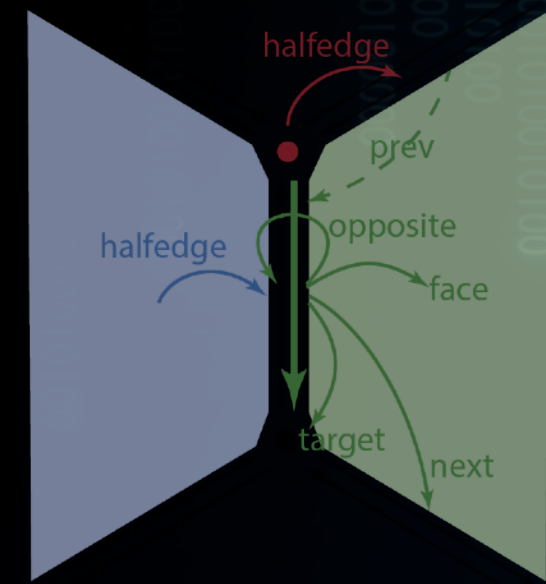


MODELISATION GEOMETRIQUE



Alexandra Bac

POLYTECH 4A INFORMATIQUE **REVA**

3 – GÉOMÉTRIE DES SURFACES

Certaines illustrations sont issues du livre « polygon mesh processing »

« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - GÉOMÉTRIE DES SURFACES

Chapitre 2

MAILLAGES

Chapitre 4

**GÉOMÉTRIE DES
SURFACES**

Chapitre 1

**MODÉLISATION DES
SURFACES**

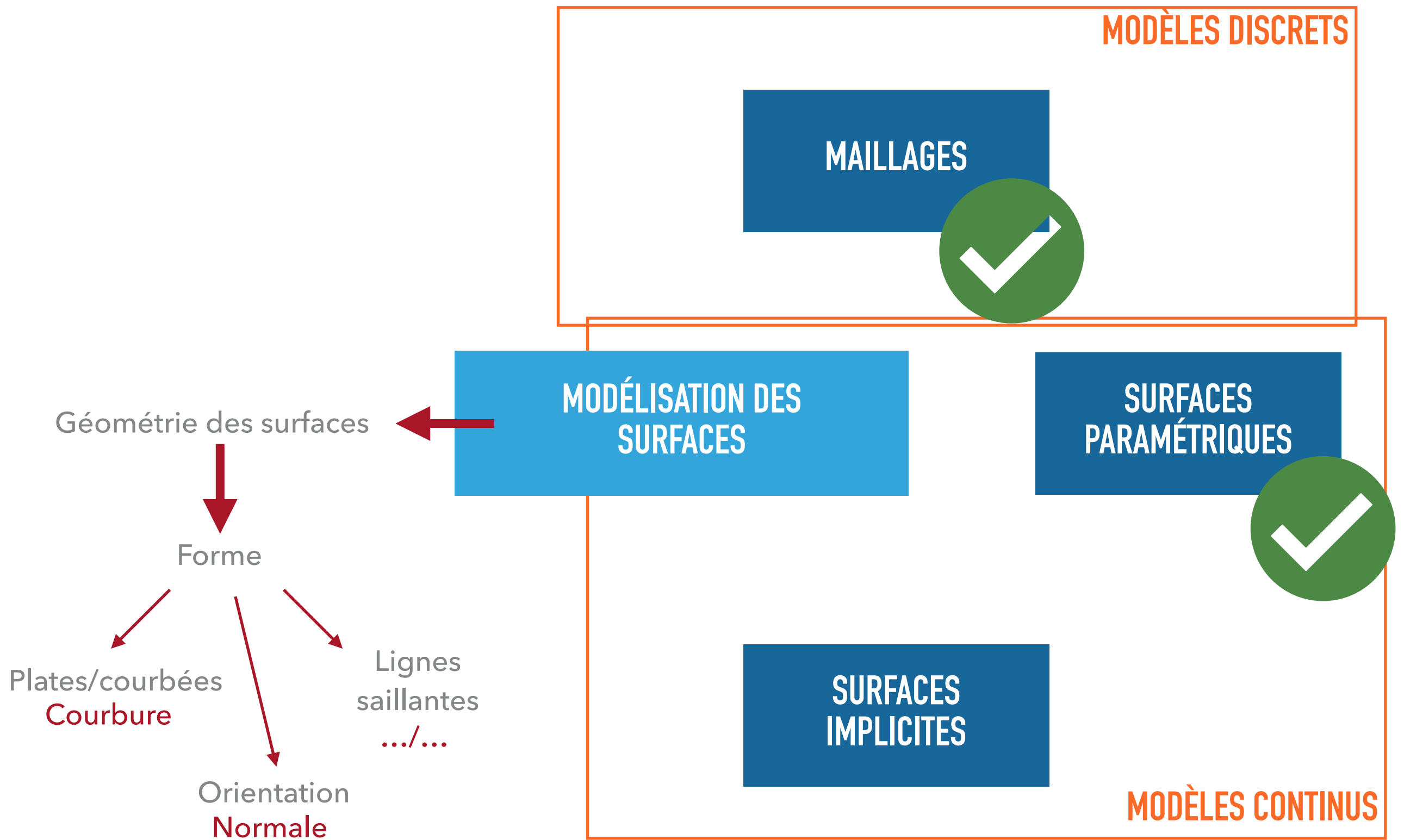
Chapitre 3 (+ 5A)

**SURFACES
PARAMÉTRIQUES**

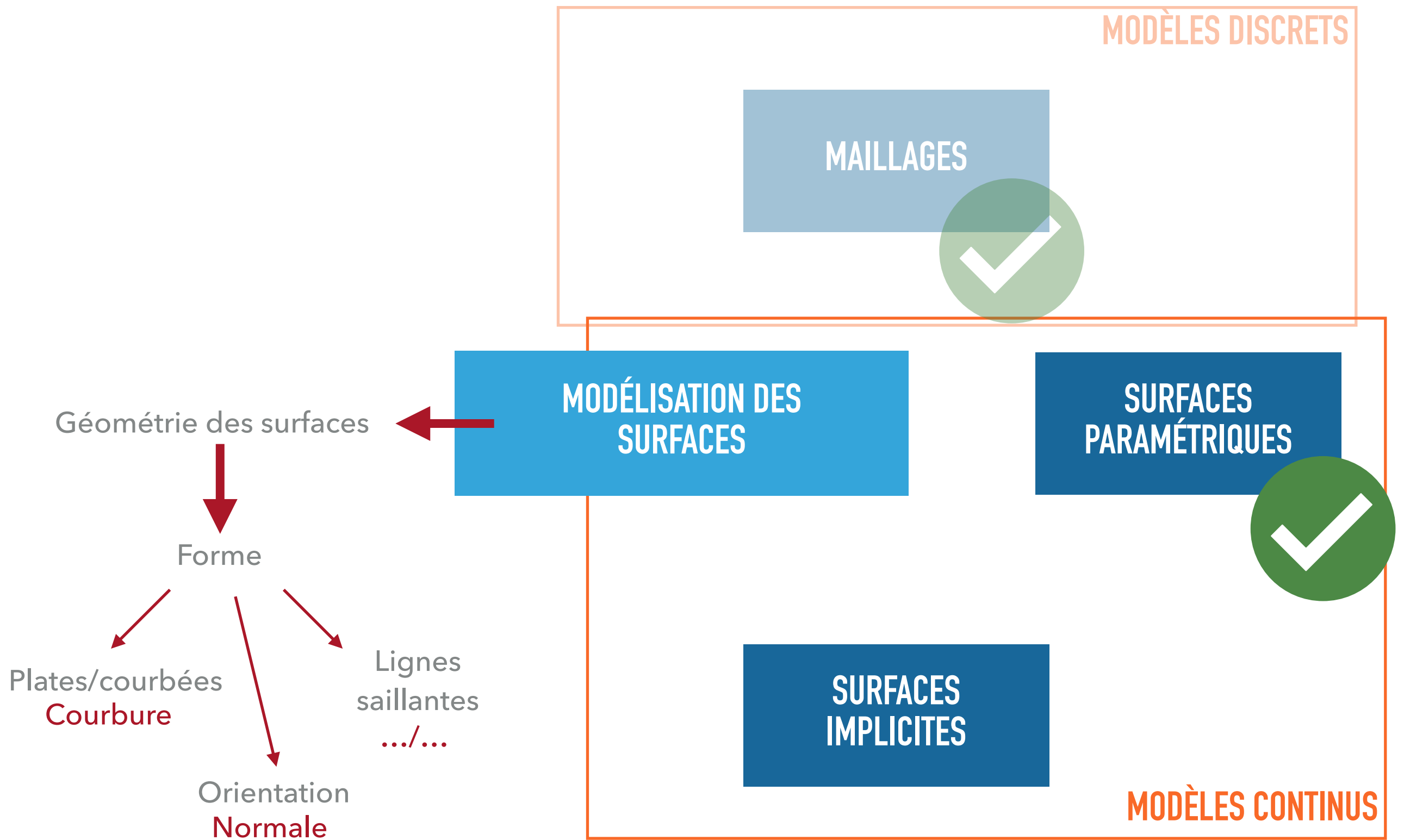
Chapitre 5

**SURFACES
IMPLICITES**

« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - GÉOMÉTRIE DES SURFACES



« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - GÉOMÉTRIE DES SURFACES



POUR L'INTUITION : GÉOMÉTRIE DES COURBES PARAMÉTRIQUES

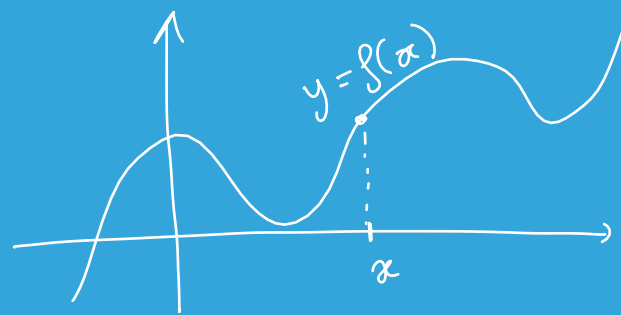
→ paramétrable

COURBES CARTÉSIENNES

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y = f(x)$$

tangente : $f'(x)$
↓
pente



param : x

$$x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$$

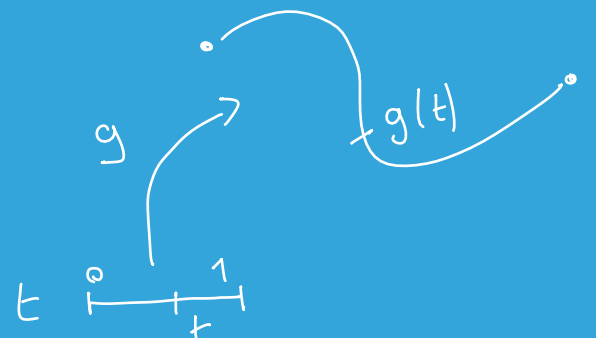
$\cap$

→ 1 param

Courbe paramétrique 2D

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

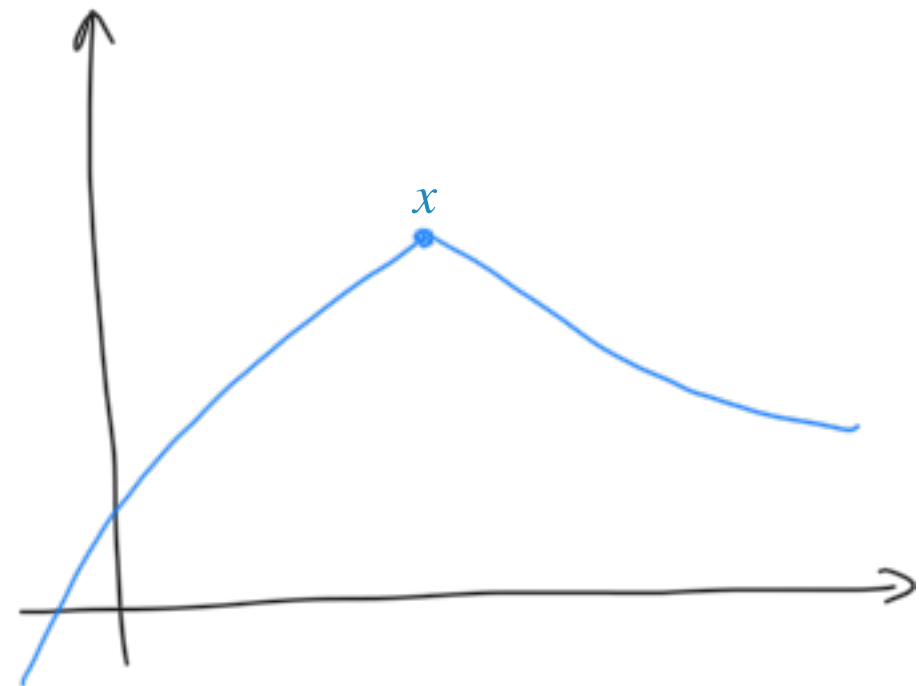
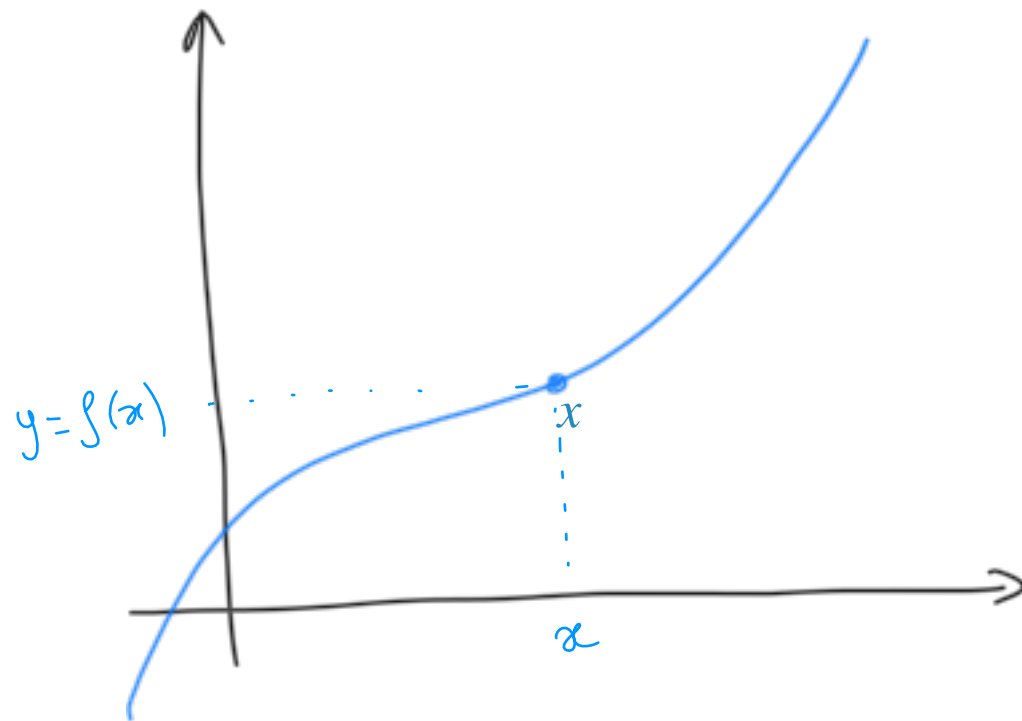
$$t \mapsto g(t) \in \mathbb{R}^2$$



« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - GÉOMÉTRIE DES SURFACES

Modélisées sous la forme $y = f(x)$

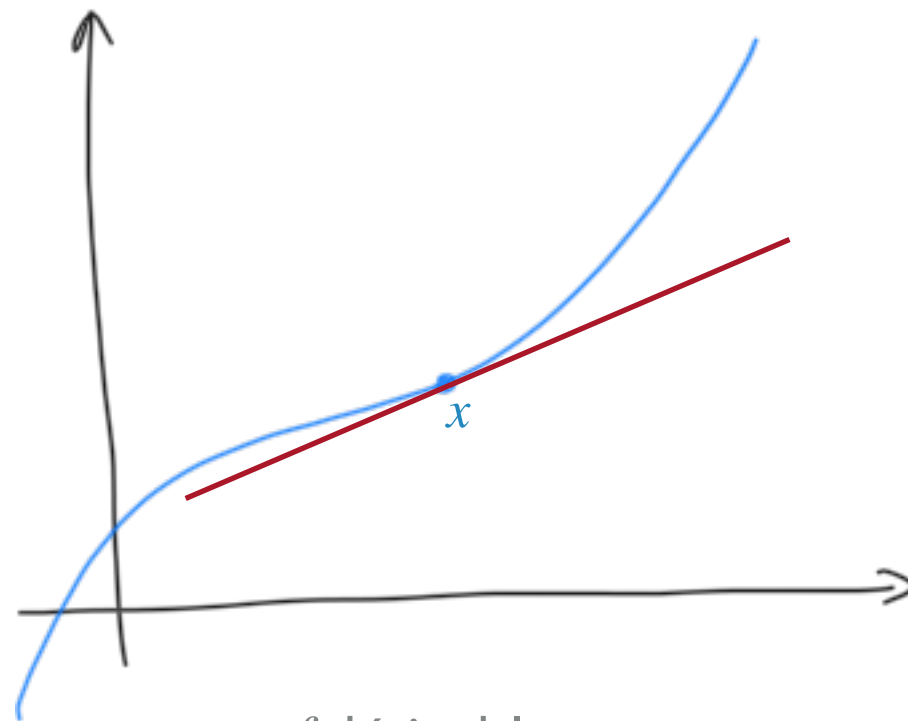
Connues depuis la terminale ...



« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - GÉOMÉTRIE DES SURFACES

Modélisées sous la forme $y = f(x)$

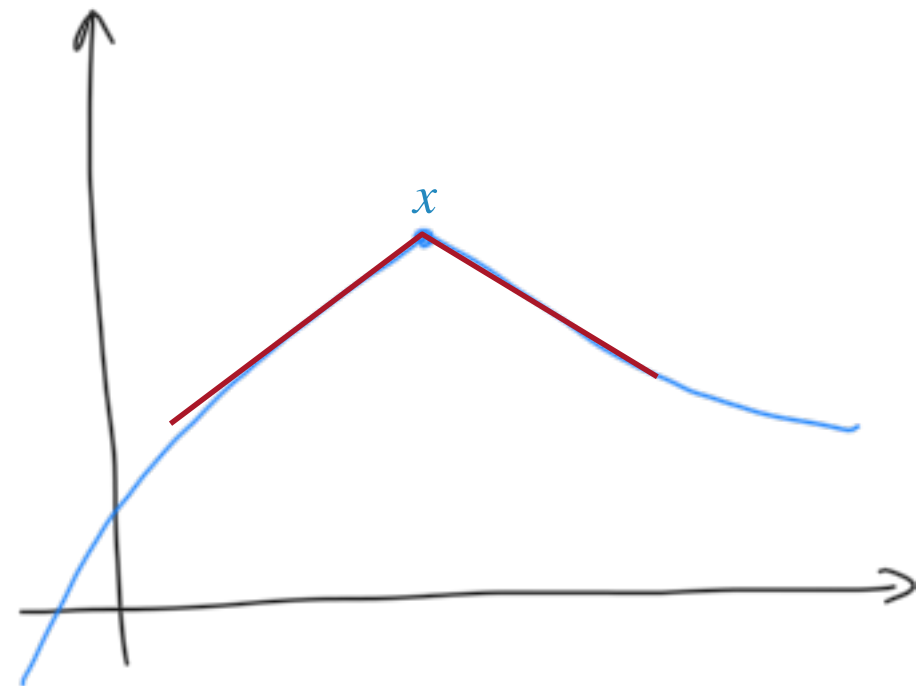
Connues depuis la terminale ...



f dérivable

Courbe proche d'une
droite de pente $f'(x)$

Tangente

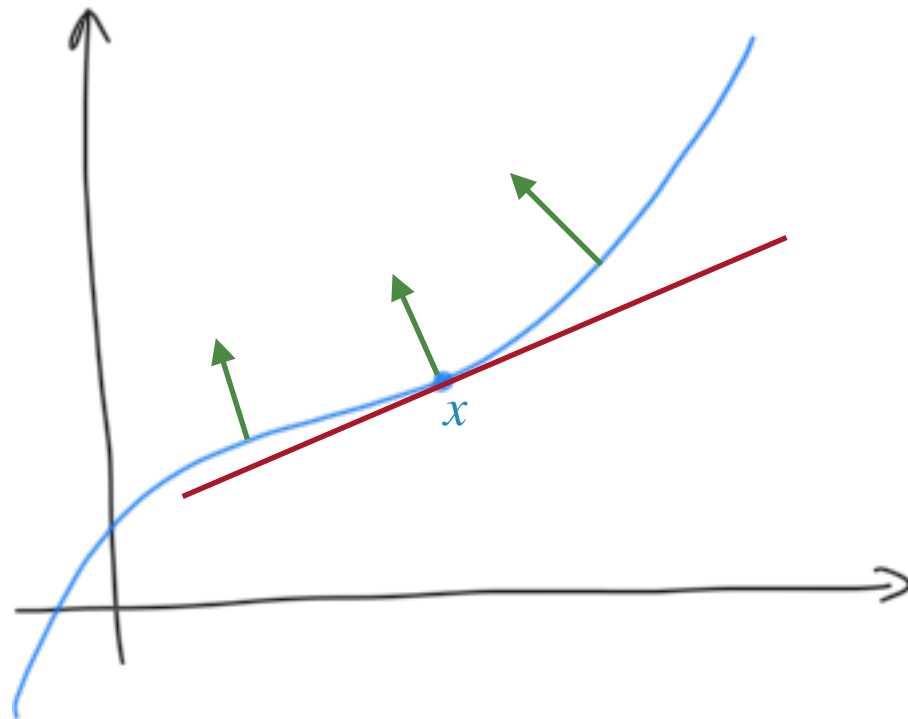


f non dérivable

« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - GÉOMÉTRIE DES SURFACES

Modélisées sous la forme $y = f(x)$

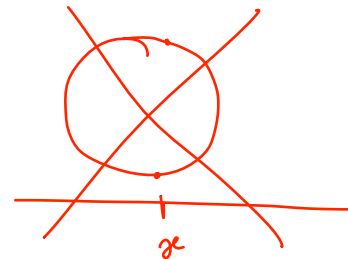
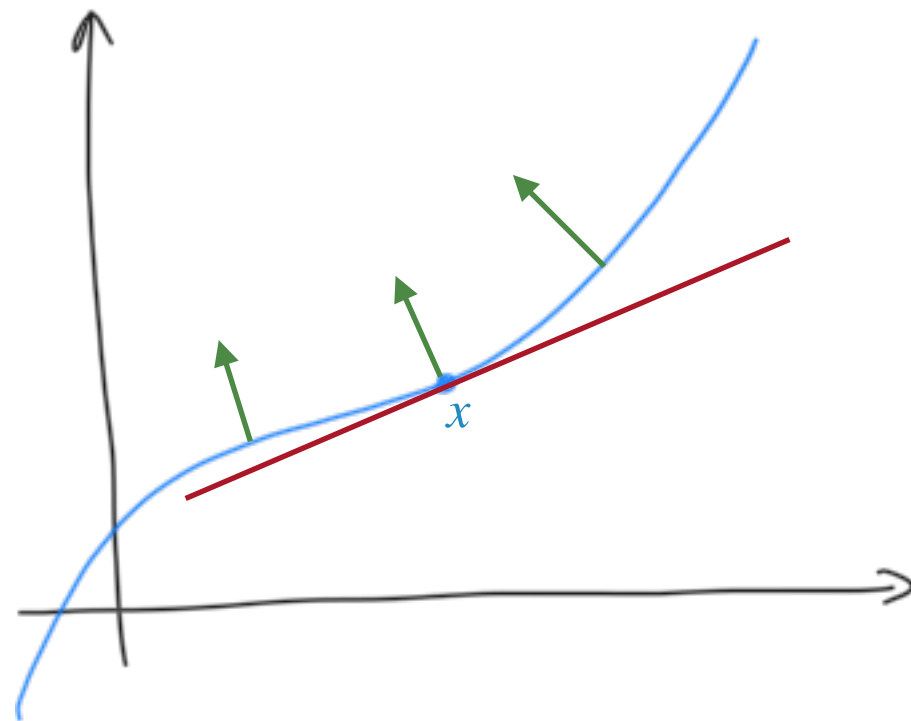
Connues depuis la terminale ...



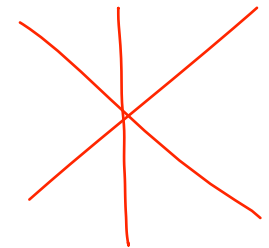
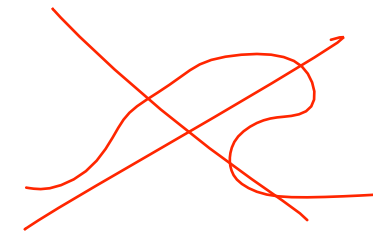
Normale :
orthogonale à la courbe/tangente

« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - GÉOMÉTRIE DES SURFACES

Modélisées sous la forme $y = f(x)$

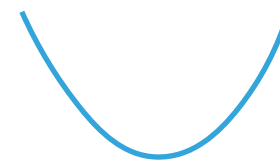


Connues depuis la terminale ...

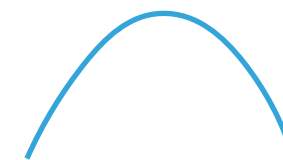


Dérivées secondes :

$f''(x)$ indique la concavité de la courbe



Concave
 $f''(x) > 0$



Convexe
 $f''(x) < 0$



Inflexion
 $f''(x) = 0$



Courbure



5.56	+740.21	-
3.24	+122.56	-
9.62	+140.04	-
.36	+180.98	-
56	+740.21	-
24	+122.56	-
62	+140.04	-
36	+180.98	-
56	+740.21	-

COURBES PARAMÉTRIQUES GÉNÉRALES

Cf. Chapitre 3

ex: cercle centre 0 rayon 1

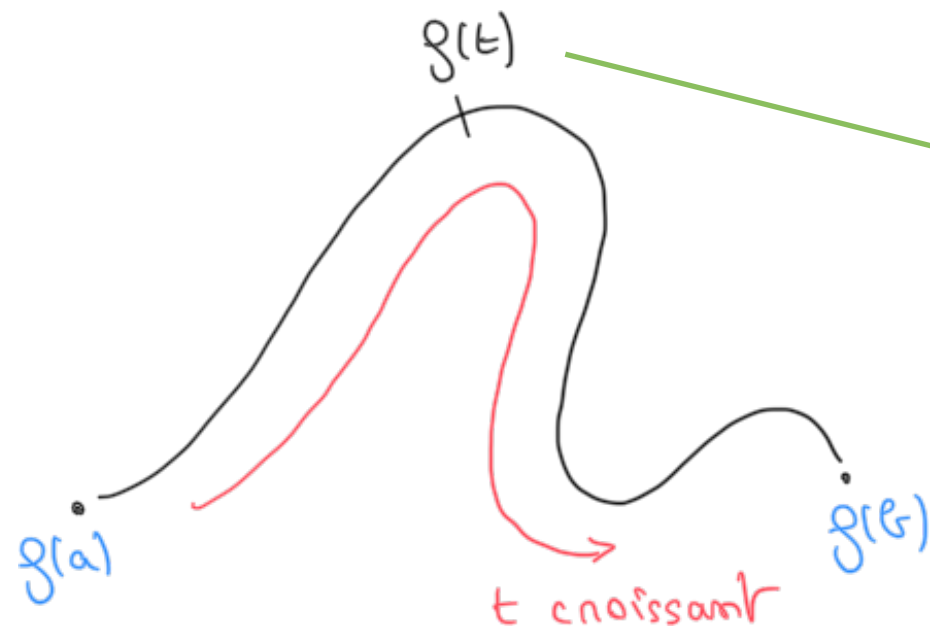
$$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

COURBES

Courbe finie :

$$f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ (ou } \mathbb{R}^3)$$

t



$f(t) \in \mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$ donc :

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ [f_3(t)] \end{pmatrix}$$

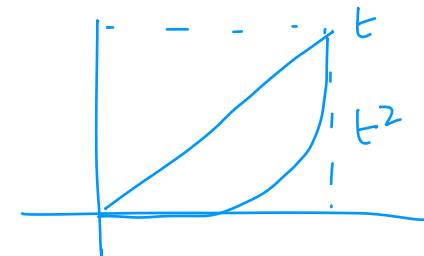


$$f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Tangente	Courbure
$f'(t)$	$f''(t)$

« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - GÉOMÉTRIE DES SURFACES

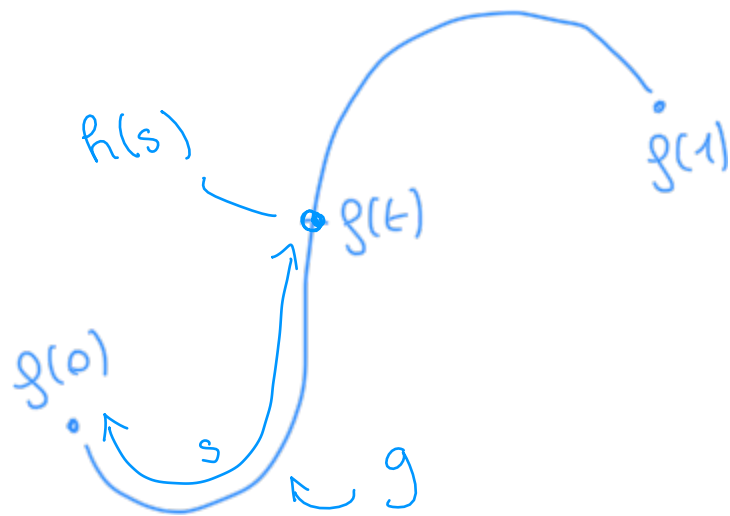
Cf. Chapitre 3



Comme vu au chapitre 3 :

$$g(t) = f(t^2) \quad \begin{cases} g(0) = f(0) \\ g(1) = f(1) \\ g(t) = f(t^2) \end{cases}$$

décrit la même courbe parcourue à une vitesse différente



$g'(t) = 2t \cdot g'(t^2)$ (vect) \$g' \neq g'\$ mais ils sont colinéaires...

$g''(t) = 2 g'(t^2) + 4t^2 g''(t^2)$ (vect) prop. à \$g''(t^2)\$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}$$

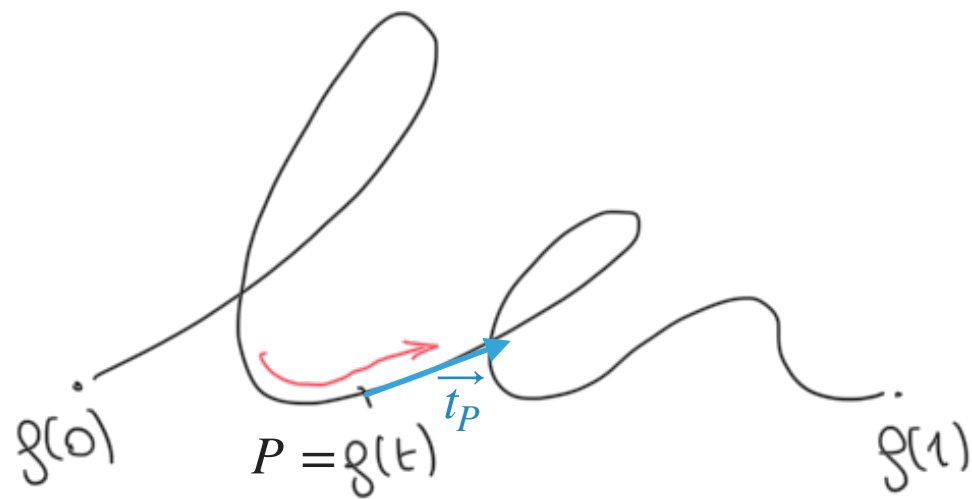
$$g' = \begin{pmatrix} g_1' \\ g_2' \end{pmatrix}$$

Courbe parcourue à vitesse est 1. $\leadsto$ (s)

Paramétrisation normale

Tangente	Courbure
$f'(s)$	$f''(s)$

TANGENTE / NORMALE



En paramétrisation normale :

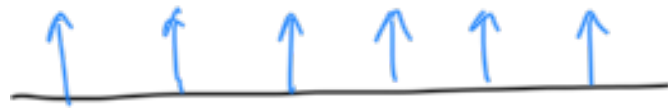
$$\vec{t}_P = f'(s)$$

En paramétrisation quelconque :

$$\vec{t}_P = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$$

vitesse

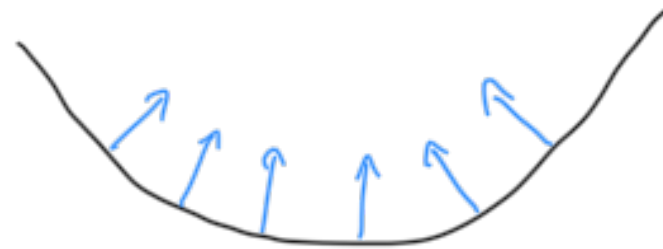
COURBURE



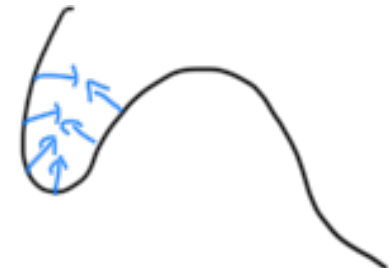
Non courbé



Normale/
tangente
constante



Moyennement courbé



Fortement courbé



Variation
violente de la
normale/
tangente

Courbure $\leftrightarrow$ variation de la normale

Moyennant la paramétrisation ...

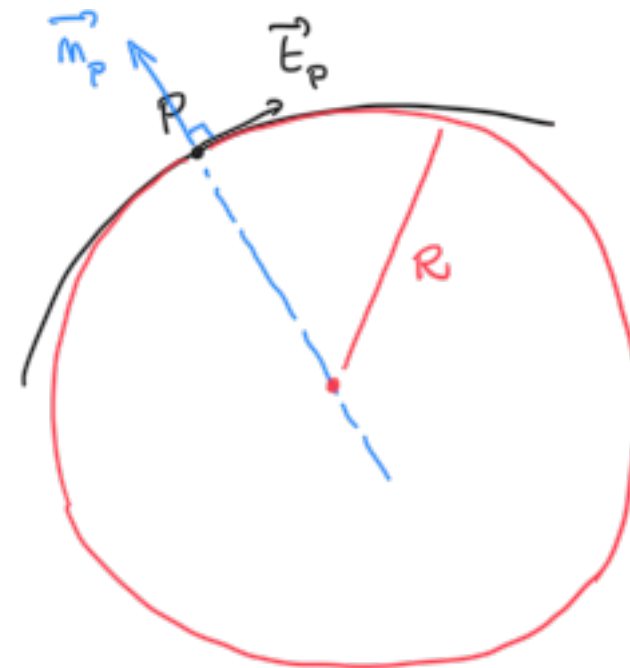
COURBURE

En paramétrisation normale, on montre que :

$$\frac{d\vec{t}_P}{ds} = \frac{1}{R} \cdot \vec{n}_P = k_P \cdot \vec{n}_P$$

R rayon de courbure

courbure au point P



$$P = f(s)$$

COURBURE

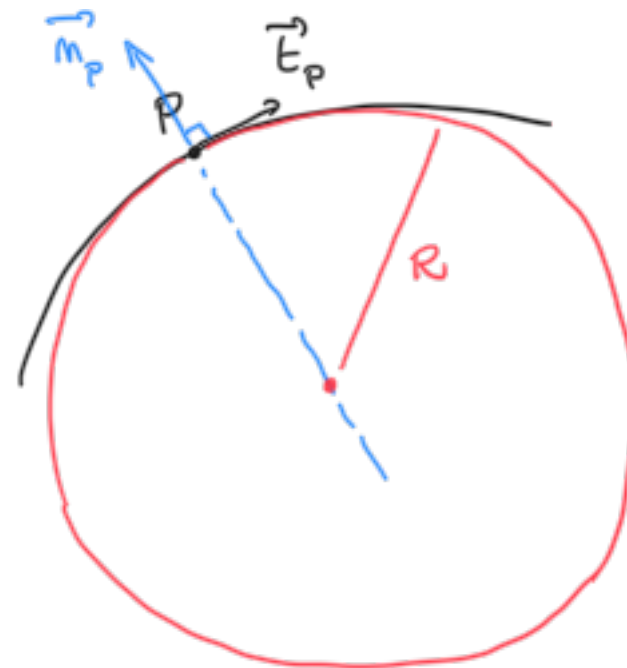
En paramétrisation normale, on montre que :

$$\frac{d\vec{t}_P}{ds} = \frac{1}{R} \cdot \vec{n}_P = k_P \cdot \vec{n}_P$$

R rayon de courbure

courbure au point P

courbure $\leadsto g''(s)$



$P = f(s)$

En paramétrisation quelconque :

$$k_P \cdot \vec{n}_P = \frac{f'(t) \wedge f''(t)}{\|f'(t)\|^3}$$

TRIÈDRE DE FRENET (COURBES GAUCHES)

On pose le vecteur de la binormale :

$$\vec{b}_P = \vec{t}_P \wedge \vec{n}_P$$

$$\frac{d\vec{t}_P}{ds} = \frac{1}{R} \cdot \vec{n}_P = k_P \cdot \vec{n}_P$$

R rayon de courbure

courbure

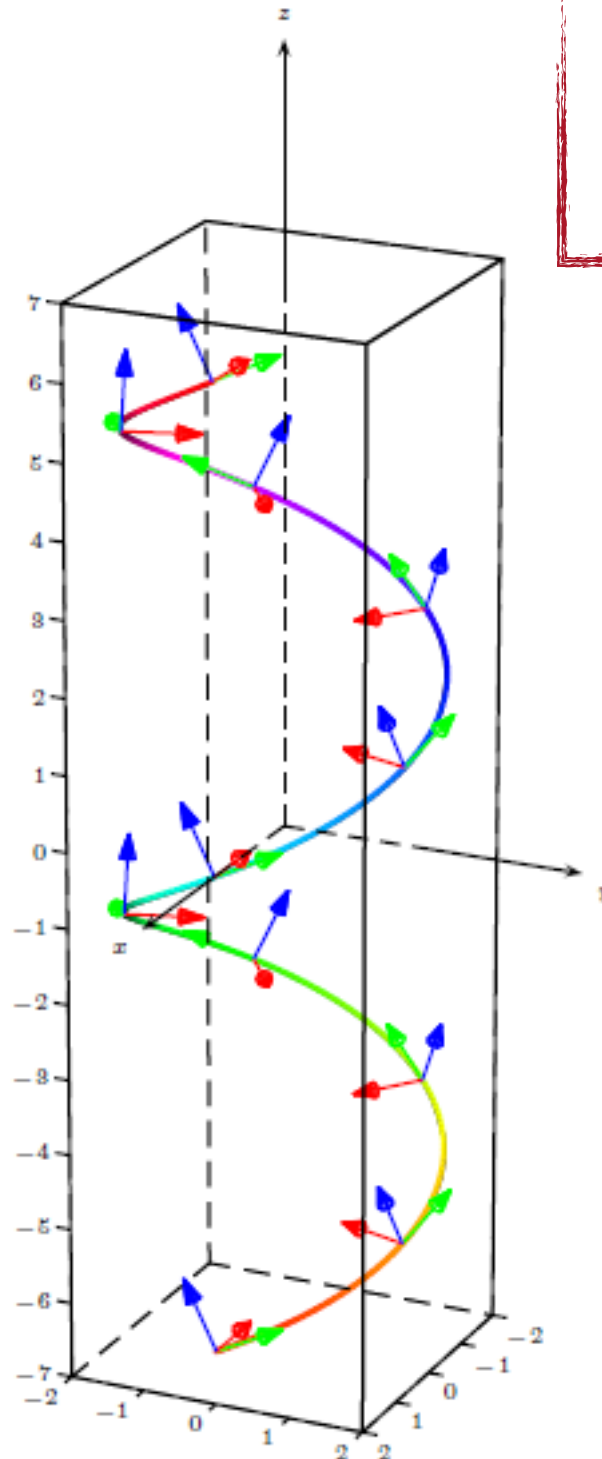
$$\frac{d\vec{b}_P}{ds} = \frac{1}{\tau_P} \cdot \vec{n}_P$$

rayon de torsion

$\frac{1}{\tau_P}$ torsion

Repère de Frénet :

$$(P, \vec{t}_P, \vec{n}_P, \vec{b}_P)$$





5.56	+740.21	-
3.24	+122.56	-
9.62	+140.04	-
.36	+180.98	-
.56	+740.21	-
.24	+122.56	-
.62	+140.04	-
.36	+180.98	-
.56	+740.21	-

BONUS : FORMES QUADRATIQUES

FORMES QUADRATIQUES ET MATRICES

Forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$:

Φ : polynôme de degré 2 exactement (n variables)



Codable par une matrice Ω de taille $n \times n$:

$$\Phi(X) = X^t \cdot \Omega \cdot X$$

Sur $\mathbb{R}^3$:

$$\Phi(x, y, z) = x^2 - y^2 + 2z^2 - xy + 2yz$$



$$\Omega = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

GÉOMÉTRIE DES SURFACES PARAMÉTRIQUES

« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - GÉOMÉTRIE DES SURFACES

tangente / normale

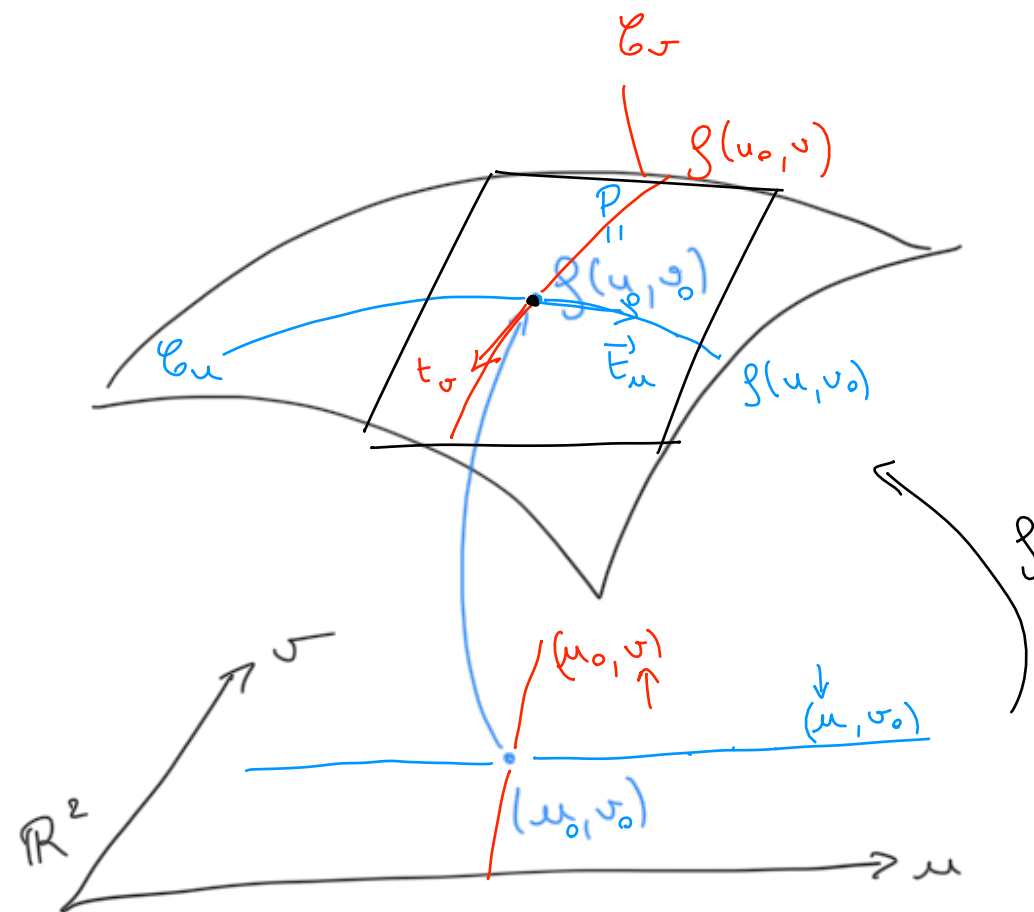
Cadre : surfaces paramétriques

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

caractérisent le plan tangent s'ils sont écartés

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0) \quad / \quad \frac{\partial g}{\partial v}(u_0, v_0)$$

↓
2 vecteurs tangents en $P = g(u_0, v_0)$



tangente à $\mathcal{C}_u$ en P :
 $(u \mapsto g(u, v_0))'$
 $\parallel$
 $\frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0) = \vec{t}_u$
 vect tangent

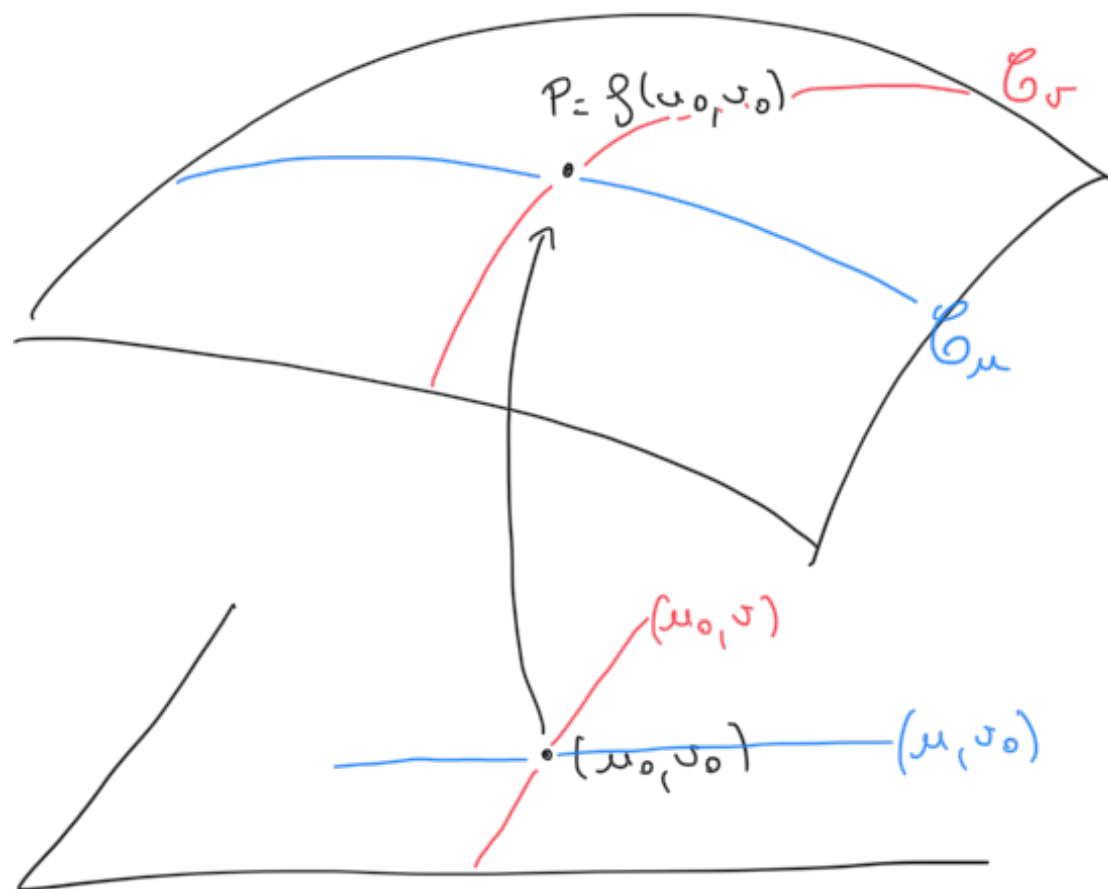
tangente à $\mathcal{C}_v$ en P
 $(v \mapsto g(u_0, v))'$
 $\parallel$
 $\frac{\partial g}{\partial v}(u_0, v_0) = \vec{t}_v$

5.56	+740.21	-
3.24	+122.56	-
9.62	+140.04	-
.36	+180.98	-
.56	+740.21	-
.24	+122.56	-
.62	+140.04	-
.36	+180.98	-
.56	+740.21	-

NORMALE

« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - GÉOMÉTRIE DES SURFACES

On obtient naturellement deux courbes sur la surface :



En fixant v_0 :

$$\mathcal{C}_u : u \mapsto f(u, v_0)$$

En fixant u_0 :

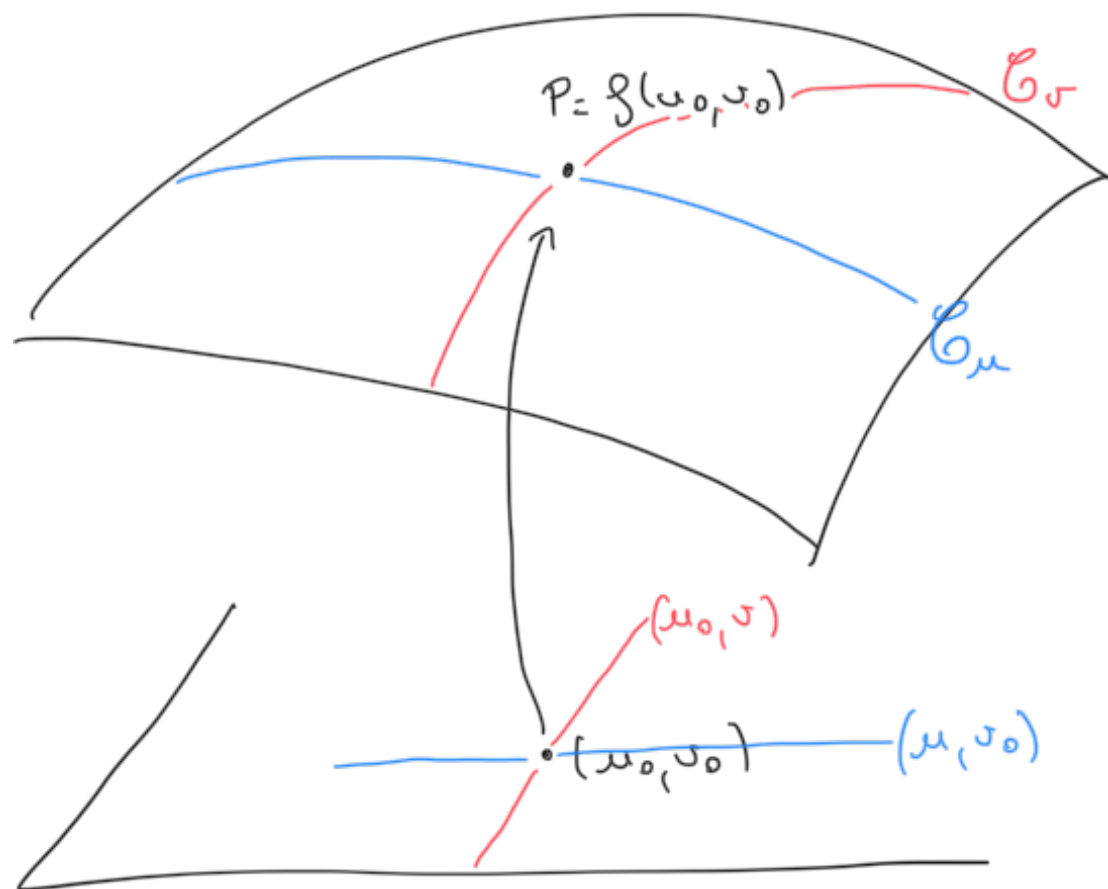
$$\mathcal{C}_v : v \mapsto f(u_0, v)$$



On connaît la tangente de courbes ...

« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - GÉOMÉTRIE DES SURFACES

On obtient naturellement deux courbes sur la surface :



En fixant v_0 :

$$\mathcal{C}_u : u \mapsto f(u, v_0)$$

En fixant u_0 :

$$\mathcal{C}_v : v \mapsto f(u_0, v)$$



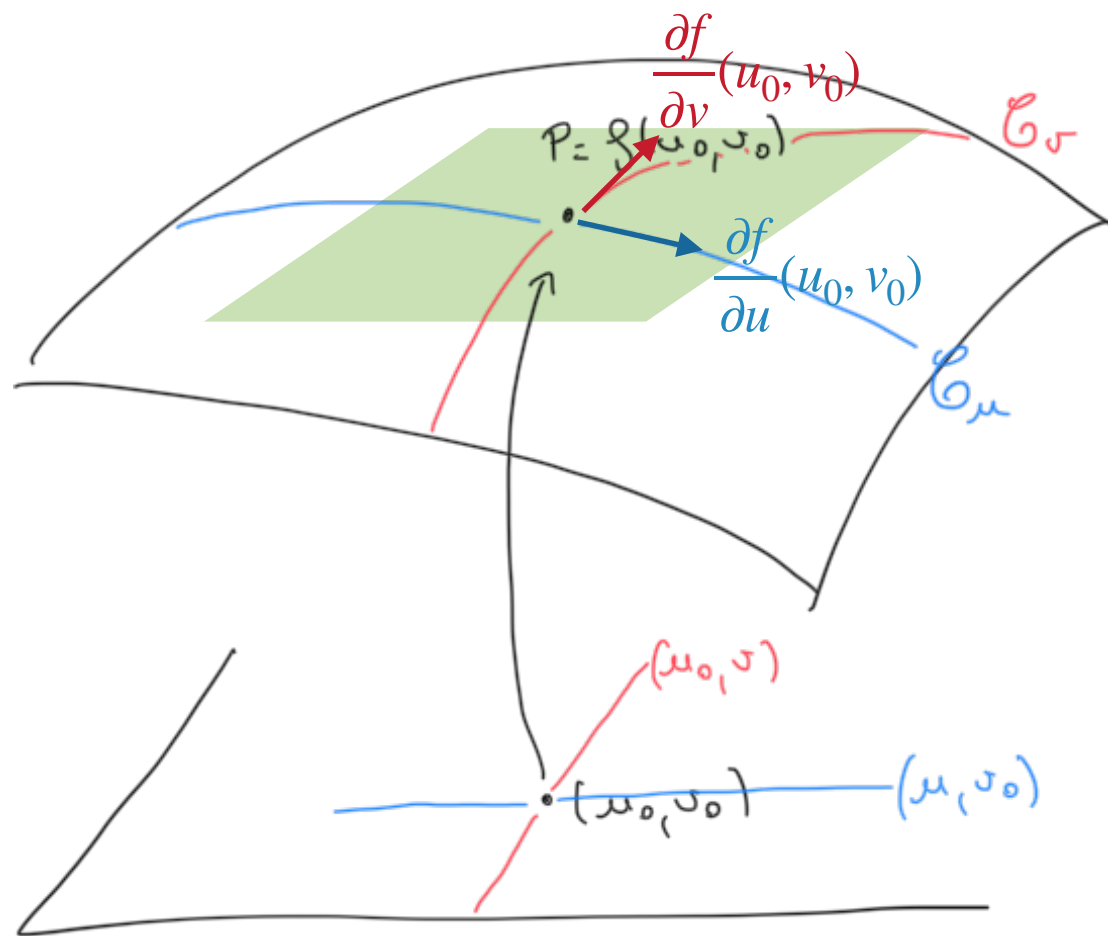
On connaît la tangente de courbes ...

$$\begin{aligned} & (f(u, v_0))' \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (f(u_0, v))' \\ &= \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \end{aligned}$$

« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - GÉOMÉTRIE DES SURFACES

On obtient naturellement deux courbes sur la surface :

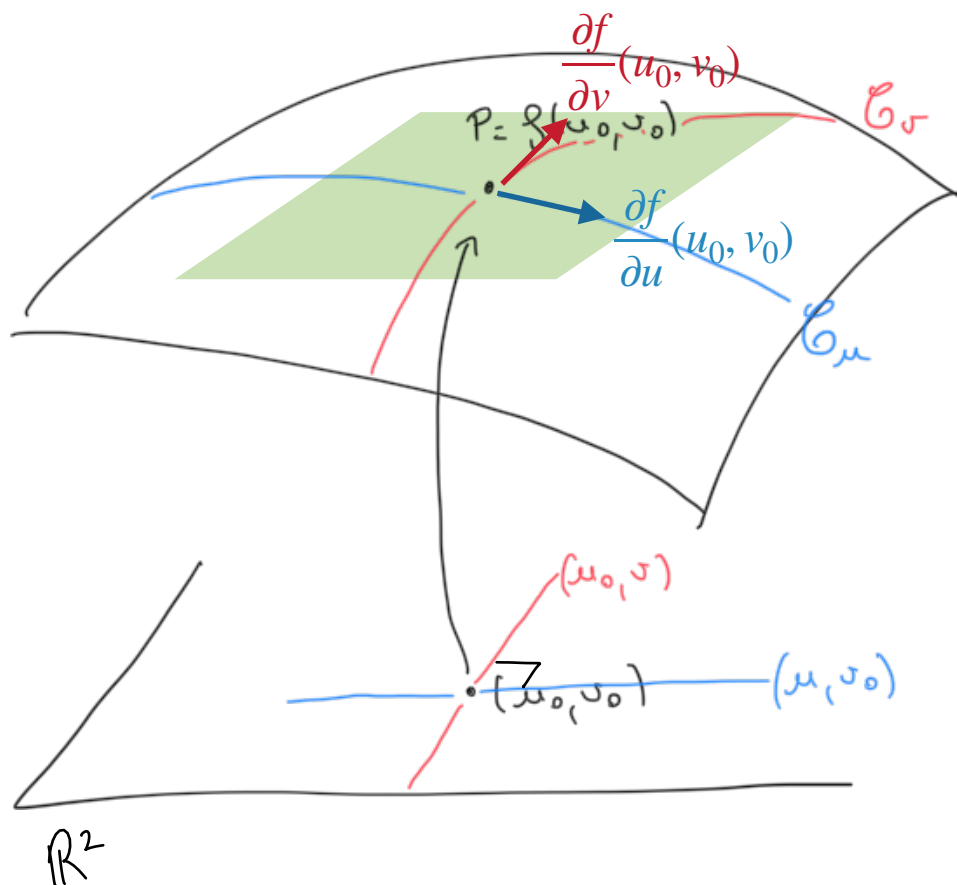


Si f différentiable en (u_0, v_0) :

- Tangentes aux courbes sur la surface forment un plan
- $\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)$ en forment une base si ...

« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - GÉOMÉTRIE DES SURFACES

On obtient naturellement deux courbes sur la surface :



$P = f(u_0, v_0)$ point régulier si :

- $\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)$ libres, ie.
- $\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \neq 0$

Prop :

si $P = f(u_0, v_0)$ régulier, le **plan tangent** T_P en P a pour repère :

$$(P, \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0))$$

Son vecteur normal :

$$\vec{n}_P = \frac{\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)}{\|\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)\|}$$

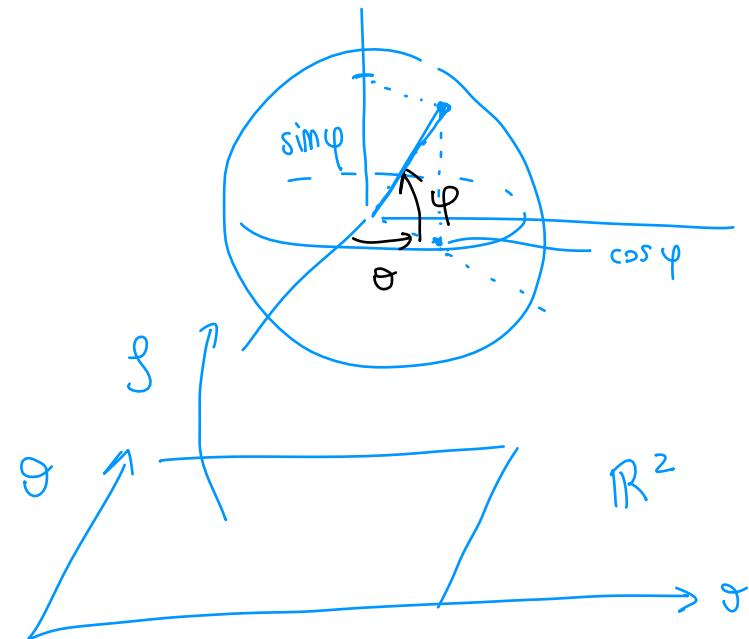
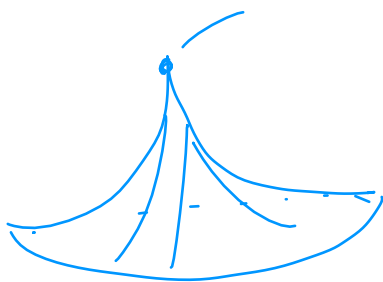
Sphere $(0,1)$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\vartheta, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta \\ \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \vartheta} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi \sin \vartheta \\ \cos \varphi \cos \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}$$

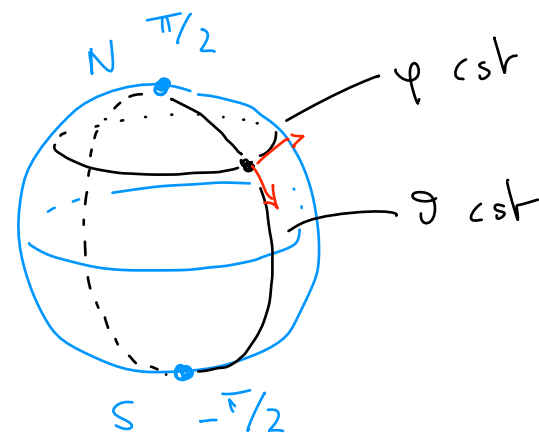
$$\frac{\partial g}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \vartheta \\ -\sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$



plus? $\rightarrow \neq \vec{0}$?

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \vartheta} = \vec{0}$$



N, S singularities

« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - GÉOMÉTRIE DES SURFACES

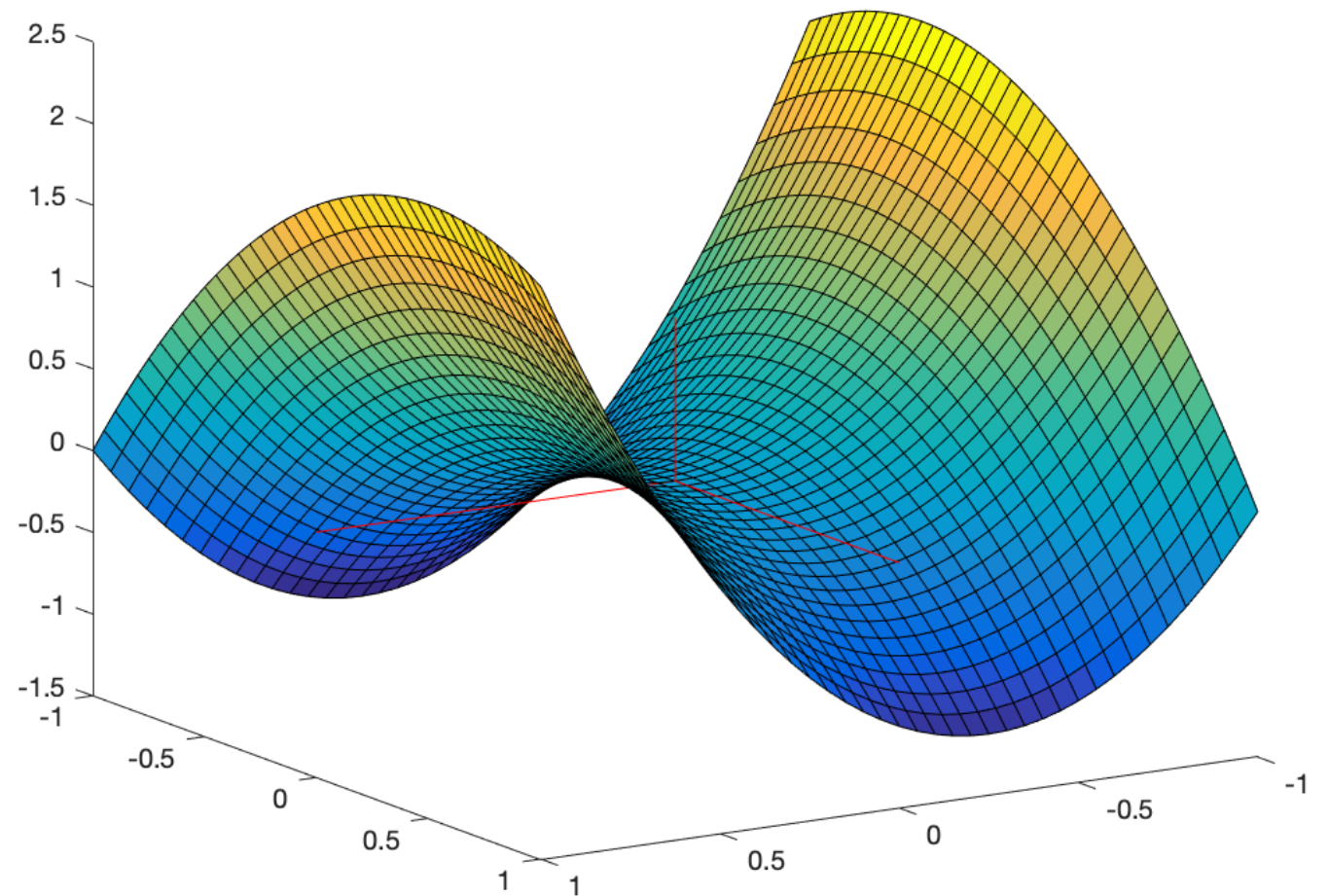
$$g: (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \\ 2u^2 - v^2 + uv \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit } p = g(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u + v \end{pmatrix} \rightsquigarrow \frac{\partial g}{\partial u}(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -v + u \end{pmatrix} \rightsquigarrow \frac{\partial g}{\partial v}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Puis } \vec{m}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



COURBURE

« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - GÉOMÉTRIE DES SURFACES

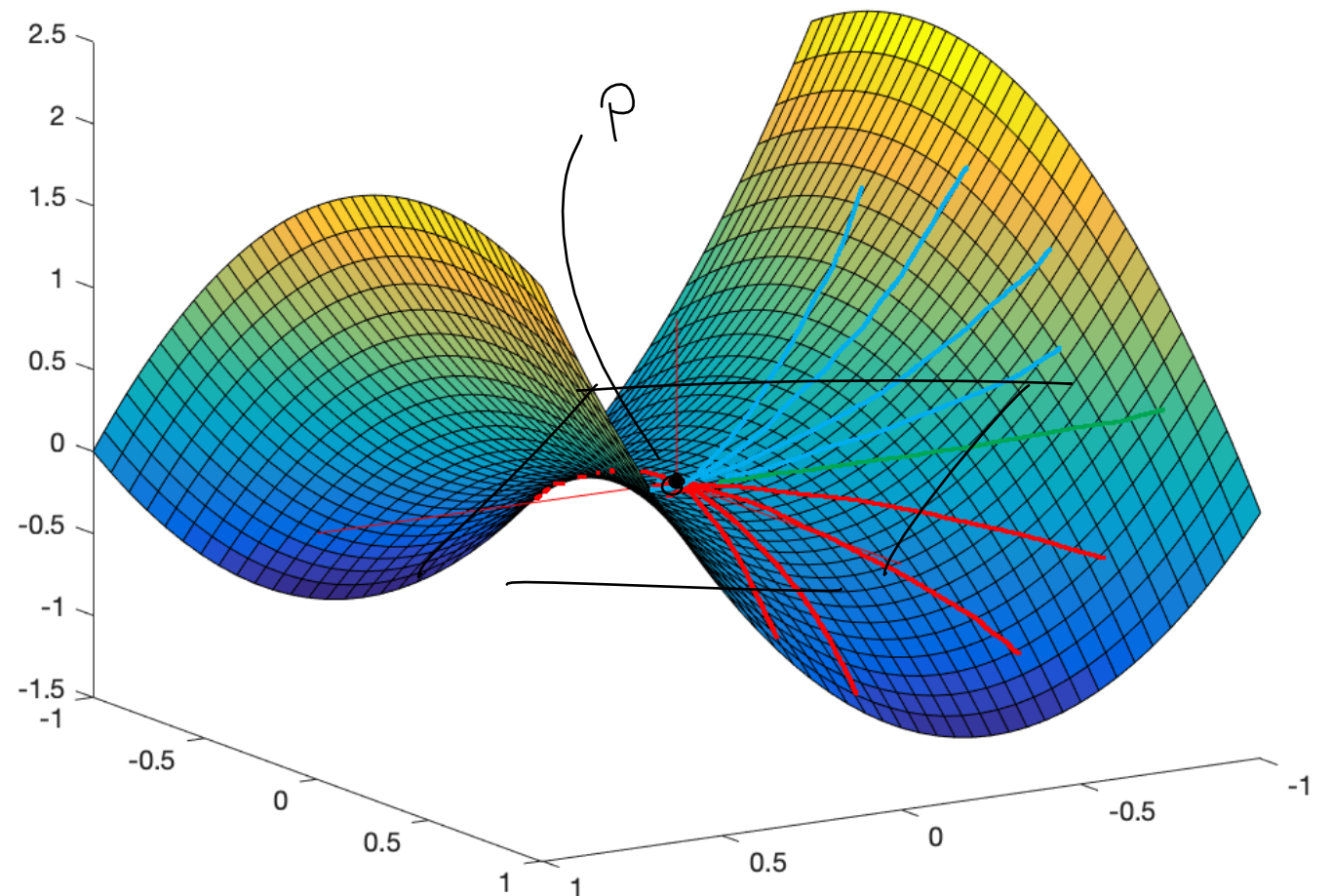
$$g: (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \\ 2u^2 - v^2 + uv \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit } P = g(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u + v \end{pmatrix} \rightsquigarrow \frac{\partial g}{\partial u}(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -v + u \end{pmatrix} \rightsquigarrow \frac{\partial g}{\partial v}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

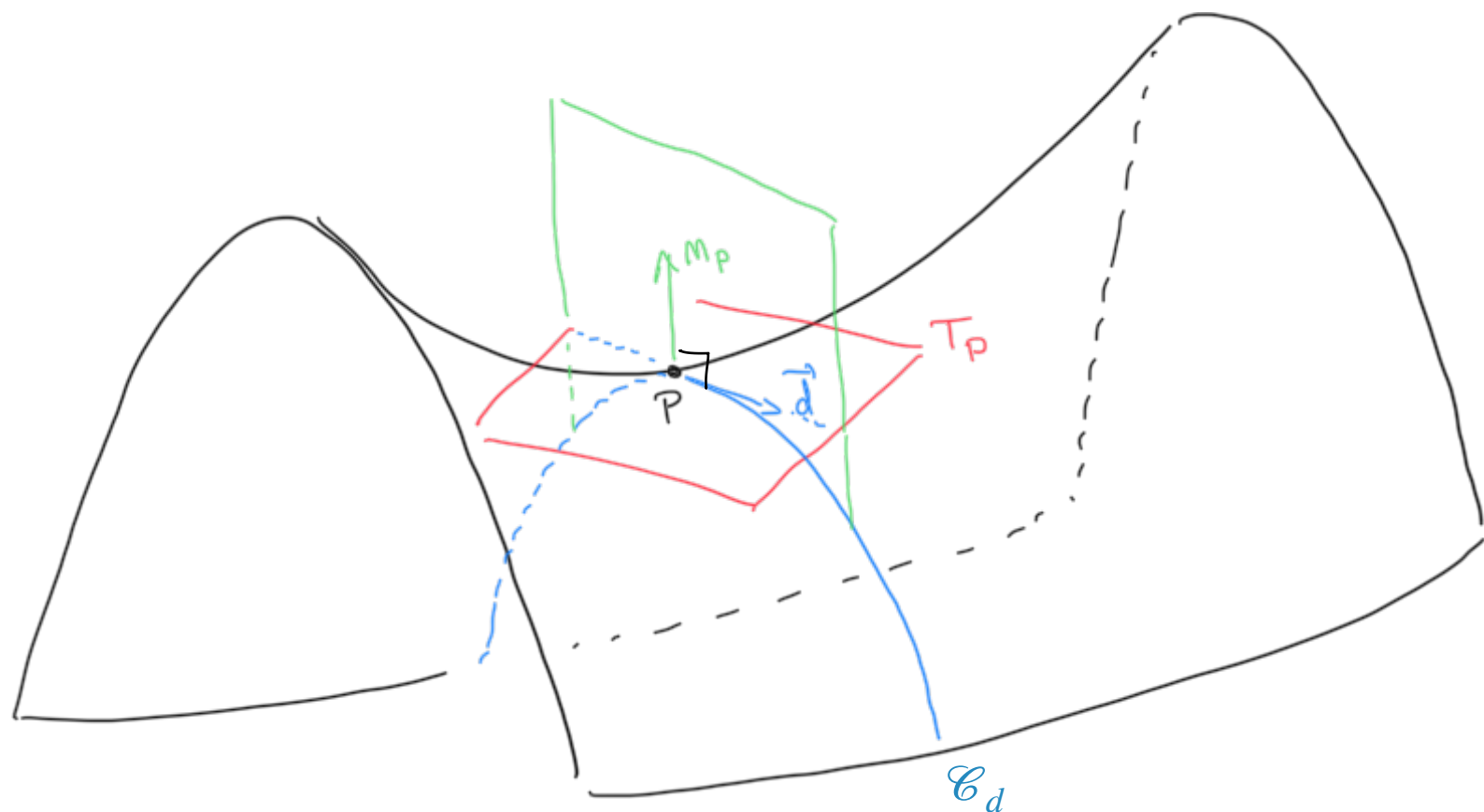
$$\text{Puis } \vec{m}_P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Pas une mais des courbures
(selon direction)

↓
vecteurs du plan
tangent

COURBURE NORMALE



Courbure normale dans la direction $\vec{d}$:

$$k_{\vec{d}}$$

$$k_{\vec{d}}$$



Dérivées secondes de f

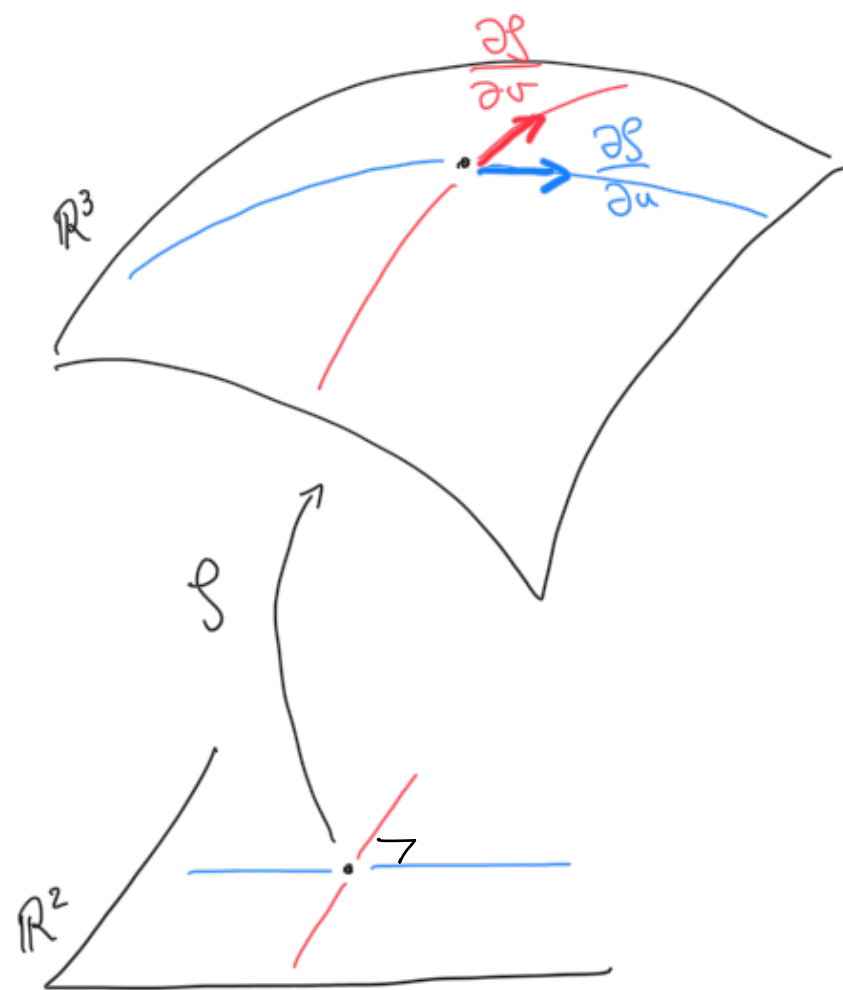
renormalisée par

Dérivées premières de f

Deuxième forme fondamentale

Première forme fondamentale

PREMIÈRE FORME FONDAMENTALE



Première forme fondamentale au point P :

$$I_P = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

montrant l'écart
à une base
orthonormale de
 $(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v})$

$$E = \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle = \left\| \frac{\partial f}{\partial u} \right\|^2 \sim 1$$

$$F = \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle \leftarrow 0 ?$$

$$G = \left\langle \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle = \left\| \frac{\partial f}{\partial v} \right\|^2 \sim 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} \sim 0$$

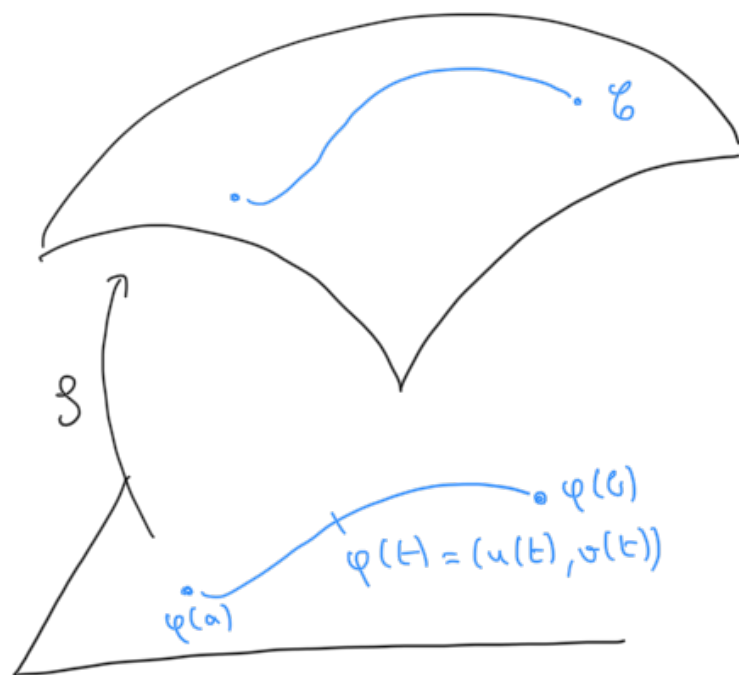
norme des
vects ~ 1

Tenseur métrique de la surface

Base $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$ orthonormale $\leadsto I_P = Id$

PREMIÈRE FORME FONDAMENTALE

Surfaces



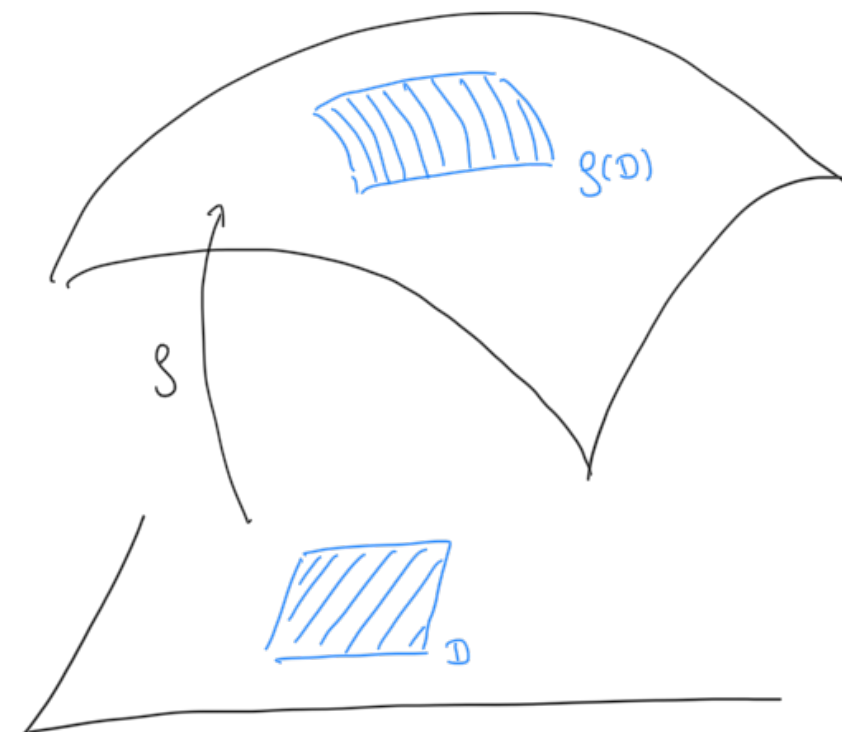
f « déforme »
les longueurs



I_P mesure cette
déformation

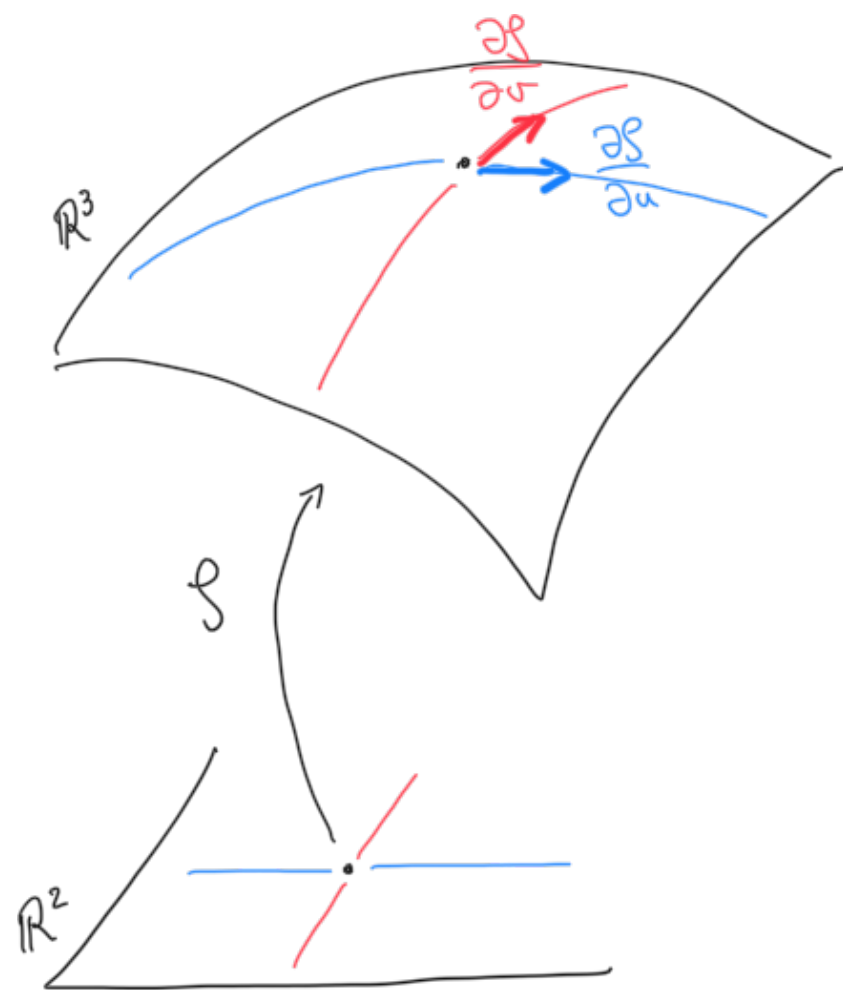
$$l(\mathcal{C}) = \int_a^b \sqrt{((u'(t), v'(t)) * I_P * (u'(t), v'(t))^t)} dt$$

Aires



$$\text{Aire}(f(D)) = \iint_D \sqrt{\det(I_P)} du dv$$

DEUXIÈME FORME FONDAMENTALE



Deuxième forme fondamentale au point P :

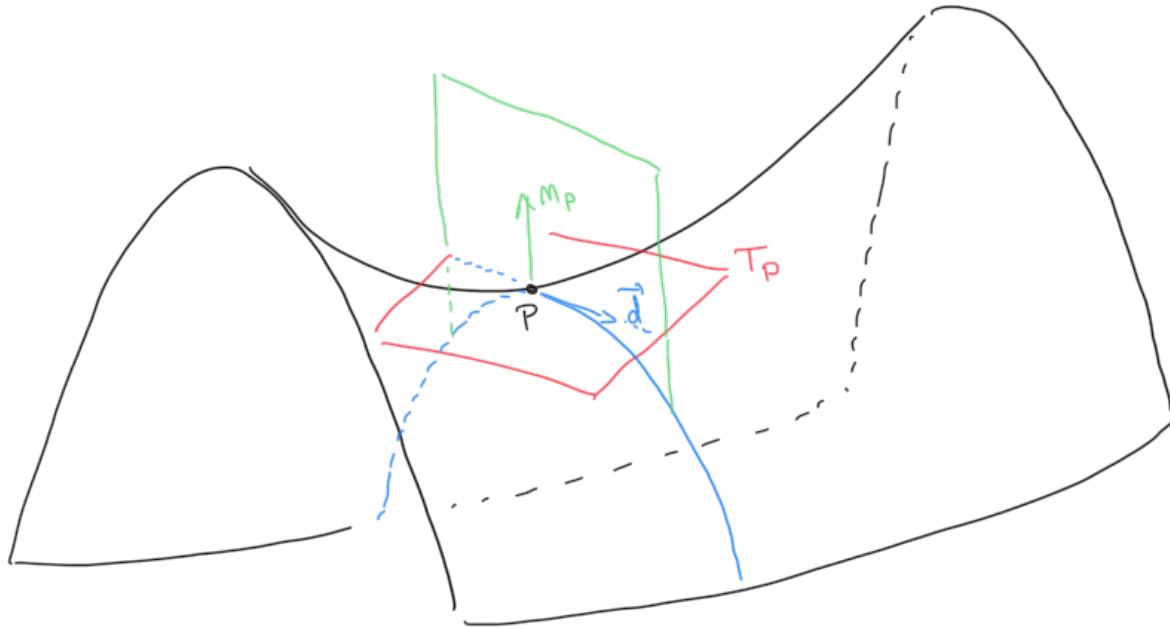
$$II_P = \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix}$$

$$l = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}, \vec{n}_P \right\rangle$$

$$m = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}, \vec{n}_P \right\rangle$$

$$n = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}, \vec{n}_P \right\rangle$$

COURBURE



La courbure normale varie comme un polynôme de degré 2 en fonction de d :

$$k_{\vec{d}} = \vec{d}^t \cdot \kappa_P \cdot \vec{d}$$



Tenseur de courbure au point P

$$\kappa_P = I_P^{-1} \times II_P$$

Dans le repère $(P, \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v})$ du plan tangent

$$R_{\vec{d}} = \vec{d}^t \cdot K_P \cdot \vec{d}$$

Si on diagonalise

K_P

vec. propres

$\vec{d}_1, \vec{d}_2 \perp$
forment une
base

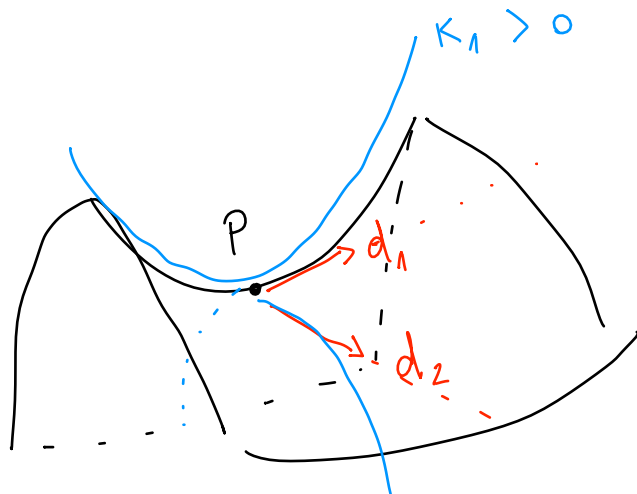
$$K_P = \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix}$$

K_1, K_2 val.
propres

$$d = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$d^t \cdot \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix} \cdot d = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 x \\ K_2 y \end{pmatrix} = \boxed{\begin{matrix} K_1 x^2 + K_2 y^2 \\ // \\ K_d \end{matrix}}$$

$\in \mathbb{R}$



$d_1, d_2 \rightsquigarrow$ directions où
la courb. est max/min
 $\left\{ \begin{matrix} K_1, K_2 : \text{courbures associées} \dots \end{matrix} \right.$



calculé ds le
plan tangent

2×2

K_P

$d_1, d_2 \rightsquigarrow$
vec. propres

vec 2D dans la base du
plan tangent $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$

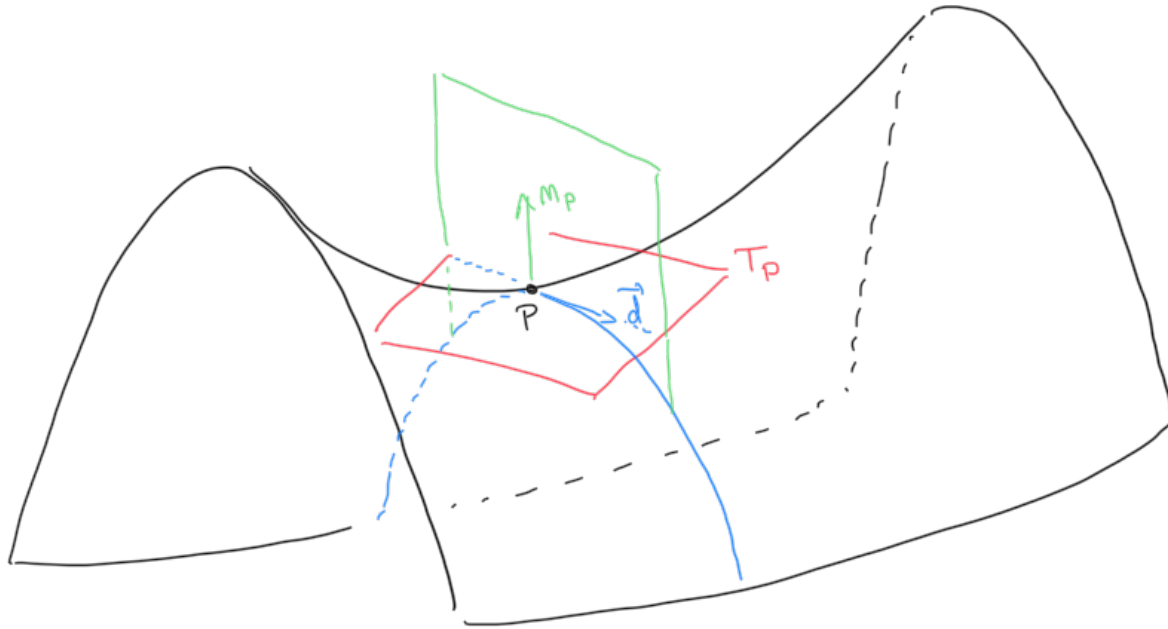
$$K_P = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix}$$

symétrique



diag. en base
orthonormale

COURBURE(S)



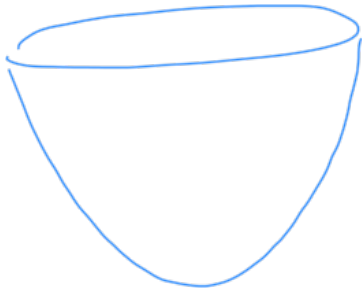
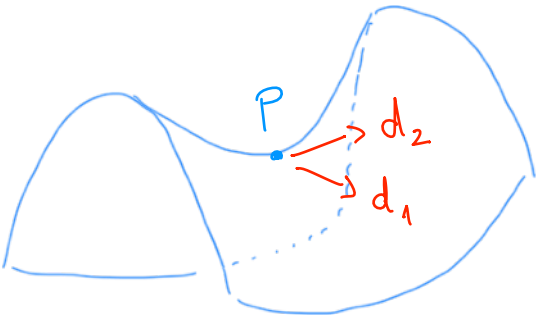
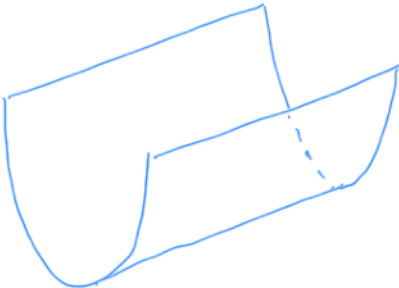
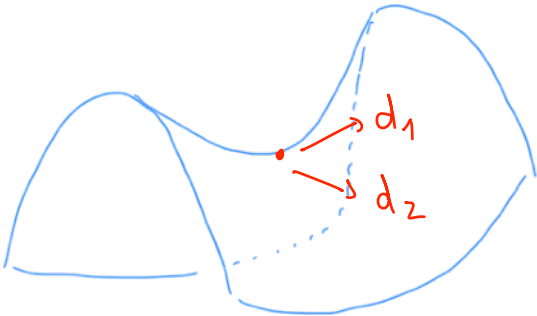
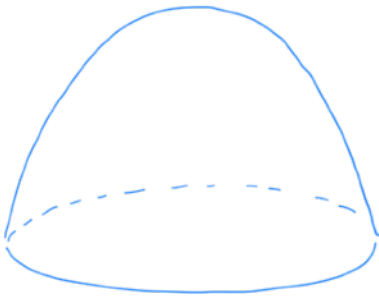
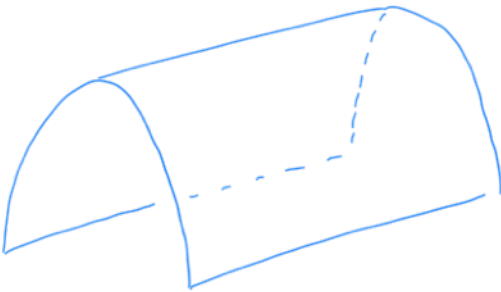
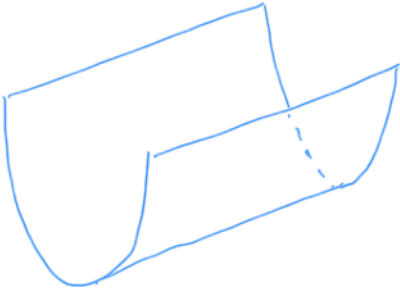
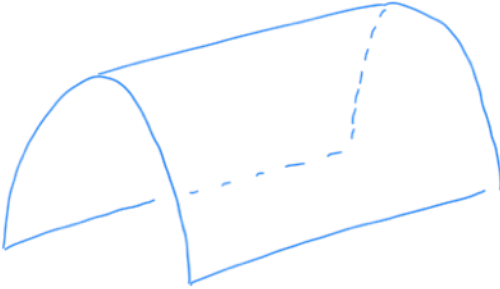
$$\kappa_P = I_P^{-1} \times II_P$$

- ▶ Matrice 2x2 symétrique
- ▶ Donc diagonalisable en base orthonormale

- ▶ Vecteurs propres : $\vec{d}_1, \vec{d}_2$ - **directions principales**
- ▶ Valeurs propres associées : κ_1, κ_2 - **courbures principales**
 - $\kappa_i > 0$: convexe selon $\vec{d}_i$
 - $\kappa_i = 0$: plat selon $\vec{d}_i$
 - $\kappa_i < 0$: concave selon $\vec{d}_i$

Extréma des courbures

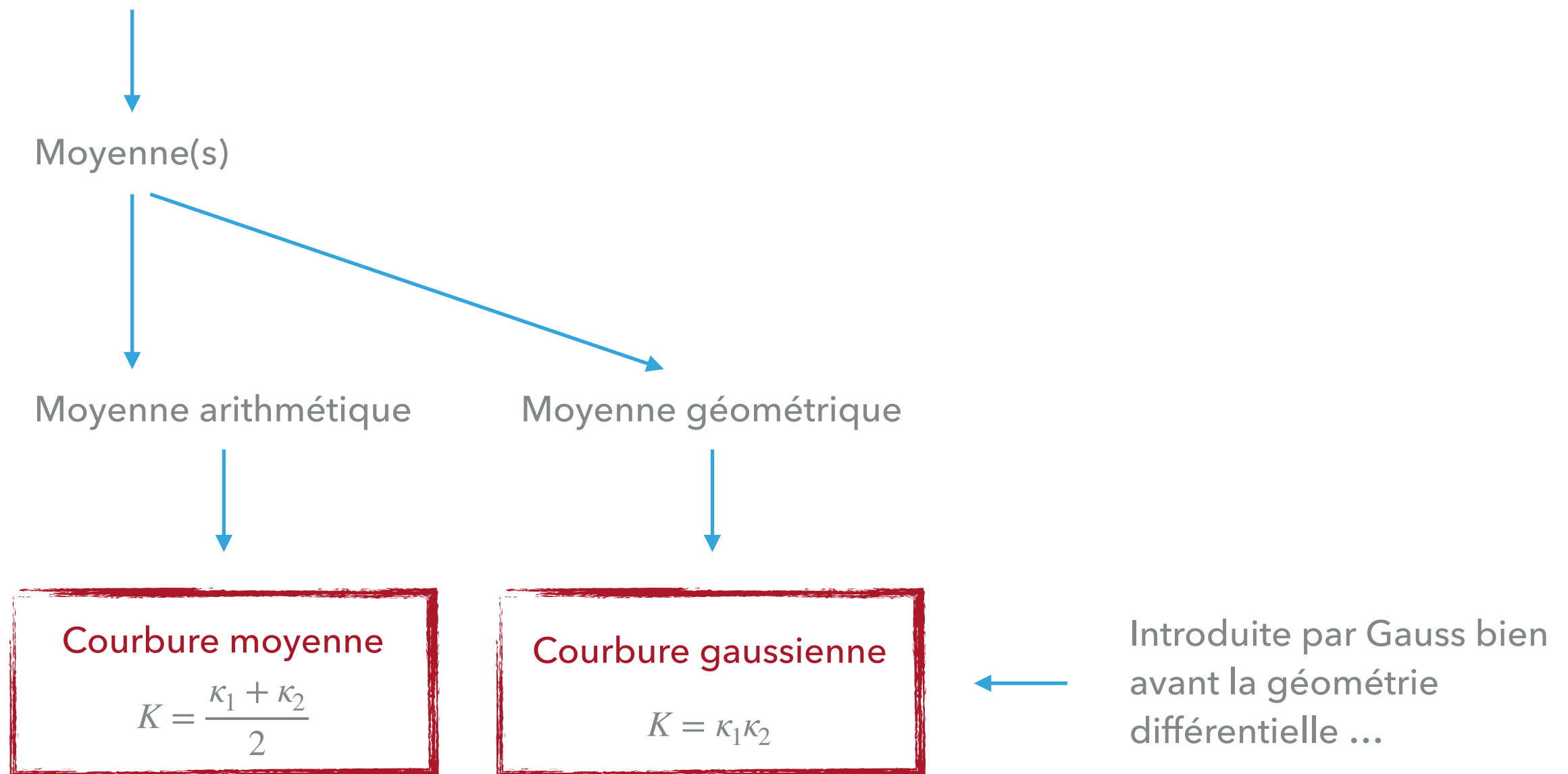
COURBURE(S)

$\vec{\kappa}_1$ $\vec{\kappa}_2$	> 0	< 0	$= 0$
> 0			
< 0			
$= 0$			

Classification locale

COURBURE(S)

Deux mesures ... difficile à manipuler (ex : carte de courbure, critère algorithmique de courbure ...)



ex. sphin

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\vartheta, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta \\ \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vartheta} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi \sin \vartheta \\ \cos \varphi \cos \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \vartheta \\ -\sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$I_P = \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\varphi = 0, \pi$ - isometrie / $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ degeneriert

$$I_P = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

$$E = \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vartheta}$$

$$F = \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

$$G = \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

$$\begin{aligned} E &= \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta + \cos^2 \varphi \cos^2 \vartheta \\ &= \cos^2 \varphi (\underbrace{\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta}_1) = \cos^2 \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= \sin^2 \varphi \cos^2 \vartheta + \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta + \cos^2 \varphi \\ &= \sin^2 \varphi (\underbrace{\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta}_1) + \cos^2 \varphi = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \cos \varphi \sin \varphi \cos \vartheta \sin \vartheta - \\ &\quad \cos \varphi \sin \varphi \cos \vartheta \sin \vartheta = 0 \end{aligned}$$



Equator: $\varphi = 0$

Normal: $\frac{\partial \rho}{\partial u} \wedge \frac{\partial \rho}{\partial v} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi \sin \vartheta & \cos \varphi \cos \vartheta & 0 \\ \cos \varphi \cos \vartheta & \cos \varphi \sin \vartheta & \cos \varphi \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \vartheta & -\sin \varphi \sin \vartheta & \cos \varphi \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi \cos \vartheta & \cos^2 \varphi \sin \vartheta & \cos \varphi \sin \varphi \sin^2 \vartheta + \cos \varphi \sin \varphi \cos^2 \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi \cos \vartheta & \cos^2 \varphi \sin \vartheta & \cos \varphi \sin \varphi \end{pmatrix}$

$= \cos \varphi \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta & \cos \varphi \sin \vartheta & \sin \varphi \end{pmatrix} \xrightarrow{\| \cdot \|} \sqrt{\cos^2 \varphi \left(\cos^2 \varphi \cos^2 \vartheta + \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta + \sin^2 \varphi \right)} = \sqrt{\cos^2 \varphi}$

unitaire

$m_p = \frac{\cos \varphi \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta & \cos \varphi \sin \vartheta & \sin \varphi \end{pmatrix}}{|\cos \varphi|}$

$\text{signe}(\cos \varphi)$

$\sqrt{\cos^2 \varphi}$

$|\cos \varphi|$

$$\underline{\underline{\Pi}}_p$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vartheta} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi \sin \vartheta \\ \cos \varphi \cos \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \vartheta \\ -\sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi \cos \vartheta \\ -\cos \varphi \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \text{sign}(\cos \varphi) \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta \\ \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

m

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi \cos \vartheta \\ -\cos \varphi \sin \vartheta \\ -\sin \varphi \end{pmatrix} \cdot //$$

m

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta \partial \varphi} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \sin \vartheta \\ -\sin \varphi \cos \vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \cdot //$$

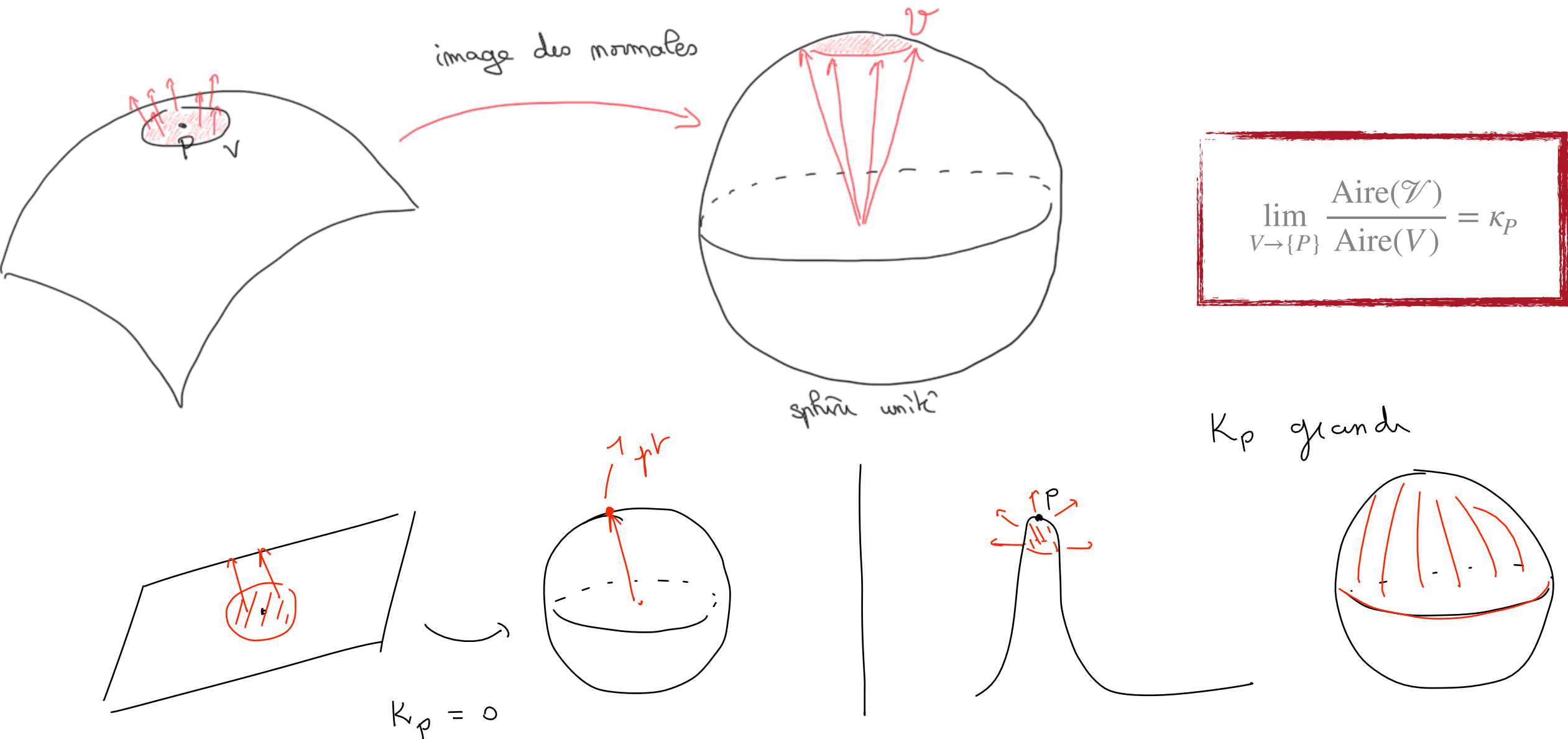
$$\underline{\underline{\Pi}}_p = \begin{pmatrix} e & m \\ m & m \end{pmatrix}$$

...

$$K_p = \underline{\underline{I}}_p^{-1} \times \underline{\underline{\Pi}}_p$$

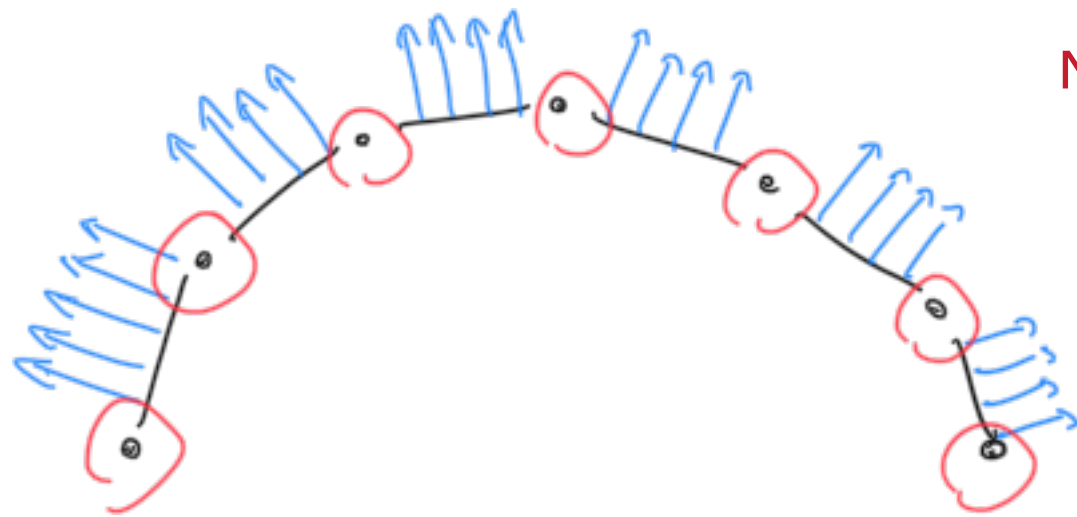
COURBURE GAUSSIENNE

Theorema Egregium de Gauss



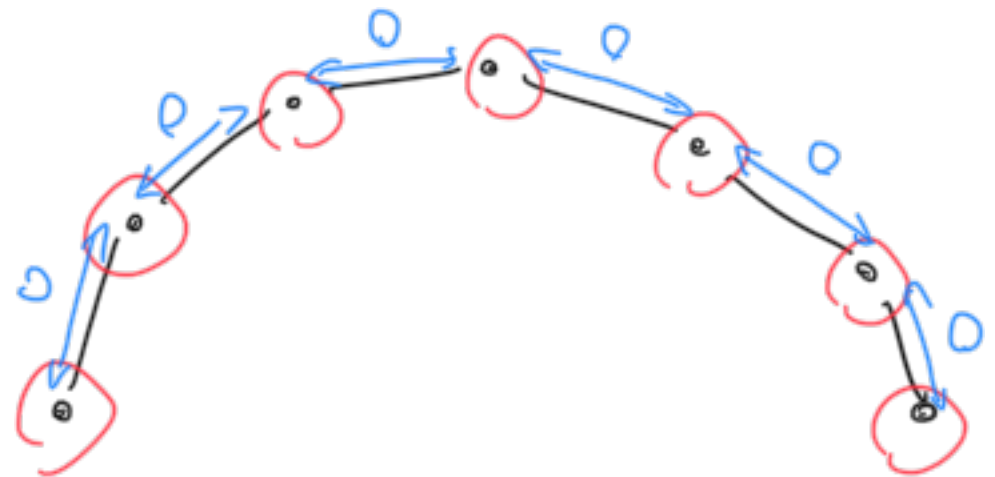
GÉOMÉTRIE DES MAILLAGES

NORMALES/COURBURES D'UN MAILLAGE ?



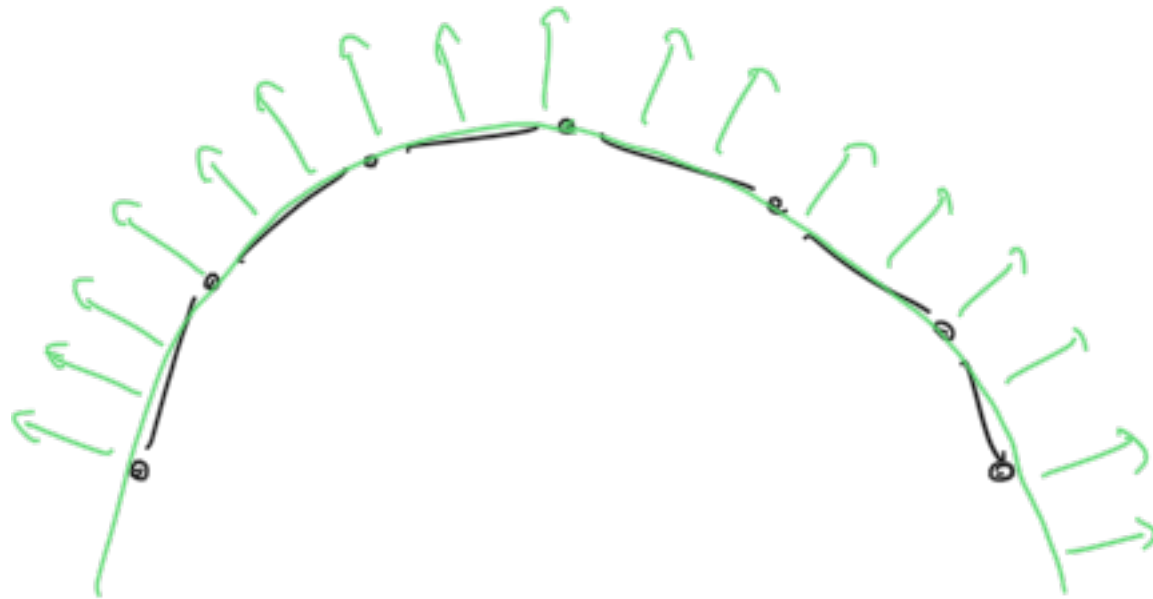
Normales

Non défini



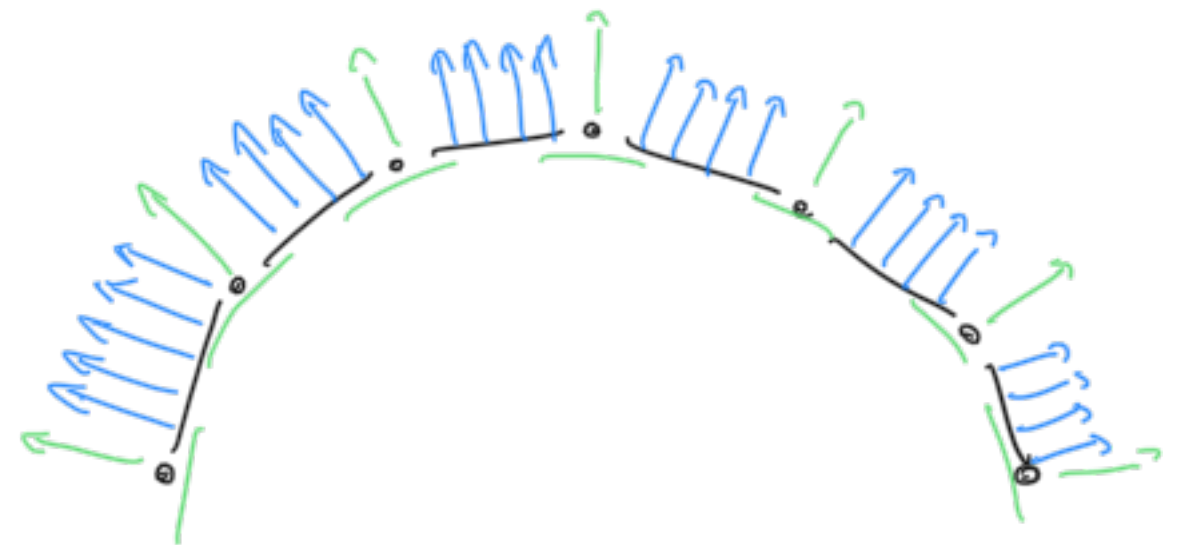
Courbure(s)

NORMALES/COURBURES D'UN MAILLAGE ?



Intuition ...

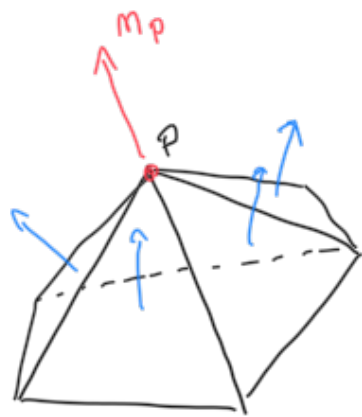
Le maillage est la
discrétisation d'une surface
continue



Pb : calculer des valeurs approchées cohérentes

→ approximations / heuristiques

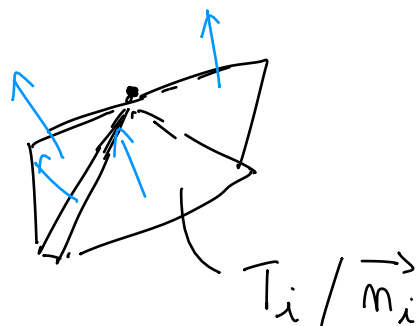
ESTIMATION DES NORMALES



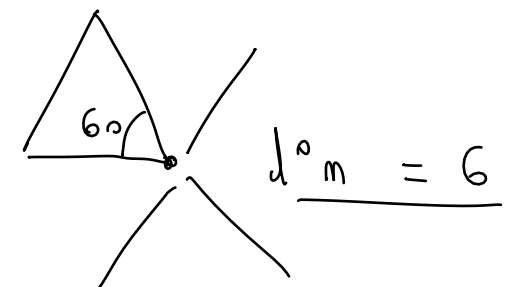
On estime généralement la **normale au point P** comme :

- Moyenne des normales des faces voisines
- Eventuellement pondérée par l'aire des faces

⚠ Faces inégales

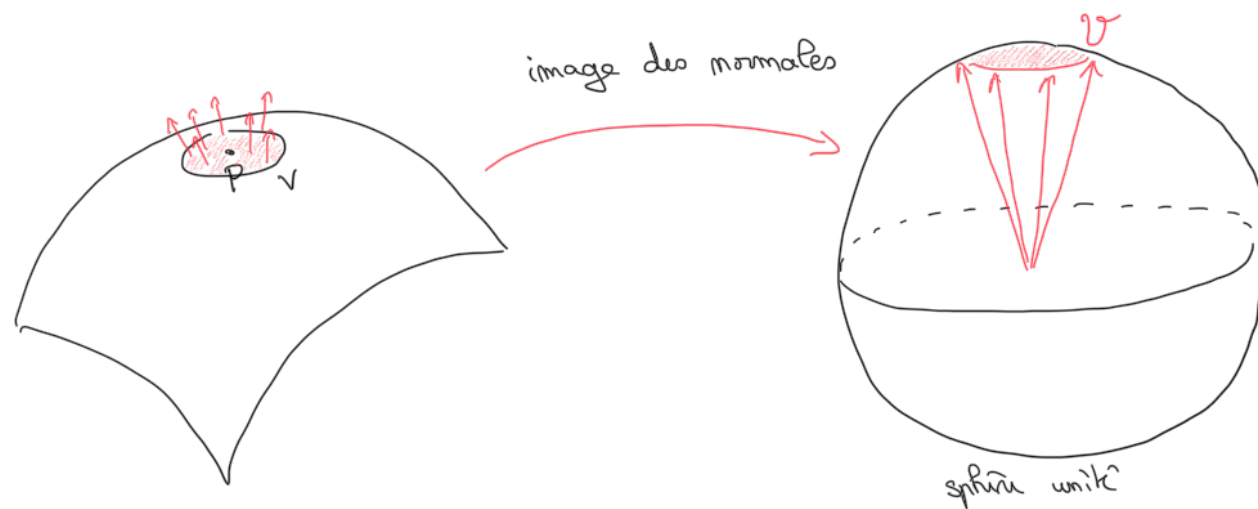


$$\vec{N} = \sum \text{aire}(T_i) \times \vec{m}_i$$
$$\vec{m}_p = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$$

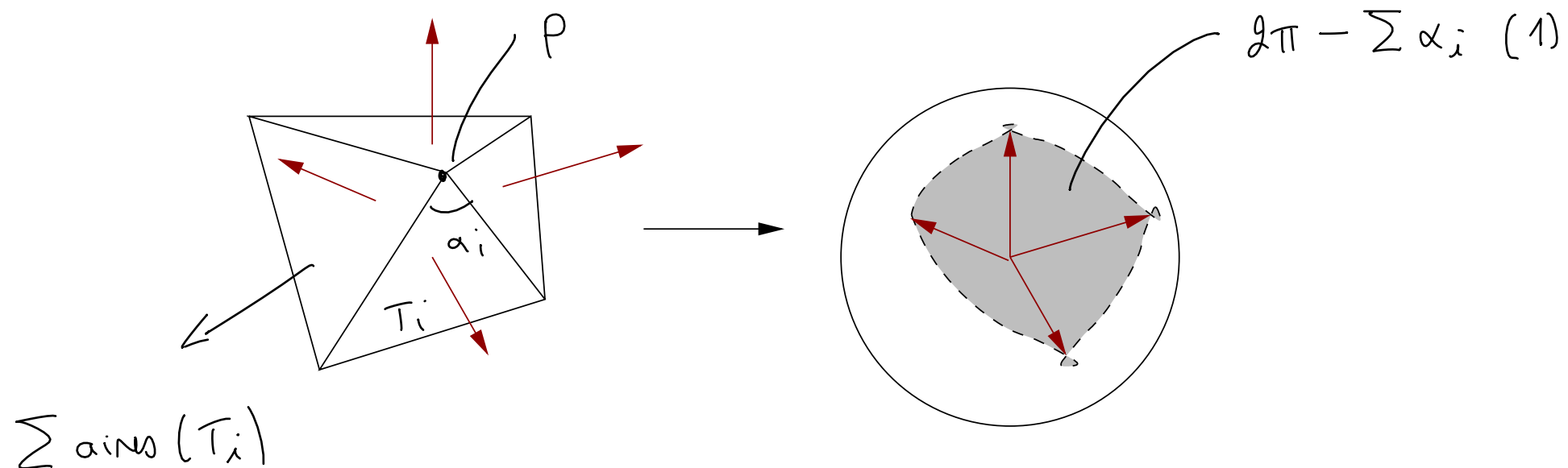


$$6 \times 60 = 360$$

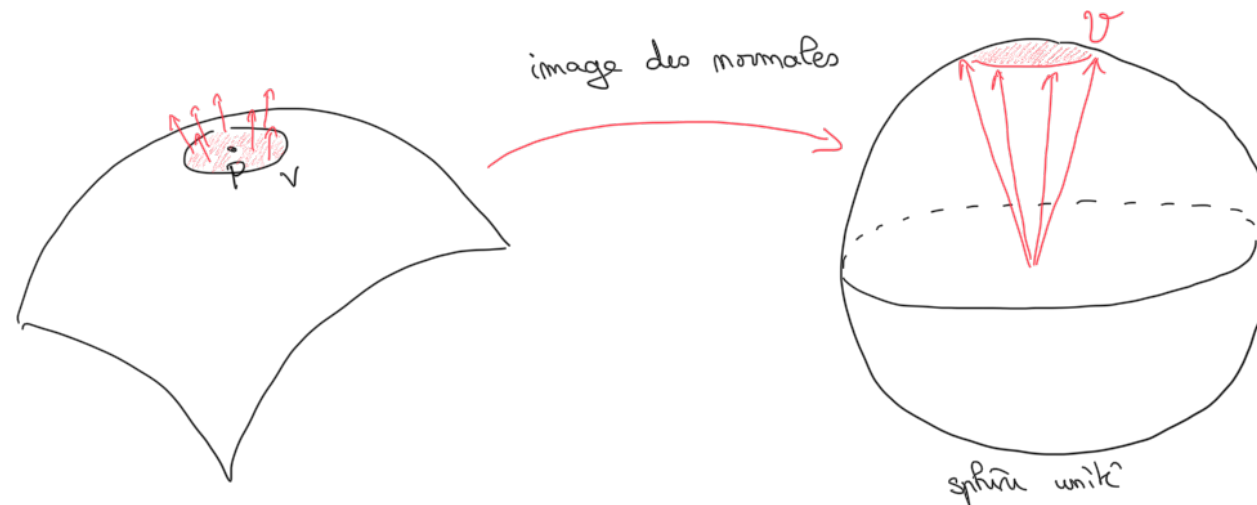
COURBURES : TH. EGREGIUM DE GAUSS ET DÉFAUT ANGULAIRE



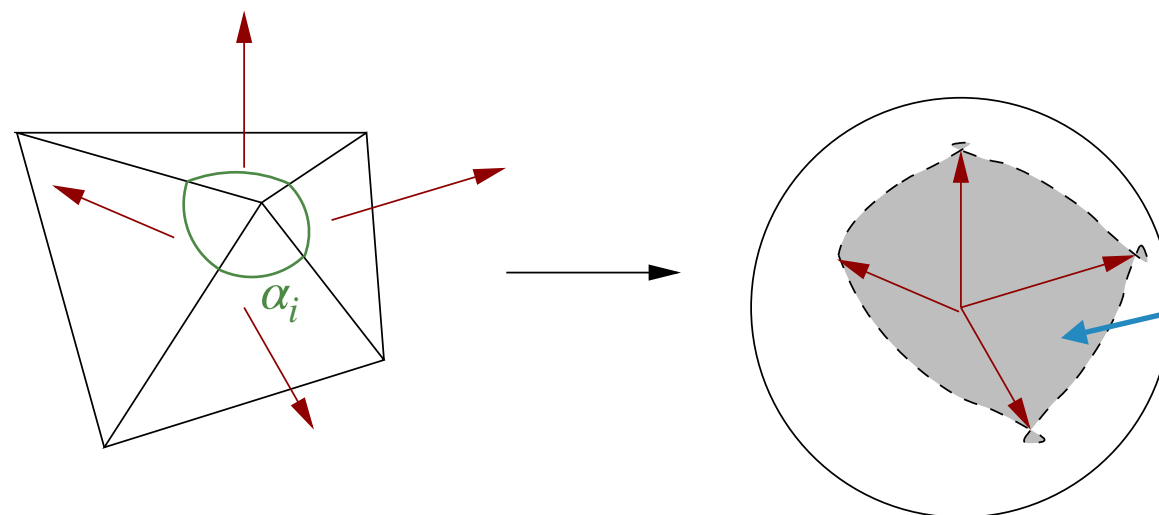
$$\lim_{V \rightarrow \{P\}} \frac{\text{Aire}(\mathcal{V})}{\text{Aire}(V)} = \kappa_P$$



COURBURES : TH. EGREGIUM DE GAUSS ET DÉFAUT ANGULAIRE



$$\lim_{V \rightarrow \{p\}} \frac{\text{Aire}(\mathcal{V})}{\text{Aire}(V)} = \kappa_p$$

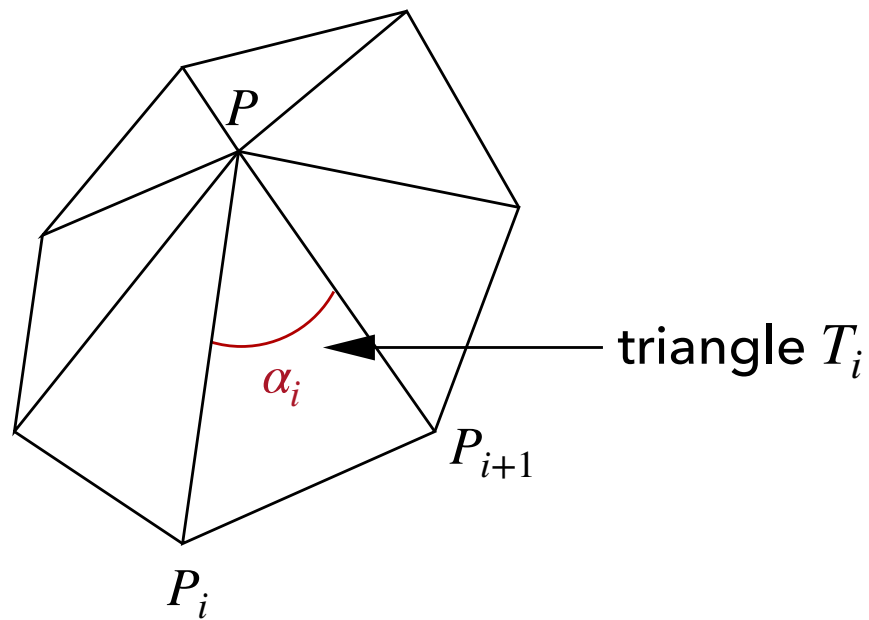


Valeur de cette aire sphérique :

$$2\pi - \sum_i \alpha_i$$

Défaut angulaire

COURBURE GAUSSIENNE « CLASSIQUE » (REGGE)



Approximation de la courbure Gaussienne :

$$K_P = \frac{2\pi - \sum_i \alpha_i}{\sum_i \text{Aire}(T_i)} \quad \text{au point } P$$

- ▶ C'est la formule que vous avez implémentée au TP1
- ▶ Peu précise, dépend du maillage
- ▶ Ne converge pas

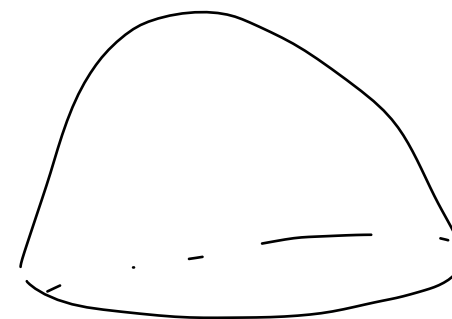
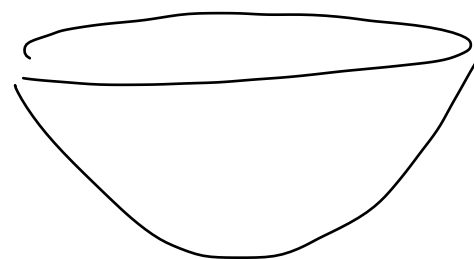
maillage — discrétisation surf. continue
 K_P $\not\rightarrow$ K continue

$$K_p$$

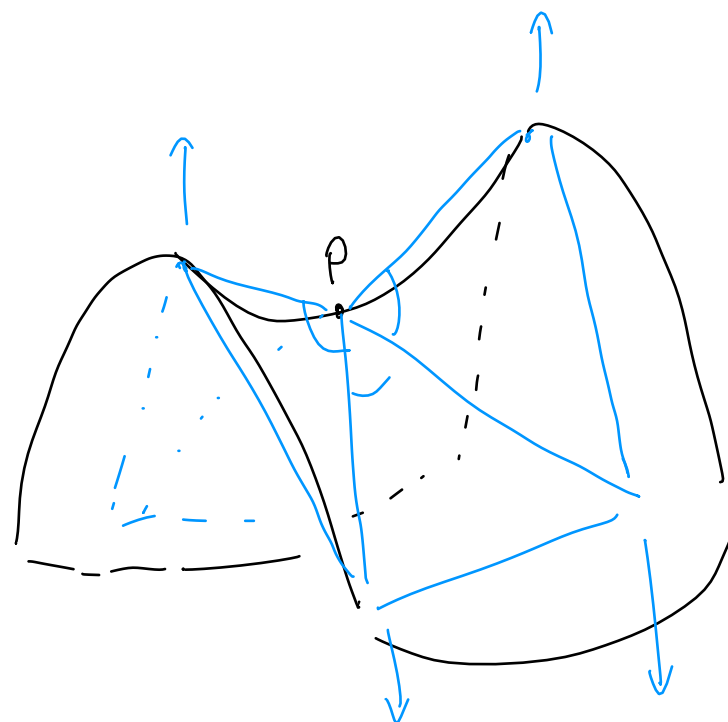
$$K_p = K_1 \cdot K_2$$



K_1, K_2 same
signs

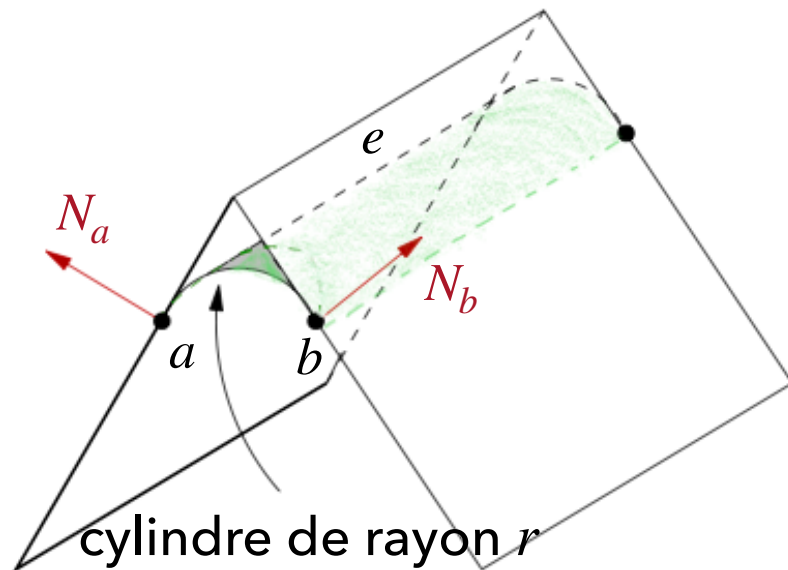


< 0
 K_1, K_2 signs
opposes



$$\sum \alpha_i > 2\pi$$

COURBURE MOYENNE « CLASSIQUE »

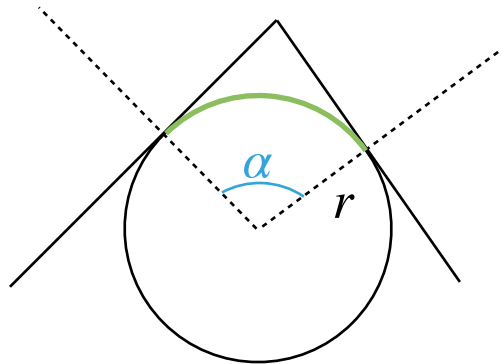


- Aire de la portion de cylindre :

$$l(e) \cdot \alpha \cdot r$$

- Intégrale de la courbure moyenne sur cette portion :

$$\frac{1}{2r} \cdot l(e) \cdot \alpha \cdot r = \frac{1}{2} \cdot l(e) \cdot \alpha$$



Approximation de la courbure moyenne :

$$H_e = \frac{1}{2} l(e) \cdot \alpha \quad \text{le long de l'arête } e$$

- Peu précise ...
- Ne converge pas

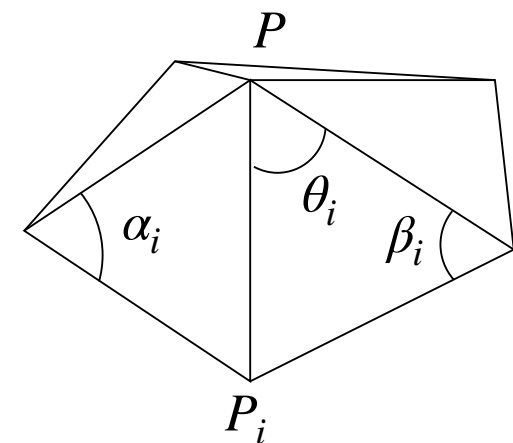
APPROXIMATIONS PLUS FINES

On the angular defect of triangulations and the pointwise approximation of curvatures

V. Borrelli, F. Cazals, J.-M. Morvan

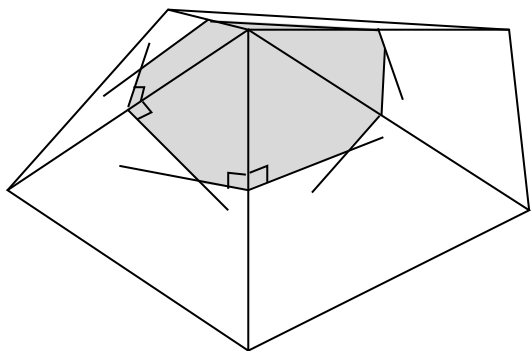
Discrete Differential-Geometry Operators for Triangulated 2-Manifolds

M. Meyer, M. Desbrun, P. Schröder, and A. Barr



$$H_P \cdot N_P = \frac{1}{2 \text{Aire}_{\text{mixte}}} \sum_i (\cot \alpha_i + \cot \beta_i) (P - P_i)$$

$$K(P) = \frac{2\pi - \sum_i \theta_i}{\text{Aire}_{\text{mixte}}}$$



La convergences n'est pas garantie :

- dépend de la triangulation
plus elle est régulière, meilleure est la convergence
 - idéal : régulière, valence 6
- sur une triangulation irrégulière, non garantie
 - au mieux, convergence en norme $\mathcal{L}_1$

AUTRES APPROCHES

On the angular defect of triangulations and the pointwise approximation of curvatures

V. Borrelli, F. Cazals, J.-M. Morvan

Discrete Differential-Geometry Operators for Triangulated 2-Manifolds

M. Meyer, M. Desbrun, P. Schröder, and A. Barr

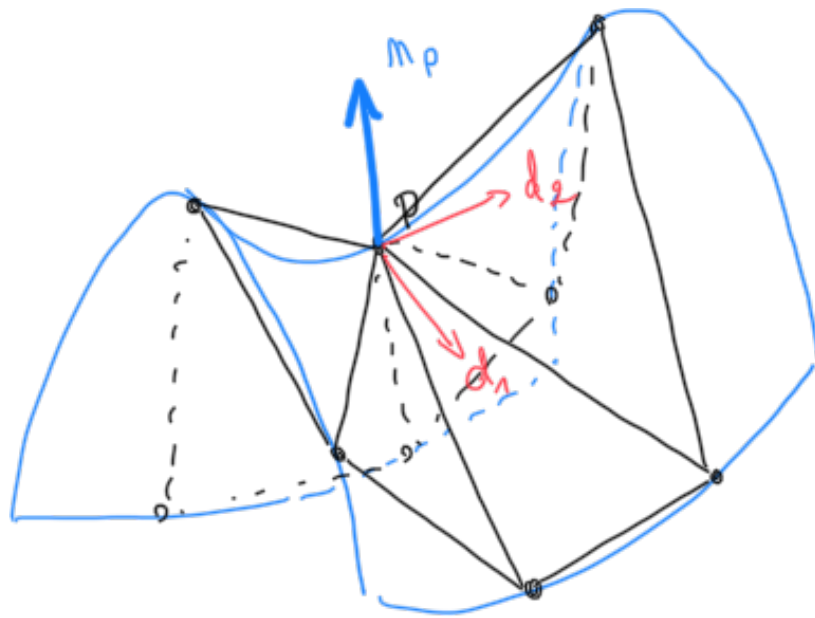
Estimating the Tensor of Curvature of a Surface from a Polyhedral Approximation

G. Taubin



Estimation de K_p (tenseur de courbure)

CALCUL VIA UNE SURFACE CONTINUE



Ajuster une surface lisse
(paramétrique ou cartésienne)
au voisinage de P



Calculer normale et courbures
de la surface lisse

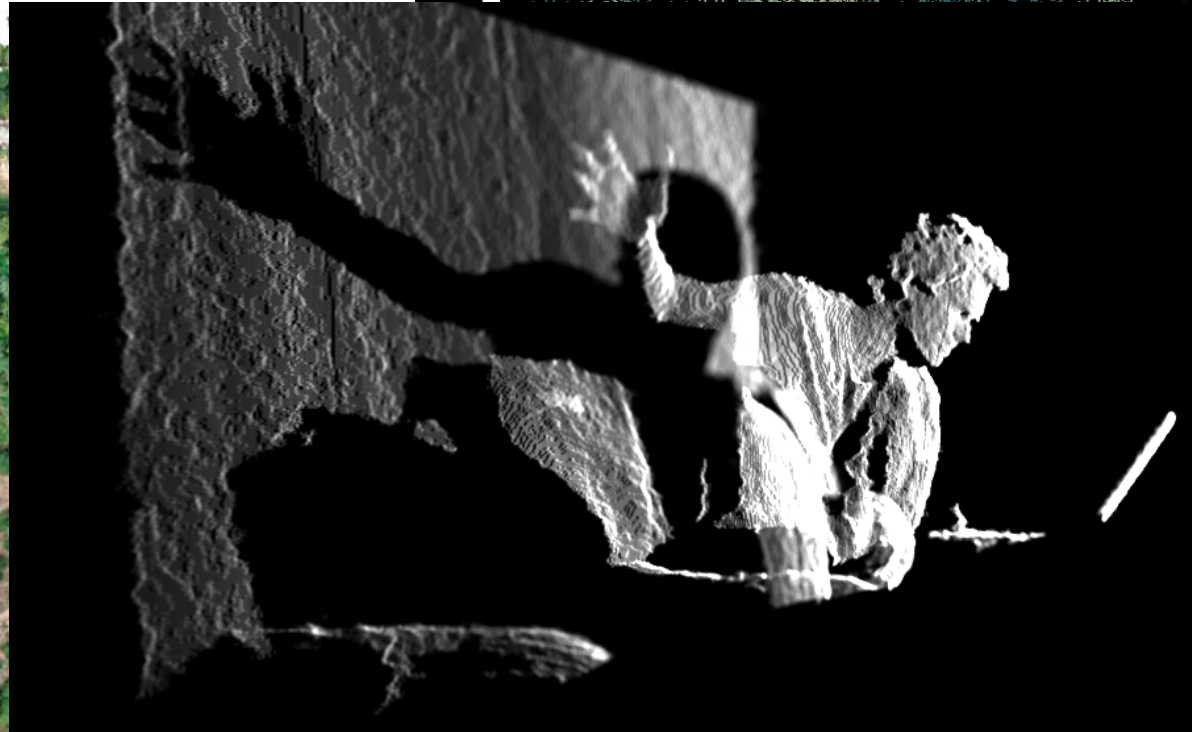
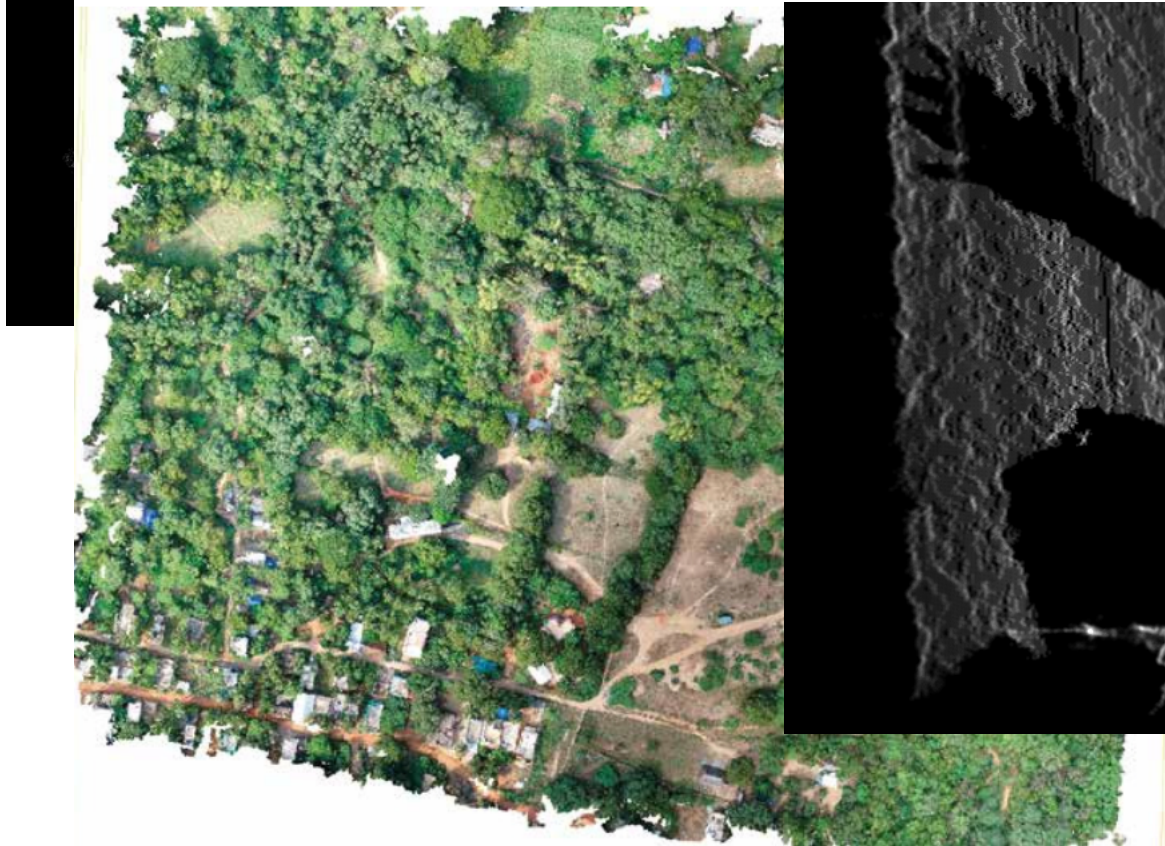
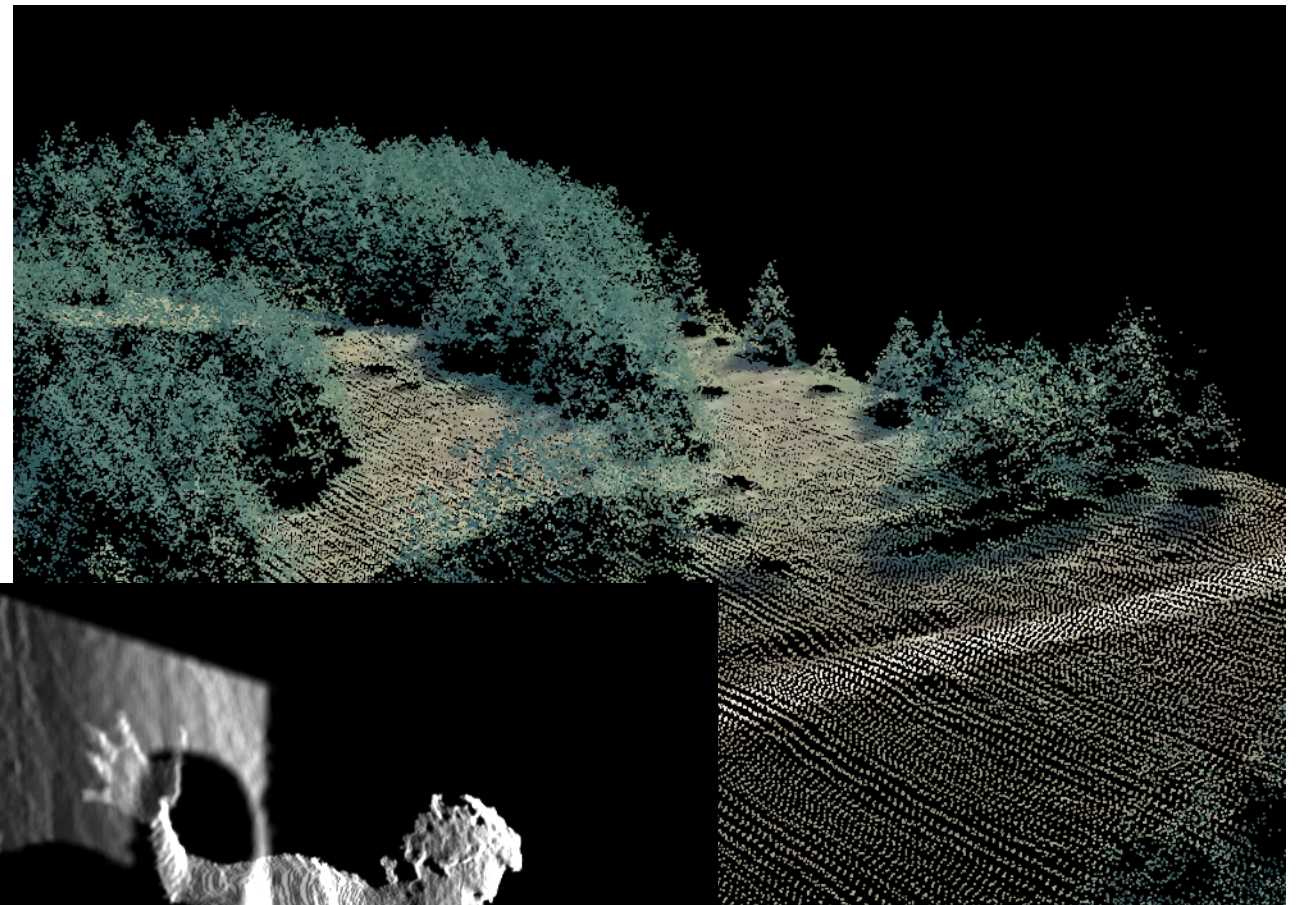
- Méthode **plus lente** mais **plus stable**
- La question est alors de bien approcher localement le maillage

GÉOMÉTRIE D'UN NUAGE DE POINTS

GÉOMÉTRIE D'UN NUAGE DE POINTS

Sujet très actif vu le développement des capteurs de numérisation :

- LiDAR
- Caméras temps de vol (Kinect etc. ...)
- Stéréo-photogrammétrie



AR



Kinect



UAV Stéréo-photogrammétrie

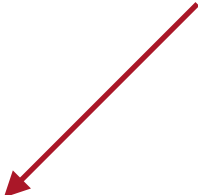
Stéréo-photogrammétrie

GÉOMÉTRIE D'UN NUAGE DE POINTS

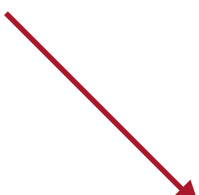
Sujet très actif vu le développement des capteurs de numérisation :

- LiDAR
- Caméras temps de vol (Kinect etc. ...)
- Stéréo-photogrammétrie

Comment estimer la géométrie locale directement à partir du nuage de points ?



Approches par
ajustement de surfaces
lisses



Approches par étude de la
distribution des points

- Analyse en composantes principales

→ Cf. TP

VARIÉTÉS

VARIÉTÉS (MANIFOLDS)

Qu'est-ce qu'une surface dans $\mathbb{R}^3$?



(2)-variétés :

formalisation très générale

- Maillages
- Surfaces paramétriques
- Surfaces implicites



Exemples de surfaces,
modèles surfaciques ...

Une variété de dimension n (dans $\mathbb{R}^m$) est un sous-ensemble $M \subseteq \mathbb{R}^m$ tel que tout point de M a un voisinage homéomorphisme à un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$.

$f : E \rightarrow F$ **homéomorphisme** si f bijective, continue,
d'inverse continue (déformation continue).

VARIÉTÉS (MANIFOLDS)

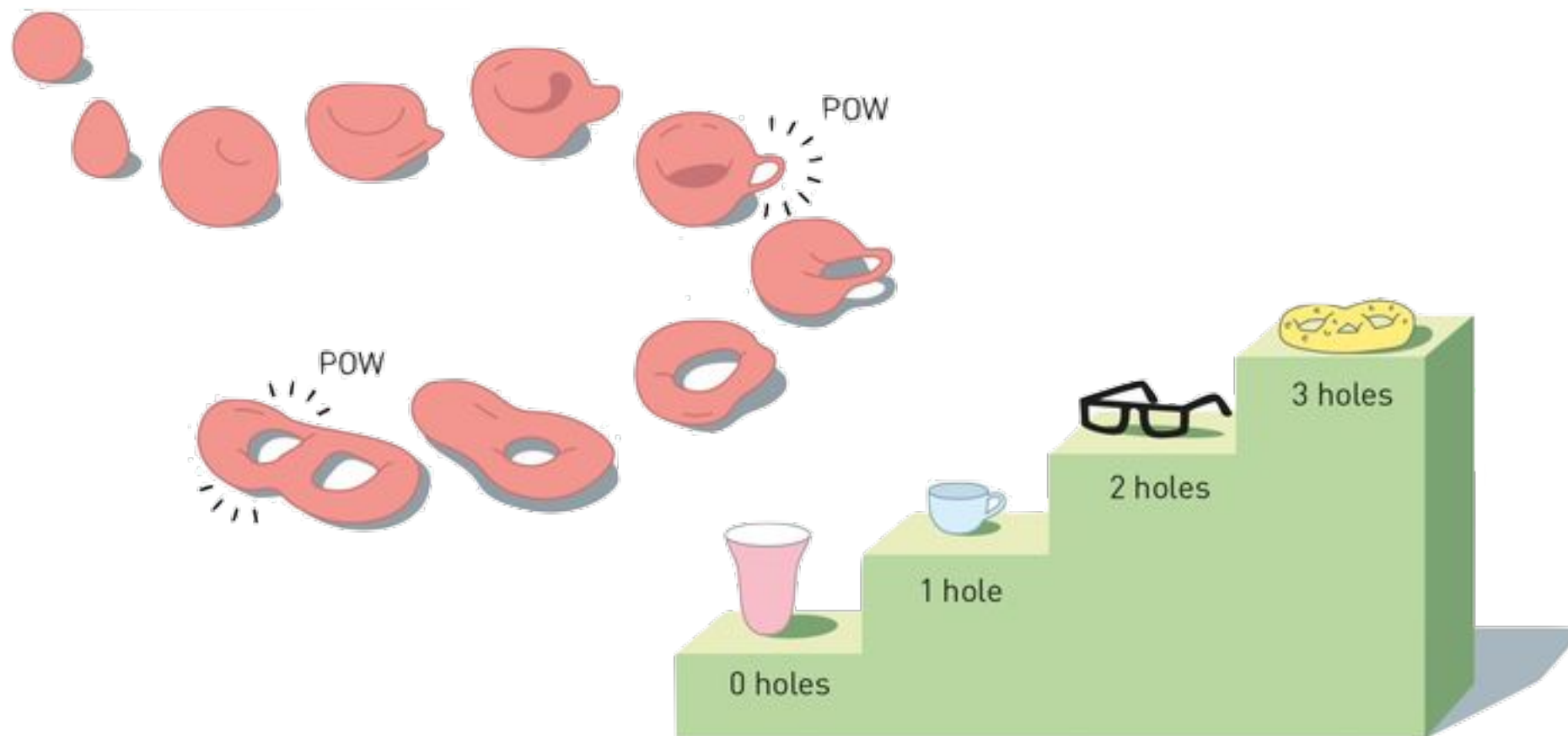
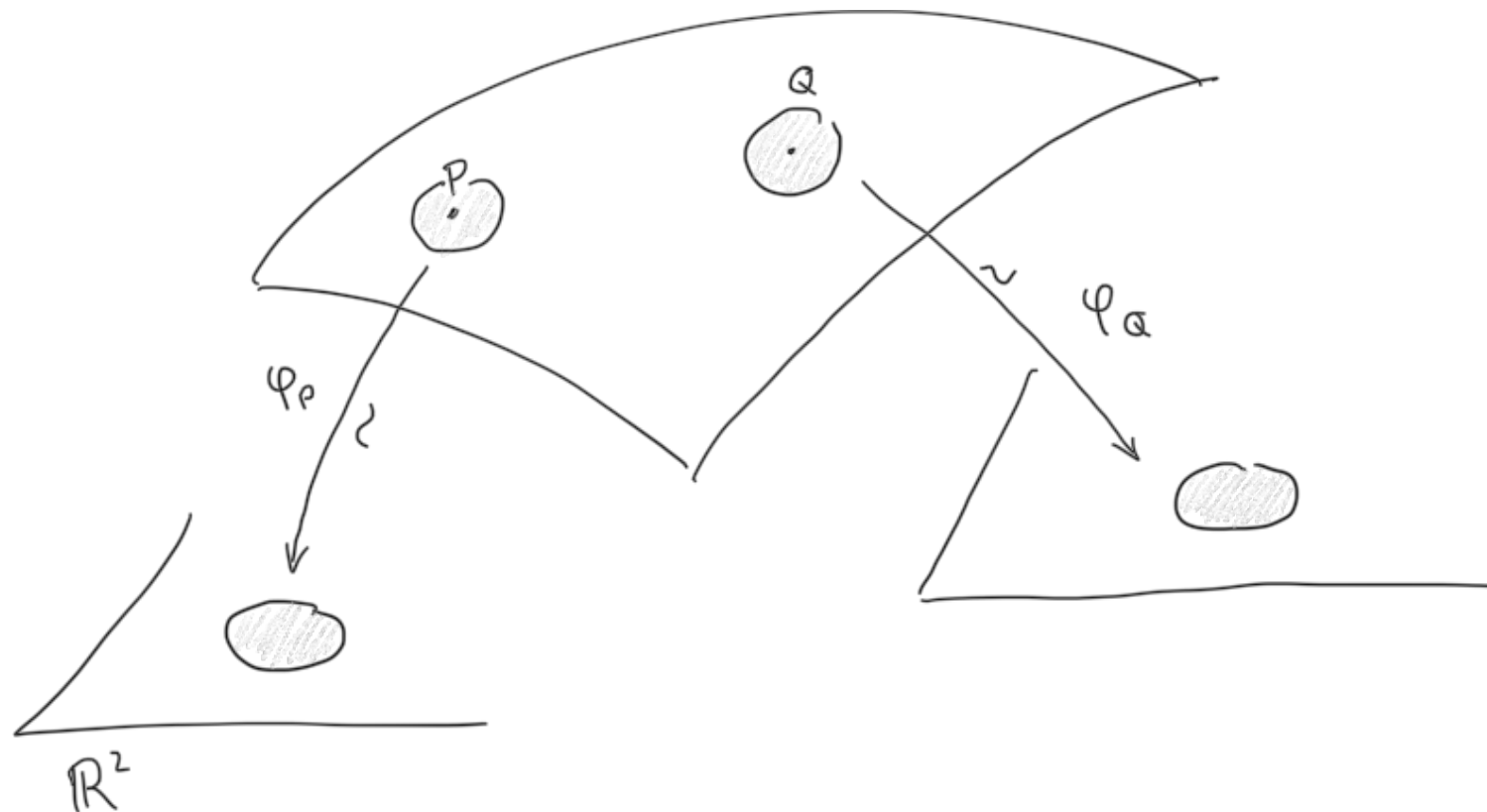


Illustration: ©Johan Jarneslid/The Royal Swedish Academy of Sciences

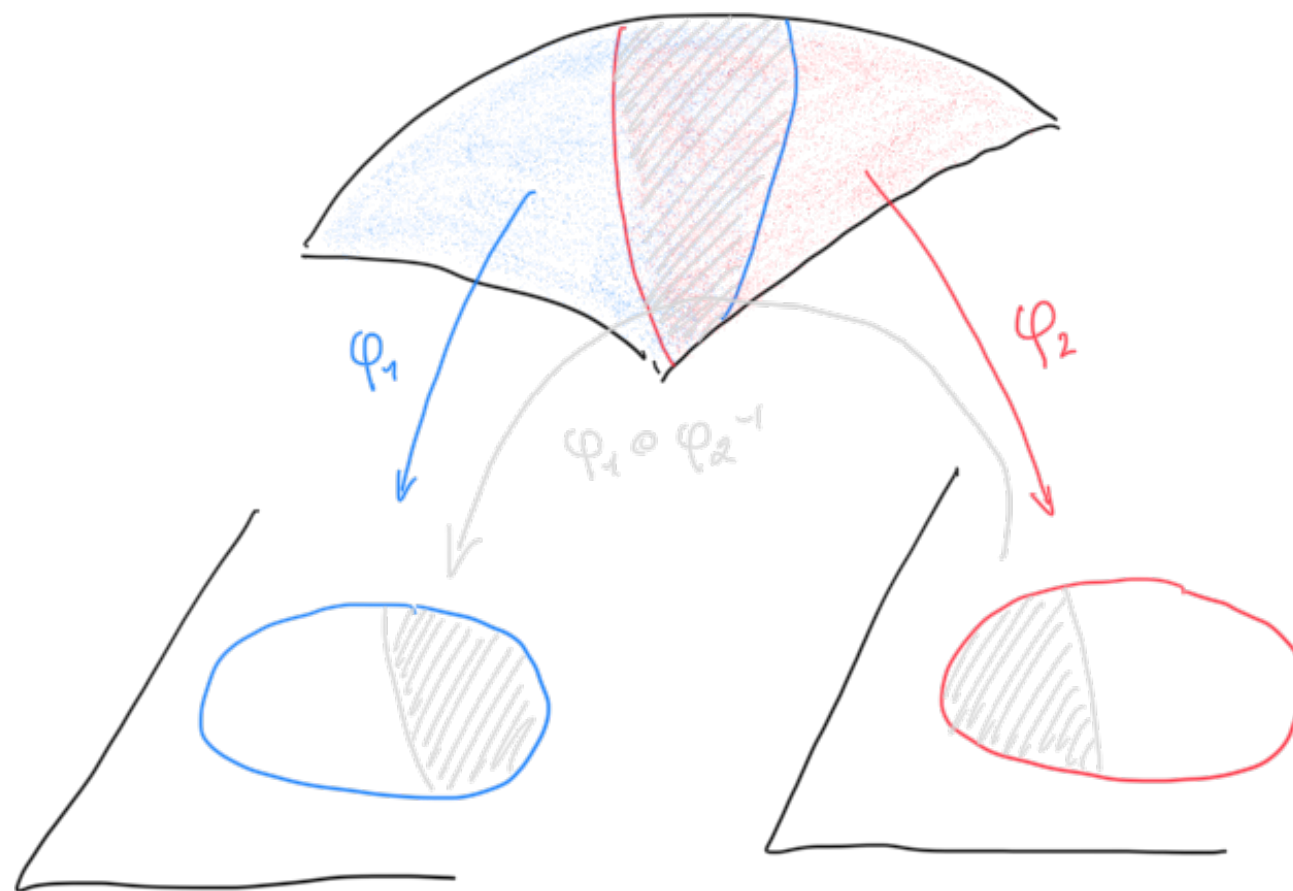
$f : E \rightarrow F$ **homéomorphisme** si f bijective, continue,
d'inverse continue (déformation continue).

VARIÉTÉS (MANIFOLDS)



Une variété (manifold) de dimension n (dans $\mathbb{R}^m$) est un sous-ensemble $M \subseteq \mathbb{R}^m$ tel que tout point de M a un voisinage homéomorphisme à un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$.

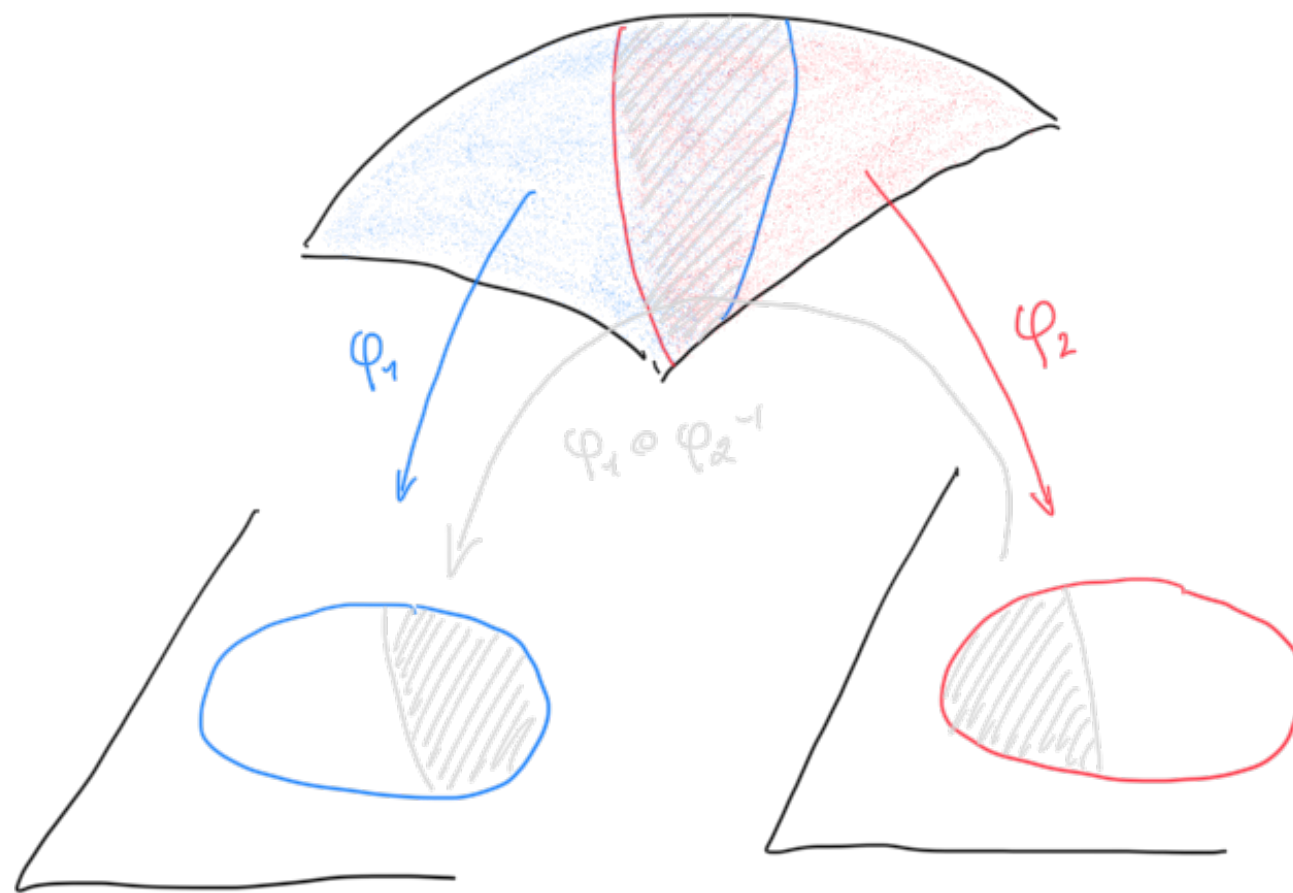
VARIÉTÉS (MANIFOLDS)



- ▶ Atlas de cartes $\{\varphi_i; i \in I\}$
- ▶ Compatibles de classe $\mathcal{C}^k$

Une variété (manifold) différentielle de dimension n (dans $\mathbb{R}^m$) est un sous-ensemble $M \subseteq \mathbb{R}^m$ tel que tout point de M a un voisinage homéomorphisme à un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$.

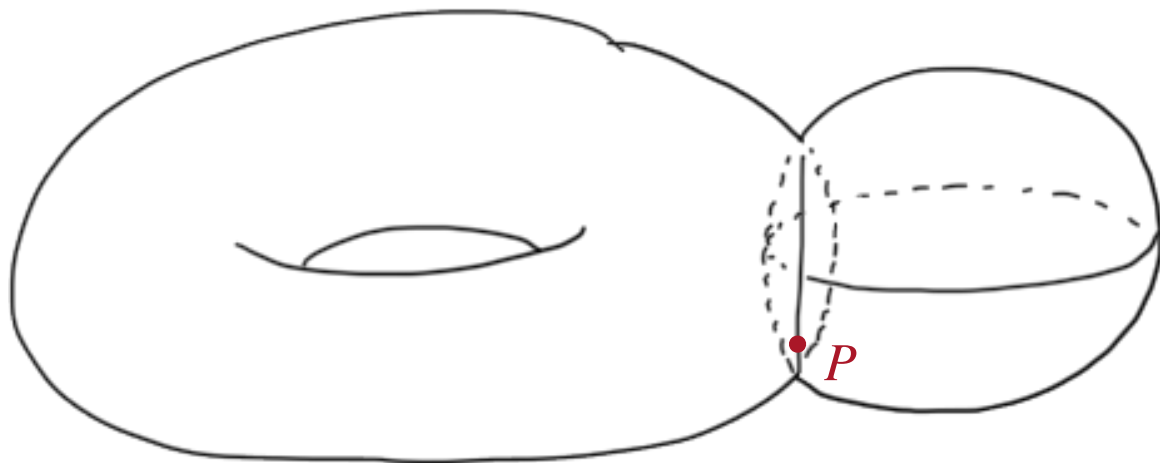
VARIÉTÉS (MANIFOLDS)



Surface lisse
↓
2-variété différentielle

Une variété (manifold) **différentielle** de dimension n (dans $\mathbb{R}^m$) est un sous-ensemble $M \subseteq \mathbb{R}^m$ tel que tout point de M a un voisinage homéomorphisme à un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$.

VARIÉTÉS (MANIFOLDS)



Tout se généralise dans ce contexte :

- Plan tangent, normale
- Courbures ...

