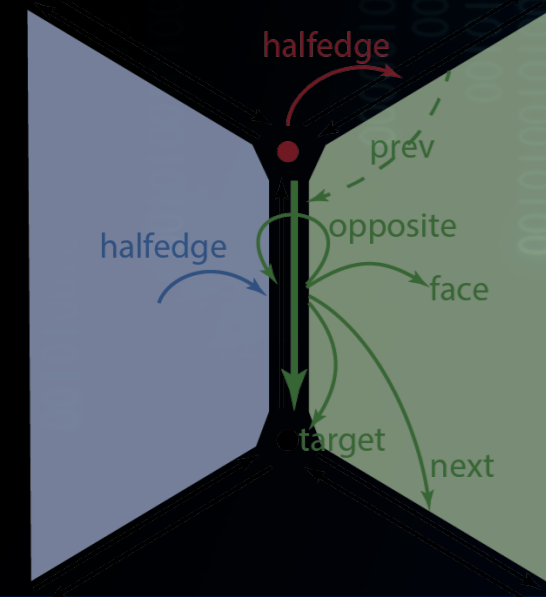


# MODELISATION GEOMETRIQUE



Alexandra Bac

POLYTECH 4A INFORMATIQUE **REVA**

## 5 – MODÉLISATION IMPLICITE

Certaines illustrations sont issues du livre « polygon mesh processing »

# « MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - MODÉLISATION IMPLICITE

---

Chapitre 2

MAILLAGES



Chapitre 4

GÉOMÉTRIE DES SURFACES



Chapitre 1

MODÉLISATION DES SURFACES

Chapitre 3 (+ 5A)

SURFACES PARAMÉTRIQUES



Chapitre 5

SURFACES IMPLICITES



**GÉNÉRALITÉ**

# MODÉLISER UNE SURFACE

MODÈLES EXPLICITES

Accès explicite  
aux points

MODÈLES IMPLICITES

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

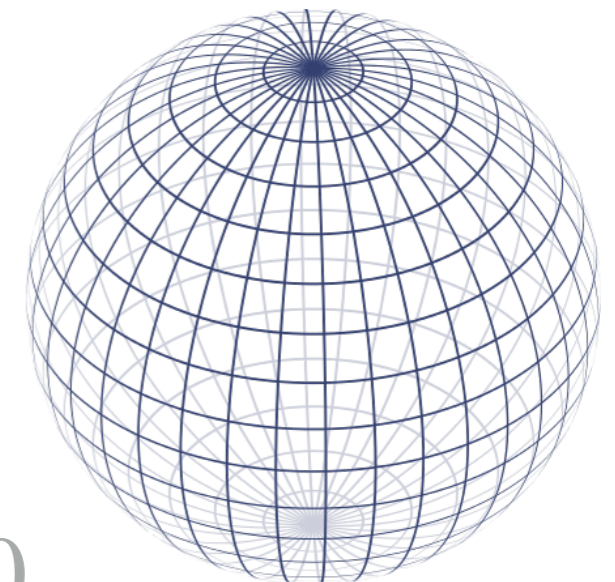
th. d'inversion  
locale

MAILLAGES

SURFACES PARAMÉTRIQUES

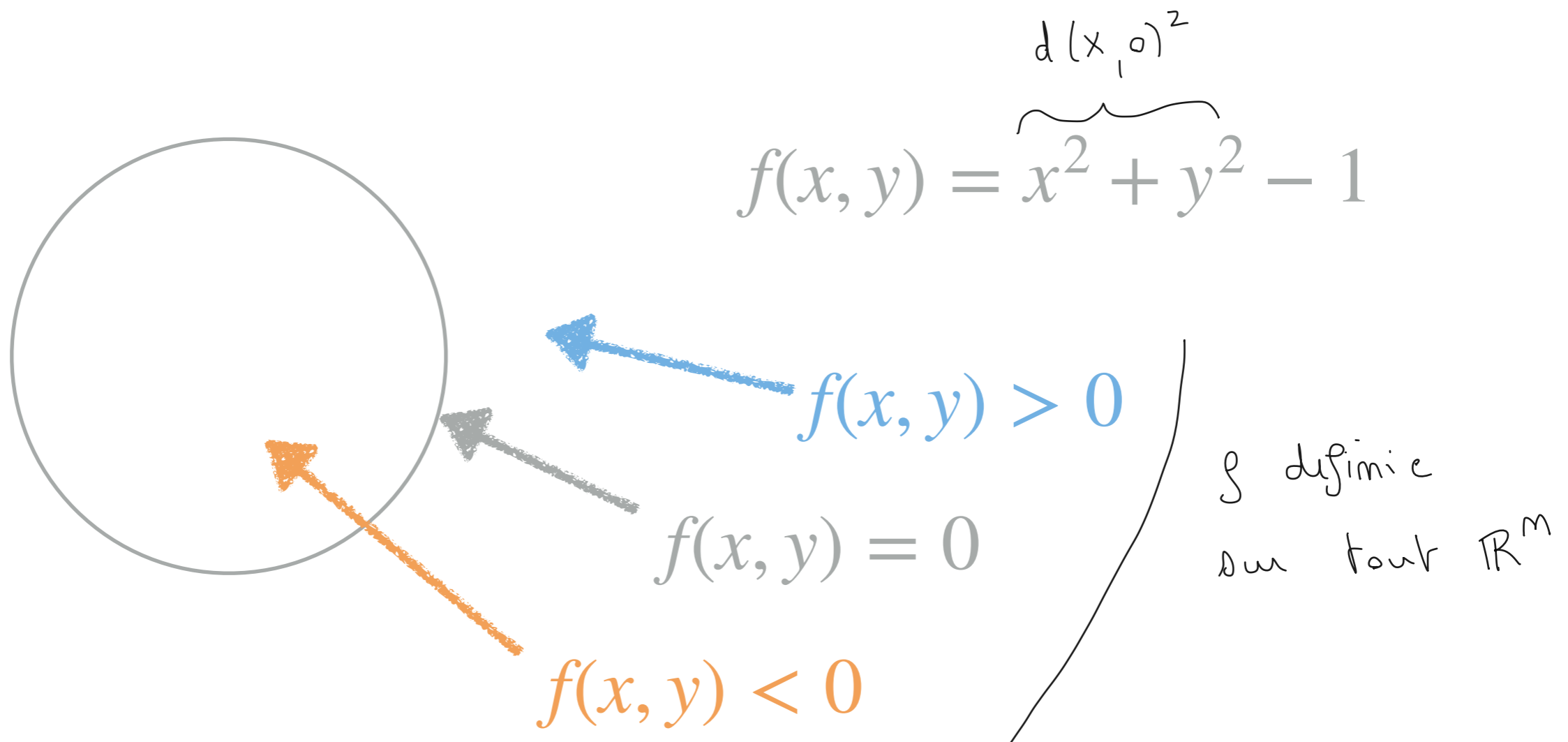
$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(u, v) \mapsto f(u, v) \in \mathbb{R}^3$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$



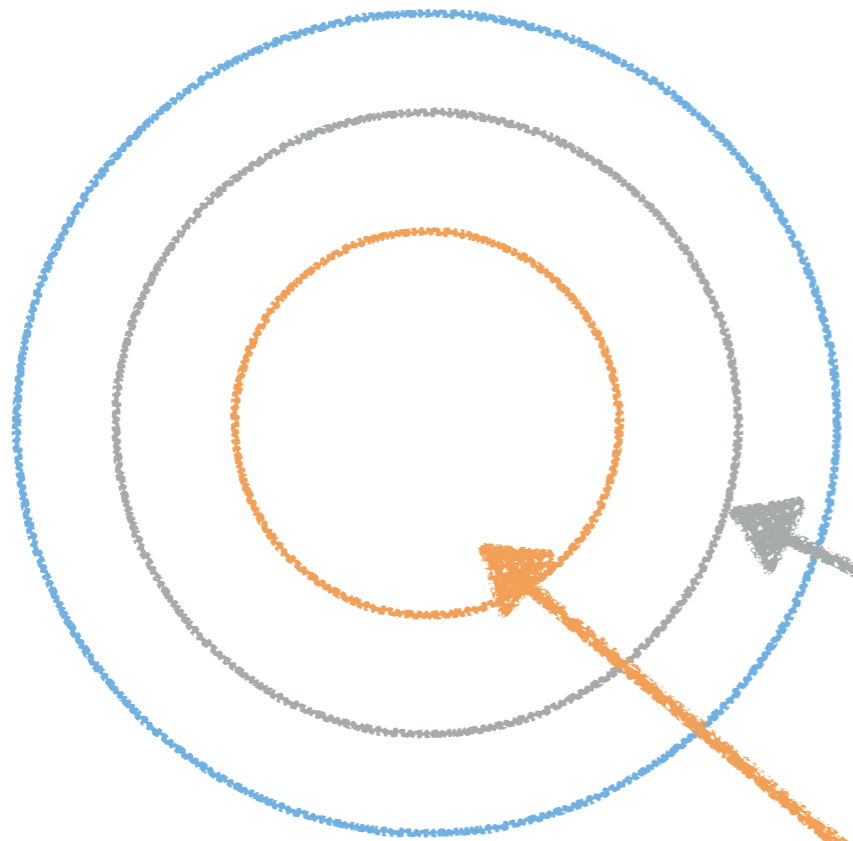
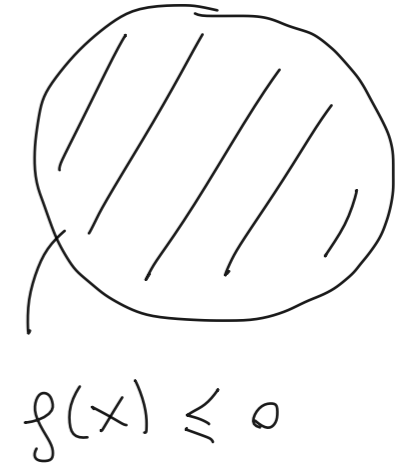
## SURFACE IMPLICITE : LIGNE DE NIVEAU 0

Exemple 2D : cercle de centre 0 et rayon 1



## SURFACE IMPLICITE : LIGNE DE NIVEAU 0

Exemple 2D : cercle de centre 0 et rayon r



$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

$$f(x, y) = \frac{1}{2}$$

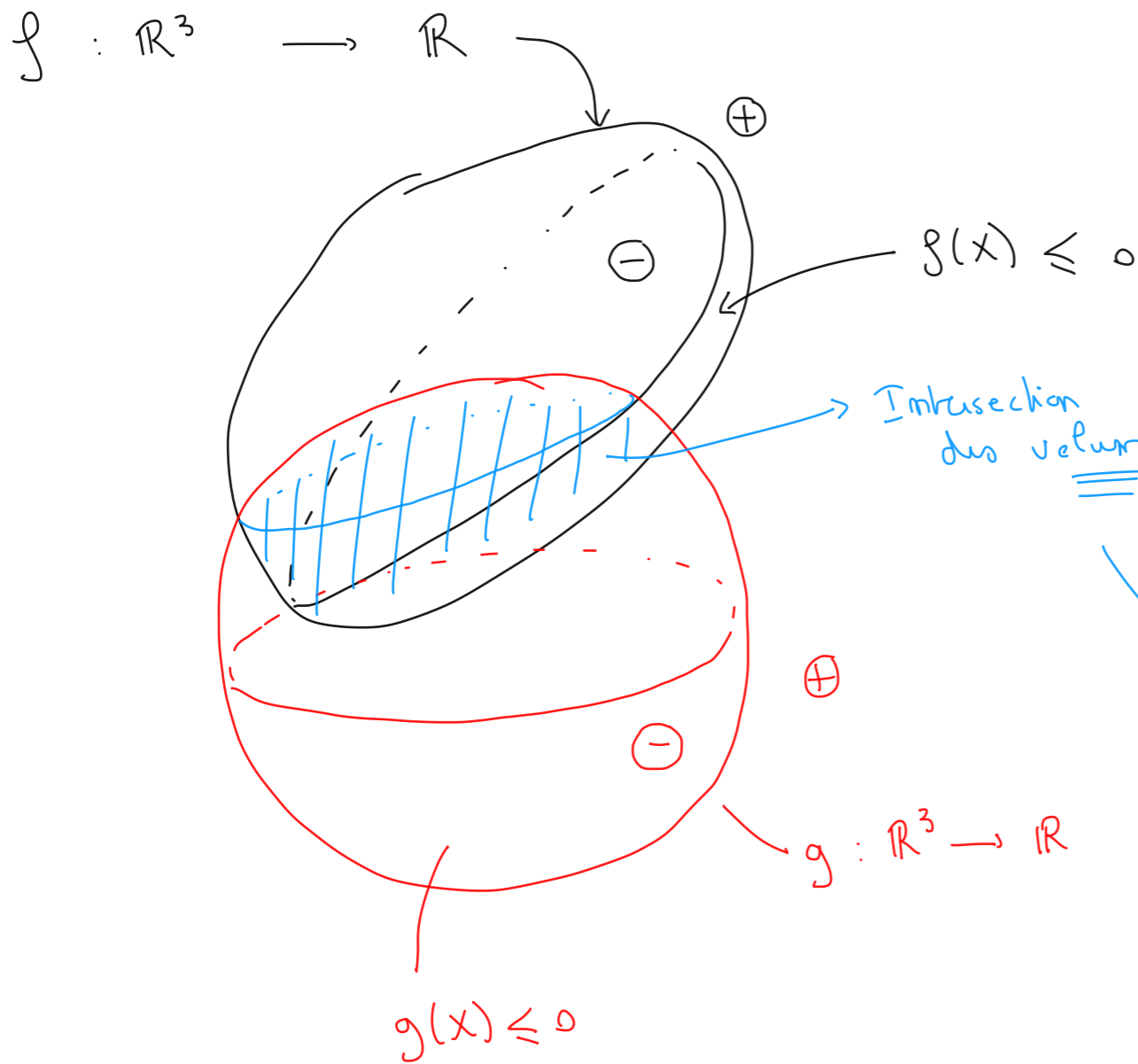
$$f(x, y) = 0$$

$$f(x, y) = -\frac{1}{2}$$

LIGNES DE  
NIVEAU

## AVANTAGES / INCONVÉNIENTS

- ▶ Pas de problème de paramétrisation
- ▶ Surfaces lisses
  - ▶ Gestion du bruit, de l'échantillonnage, occlusions, discontinuités
  - ▶ Accès à la géométrie simple (normales, courbures ...)
- ▶ Raytracing simple
- ▶ Calculs de volumes, d'opérations binaires



modèle implicite  $\rightarrow$  surf.  
 $\rightarrow$  volumes

maillages — codes des volumes  
 $\downarrow$   
 maillages 3D (tétrahèdres...)

$f(x) \leq 0$  et  $g(x) \leq 0$

---

$h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$h(x) = \max(f, g)$



Intersection  $\leftrightarrow$  max  
 Union  $\leftrightarrow$  min  
 Complémentaire  $\leftrightarrow -f$



Avec convention

$\oplus$  extérieur

$\ominus$  intérieur



## AVANTAGES / INCONVÉNIENTS

- ▶ Extraction d'un maillage ...
- ▶ Modèles pas très souples
- ▶ Lignes saillantes, cassures, détails pas forcément faciles à modéliser

# COMMENT EN « FABRIQUER » ?

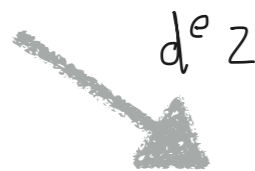
Une équation  $f(x, y, z)$  c'est vaste ...

# TYPES DE SURFACES IMPLICITES

SURFACES ALGÈBRIQUES

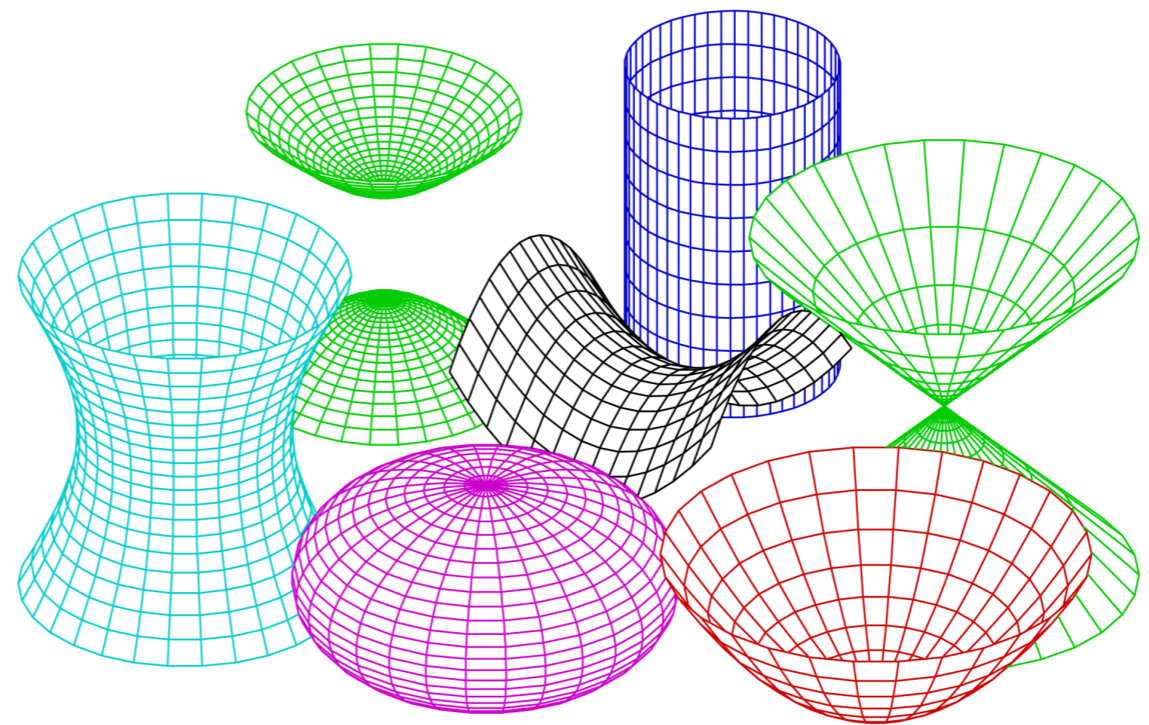
Equation  
algébrique

Polynômes



Quadriques

→  $\oplus$  of Booleennes → surfaces  
CSG



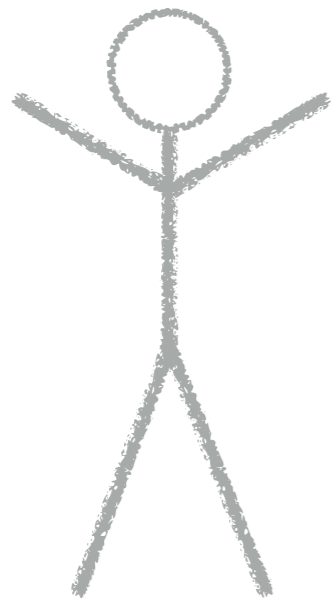
## TYPES DE SURFACES IMPLICITES

SURFACES ALGÈBRIQUES

« BLOBBY » SURFACES

Surfaces de convolution

$$f(x, y, z) = \delta$$



Squelette

$f(x, y, z)$  :  
distance au squelette



Epaisseur autour  
de ce squelette



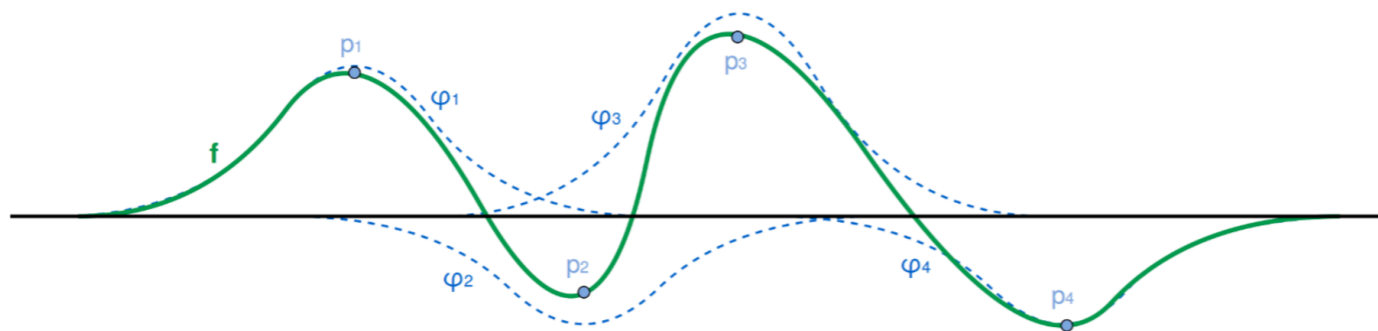
# TYPES DE SURFACES IMPLICITES

SURFACES ALGÈBRIQUES

« BLOBBY » SURFACES

BASES DE  
FONCTIONS

Choix de fonctions  
de base  $\phi_i$



$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(\vec{x})$$

## TYPES DE SURFACES IMPLICITES

### SURFACES ALGÈBRIQUES

- ▶ CAO (opérations booléennes sur formes simples)
- ▶ **Très limité ...**

### « BLOBBY » SURFACES

- ▶ Relativement simples
- ▶ Manipulées par le squelette
- ▶ CAO, animation, particules
- ▶ **Ajustement précis difficile**

### BASES DE FONCTIONS

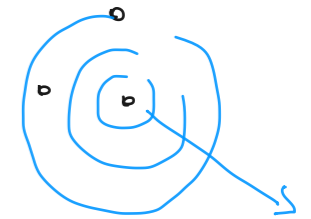
- ▶ Beaucoup plus expressives
- ▶ Reconstruction, approximation
- ▶ **Algorithmique plus complexe**

LES « BLOBBY »  
SURFACES

## UN EXEMPLE BASIQUE

(annexes 80)

→ squette : points  $(C_i)$



- ▶ Blobs de Blinn : somme de gaussiennes

$$f(X) = \sum_{i=1}^n e^{-a_i \|X - C_i\|^2}$$

Handwritten annotations in blue:  
- Above the sum: "vaut 1 pour  $X = C_i$ "  
- Below the exponent: " $\rightarrow 0$   $X$  s'éloigne de  $C_i$ "

- ▶ Exemple :

- ▶ Trajectoire des centres
- ▶  $a_i = 0,7$  / isosurface 0,7

**Modélisation  
basée sur des  
points (centres)**

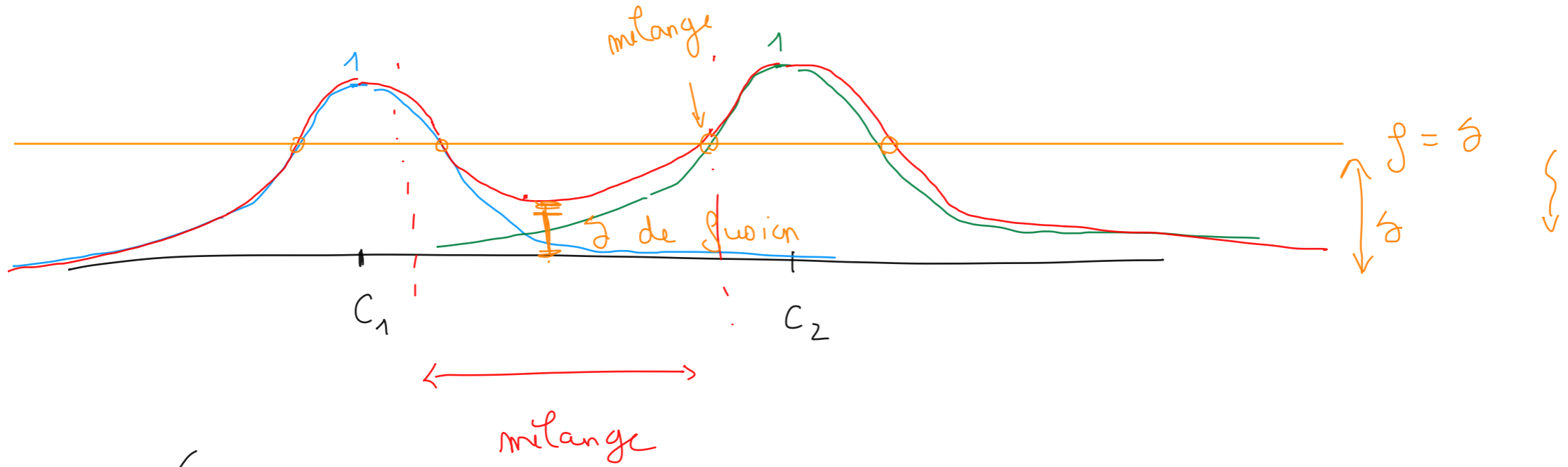


Vue 2D

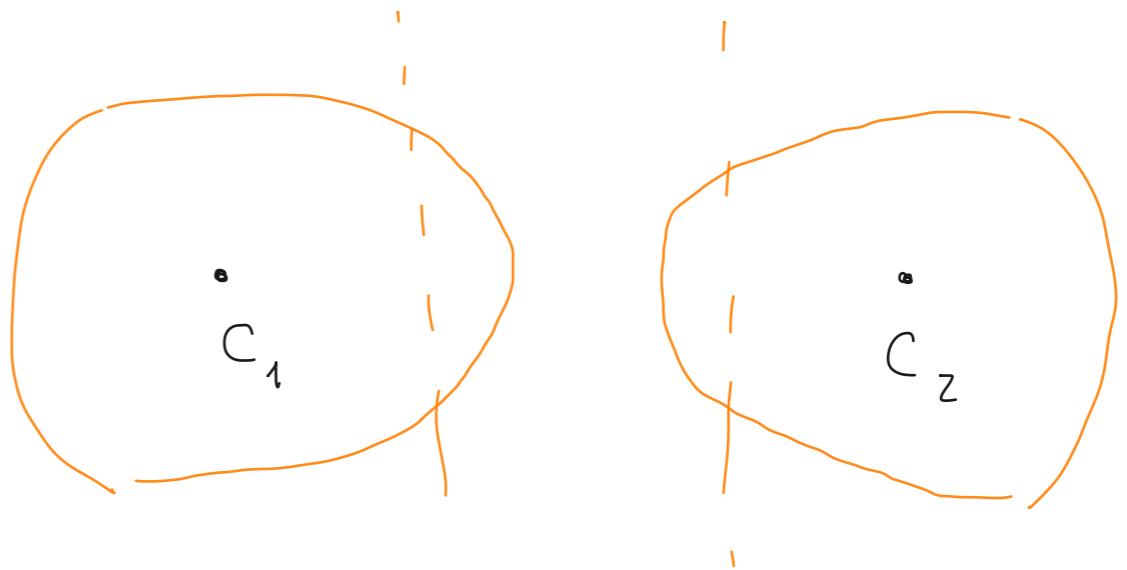
$$e^{-a_1 \|X - C_1\|^2}$$

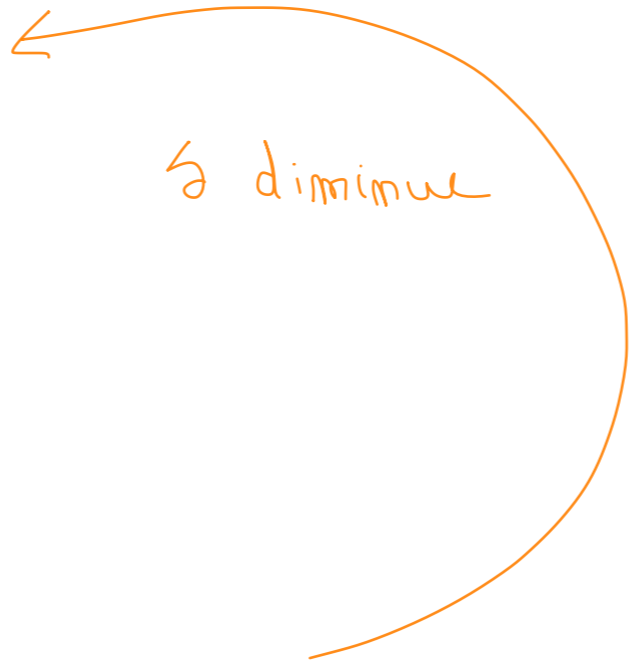
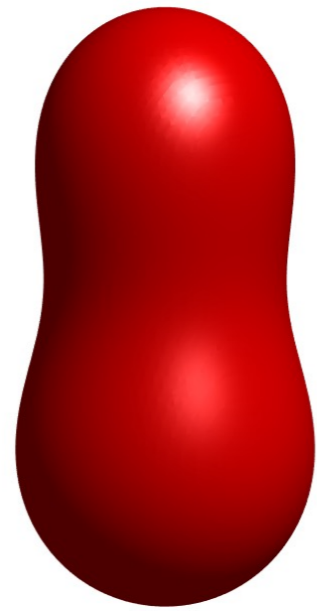
$\oplus$

$$e^{-a_2 \|X - C_2\|^2}$$

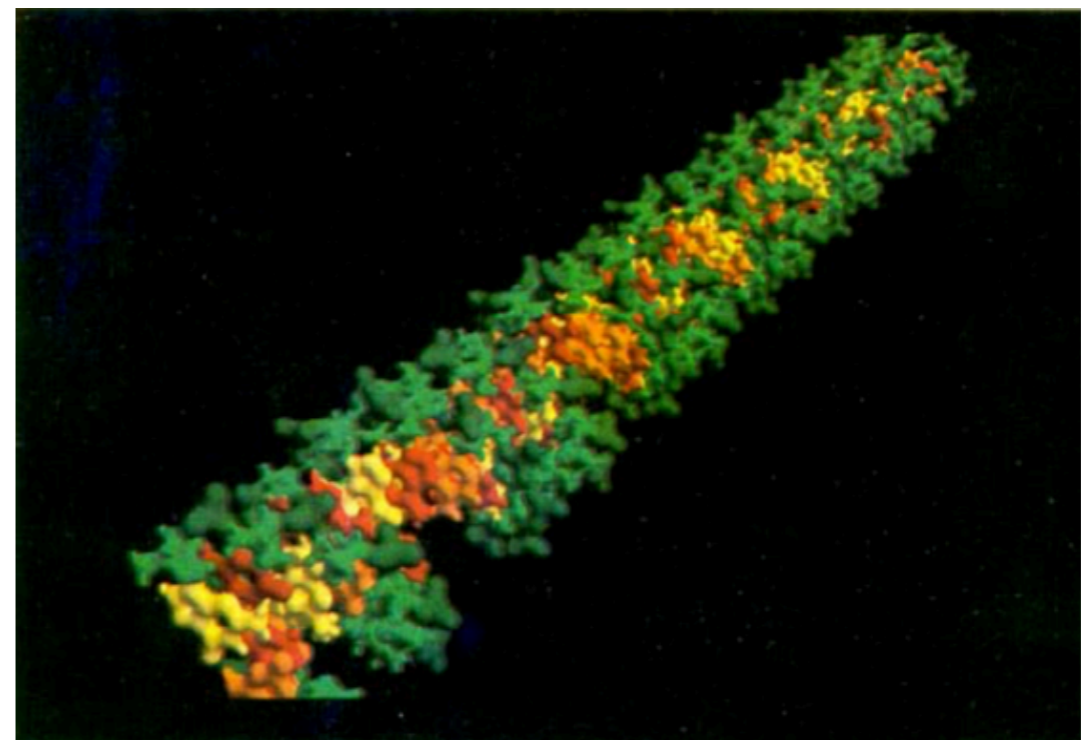
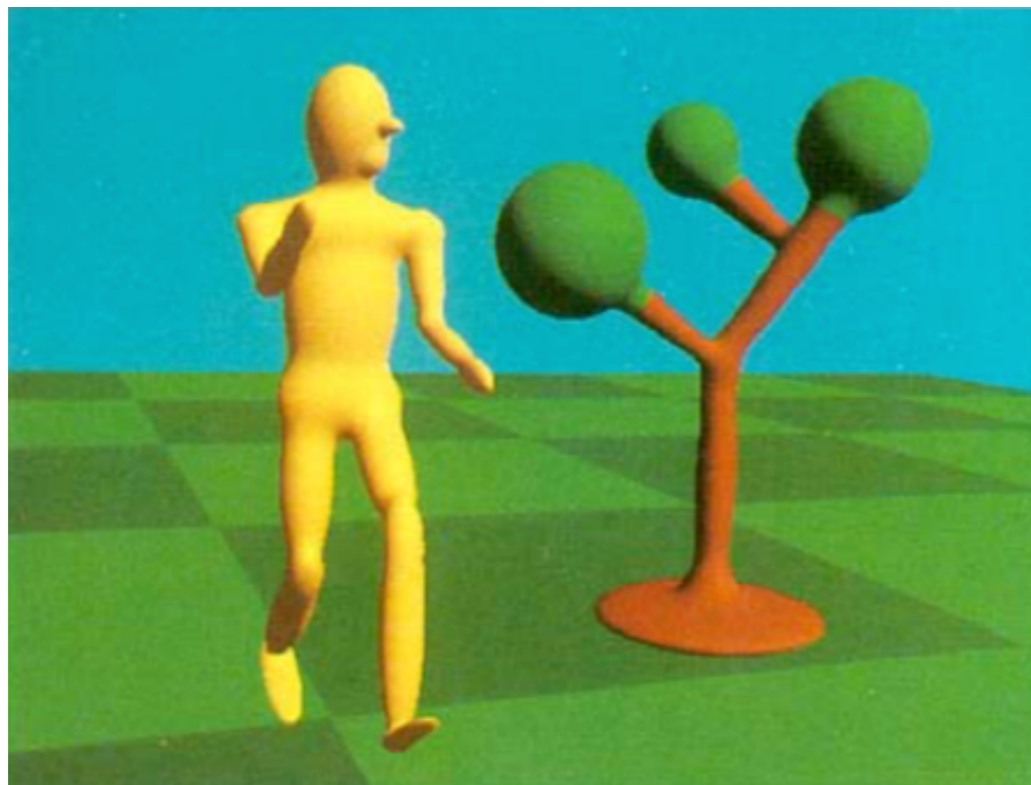


Surface  $\sigma = \sigma$



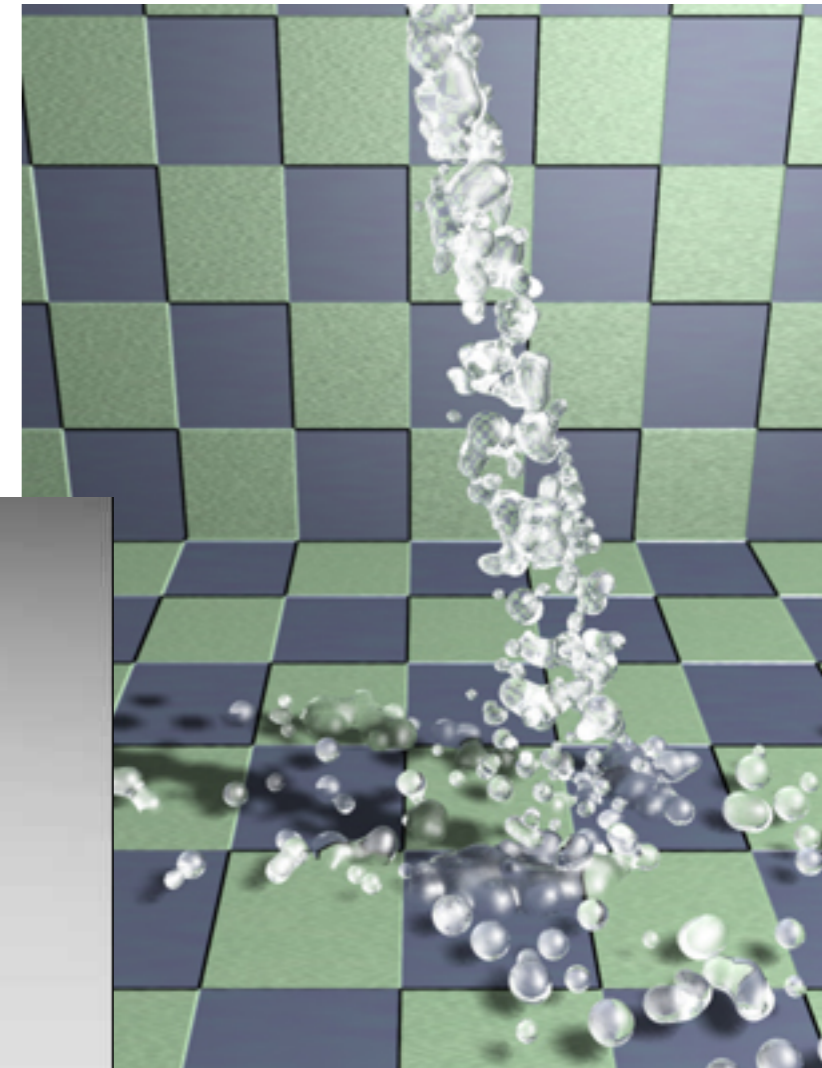


## UN EXEMPLE BASIQUE



## ET APRÈS ?

Metaballs de Nishimura



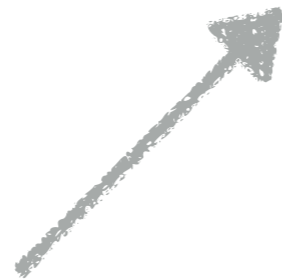
Soft objects

## ET APRÈS ??

### Surfaces de convolution

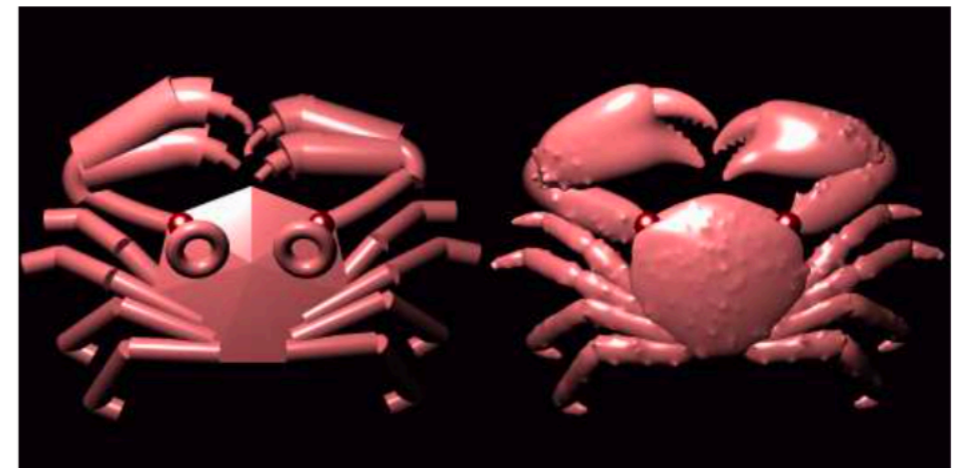
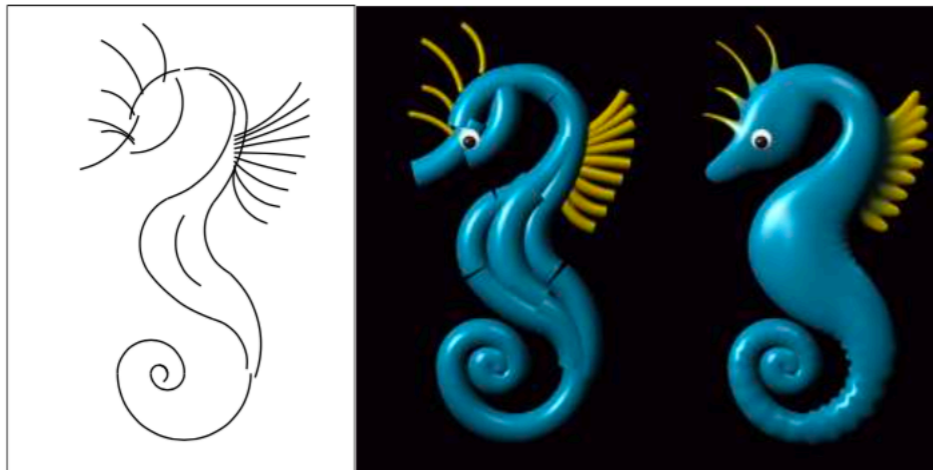
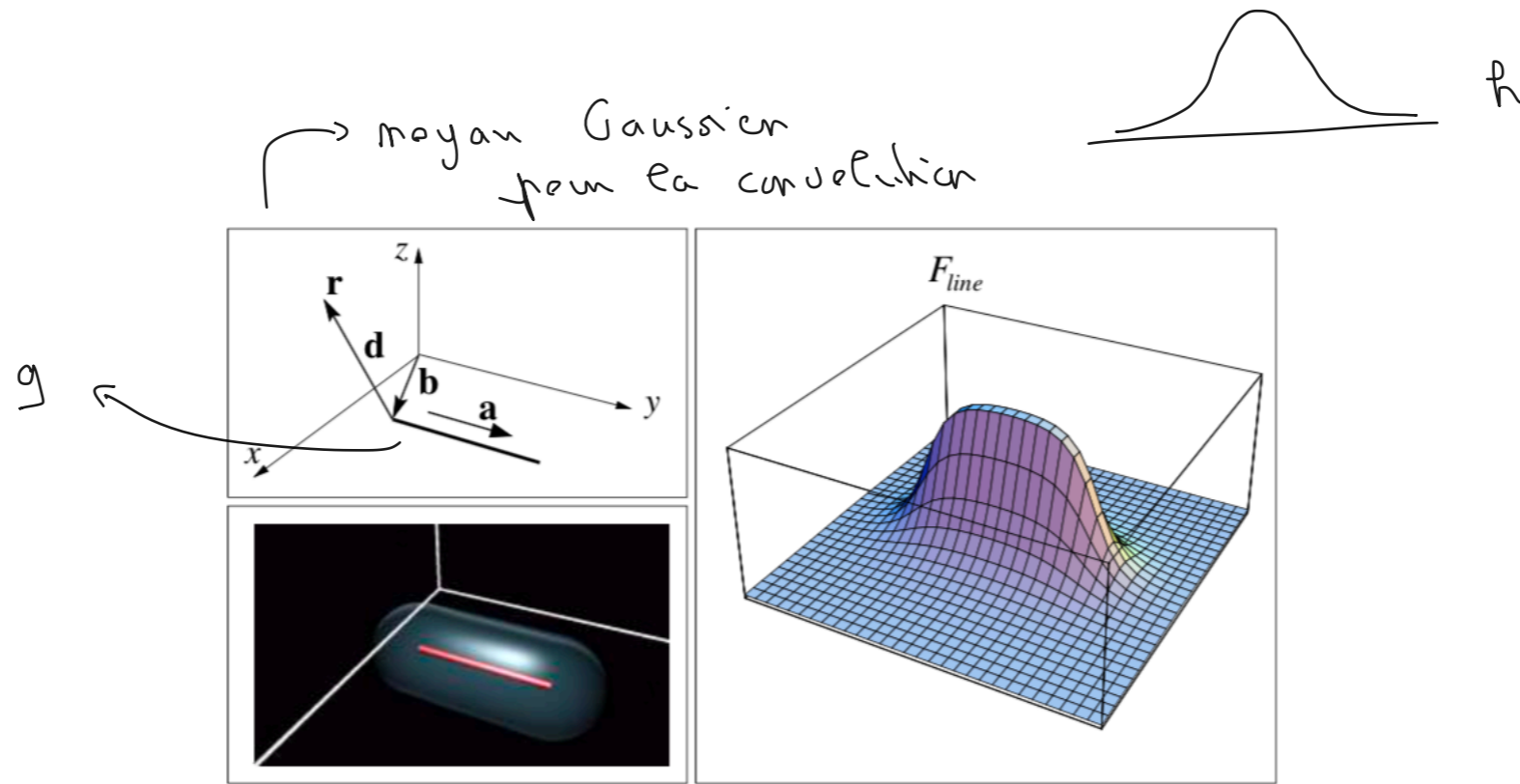
**Modélisation  
basée sur des squelettes**

$$f(\vec{x}) = G(\vec{x}) \star h(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} g(\vec{r})h(\vec{x} - \vec{r})d\vec{r}$$



Noyau de convolution

# ET APRÈS ??



# BASES DE FONCTIONS

$$f = \sum \alpha_i \cdot \varphi_i \leftarrow \text{fonction de base ...}$$

## BASE DE FONCTIONS ?

Fonctions à base radiale (RBF)

$$\phi(r) \rightarrow \Phi(X) = \phi(\|X\|)$$

$\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$        $\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

la val. de la fct  
me dépend que de la  
dist. à  
l'origine

Choix de points (colocations)

$$\{c_i\}_{i=1\dots n}$$

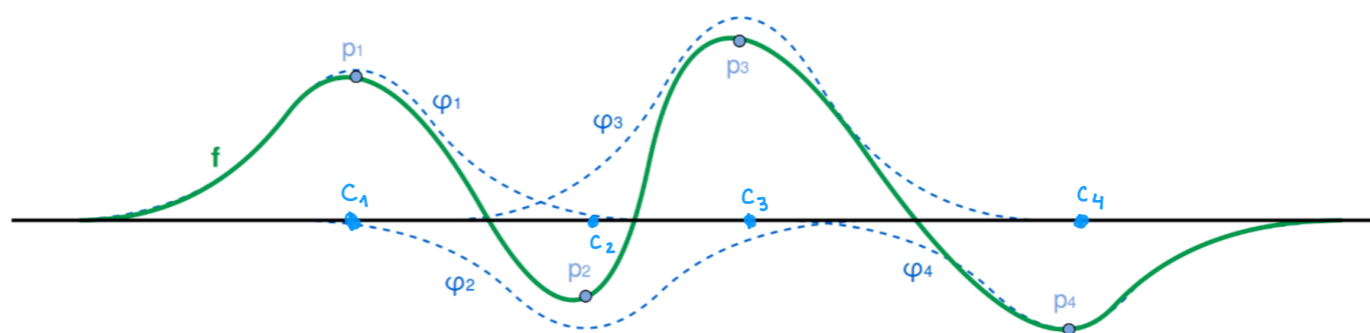
$$f(X) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \phi(\|X - c_i\|) \left( + P_m(X) \right)$$

on centre les fct  
à ds pts données (colocations)



## BASE DE FONCTIONS ?

$$f(X) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \phi(\|X - c_i\|)$$



→ matrice A pleine ... (nulle s/ diag)

(\*)<sup>1)</sup> Thin plate spline  $\phi(r) = r^2 \log(r)$

2) Gaussienne  $\phi(r) = e^{-r^2}$

3) Multiquadrique inverse  $\phi(r) = (1 + r^2)^{\frac{b}{2}}$   $b < 0$

4)  $\oplus$  Fonctions (\*) de Wendland (polynomiales / support compact).  $\phi(x) = 0$  si  $\|x\| > \frac{3}{2}$   
 → A creuse

Fonctions définies positives

CSRBF

## BASE DE FONCTIONS ?

Intérêt ?

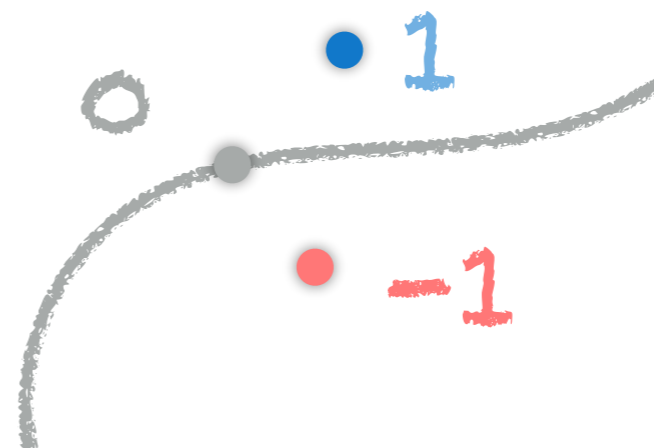
$$f(X) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \phi(\|X - c_i\|)$$

On peut garantir l'interpolation  
de n points

$$\forall j \quad f(X_j) = 0$$

$\alpha_i$  définis à un facteur près ...

$$\forall j \quad f(X_j) = v_j$$



# Théorie de l'interpolation

Etant donné un ensemble de données échantillonnées par une fct:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_i \rightarrow v_i \text{ valeur souhaitée} \\ \text{au pt } X_i \end{array} \right\}_{i=1 \dots N}$$

On veut trouver (interpolation) une fct  $g$  tq  
 $\forall i \quad g(X_i) = v_i$

→ y a-t-il une solution sous la forme  
 $g(x) = \sum_{j=1}^R \alpha_j \cdot \varphi(\|x - c_j\|)$  ?

$$\begin{pmatrix} c_i ? \\ \alpha_i ? \\ R ? \end{pmatrix}$$

Th. interpolation

- on peut prendre  $R = N$  mtre de pts de données (1 centre par  $X_i$ )  
 $c_i = X_i$
- Les centres sont pris aux pts de données

Le calcul des  $\alpha_i$  devient:  
 $\forall i \in 1 \dots N \quad g(X_i) = v_i$

$$g(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \cdot \varphi(\|x - x_j\|)$$

$$\forall i \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j \cdot \varphi(\|X_i - X_j\|) = v_i \quad \leftarrow \text{inconnues: } \alpha_j$$

sys. linéaire

$$A X = V$$

$$X = \begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \varphi(\|X_i - X_j\|) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} \vdots \\ v_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

→ système  $N \times N$

→ pleine ou creuse ?

$$\downarrow \\ \varphi(\|X_i - X_j\|)$$

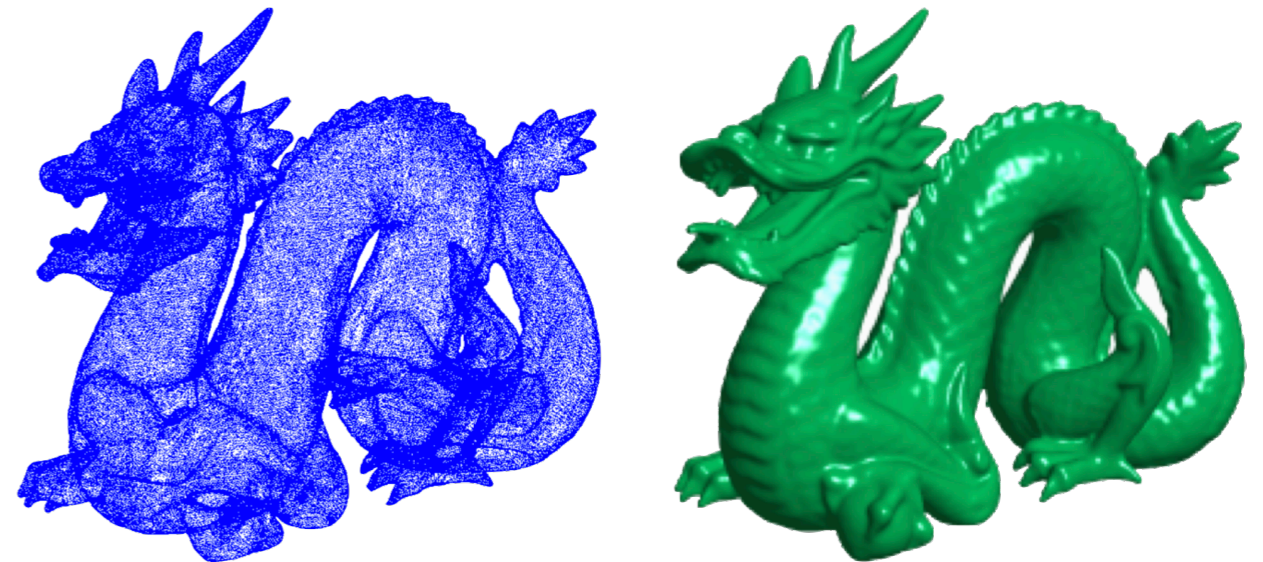
carée, symétrique

Th. interpolation

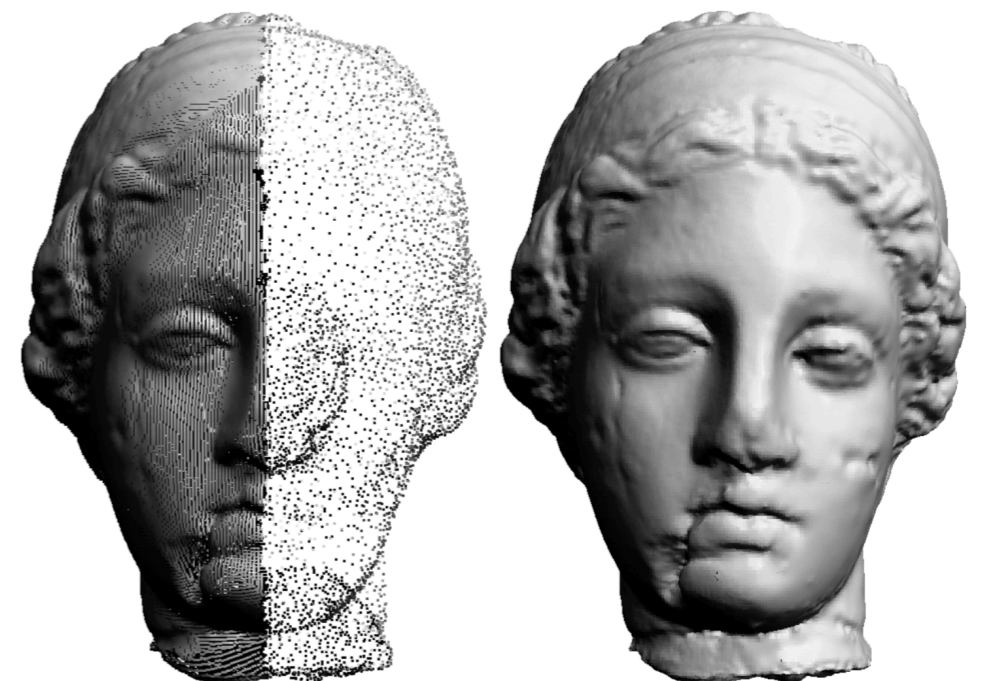
si pts  $X_i$  "en position générale"  
 → si  $\varphi$  est définie positive  $\implies A$  inversible  
 (prop. de certaines fct radiales)

## ET ALORS ?

Approche de Carr et al.



Approche Ohtake et al.



## ET ALORS ?

Reconstruction de Poisson (Kazhdan et al.)



**VISUALISATION**

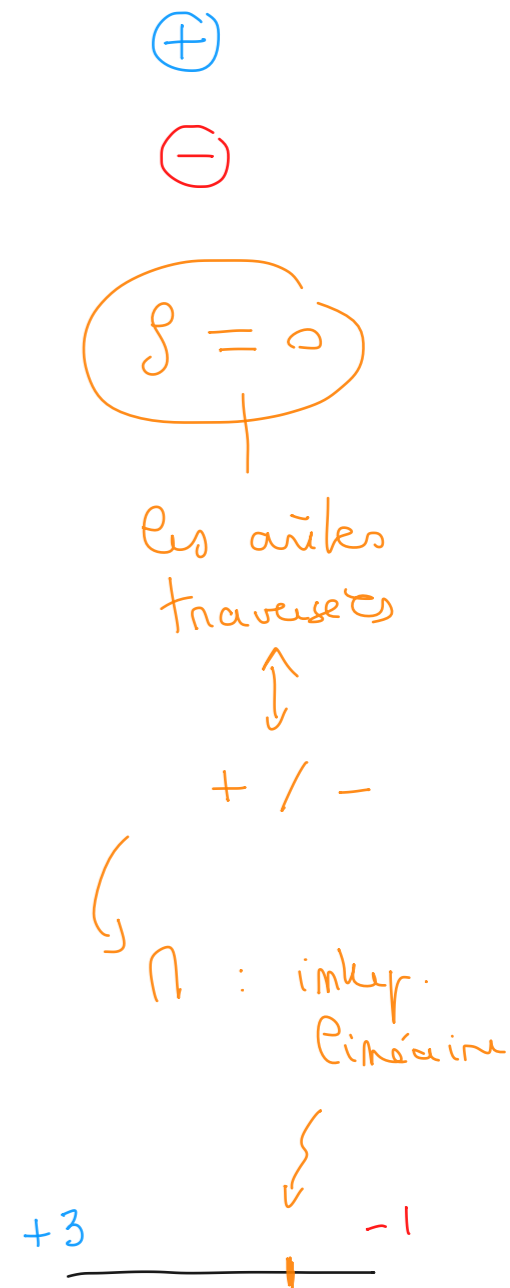
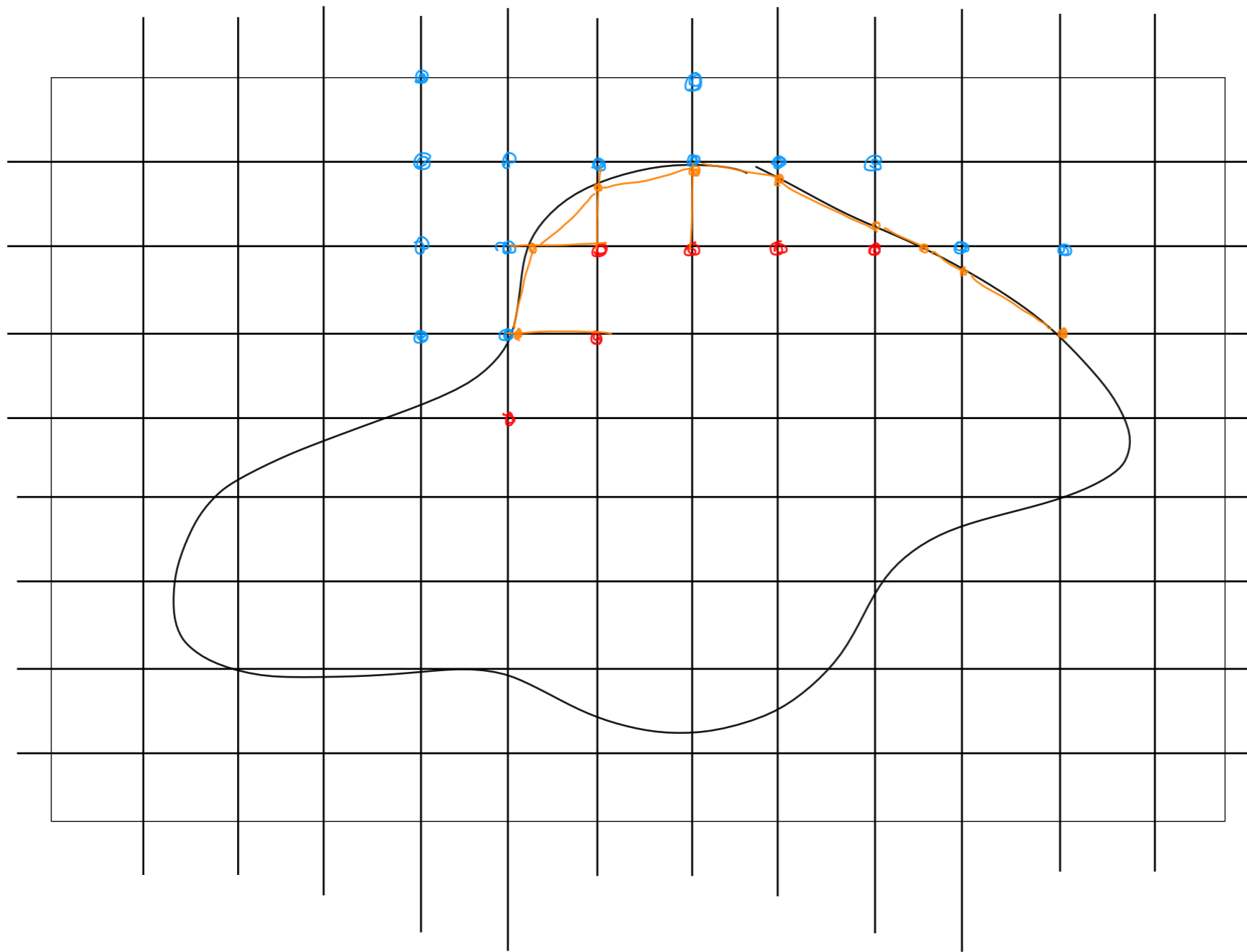
## LE PROBLÈME ...

Surface :

Ensemble des points  $X = (x, y, z)$   
tels que  $f(x, y, z) = 0$



On ne sait pas résoudre !



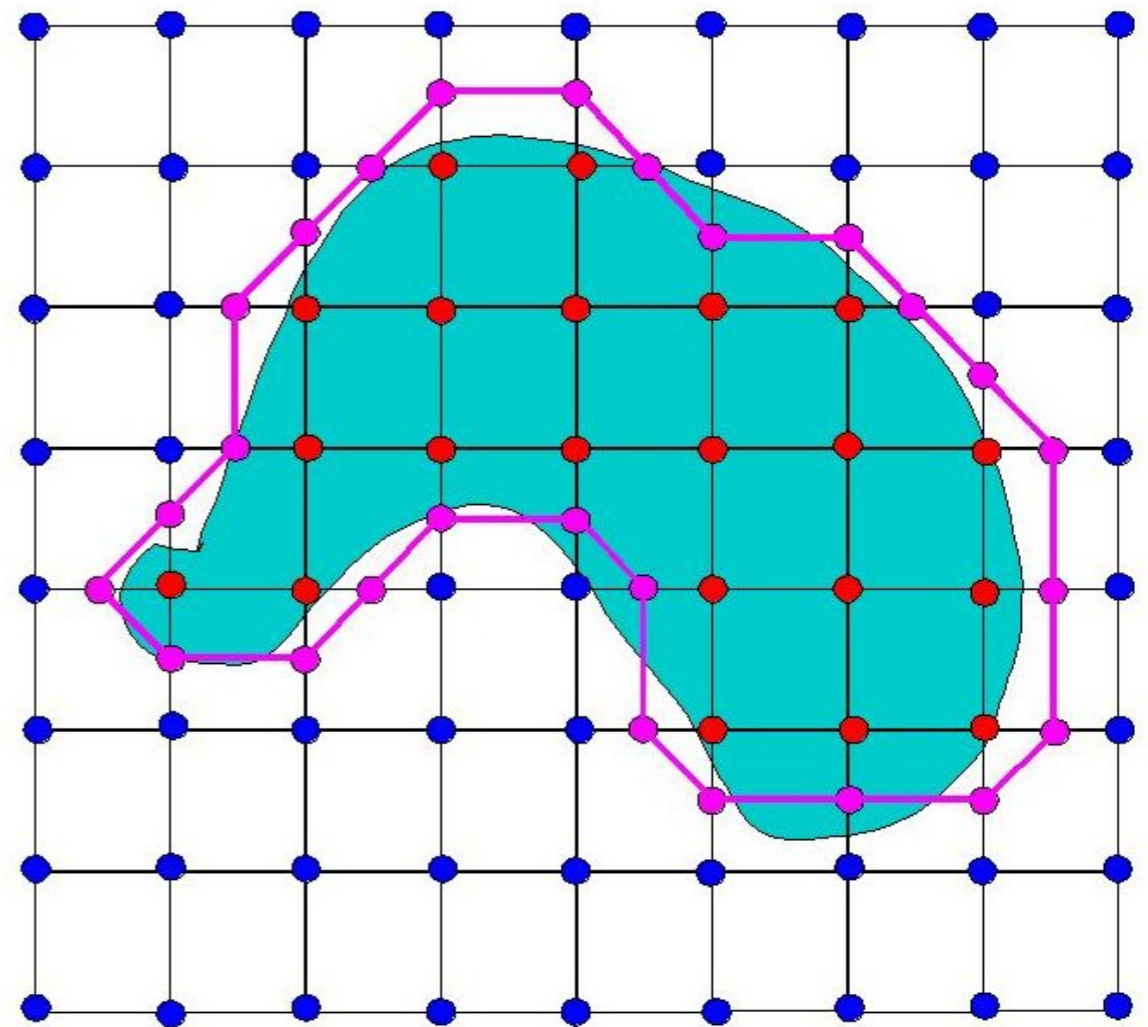
$2D \rightarrow$  carré : relier les sommets  
 d'intersection



## MARCHING CUBES (SQUARES)

Principe de base :

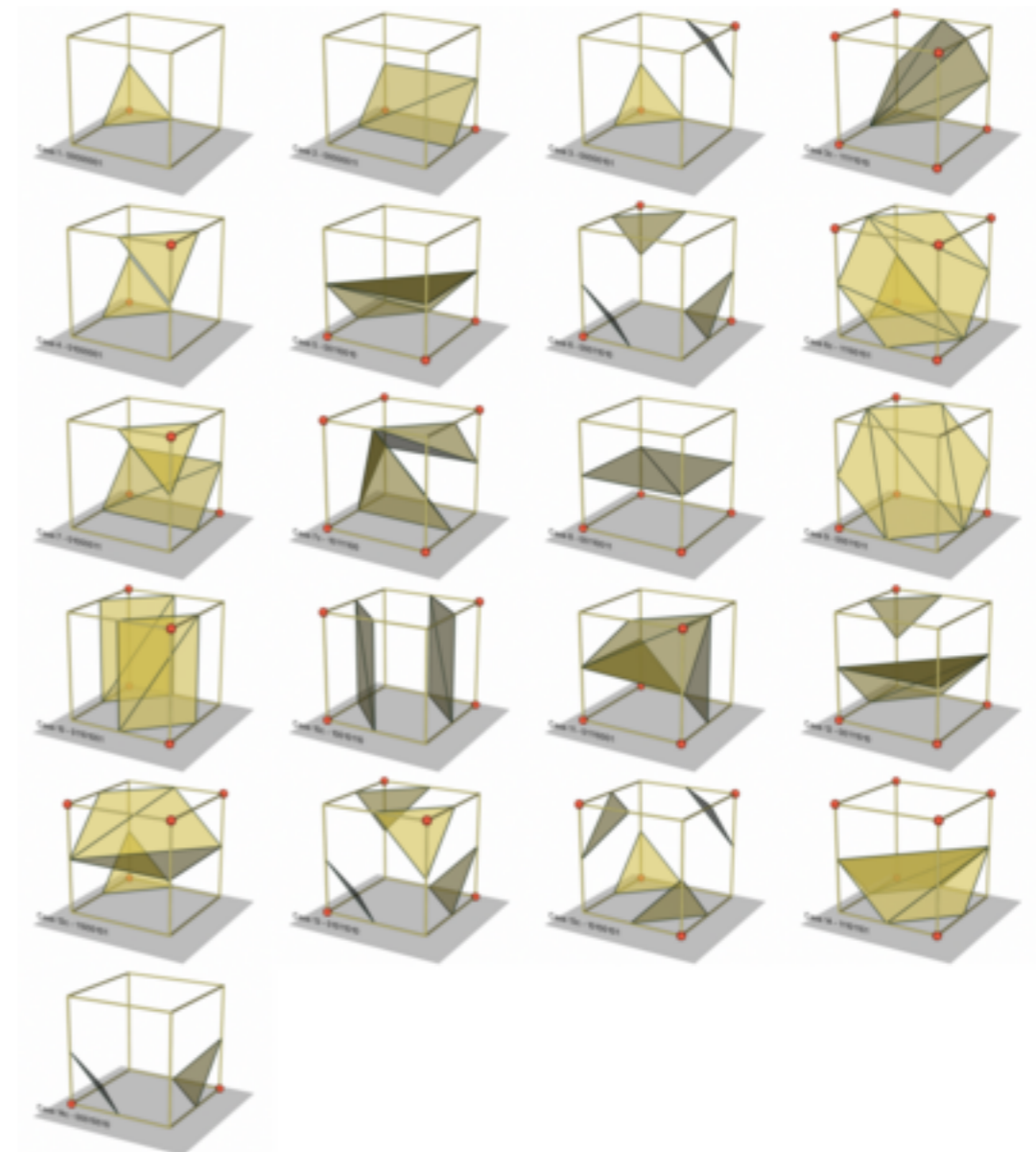
- ▶ Discrétiser la boîte englobante par une grille régulière
- ▶ Calculer la valeur de  $f$  en chaque point ( $f > 0, f < 0$ )
- ▶ La surface coupe les arêtes où le signe change  
→ reconstruire la topologie



# MARCHING CUBES (SQUARES)

Reconstruction de la topologie en 3D :

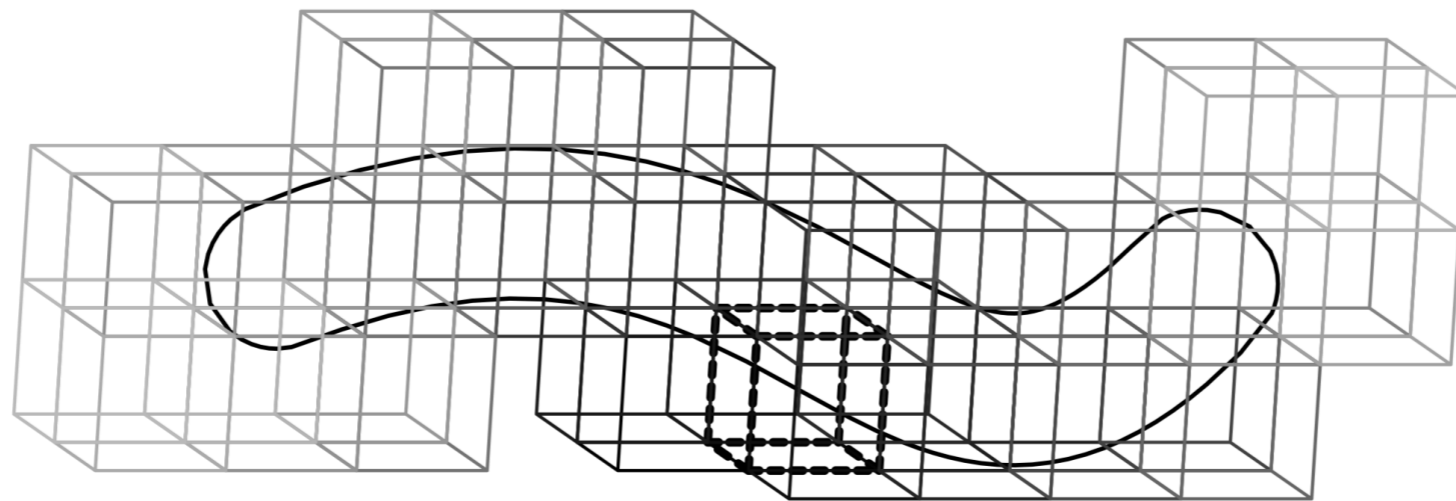
- ▶ Comment connecter les points ?
- ▶ Table fonction des signes aux sommets



## MAIS ENCORE ?

- ▶ Eviter l'exploration exhaustive
- ▶ Raffiner quand nécessaire

→ **Algorithme de Bloomenthal**



→ **Dual contouring**

CGAL  
→  
Maillage  
de Paumay 3D