

## TD3 - Optimisation aux moindres carrés

Alexandra Bac

Optimisation - MIRA  
ESIL - IRM 2ème année

**Exercice 1** (Calcul de gradients). On fixe  $\mathbf{w} \in^d$ ,  $\mathbf{A} \in^{n \times d}$ ,  $\mathbf{b} \in^n$  et  $\mathbf{B} \in^{d \times d}$ . Calculez le gradient  $\nabla f$  des fonctions  $f_i :^d \rightarrow$  suivantes :

$$f_1(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle \quad (1)$$

$$f_2(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x} \quad (2)$$

$$f_3(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_2^2 \quad (3)$$

$$f_4(\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\|_2^2 \quad (4)$$

$$f_5(\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 \quad (5)$$

$$f_6(\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\|_2 \quad (6)$$

$$f_7(\mathbf{x}) = e^{\langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle} \quad (7)$$

**Exercice 2** (Approximation aux moindres carrés). Nous allons nous intéresser à l'approximation d'un nuage de points  $\{(x_i, y_i, z_i)\}_{i=1 \dots n}$  situés au voisinage de 0 par une surface.

1. Grâce au script suivant, générer un nuage de points situé au voisinage d'une surface paramétrique passant par 0 (avec du bruit)

```
n = 50 ; M = rand(2,n) - 0.5 ;  
alpha = 1 ; beta = 1 ;  
epsilon = .01 ;  
f = @(X,Y) 2*X.^2 - Y.^2 ;  
M(1,:) = alpha * M(1,:) ; M(2,:) = beta * M(2,:) ;  
M(3,:) = f(M(1,:), M(2,:)) ;  
M(3,:) = M(3,:) + epsilon * 2* (rand(size(M(3,:))) - .5) ;  
plot3(M(1,:), M(2,:), M(3,:), 'b')
```

2. Approximer ce nuage de points par une surface :
  - (a) plane dans un premier temps (donc d'équation  $z = a_1 \cdot x + a_2 \cdot y + a_3 = f_1(x, y)$ ),
  - (b) puis quadratique paramétrique de degré 2
3. Représenter graphiquement tous ces résultats.

4. Jusqu'à combien de points peut-on descendre respectivement pour ces deux surfaces ( $n$  minimal - interpolation)? Quel est le conditionnement moyen de la matrice dans ce cas (faire plusieurs tirages aléatoires de points)?
5. Dans les deux cas, partant de  $n$  minimal et de 10 en 10 jusqu'à 50, calculer l'approximation aux moindres carrés et le conditionnement moyen de la matrice ainsi que de la matrice des équations normales.
6. Pour tester l'impact de cette grandeur, perturber légèrement les points (10%), que constatez-vous sur la surface finale?