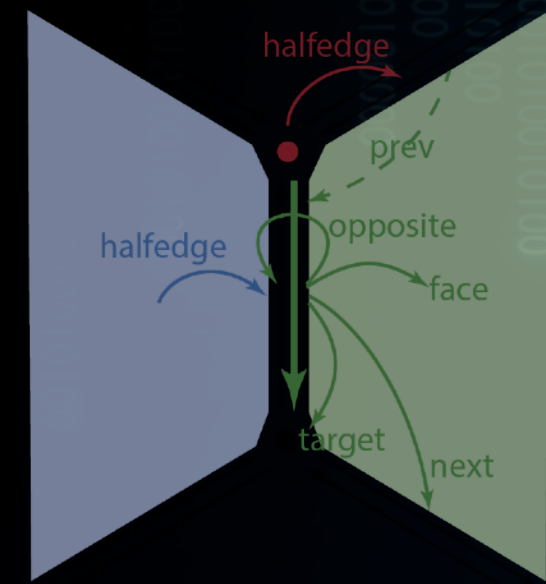


MODELISATION GEOMETRIQUE



Alexandra Bac

POLYTECH 4A INFORMATIQUE **REVA**

4 – COURBES ET SURFACES PARAMÉTRIQUES

Certaines illustrations sont issues du livre « polygon mesh processing »

« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - MODÈLES PARAMÉTRIQUES

Chapitre 2

MAILLAGES

Chapitre 4

**GÉOMÉTRIE DES
SURFACES**

Chapitre 1

**MODÉLISATION DES
SURFACES**

Chapitre 3 (+ 5A)

**SURFACES
PARAMÉTRIQUES**

Chapitre 5

**SURFACES
IMPLICITES**

COURBES ET SURFACES PARAMÉTRIQUES

Bézier

Très incomplet (nécessiterait un module entier)

A suivre en 5A ...

Modèles:
 / Bézier (courbes & surfaces)
 / B-splines
 / NURBS
 5A

Commençons par les courbes

- Plus simple
- Base des modèles de surfaces (produit tensoriel)

COURBES PARAMÉTRIQUES

GÉNÉRALITÉS

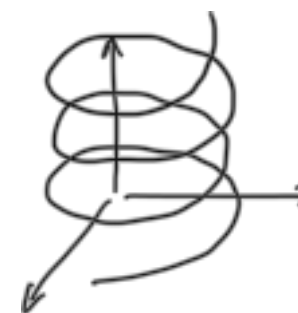
COURBES PLANES

Courbes dans $\mathbb{R}^2$



COURBES GAUCHES

Courbes dans $\mathbb{R}^3$



REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE

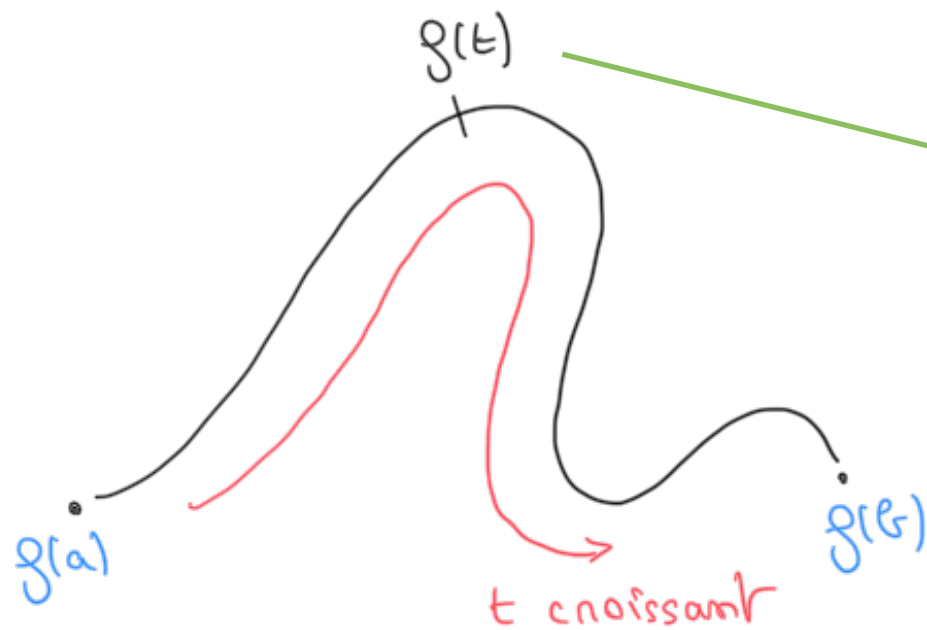
$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto g(t)$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \dots \dots$$

COURBES

Courbe finie :

$$f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ (ou } \mathbb{R}^3)$$



$f(t) \in \mathbb{R}^2$ donc :

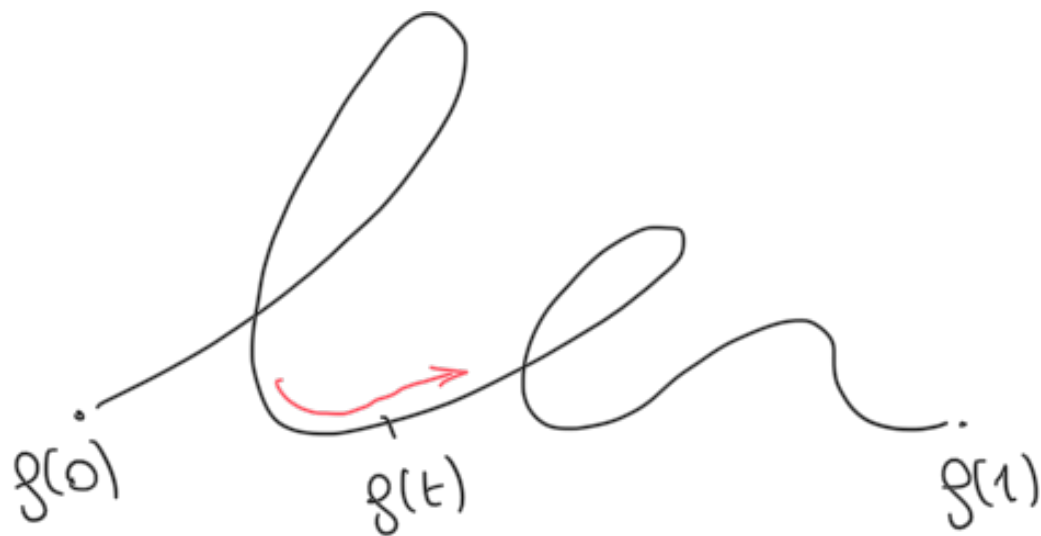
$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$$

$$f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

QUESTION DE LA PARAMÉTRISATION

Courbe $\leftrightarrow$ modèle paramétrique $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$

unique ?



On pose $g(t) = f(t^2)$

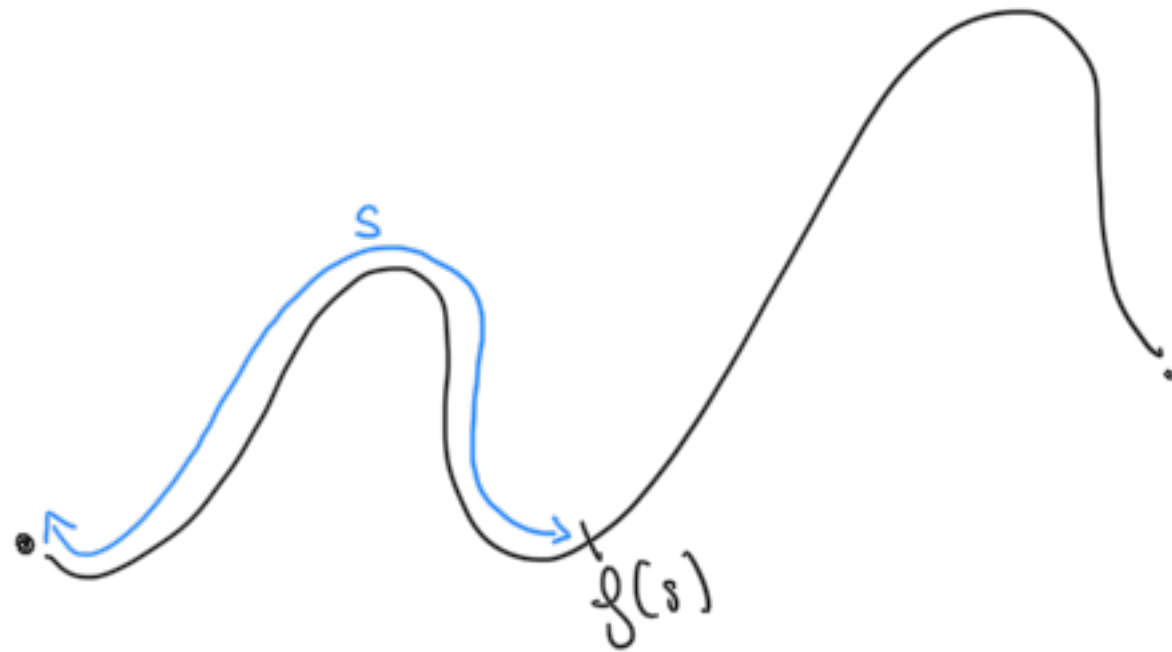
▸ Quelle est la courbe décrite ?

$$f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

PARAMÉTRISATION NORMALE

Pour toute courbe, il existe une paramétrisation selon laquelle la courbe est parcourue à vitesse constante :

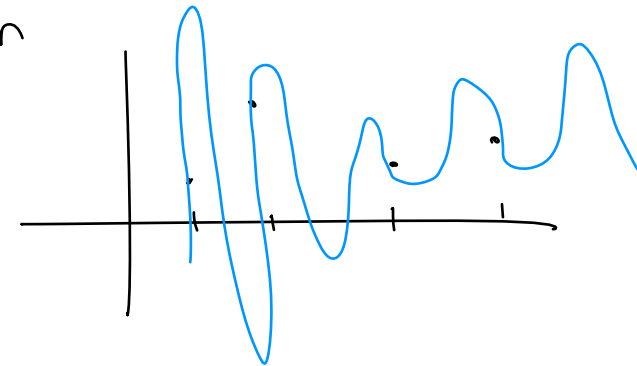
- Unique
- Paramètre noté s (**abscisse curviligne**) : longueur le long de la courbe
- Appelée **paramétrisation normale**



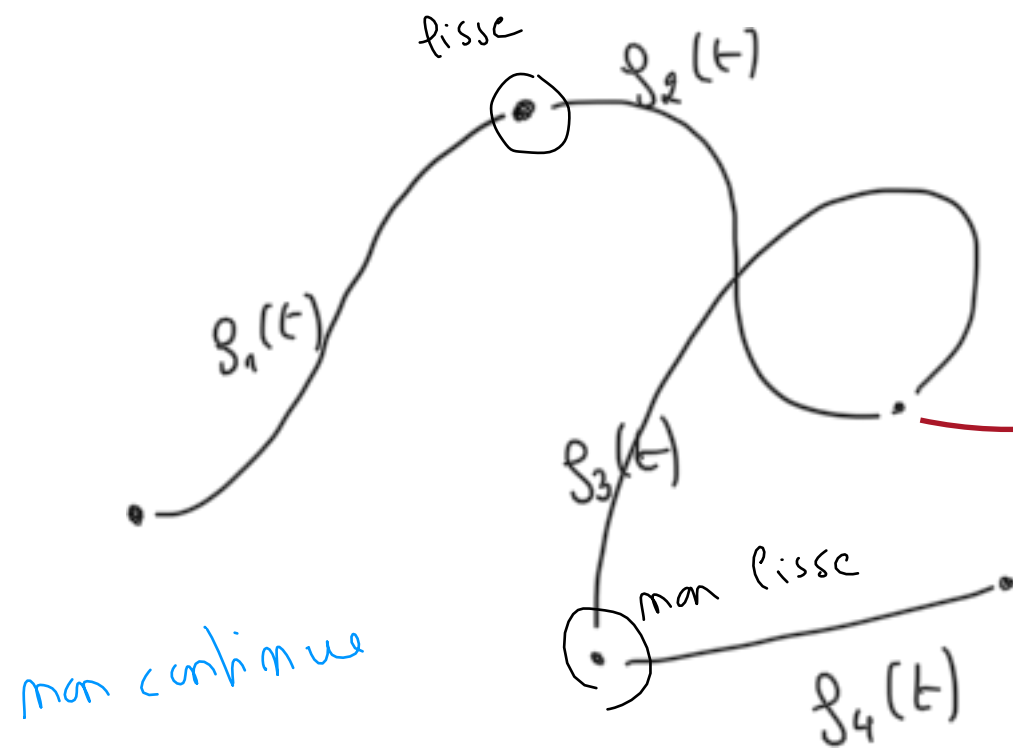
CONTINUITÉ GÉOMÉTRIQUE ($\mathcal{G}^k$)

$$\begin{cases} m \text{ pts} \rightarrow P(t) \text{ d'° } m-1 \\ P(t_m) = v_m \end{cases}$$

$\triangle$ $m \uparrow \leadsto P$ oscille



Courbes modélisée par morceaux :



Courbe continue ①

fisse $\leadsto$ dérivée "fisse" ②

Continuité de la dérivée / tangente ?

Forme complexe

$\rightarrow$ plusieurs polynômes de degré faible

$$f_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$$f_2 : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}^k$$

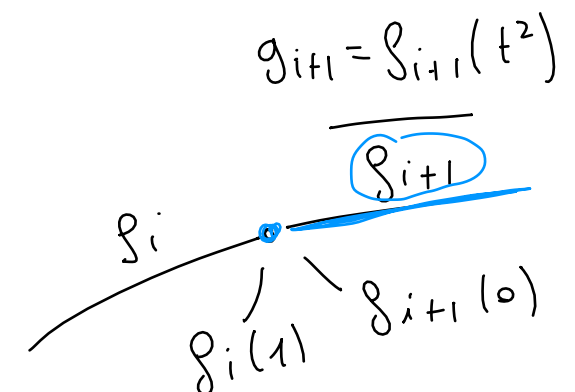
$$f_3 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$$f_4 : [d, e] \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$$\textcircled{1} \quad g_i(1) = g_{i+1}(0) \leadsto \text{continuité'}$$

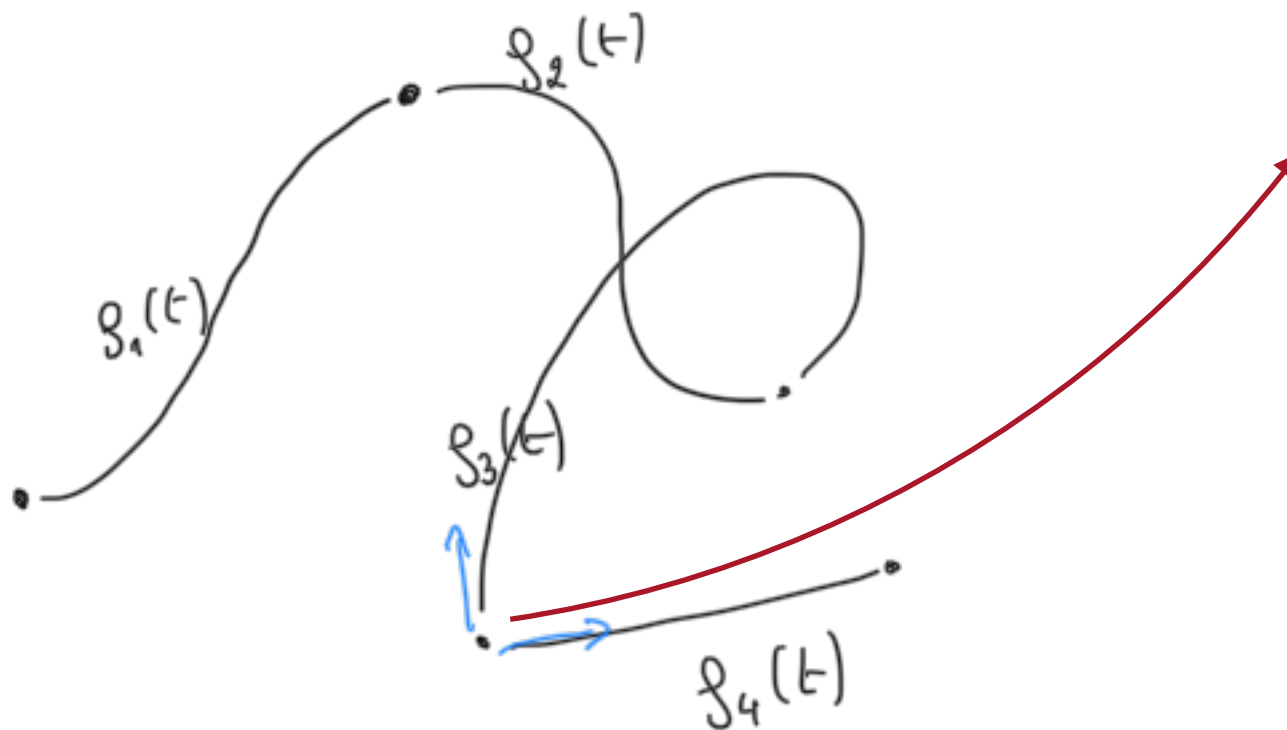
$$\textcircled{2} \quad \text{Pr fisse : } g_i'(1) \neq g_{i+1}'(0) \leadsto \mathcal{C}^1$$

$\parallel \leadsto \underline{\underline{g_1}}$



CONTINUITÉ GÉOMÉTRIQUE ($\mathcal{G}^k$)

Courbes modélisée par morceaux :



Courbe continue

Continuité de la dérivée / tangente ?

▸ Discontinue

$$f_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$$

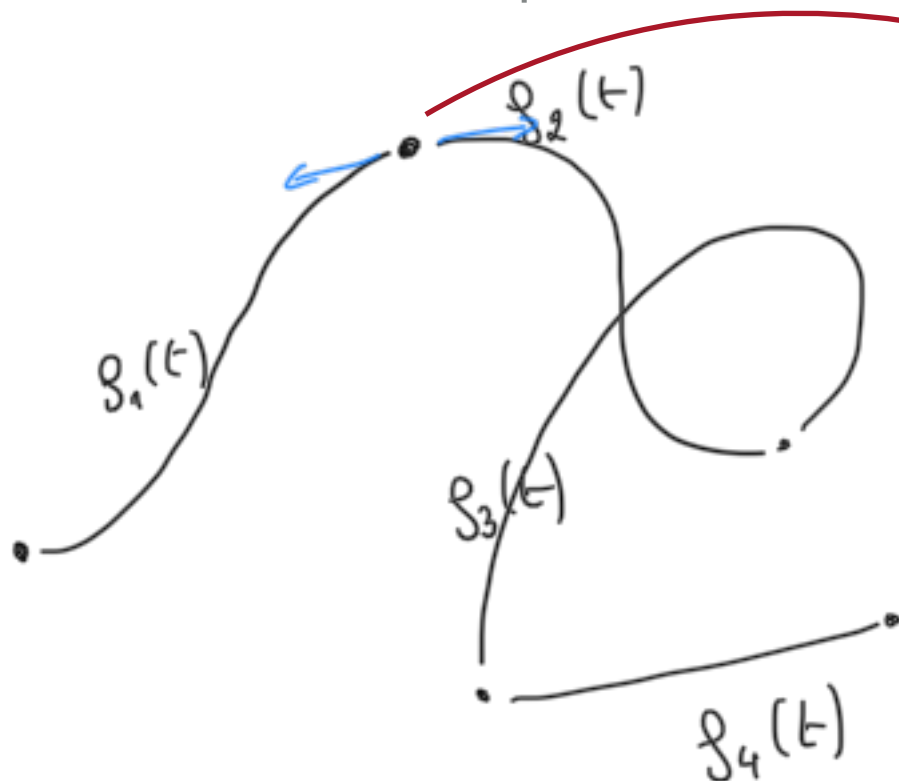
$$f_2 : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$$f_3 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$$f_4 : [d, e] \rightarrow \mathbb{R}^k$$

CONTINUITÉ GÉOMÉTRIQUE ($\mathcal{G}^k$)

Courbes modélisée par morceaux :



Courbe continue

Continuité de la dérivée / tangente ?

$$f'_1(b^-) = f'_2(b^+)$$

Tangentes colinéaires en b

$$f'_1(b^-) = \lambda \cdot f'_2(b^+)$$

Continuité
paramétrique $\mathcal{C}^1$

Continuité
géométrique $\mathcal{G}^1$

$$f_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$$f_2 : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}^k$$

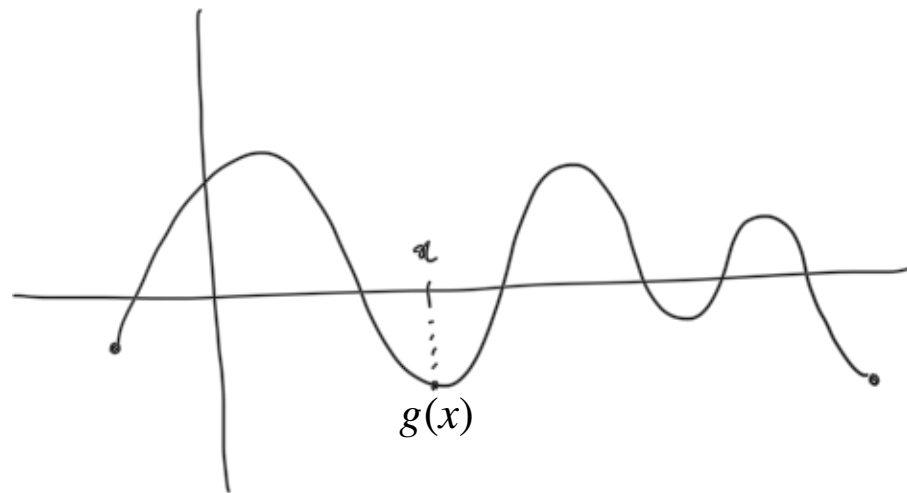
$$f_3 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$$f_4 : [d, e] \rightarrow \mathbb{R}^k$$

CAS PARTICULIER : MODÈLES CARTÉSIENS

Cas particulier où le paramètre est x :

$$y = g(x)$$



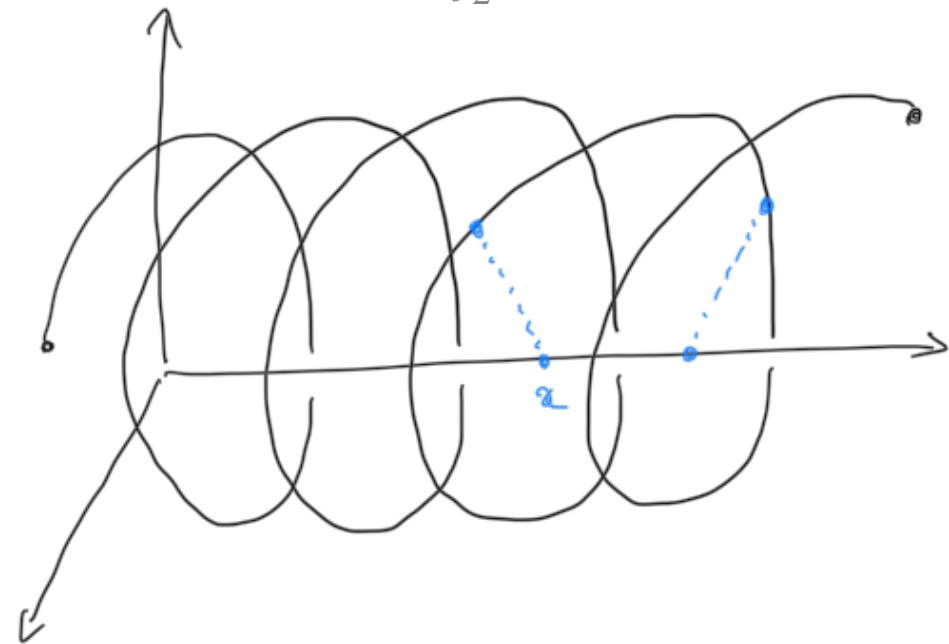
Représentation paramétrique associée :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix}$$

$$y = f_1(x)$$

$$z = f_2(x)$$



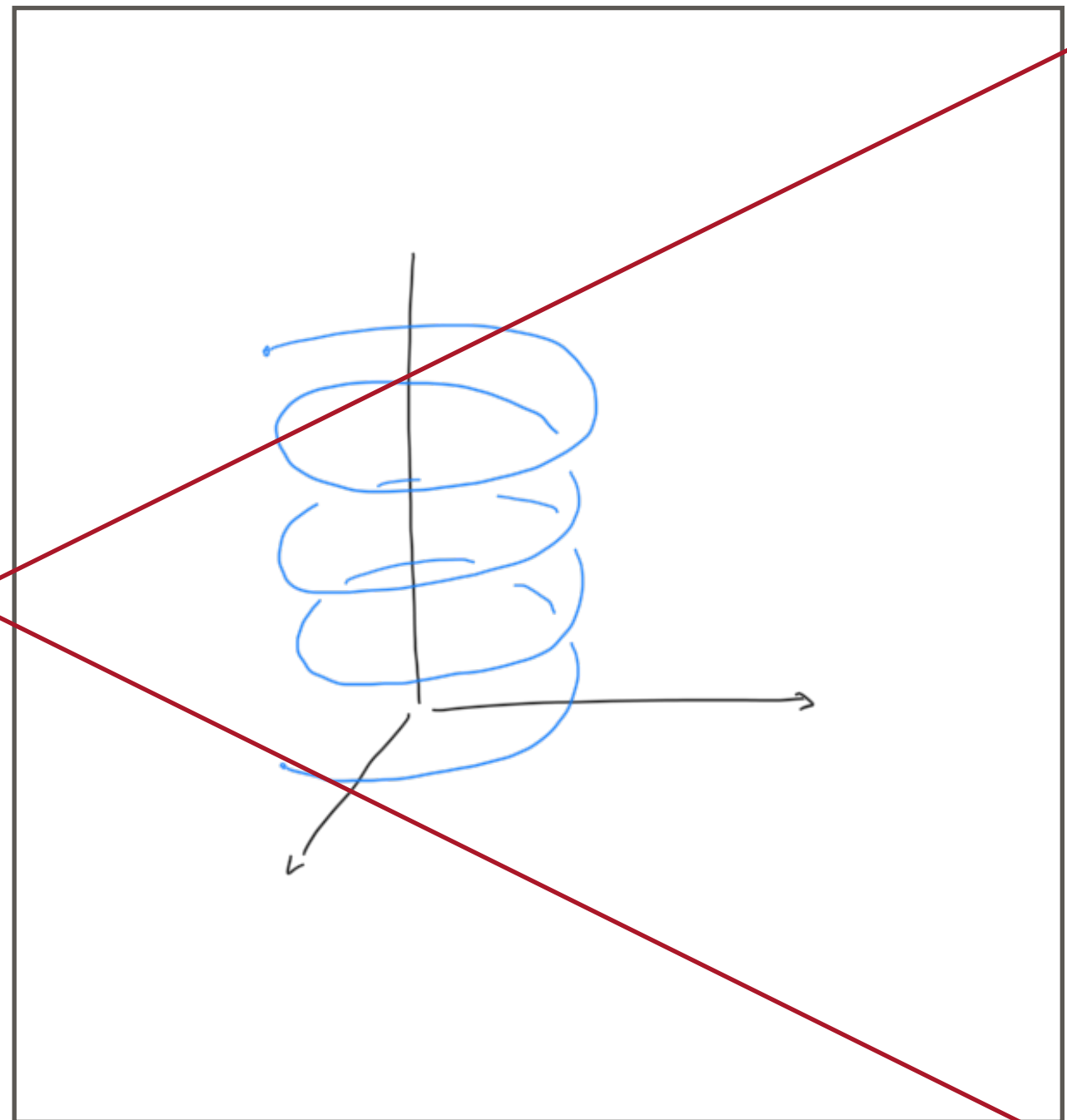
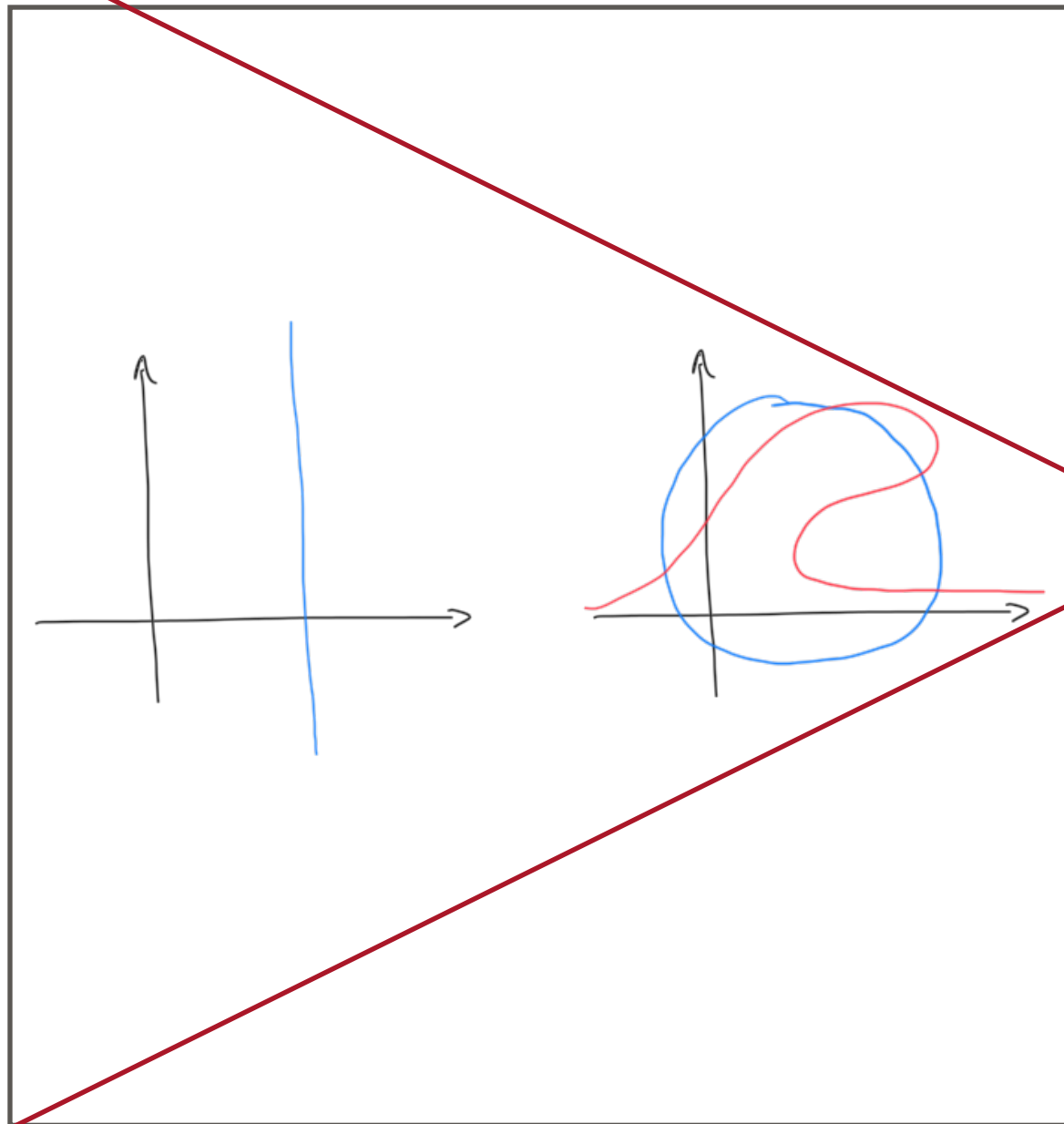
Représentation paramétrique associée :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} x \\ f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$$

CAS PARTICULIER : MODÈLES CARTÉSIENS

Attention : modèles restrictifs !

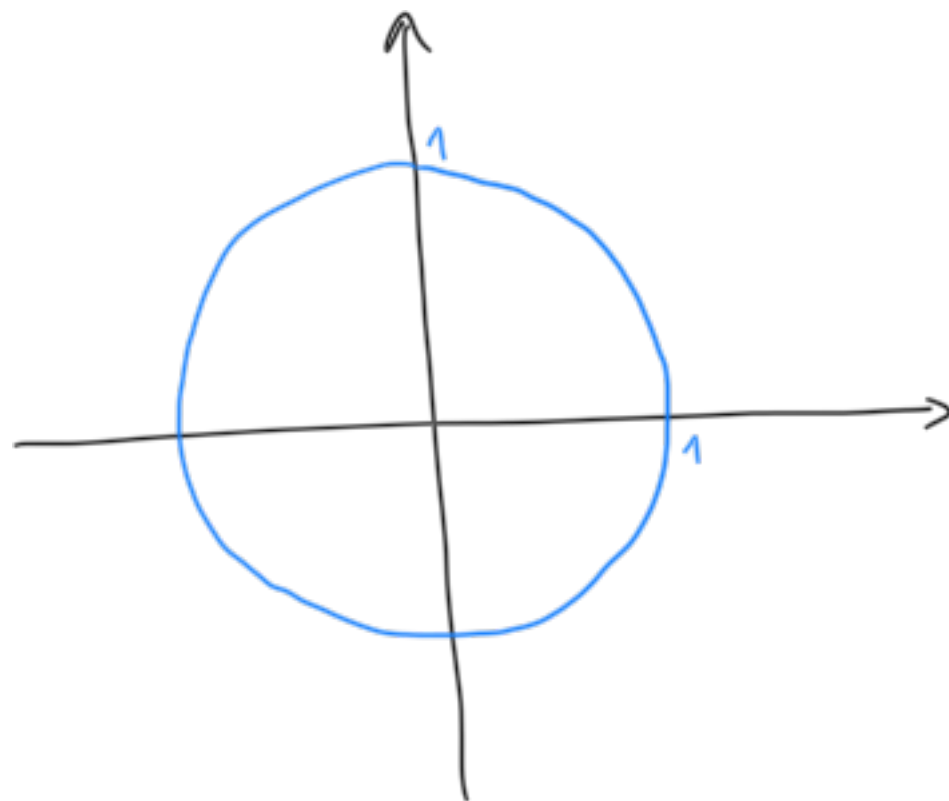




+740.21	-0.00
+122.56	-0.00
+140.04	-0.00
+180.98	-0.00
+740.21	-0.00
+122.56	-0.00
+140.04	-0.00
+180.98	-0.00
+740.21	-0.00

BÉZIERS, B- SPLINES ... MOTIVATION

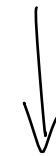
COMMENT CONTRÔLER LE FORME DE LA COURBE ?



Quelle équation $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$?

$$[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

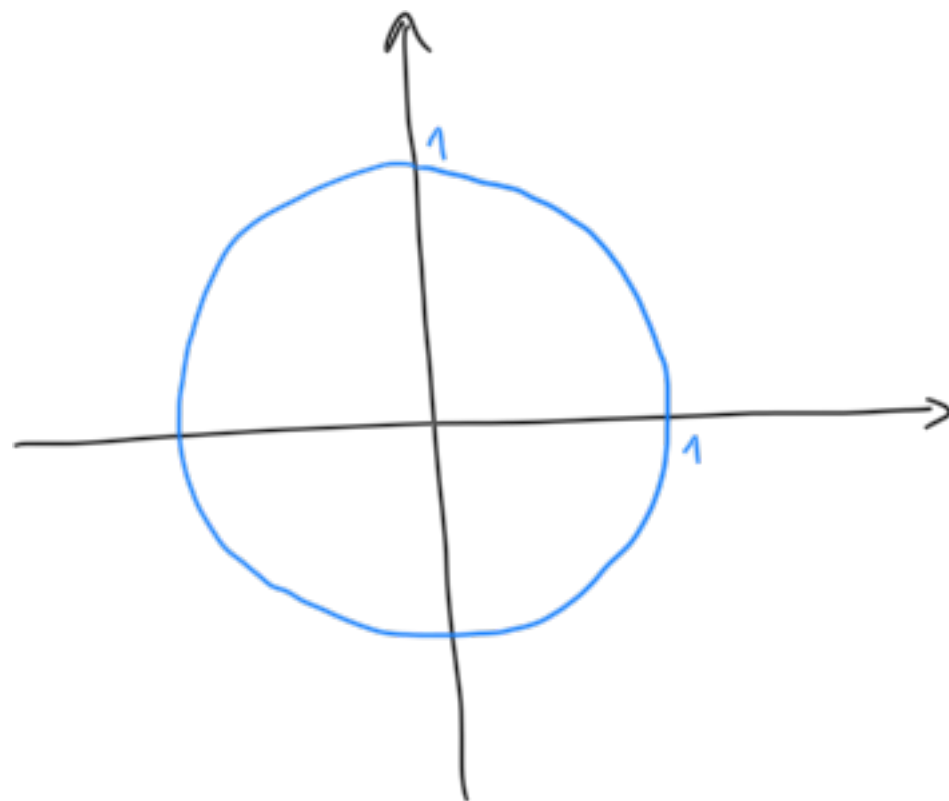


pas évident



§ ?

COMMENT CONTRÔLER LE FORME DE LA COURBE ?



Quelle équation $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$?

Pourtant courbe très simple ...

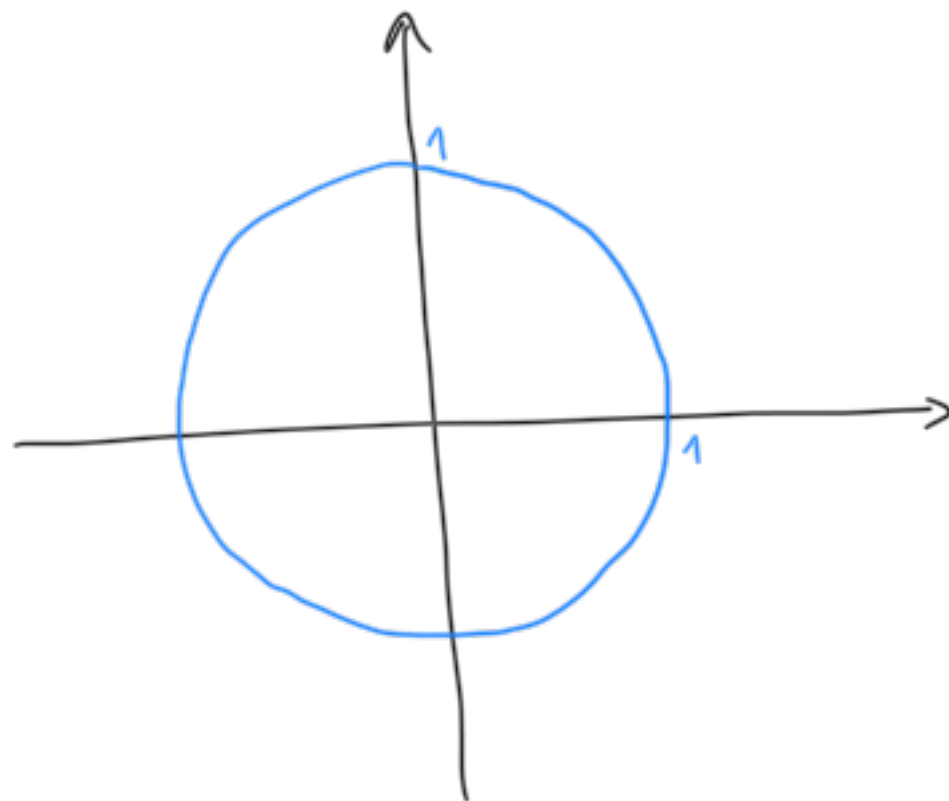
► Question trop générale

Choisir f d'une forme particulière

Dépendant de paramètres simples

Contrôlent la forme

COMMENT CONTRÔLER LE FORME DE LA COURBE ?



Quelle équation $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$?

Pourtant courbe très simple ...

► Question trop générale

Choisir f d'une forme particulière

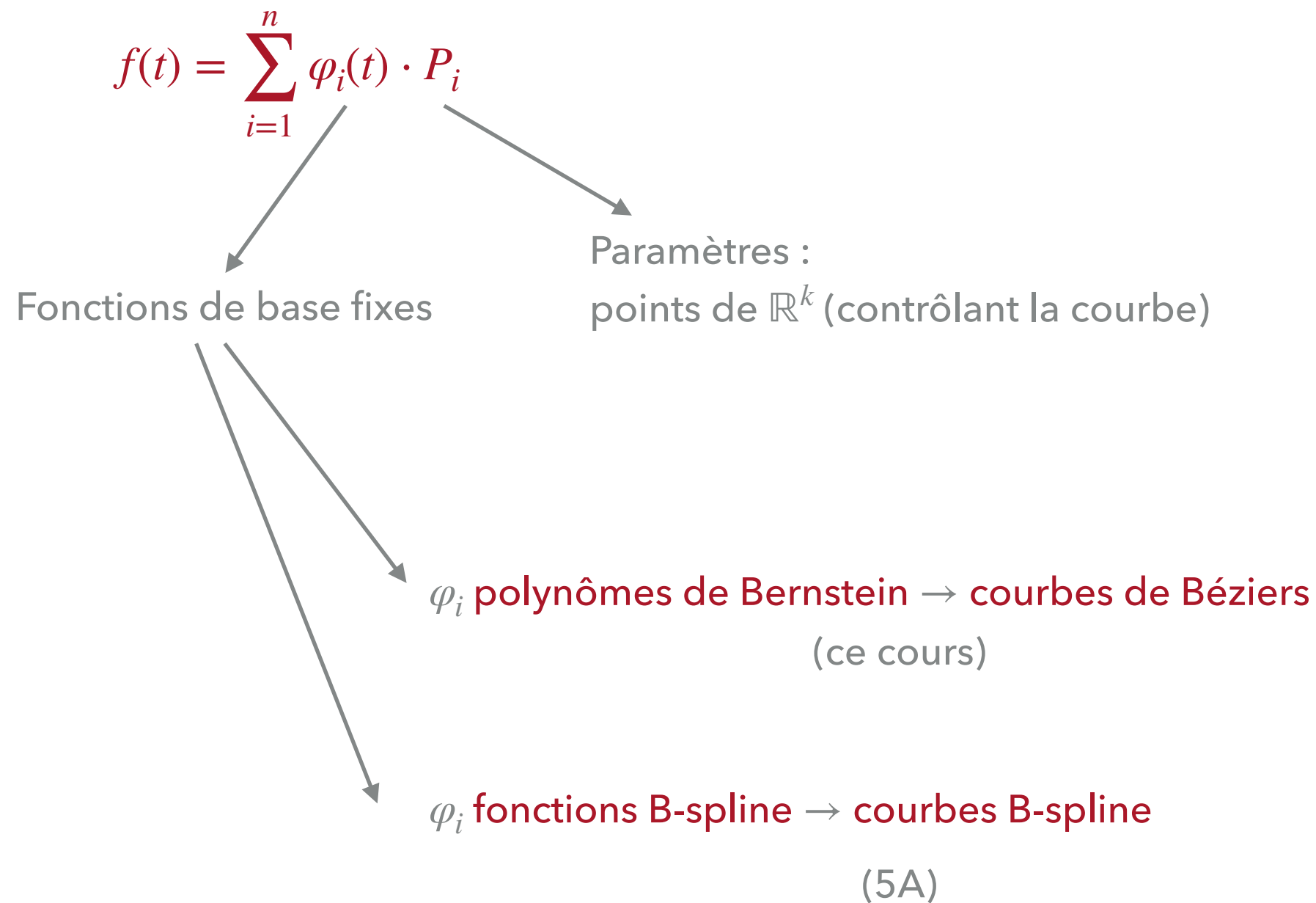
Polynômes de degré $\leq n$

Dépendant de paramètres simples

$n + 1$ coefficients

Contrôlent la forme .../...

COMMENT CONTRÔLER LE FORME DE LA COURBE ?



COURBES DE BÉZIERS

COURBES DE BÉZIERS

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ chaque cord $\sim$ poly d'° n $\xrightarrow{\text{coeffs}}$ $2(n+1)$

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$$

polynômes de degré au plus n

~~dans la base canonique :~~

$$f_1(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$$

$$f_2(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n$$

Pas la bonne base ...

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) \cdot P_i$$

Base

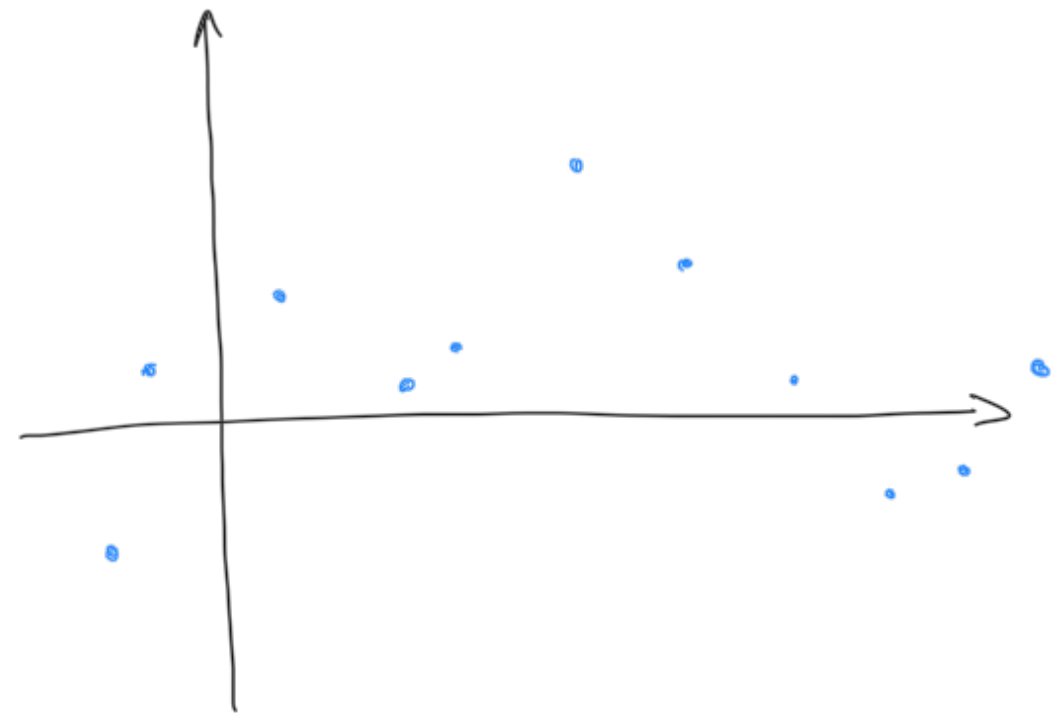
Paramètre de contrôle

$$f(t) = \sum_{i=0}^n t^i \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$$

(uhf. saken)

$$P_i \in \mathbb{R}^2$$

↳ contrôler la forme !



$\{P_i\}$ tq la courbe passe près de ces points ?

d°2

$$f(t) = P_0 + t \cdot P_1 + t^2 \cdot P_2 \quad ?$$

$$f(0) = P_0$$

$$f(1) = P_0 + P_1 + P_2$$

|

9

.

P_1

.

P_2

.

P_0

.

(
 same NE
 depend PAS dimensionenk
 des pks
 |
 param. unterschieden

POLYNÔMES DE BERNSTEIN

Poly $\deg \leq n$

→ ~~base canonique~~
 ~~$1, t, t^2, \dots, t^n$~~

Base de Bernstein de $\mathbb{R}_n[t]$

- $n + 1$ polynômes
- $\varphi_{n,i} : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ pour le $i = 0 \dots n$
 $\varphi_{n,i}(t) = C_n^i \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i}$

$n=0$ 1
 $n=1$ 1 1
 $n=2$ 1 2 1
 $n=3$ 1 3 3 1

Ex : pour $n = 3$

$$\varphi_{3,0}(t) = (1-t)^3$$

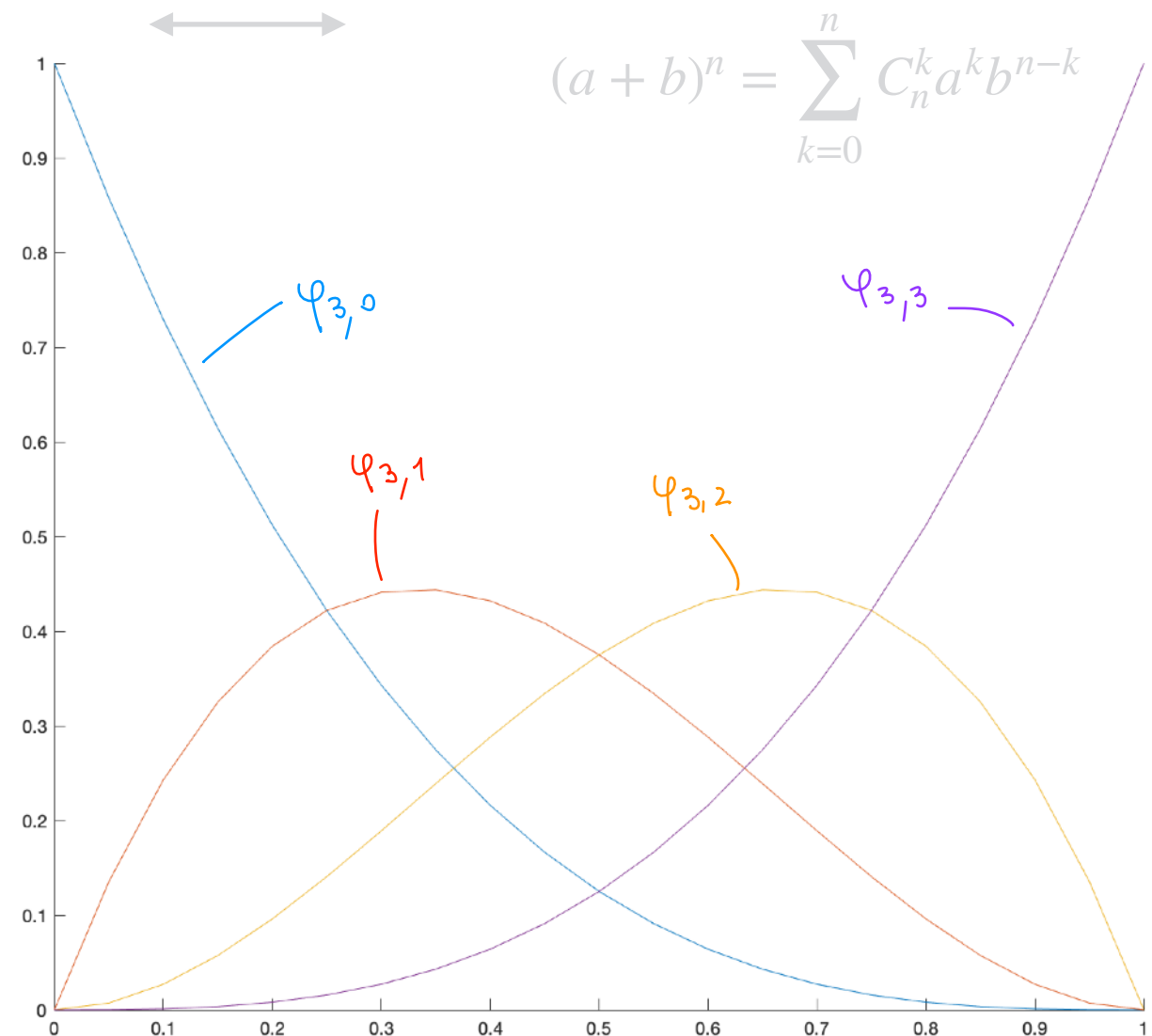
$$\varphi_{3,1}(t) = 3t(1-t)^2$$

$$\varphi_{3,2}(t) = 3t^2(1-t)$$

$$\varphi_{3,3}(t) = t^3$$

Parenté avec le binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$$



POLYNÔMES DE BERNSTEIN – PROPRIÉTÉS

$$\varphi_{n,0}(0) = 1$$

$$\varphi_{n,n}(1) = 1$$

$$\varphi_{n,i}(0) = 0$$

$$\varphi_{n,i}(1) = 0$$

$$0 < i < n$$

Symétrie

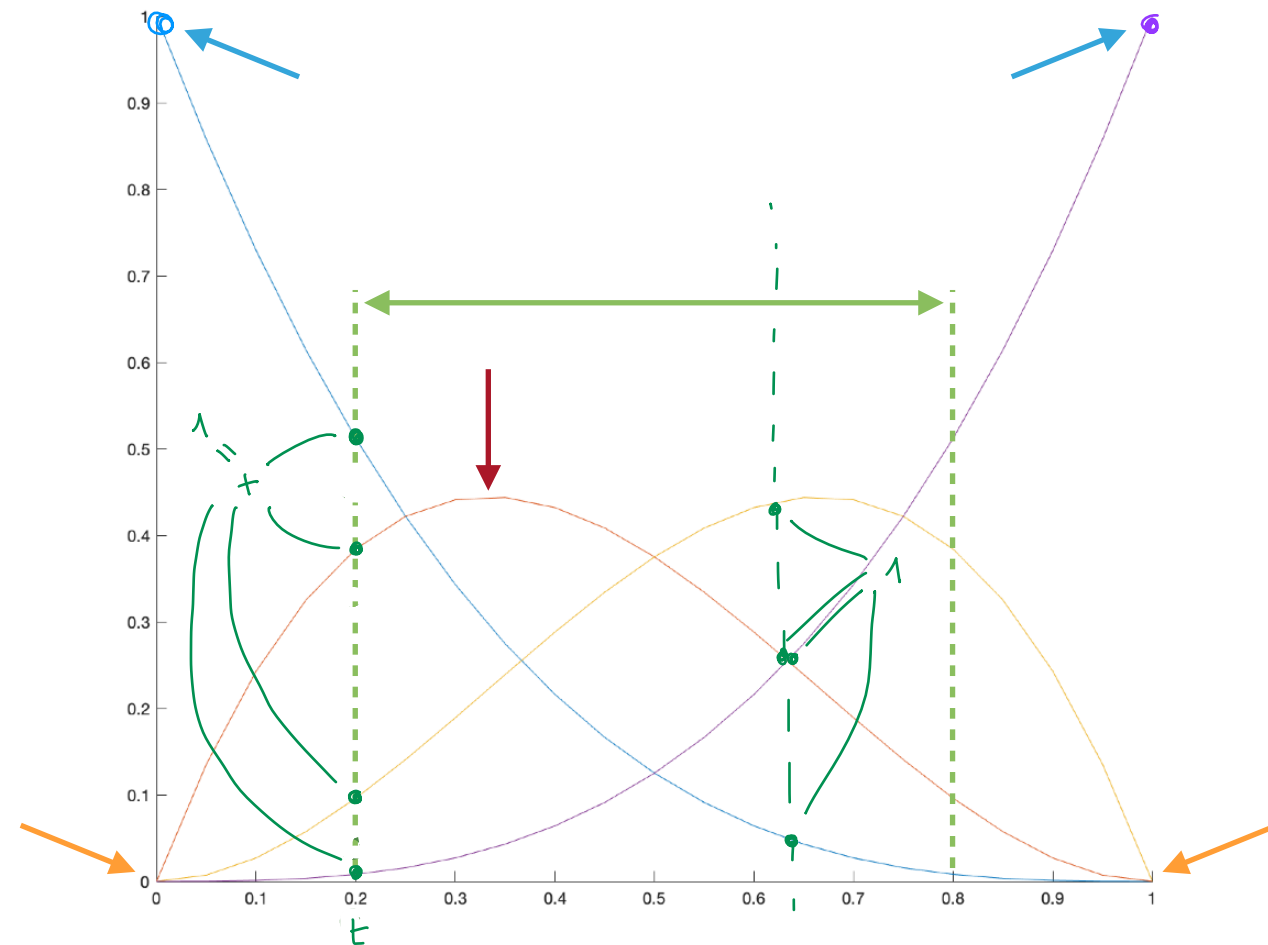
$$\varphi_{n,i}(t) = \varphi_{n,n-i}(1-t)$$

Partition de l'unité

$$\sum_{i=0}^n \varphi_{n,i}(t) = 1 \quad \forall t \in [0,1]$$

Maximum de $\varphi_{n,i}(t)$

$$\text{en } \frac{i}{n} = t$$



$$(a+b)^n =$$

$$\varphi_{m,i}(t) = C_m^i t^i (1-t)^{m-i}$$

~

$$\sum_k C_m^k a^k b^{m-k}$$

↓

$$\sum_i \varphi_{m,i}(t) = \sum_i C_m^i t^i (1-t)^{m-i} = (\cancel{t} + 1 - \cancel{t})^m = 1$$

$\forall t$

POLYNÔMES DE BERNSTEIN – PROPRIÉTÉS

$$\varphi_{n,0}(0) = 1$$

$$\varphi_{n,n}(1) = 1$$

$$\varphi_{n,i}(0) = 0$$

$$0 < i < n$$

Symétrie

$$\varphi_{n,i}(t) = \varphi_{n,n-i}(1-t)$$

Partition de l'unité

$$\sum_{i=0}^n \varphi_{n,i}(t) = 1 \quad \forall t \in [0,1]$$

Proche triangle Pascal



Formule récursive

$$\text{en } \varphi_{n,i}(t) = t\varphi_{n-1,i-1}(t) + (1-t)\varphi_{n-1,i}(t)$$

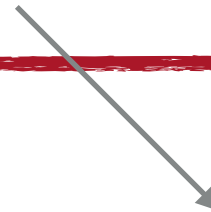
Maximum de $\varphi_{n,i}(t)$

$$\text{en } \frac{i}{n}$$

COURBES DE BÉZIERS

Courbe de Béziers de degré n

$$f(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_{n,i}(t) \cdot P_i$$



$P_0, \dots, P_n$ points de contrôle

► $f(0) = P_0$

$$f(0) = \sum_i \varphi_{n,i}(0) \cdot P_i = P_0$$

→ courbe part de P_0

► $f(1) = P_n$

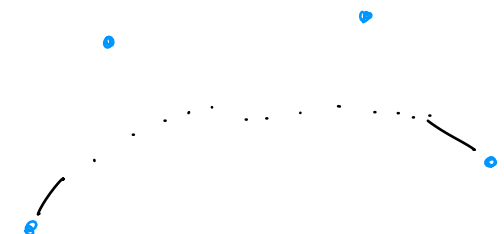
$$f(1) = \sum_i \varphi_{n,i}(1) \cdot P_i = P_n$$

→ arrive en P_n

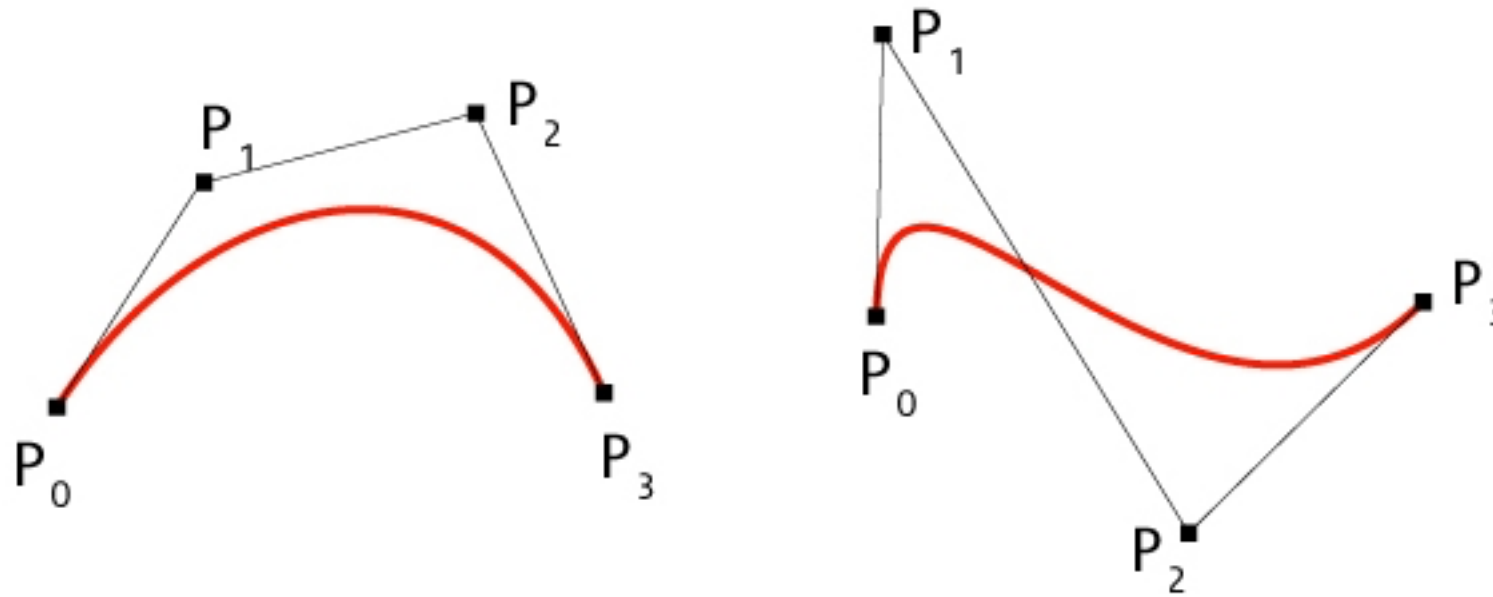
► Influence maximale de P_i en $\frac{i}{n} = t$

$$f(t) = \sum_i \overbrace{\varphi_{n,i}(t)}^{w_i} \cdot P_i \quad \text{avec} \quad \sum_i \overbrace{\varphi_{n,i}(t)}^{w_i} = 1$$

l'ensemble P_i pondéré par ces w_i $\subseteq$ enveloppe convexe des P_i s



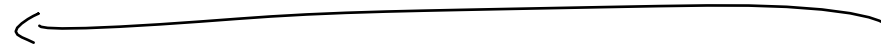
COURBES DE BÉZIERS



- $f(t)$ barycentre des P_i pondérés par $\varphi_{n,i}(t)$
- Courbe dans l'enveloppe convexe des points de contrôle

DÉRIVÉES / TANGENTES DES COURBES DE BÉZIER

$$\varphi'_{n,i}(t) =$$



$$\varphi_{m,i}(t) = C_m^i t^i (1-t)^{m-1} \text{ poly } \dots$$

$$\varphi'_{n,i}(t) = n(\varphi_{n-1,i-1}(t) - \varphi_{n-1,i}(t))$$

$$f'(t) = \sum_i \varphi'_{n,i}(t) \cdot P_i$$

⋮

courbe

$$g(t) = \sum_{i=0}^m \varphi_{m,i}(t) \cdot P_i$$

↳ Bézier d° m

dérivée

$$f'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_{n-1,i}(t) \cdot (P_{i+1} - P_i)$$

Bézier d° m-1 sur les pts $(P_{i+1} - P_i)$

↳ passe par $g'(0) = P_1 - P_0$

$$g'(1) = P_m - P_{m-1}$$

DÉRIVÉES / TANGENTES DES COURBES DE BÉZIERS

$$f'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_{n-1,i}(t) \cdot (P_{i+1} - P_i)$$

→ Courbe de Béziers

- Degré $n - 1$
- Points de contrôle $P_1 - P_0, \dots, P_n - P_{n-1}$

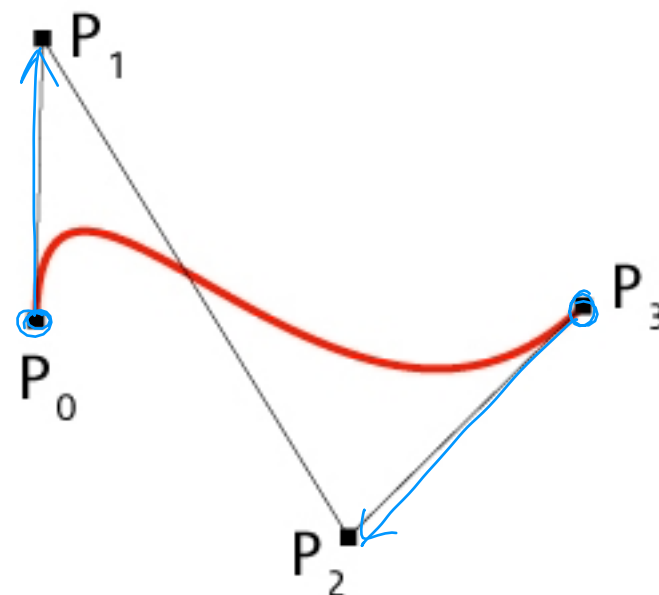
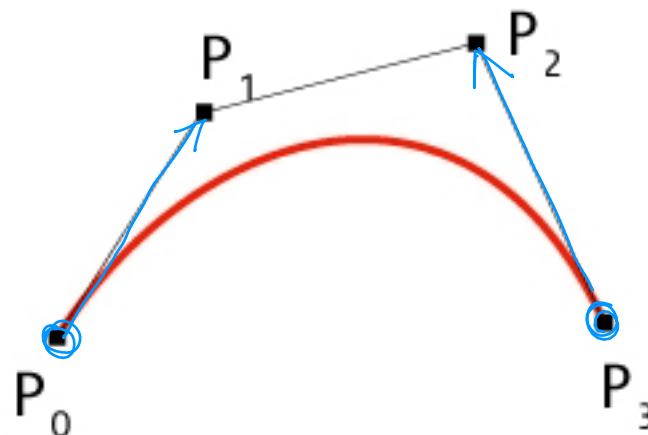
$$g'(0) = (P_1 - P_0) = \overrightarrow{P_0 P_1} \cdot n$$

Tangente à la courbe en 0 :
 $n \cdot \overrightarrow{P_0 P_1}$

$$g'(1) = n \cdot (P_n - P_{n-1}) = \overrightarrow{P_{n-1} P_n}$$

Tangente à la courbe en 1 :
 $n \cdot \overrightarrow{P_{n-1} P_n}$

**Permet de
raccorder des
courbes de Béziers**



CALCUL DE POINT : ALGORITHME DE DE CASTELJAU

$\varphi_{m,i}$ ne ...
 $\varphi_{m-1,i} / \varphi_{m-1,i-1}$

Trace un $\varphi^r \equiv$
eval $g(t) = \sum_i \underbrace{C_m^i t^i (1-t)^{n-i}}_{\varphi_{m,i}(t)} \cdot P_i$

$O(m) \times$
 $O(m) +$

Algorithme similaire déjà connu : calcul de C_n^k ...

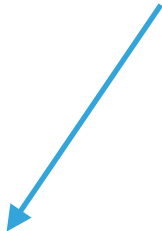


~~$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$~~



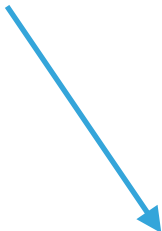
Débordements de capacité ...

$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$



~~Fonction récursive :~~

duplication des calculs ...



Calcul itératif via un tableau :

Triangle de Pascal

CALCUL DE POINT : ALGORITHME DE DE CASTELJAU

1) Formule réursive

$$\varphi_{n,i}(t) = t\varphi_{n-1,i-1}(t) + (1-t)\varphi_{n-1,i}(t)$$



$$f(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_{n,i}(t) \cdot P_i =$$

CALCUL DE POINT : ALGORITHME DE DE CASTELJAU

1) Formule réursive

$$\varphi_{n,i}(t) = t\varphi_{n-1,i-1}(t) + (1-t)\varphi_{n-1,i}(t)$$



$$f(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_{n,i}(t) \cdot P_i =$$

1 pt / courbe d° n

2 pts / courbes d° n-1

$$= t \left(\sum_{i=0}^{n-1} \varphi_{n-1,i}(t) P_{i+1} \right) + (1-t) \left(\sum_{i=0}^{n-1} \varphi_{n-1,i}(t) P_i \right)$$

P_1^{n-1} P_0^{n-1}

Points de courbes intermédiaires
de degré $n-1$

On pose :

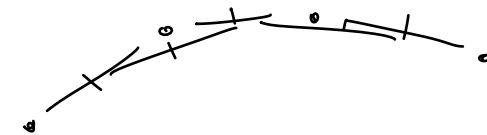
$$P_i^j = f_{P_i, \dots, P_{i+j}}(t)$$

CALCUL DE POINT : ALGORITHME DE DE CASTELJAU

1) Formule réursive

d° m

$$P_i^j = tP_{i+1}^{j-1} + (1-t)P_i^{j-1}$$



Ressemble
fortement au
triangle de Pascal

Init :
j = 0
j = 1
j = 2
⋮
j = m

avec $P_i^0 = P_i$ pts de départ : m+1

m

m-1

① $\rightsquigarrow$ g(t)

CALCUL DE POINT : ALGORITHME DE DE CASTELJAU

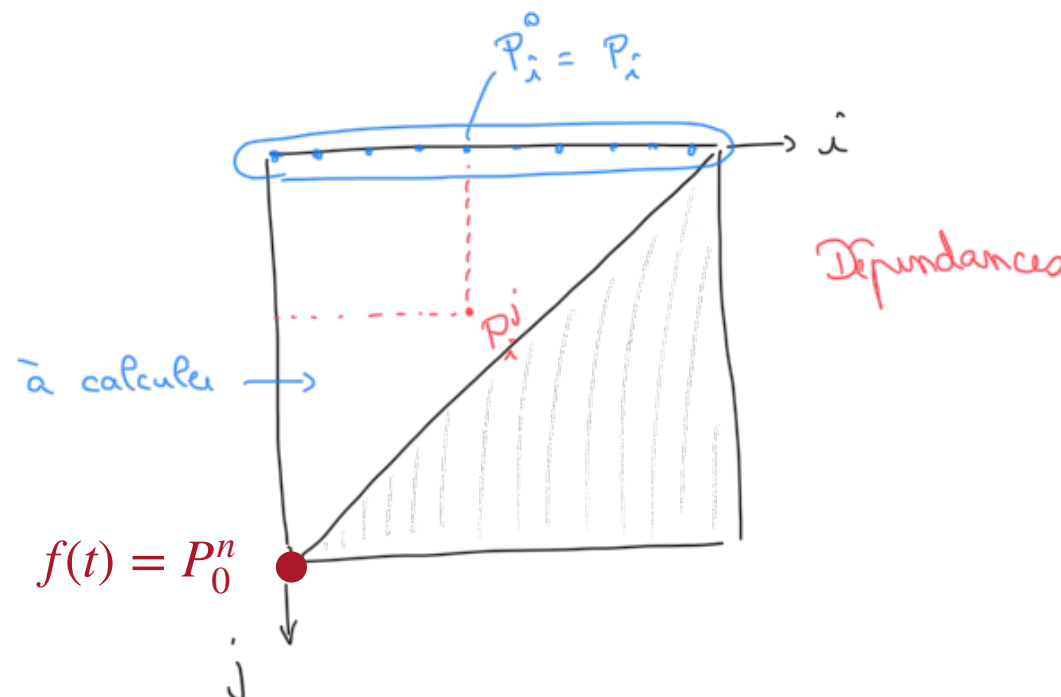
1) Formule réursive

$$P_i^j = tP_{i+1}^{j-1} + (1 - t)P_i^{j-1}$$

$$\text{avec } P_i^0 = P_i$$

Ressemble
fortement au
triangle de Pascal

2) Dépendances de calcul



CALCUL DE POINT : ALGORITHME DE DE CASTELJAU

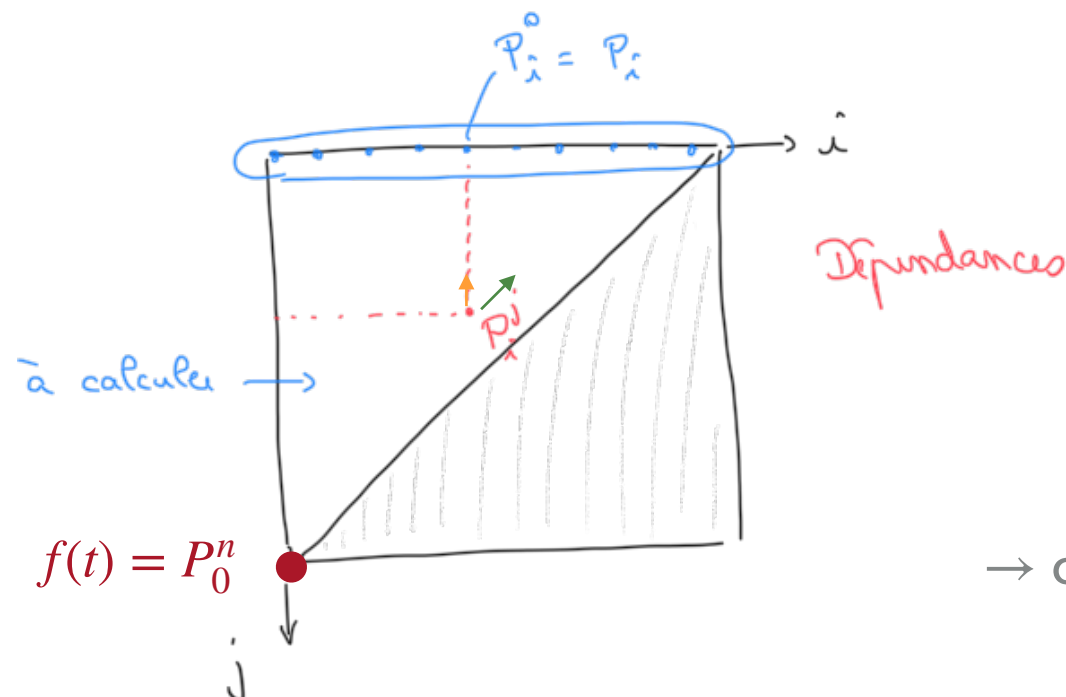
1) Formule réursive

$$P_i^j = tP_{i+1}^{j-1} + (1-t)P_i^{j-1}$$

avec $P_i^0 = P_i$

Ressemble
fortement au
triangle de Pascal

2) Dépendances de calcul



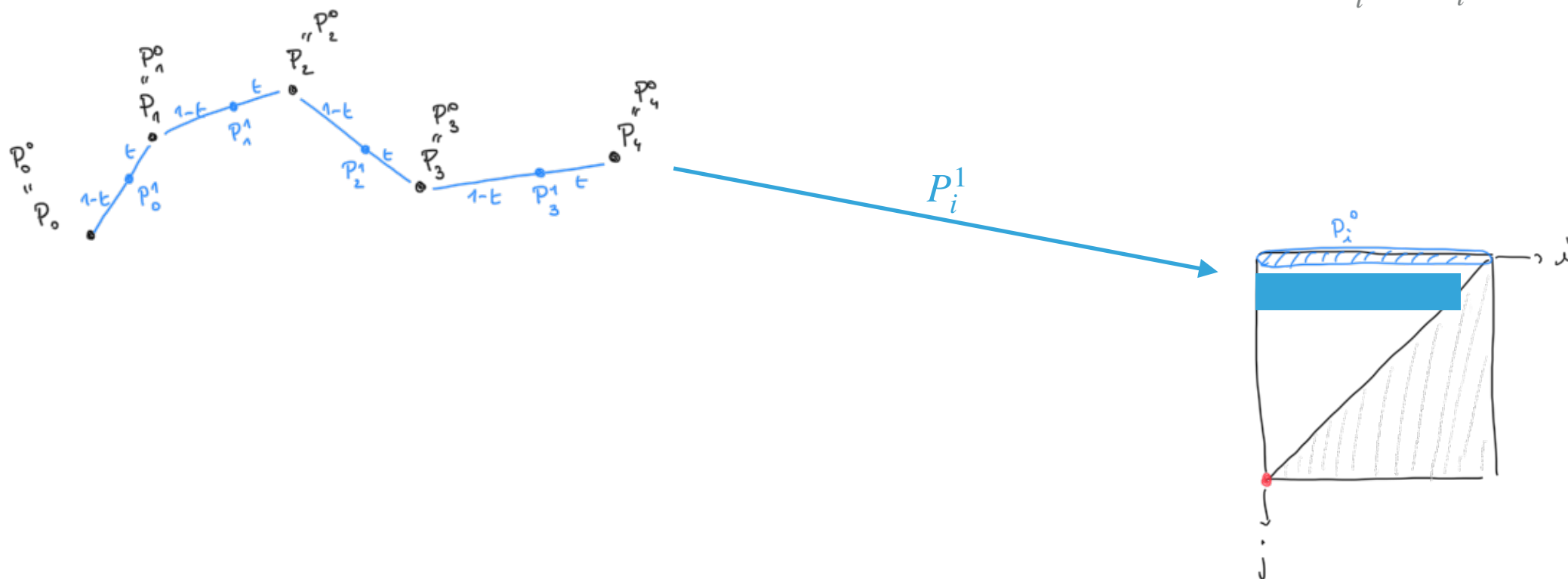
→ calcul par lignes

CALCUL DE POINT : ALGORITHME DE DE CASTELJAU

Interprétation géométrique

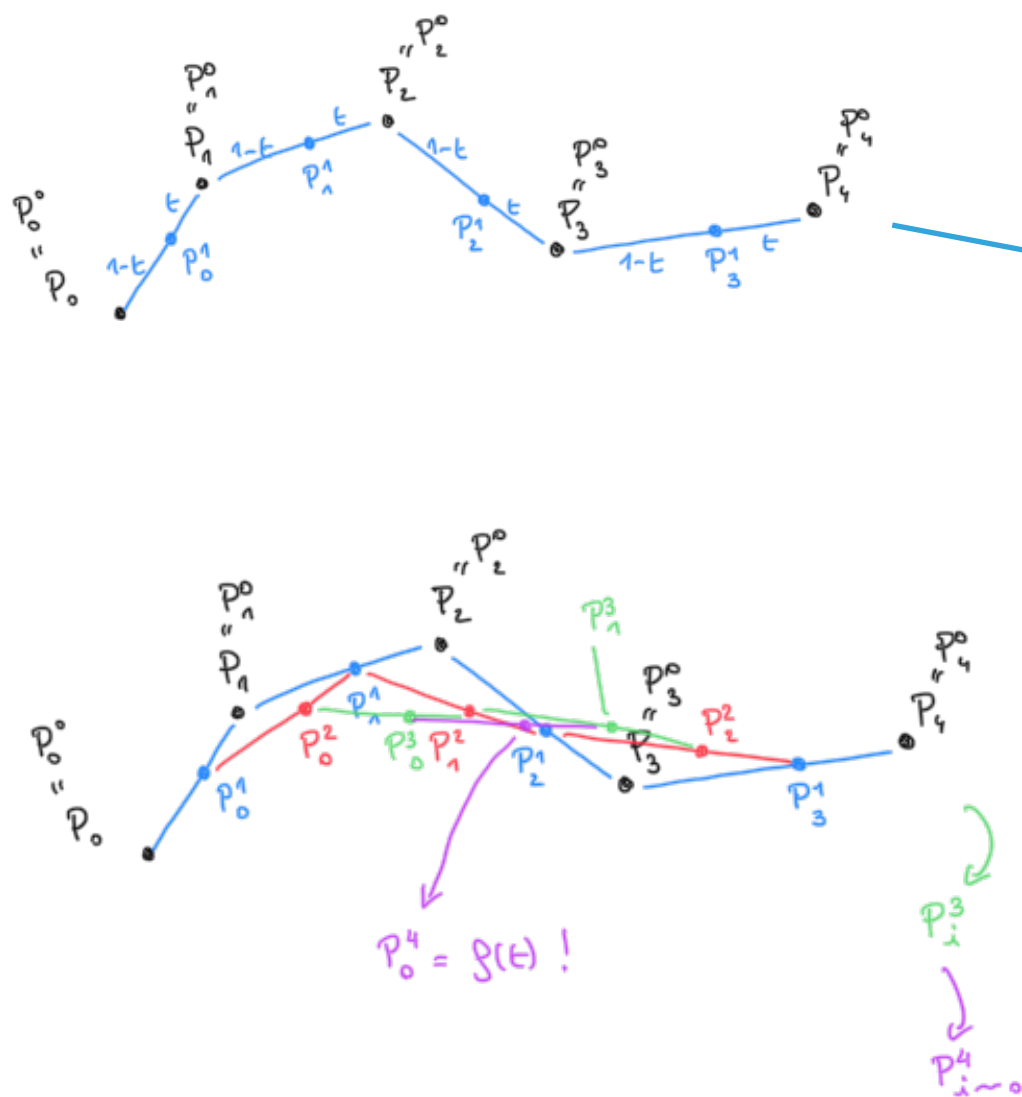
$$P_i^j = tP_{i+1}^{j-1} + (1-t)P_i^{j-1}$$

avec $P_i^0 = P_i$



CALCUL DE POINT : ALGORITHME DE DE CASTELJAU

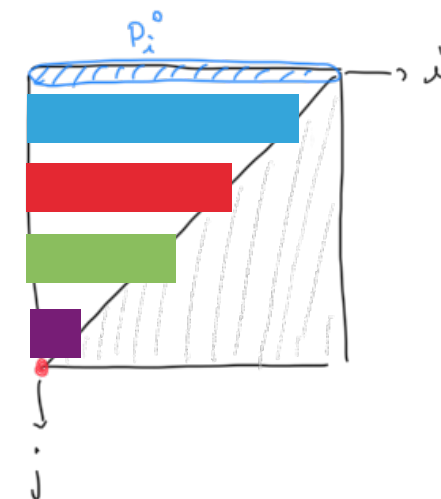
Interprétation géométrique



$$P_i^j = tP_{i+1}^{j-1} + (1-t)P_i^{j-1}$$

avec $P_i^0 = P_i$

l'algèbre stable numériquement
($t^i \times (1-t)^{m-i}$
instable ...)

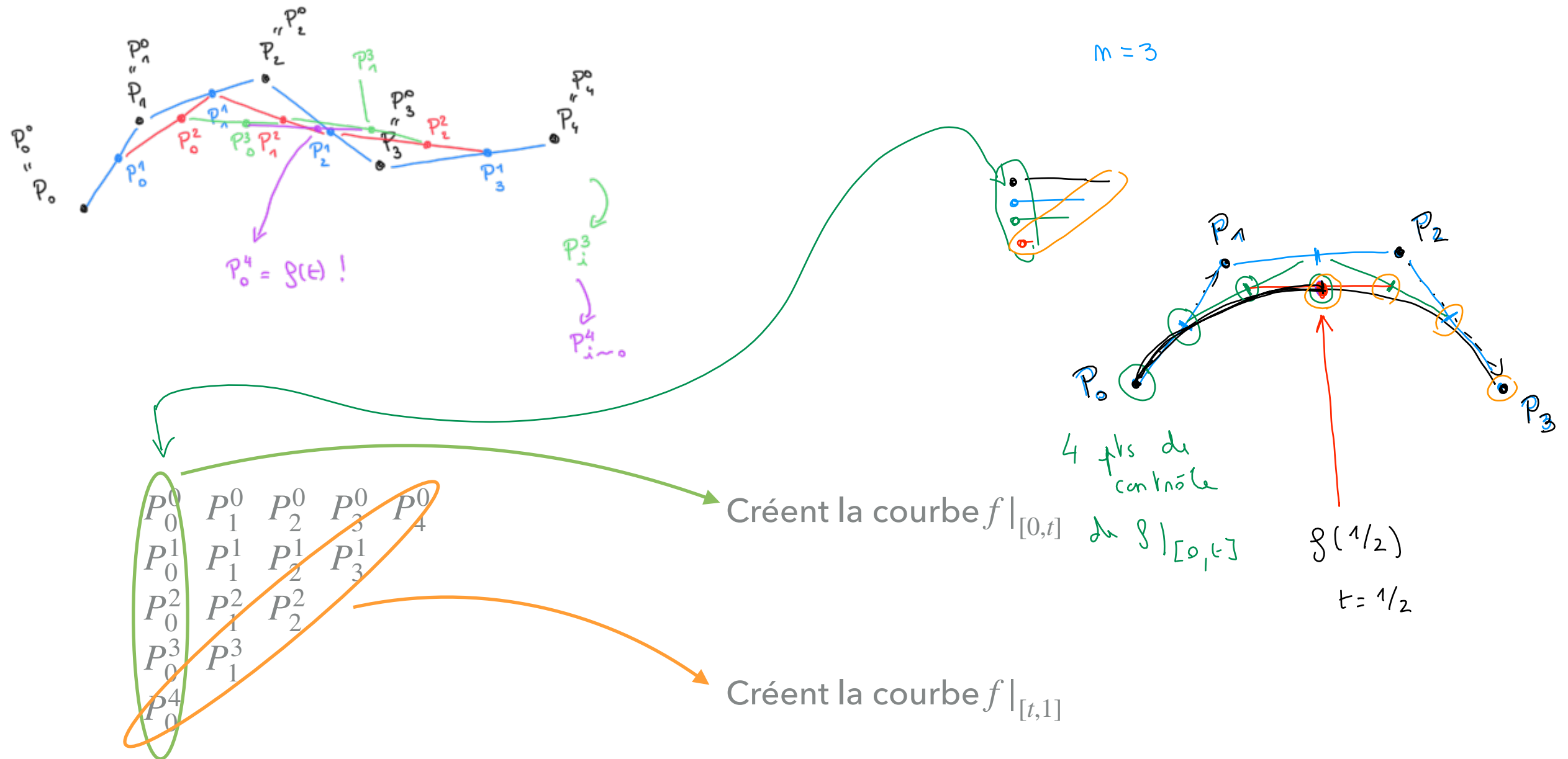


1 pt de la
courbe

$$O\left(\frac{m^2}{2}\right)$$

($O(m^2)$ éval.
brute)

DE CASTELJAU ET SUBDIVISION



→ Augmenter le nombre de points de contrôle

→ Subdivision de la courbe en deux courbes de même degré

ÉLÉVATION DE DEGRÉ

$$f(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_{n,i}(t) \cdot P_i$$

$$\varphi_{n,i}(t) = t\varphi_{n,i}(t) + (1-t)\varphi_{n,i}(t)$$

Evident ...

$$t\varphi_{n,i}(t) = \frac{i+1}{n+1}t\varphi_{n+1,i+1}(t)$$

$$(1-t)\varphi_{n,i}(t) = \frac{n+1-i}{n+1}t\varphi_{n+1,i}(t)$$

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n+1} \varphi_{n+1,i}(t) \cdot P'_i$$

$$P'_0 = P_0$$

$$P'_{n+1} = P_n$$

$$P'_i = \frac{i}{n+1}P_{i-1} + \frac{n+1-i}{n+1}P_i$$

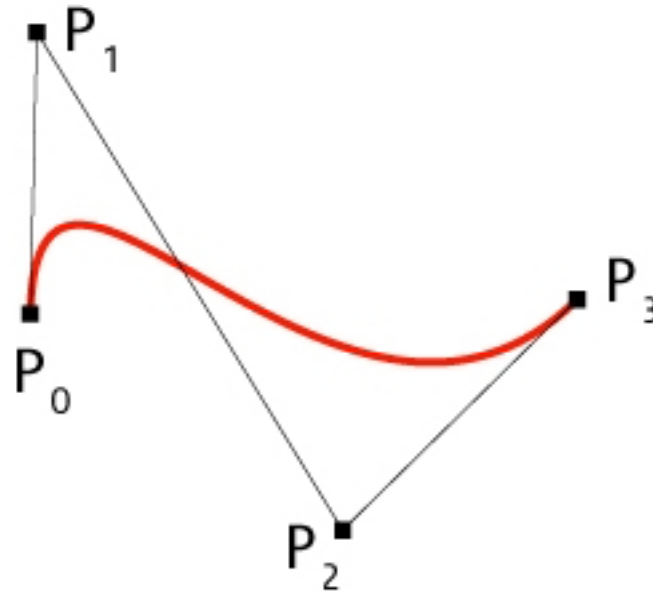
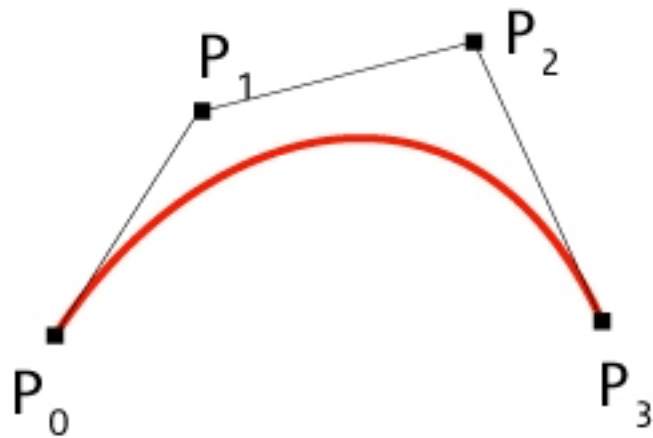
→ Augmenter le degré à $n + 1$

→ Courbe inchangée

5.56	+740.21	-
3.24	+122.56	-
9.62	+140.04	-
.36	+180.98	-
.56	+740.21	-
.24	+122.56	-
.62	+140.04	-
.36	+180.98	-
.56	+740.21	-

CONCLUSION

CONCLUSION



- $f(t)$ s'approche de P_i en $t = \frac{i}{n}$
- Pas de contrôle plus précis
- Paramétrisation « cachée »

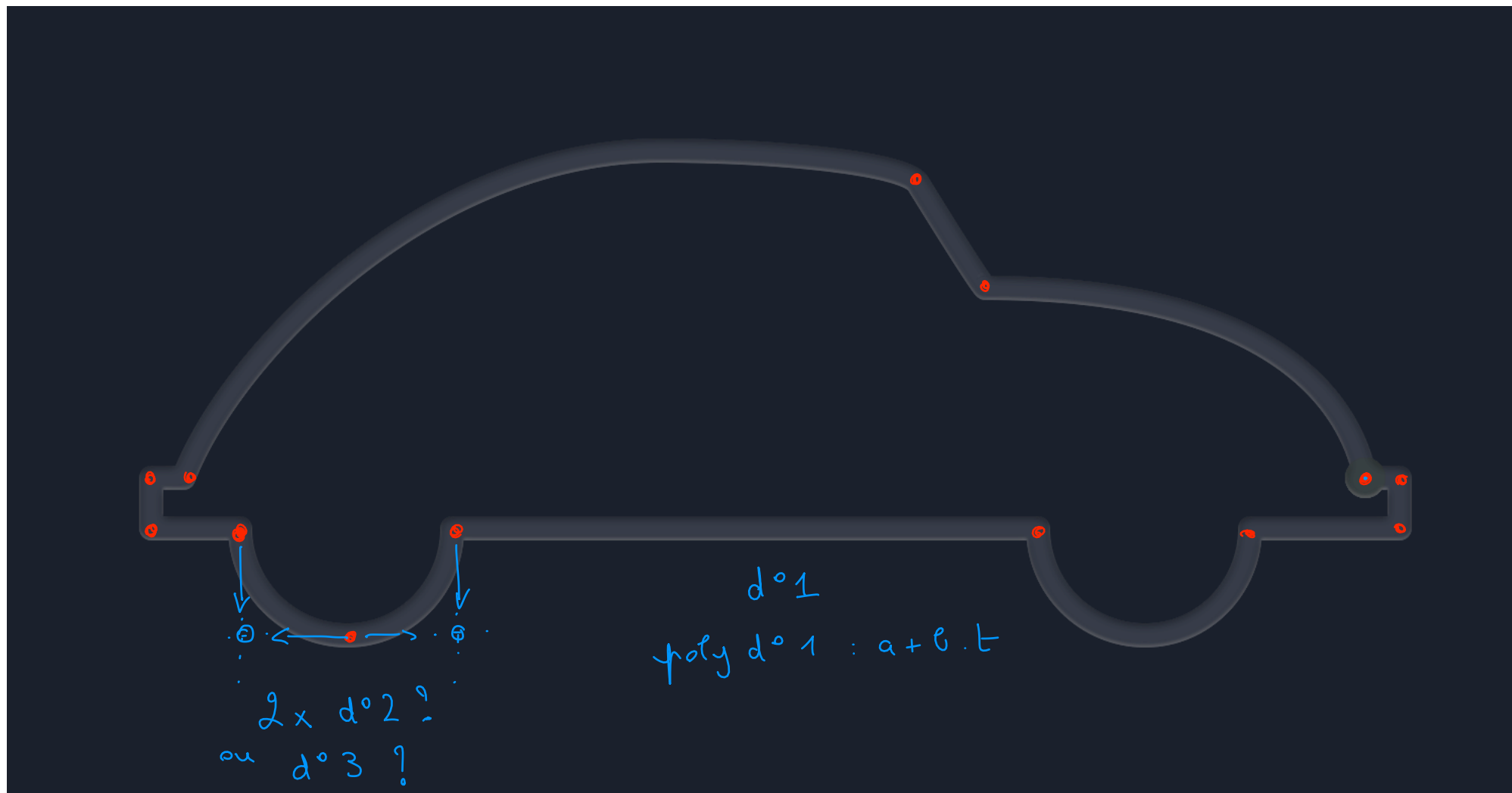
PLUS DE ... ?

Base B-spline

A suivre en 5A ...

Sera aussi beaucoup plus technique (paramétrisation explicite)

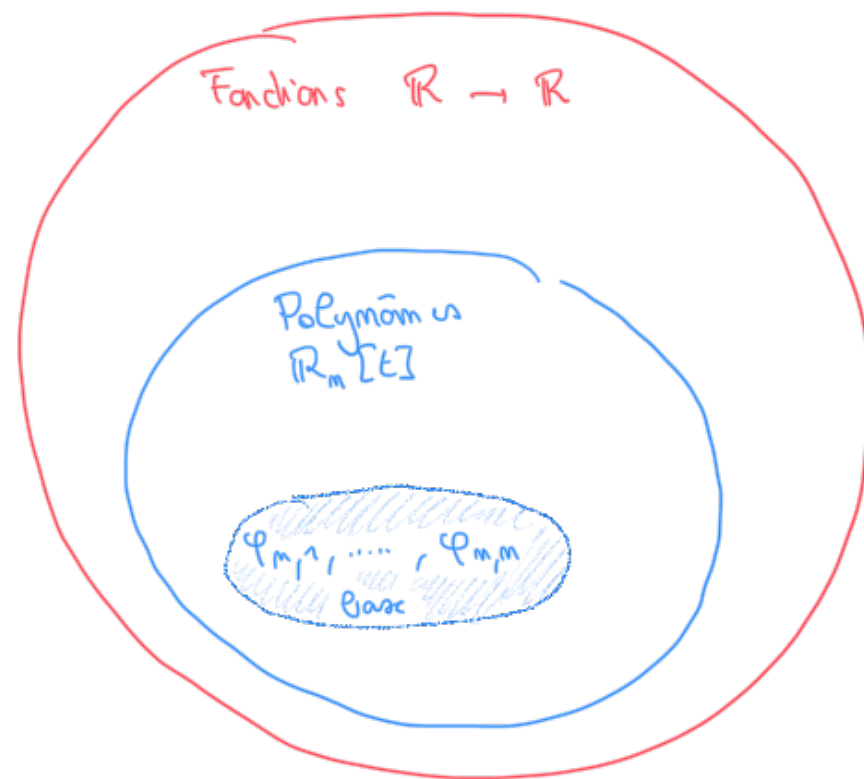
CONCLUSION / RACCORDEMENT ?



SURFACES PARAMÉTRIQUES (BÉZIERS)

« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - MODÈLES PARAMÉTRIQUES

Base de Bernstein ...



↓

Courbes (Béziens)

$$g(t) = \sum_{i=0}^m \varphi_{m,i}(t) \cdot P_i$$

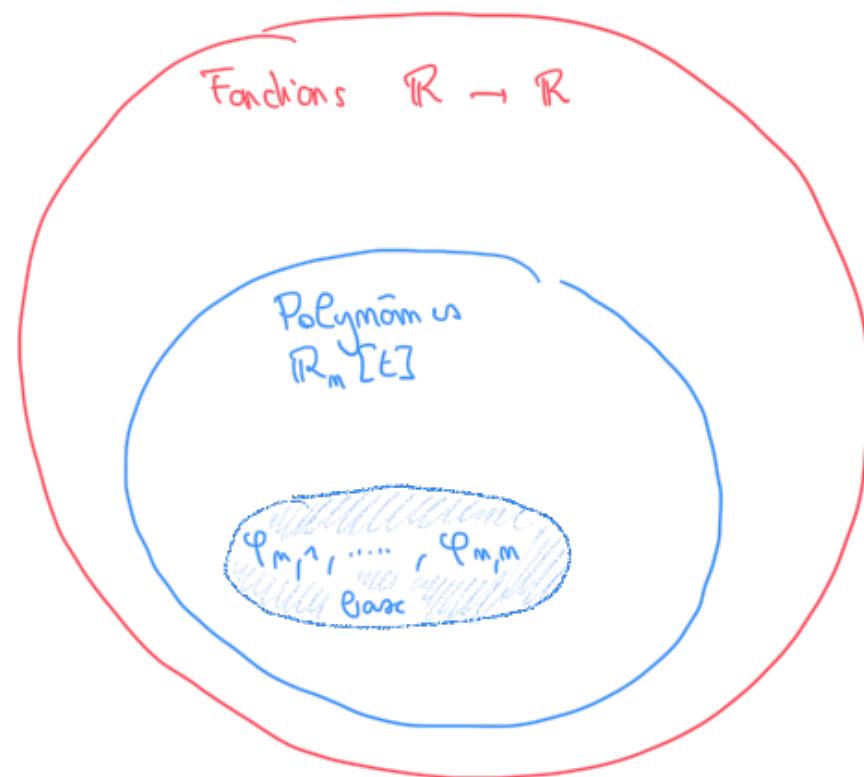
Surfaces paramétriques

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(u, v) =$$

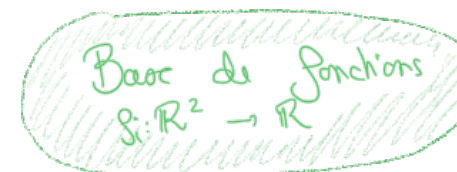
« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - MODÈLES PARAMÉTRIQUES

Base de Bernstein ...



↓

Courbes (Bézières)

$$g(t) = \sum_{i=0}^m \varphi_{m,i}(t) \cdot P_i$$


Surfaces paramétriques

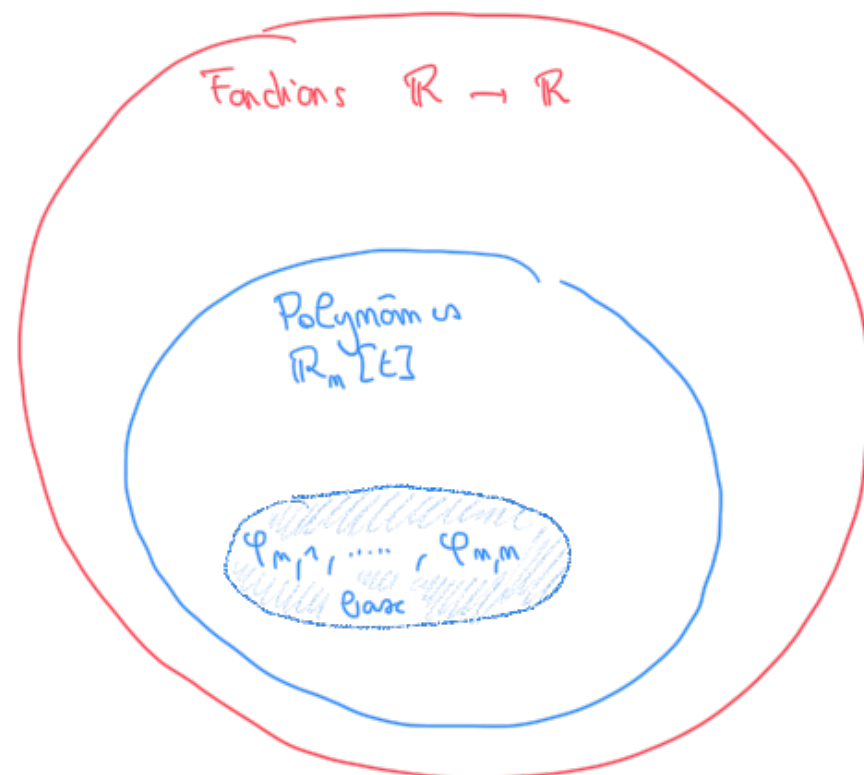
$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(u, v) = \sum_i f_i(u, v) \cdot P_i$$

« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - MODÈLES PARAMÉTRIQUES

Base de Bernstein ...

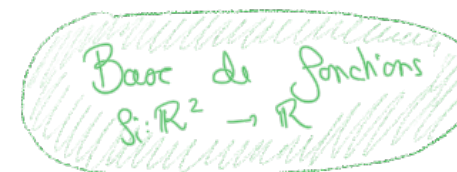
$$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \longrightarrow f \otimes g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(f \otimes g)(u, v) = f(u)g(v)$$



↓

Courbes (Béziens)

$$g(t) = \sum_{i=0}^m \varphi_{m,i}(t) \cdot P_i$$



Surfaces paramétriques

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f(u, v) = \sum_i f_i(u, v) \cdot P_i$$

« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - MODÈLES PARAMÉTRIQUES

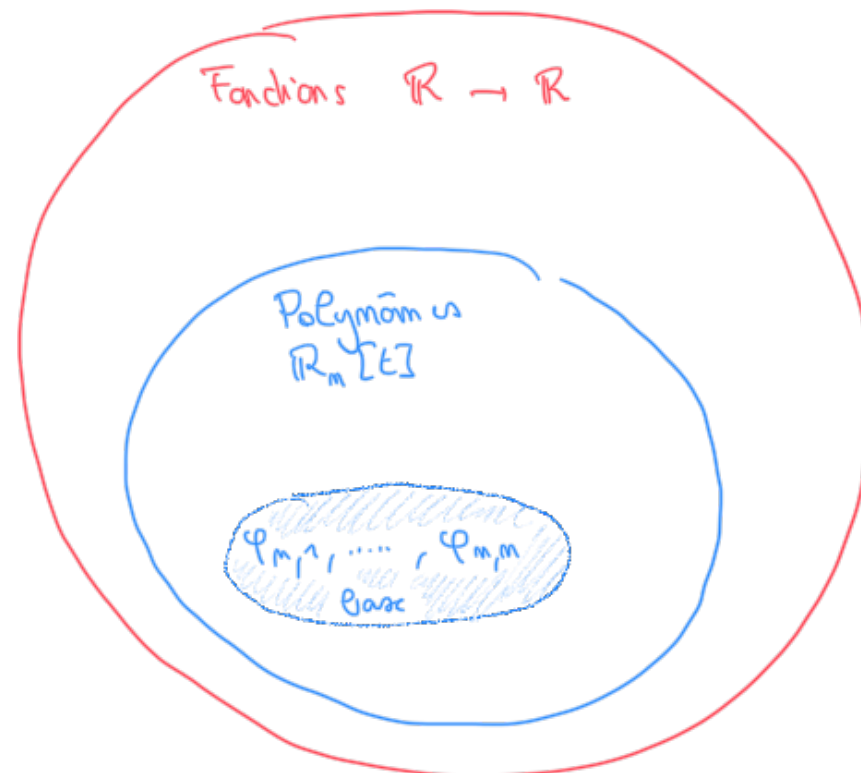
Base de Bernstein ...

$$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$



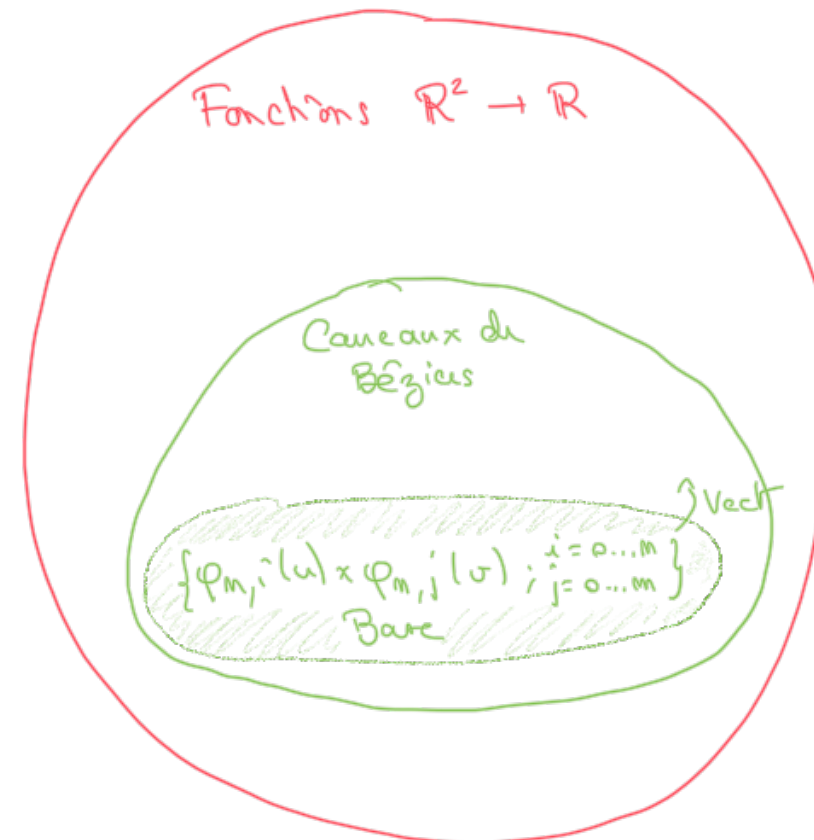
$$\begin{array}{c} \text{tenseurs} \\ \downarrow \\ f \otimes g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \end{array}$$

$$(f \otimes g)(u, v) = f(u)g(v)$$



Courbes (Bézier)

$$f(t) = \sum_{i=0}^m \varphi_{m,i}(t) \cdot P_i$$



Surfaces paramétriques

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

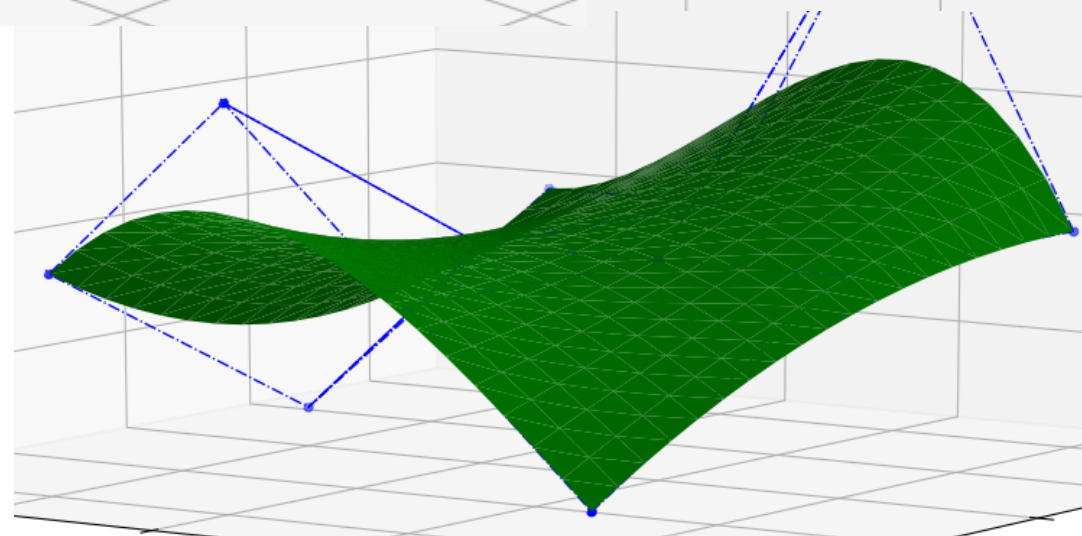
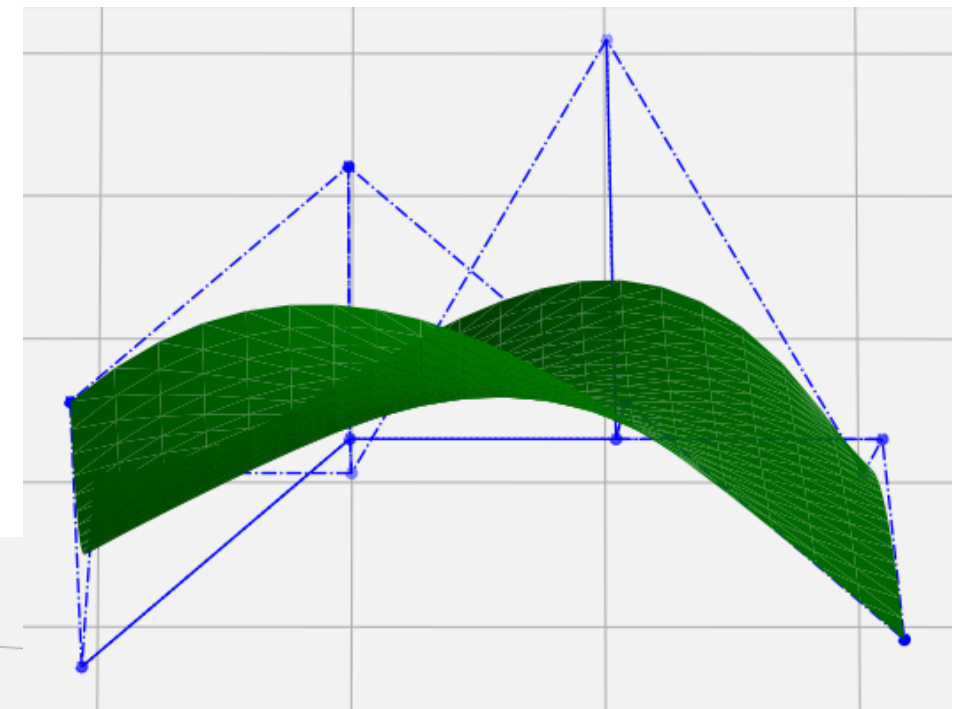
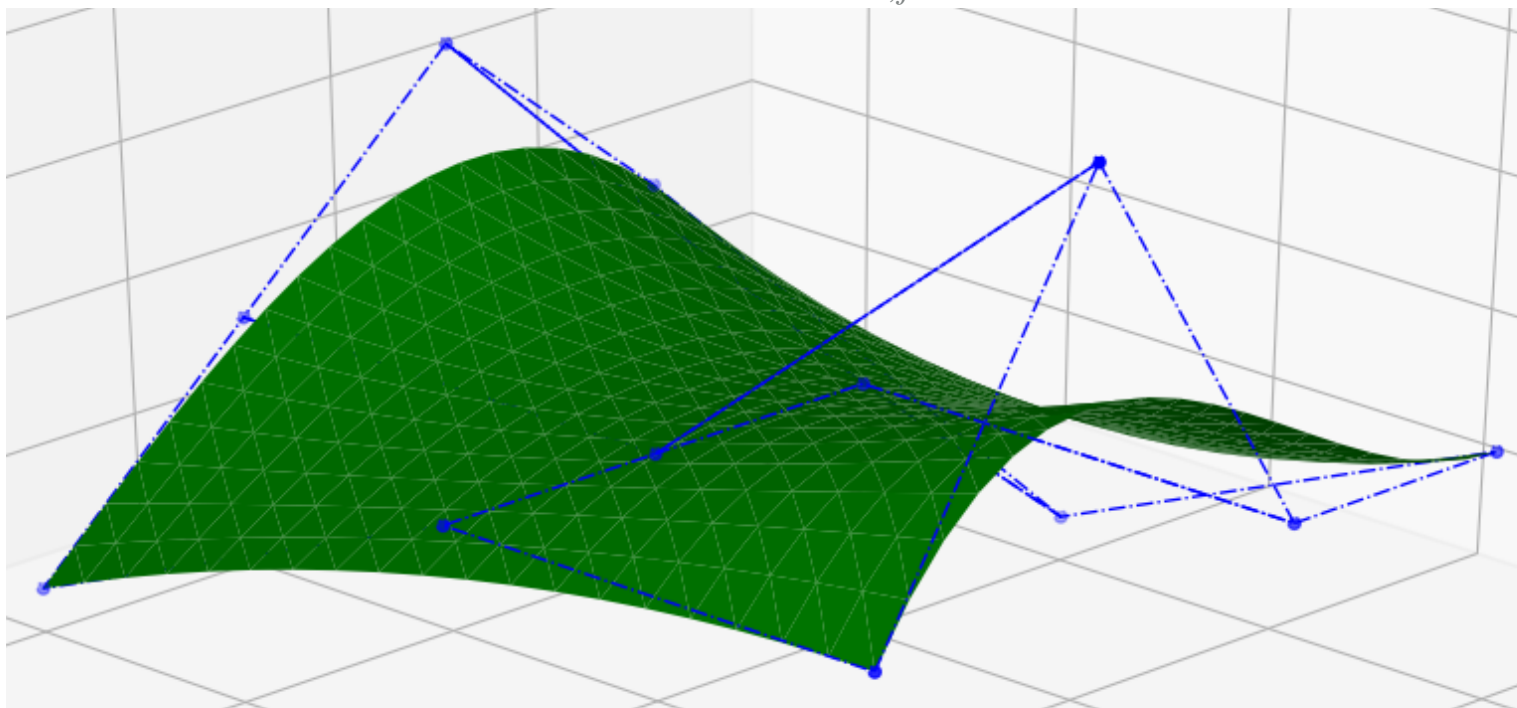
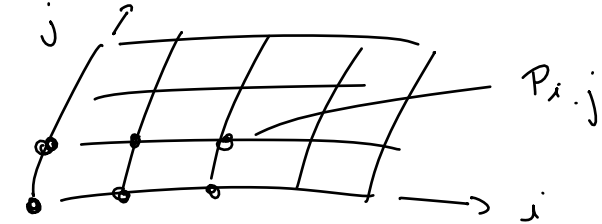
$$f(u, v) = \sum_{i,j} \varphi_{n,i}(u) \varphi_{m,j}(v) \cdot P_{i,j}$$

CARREAUX DE BÉZIERS

Surface produit tensoriel - carreaux de Béziers

$$f(u, v) = \sum_{i,j} \varphi_{n,i}(u) \varphi_{m,j}(v) \cdot P_{i,j}$$

polygone de contrôle

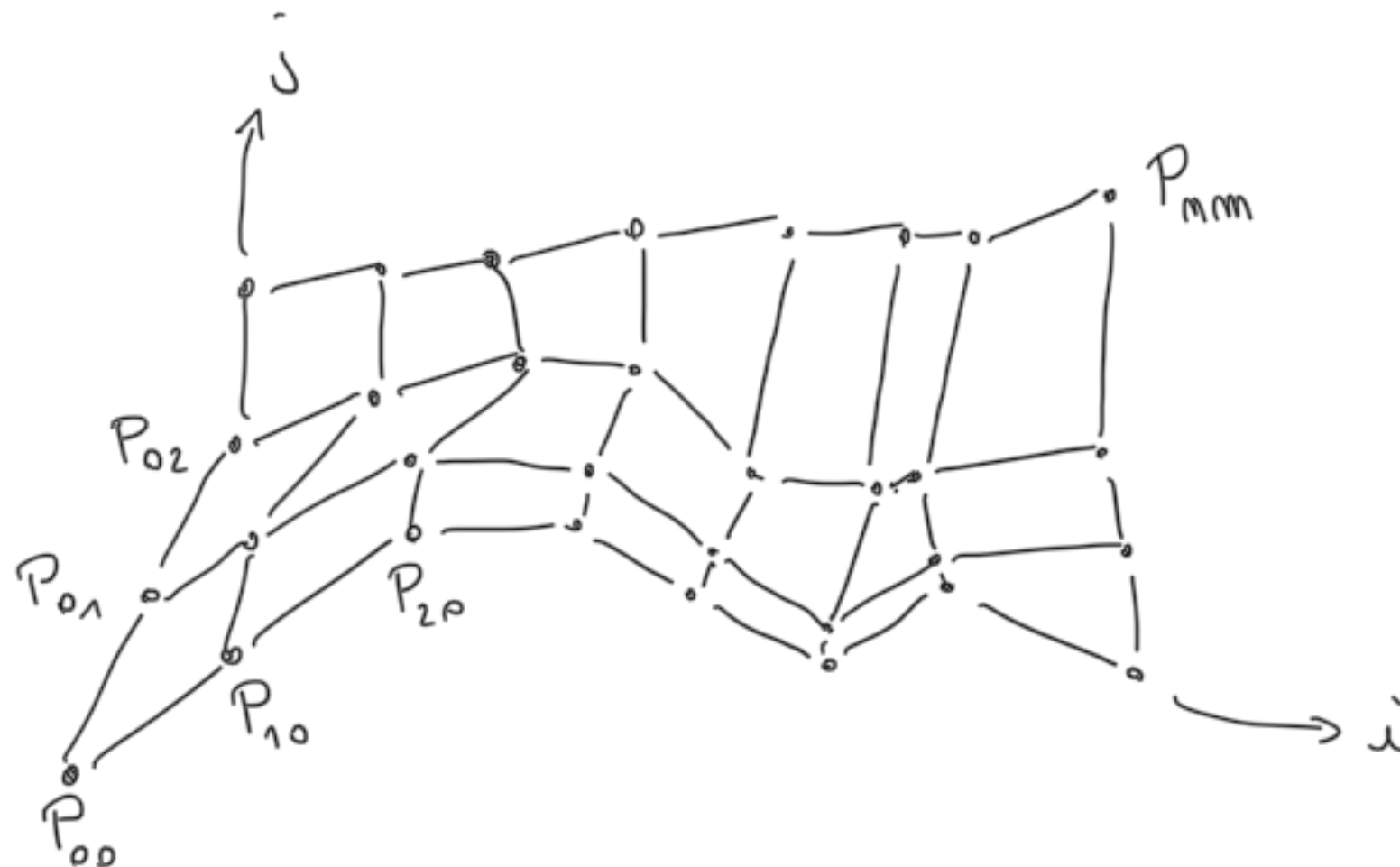


CARREAUX DE BÉZIERS

Surface produit tensoriel - carreaux de Béziérs

$$f(u, v) = \sum_{i,j} \varphi_{n,i}(u) \varphi_{m,j}(v) \cdot P_{i,j}$$

polygone de contrôle

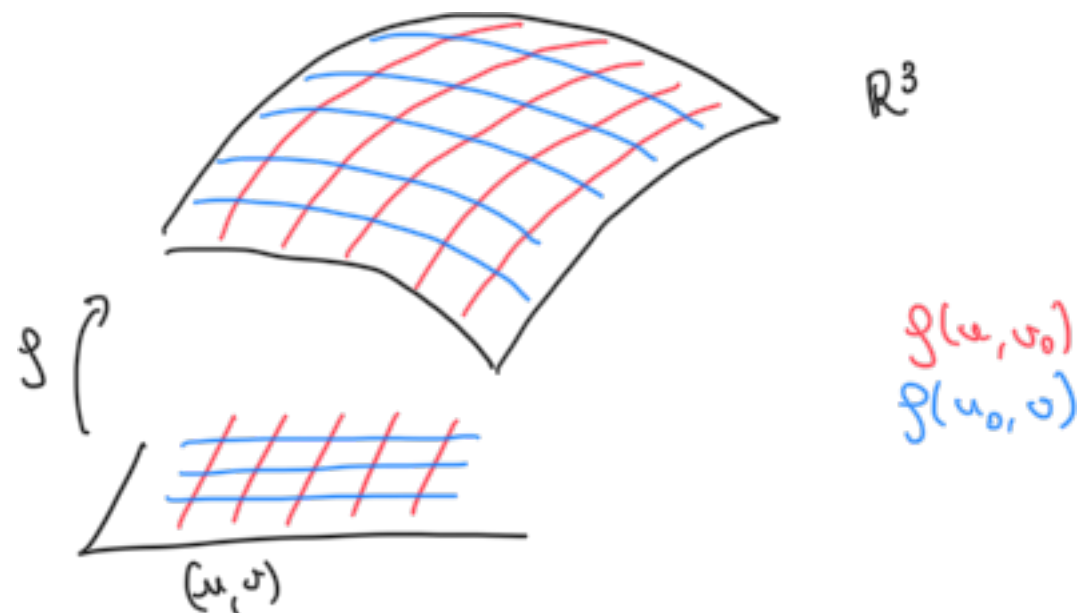


CARREAUX DE BÉZIERS

Surface produit tensoriel - carreaux de Béziérs

$$f(u, v) = \sum_{i,j} \varphi_{n,i}(u) \varphi_{m,j}(v) \cdot P_{i,j}$$

Courbes
isoparamétriques



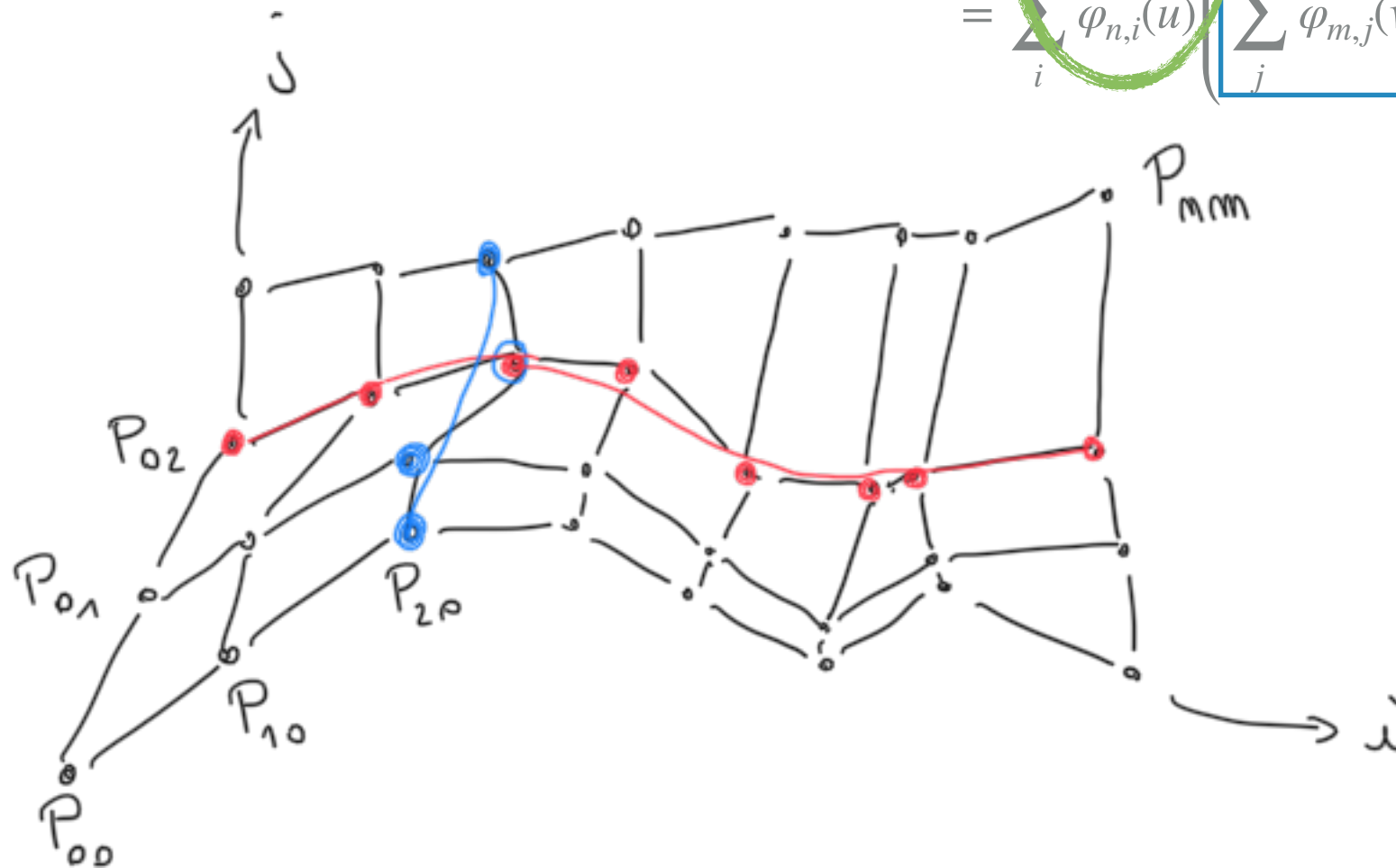
CARREAUX DE BÉZIERS

Surface produit tensoriel - carreaux de Béziers

$$f(u, v) = \sum_{i,j} \varphi_{n,i}(u) \varphi_{m,j}(v) \cdot P_{i,j}$$

polygone de contrôle

$$\begin{aligned} &= \sum_j \varphi_{m,j}(v) \left(\sum_i \varphi_{n,i}(u) \cdot P_{i,j} \right) \\ &= \sum_i \varphi_{n,i}(u) \left(\sum_j \varphi_{m,j}(v) \cdot P_{i,j} \right) \end{aligned}$$



Courbes
de
Bézier

↓
Pas sur la
surface !

PAS
COURBES
ISOPARA-
MÉTRIQUES

CARREAUX DE BÉZIERS / RACCORDEMENT

