TD2 - Optimisation multivariables

Alexandra Bac

Optimisation - MIRA
Polytech Marseille - IRM 2ème année

Représenter et comparer les temps de calcul avec la méthode de descente de gradient.

Exercice 1 (Descente de gradients, gradients conjugués)**.**
Implémenter les méthodes de descente de gradient et de gradients conjugués pour une fonction quelconque et appliquer à :

$$\begin{array}{rcl} f_1 : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \alpha x^2 + \beta y^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f_2 : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (\alpha x^2 + \beta y^2) \cdot \big(2 + \sin(x^2+y^2)\big) \end{array}$$

avec $\alpha, \beta > 0$.
Vous représenterez les fonctions comme des surfaces paramétriques et visualiserez les descentes.

Exercice 2 (Application : ajustement d'un cercle)**.** En utilisant les quelques lignes suivantes, on génére des points au voisinage d'un cercle :

```
x0 = 1 ;
y0 = 2 ;
r = 1 ;
n = 20 ; % nombre de points échantillonnés
epsilon = .1 ; % taux de bruit (en % du rayon du cercle)

theta = rand(1,n)*2*pi ; % tirage aléatoire de n angles [0, 2pi]
% x = cos(theta)
% y = sin(theta)
% on stocke dans M en colonnes
M = [cos(theta) ;sin(theta)] ;
% ajout de bruit
M = M + rand(2,n)*epsilon ;
% centrage autour de x0, y0
M(1,:) = M(1,:)+x0 ;
M(2,:) = M(2,:)+y0 ;

plot(M(1,:), M(2,:), '.r')
```

Ajuster (aux moindres carrés) un cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon r, donc d'équation $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0$ pour obtenir les trois paramètres x_0, y_0, r optimaux (et donc le cercle le plus probable).

Exercice 3 (Méthode de pénalisation)**.** Pour approcher la solution d'un problème d'optimisation sous contraintes trop complexe, on peut utiliser une méthode dite "de pénalisation" et ainsi se ramener à un problème d'optimisation sans contraintes.

On considère une surface implicite :

$$\mathcal{S} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, f(x, y, z) = 0\right\}$$

et un point $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On veut calculer le projeté de u sur la surface (donc le point le plus proche de u appartenant à la surface). On pourra par exemple prendre $f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 - 1$ (ce qui donne un ellipsoïde).

1. Montrer que l'on peut modéliser ce problème comme un problème d'optimisation où l'on minimise une fonction J sous une contrainte f :
   — fonction à minimiser : $J(X) = \|X - X_0\|^2$
   — contraintes : $f(X) = 0$ où f est l'équation implicite de la surface
2. Vous pourrez utiliser la fonction `plotImplicit3D` fournie pour représenter la surface.
3. On indroduit un α petit (prendre $\alpha = 10^{-2}$ pour commencer) et on construit la fonction

   $$g(X) = J(X) + \frac{1}{\alpha} f(X)^2$$

   que l'on minimise (avec les méthodes de descente précédentes).
   Qu'obtenez-vous ?

Vous aurez besoin pour pouvoir appliquer la méthode de calculer le gradient de g.

$$J(X) = (X - X_0)^t \cdot (X - X_0) \;\Rightarrow\; \nabla J(X) = 2(X - X_0)$$

$$\nabla(f(X)^2) = 2f(X)\nabla f(X)$$