Alexandra Bac

POLYTECH 4A INFORMATIQUE REVA

4 – COURBES ET SURFACES PARAMÉTRIQUES

Certaines illustrations sont issues du livre « polygon mesh processing »

« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - MODÈLES PARAMÉTRIQUES

Chapitre 2

MAILLAGES ✓

Chapitre 3

GÉOMÉTRIE DES SURFACES ✓

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(u,v) \longmapsto f(u,v) \in \mathbb{R}^3$$

parametric model

$$\left(z = a_1 x^2 + \cdots \right)$$

Chapitre 1

MODÉLISATION DES SURFACES

Chapitre 4 (+ 5A)

SURFACES PARAMÉTRIQUES

~~Chapitre 5~~

~~**SURFACES IMPLICITES**~~ ⟶ 5th year

Bézier NURBS B-splines 5th year

COURBES ET SURFACES PARAMÉTRIQUES

Très incomplet (nécessiterait un module entier)

A suivre en 5A …

Commençons par les courbes

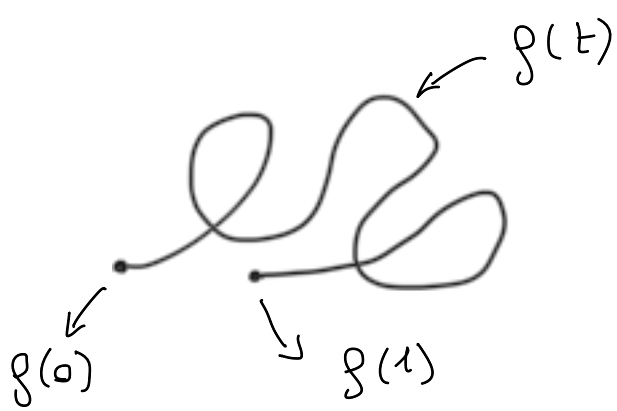
- Plus simple
- Base des modèles de surfaces (produit tensoriel)

Courbes paramétriques

GÉNÉRALITÉS

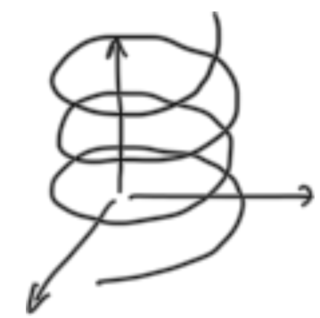
COURBES PLANES

Courbes dans $\mathbb{R}^2$



COURBES GAUCHES

Courbes dans $\mathbb{R}^3$



REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

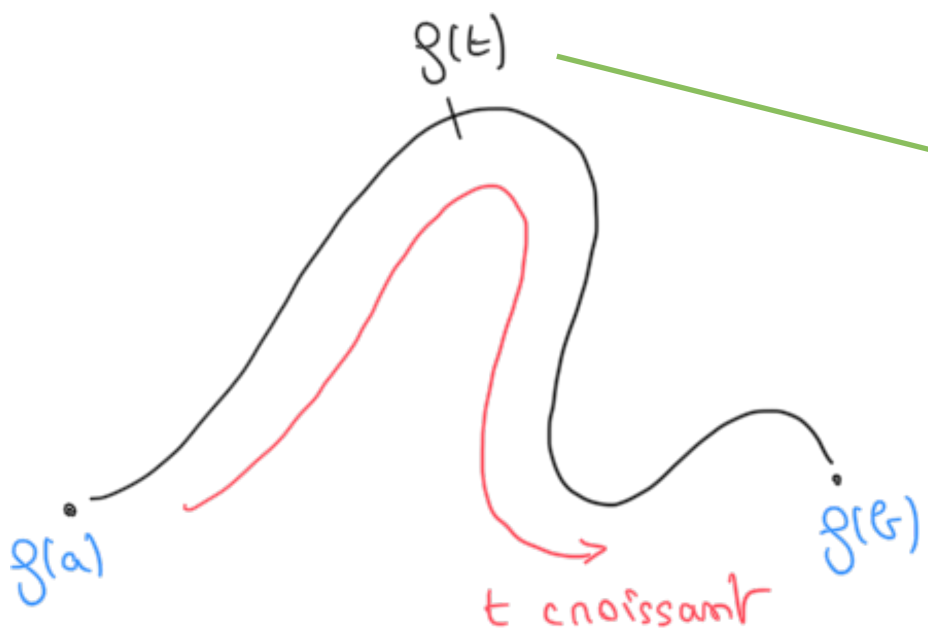
$t \longmapsto g(t) \in \mathbb{R}^2$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

COURBES

Courbe <u>finie</u> :

$f \, : \, [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$)



$f(t) \in \mathbb{R}^2$ donc :

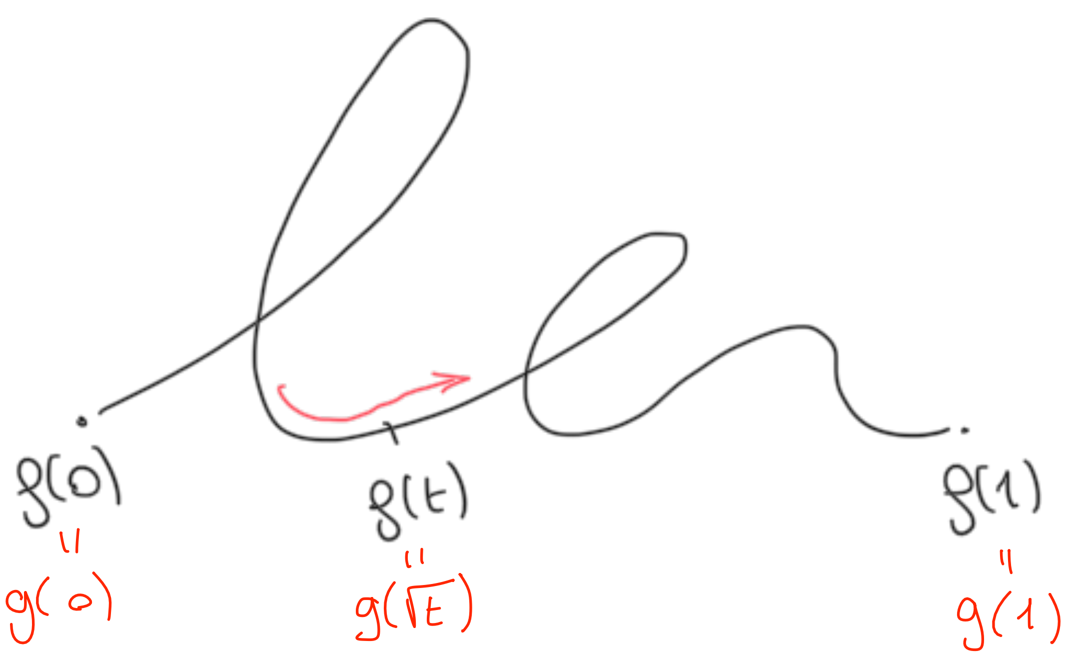
$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$$

$$f_1, f_2 \, : \, \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

QUESTION DE LA PARAMÉTRISATION

Courbe $\leftrightarrow$ modèle paramétrique $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$

unique ?



$f\ :\ [0,1] \to \mathbb{R}^2$

On pose $g(t) = f(t^2)$

$g(0) = f(0)$
$g(1) = f(1)$

- Quelle est la courbe décrite ?

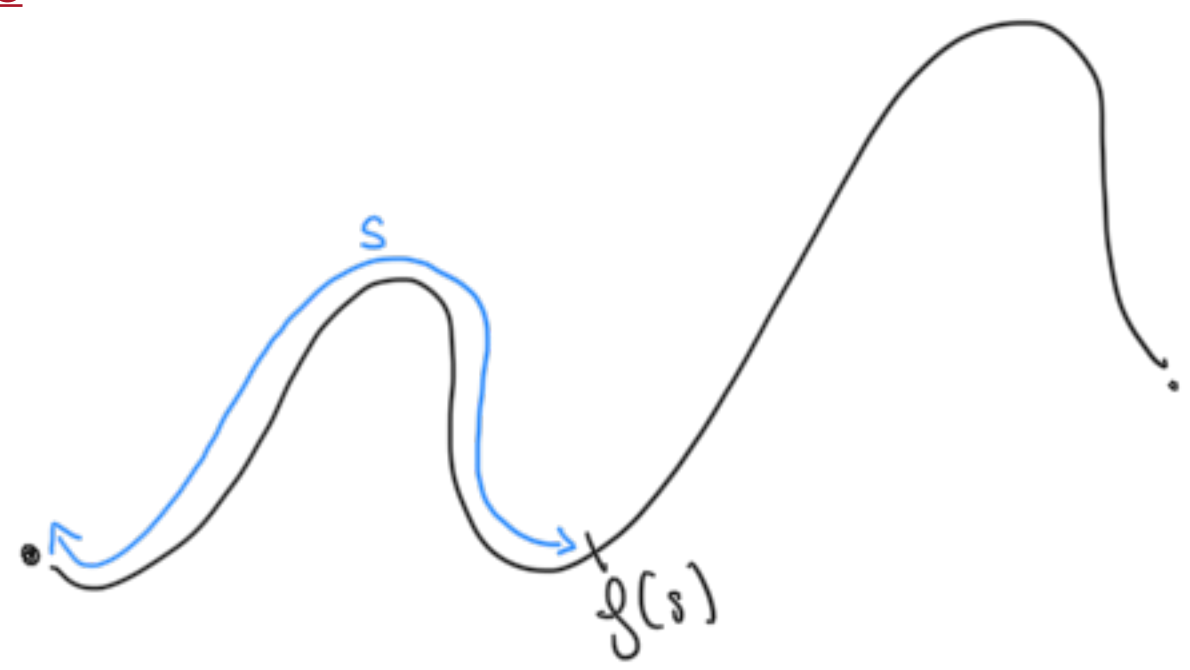
↳ same curve ...

↳ different speeds along the curve.

PARAMÉTRISATION NORMALE

Pour toute courbe, il existe une paramétrisation selon laquelle la courbe est parcourue à vitesse constante :

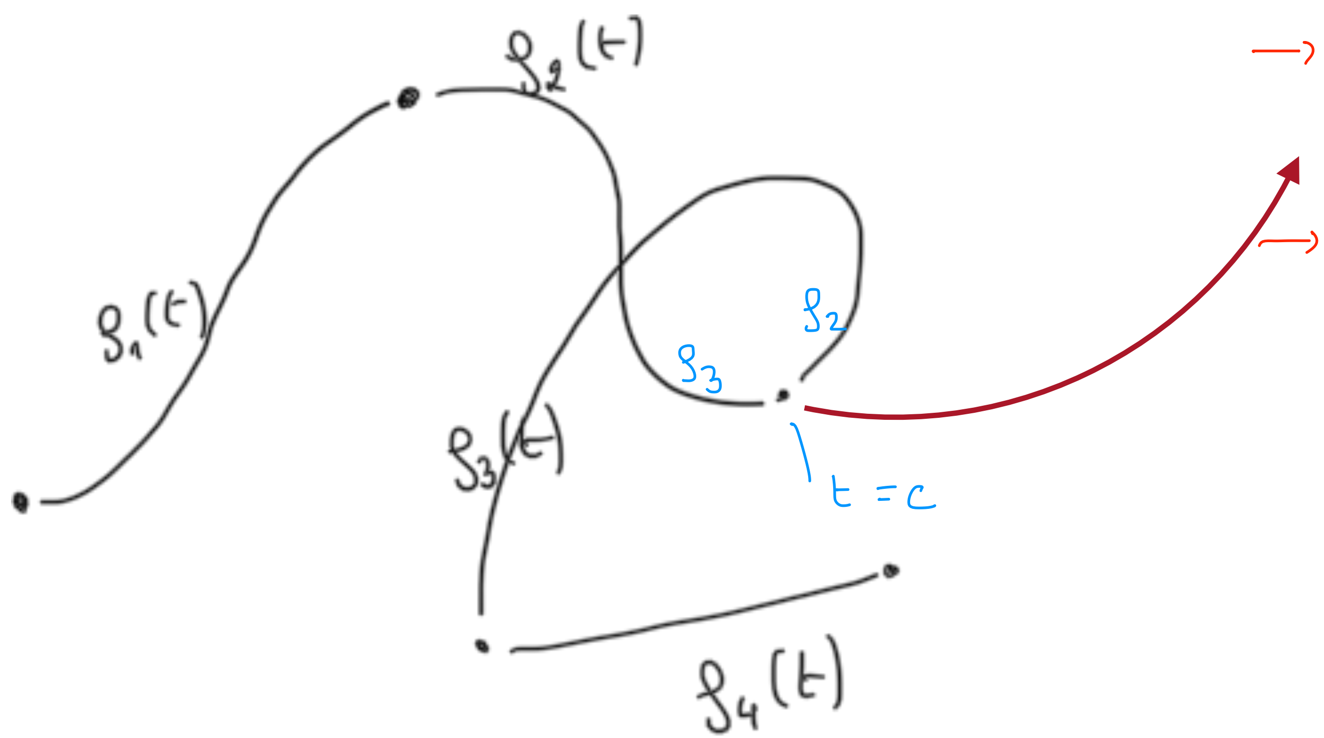
- Unique
- Paramètre noté s (**abscisse curviligne**) : longueur le long de la courbe
- Appelée **paramétrisation normale**



CONTINUITÉ GÉOMÉTRIQUE ($\mathscr{G}^k$)

Piecewise models

Courbes modélisée par morceaux :



→ Courbe continue

→ Continuité de la dérivée / tangente ?

curve $\boxed{\text{continuous}}$ if :

$$\lim_{\substack{t \to c \\ t < c}} f_2(t) = \lim_{\substack{t \to c \\ t > c}} f_3(t)$$

if f_2, f_3 are continuous

↳ $\boxed{f_2(c) = f_3(c)}$

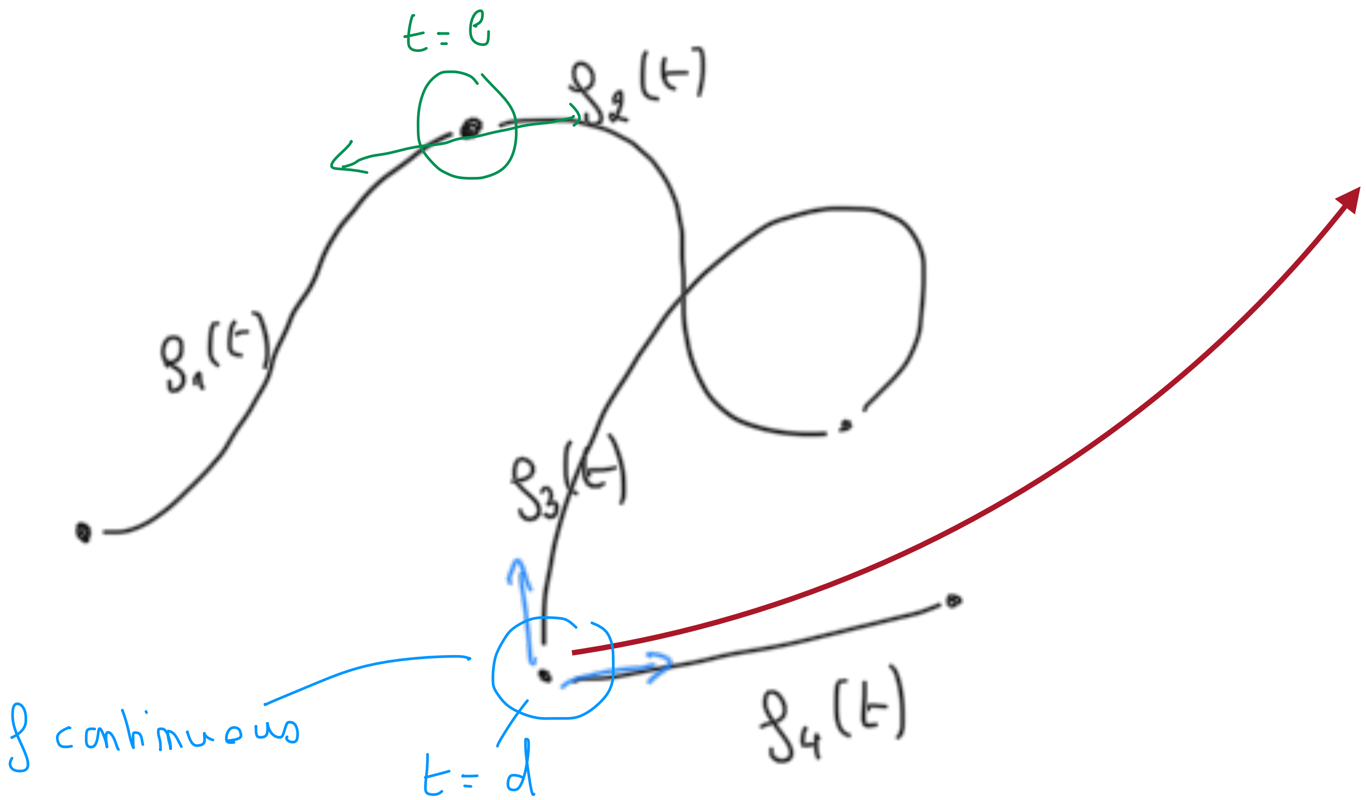
piecewise curve f is continuous

$$f \begin{cases} f_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^k \\ f_2 : [b,c] \to \mathbb{R}^k \\ f_3 : [c,d] \to \mathbb{R}^k \\ f_4 : [d,e] \to \mathbb{R}^k \end{cases}$$

CONTINUITÉ GÉOMÉTRIQUE ($\mathscr{G}^k$)

Piecewise parametric curves $\cancel{C^k} \leftarrow G^k$

Courbes modélisée par morceaux :



Courbe continue

Continuité de la dérivée / tangente ?

- ~~Discontinue~~ Discontinuous tangents

$f_3'(d) \neq f_4'(d)$

↳ singularity

no sharp point

$t = e$: the curve is smooth

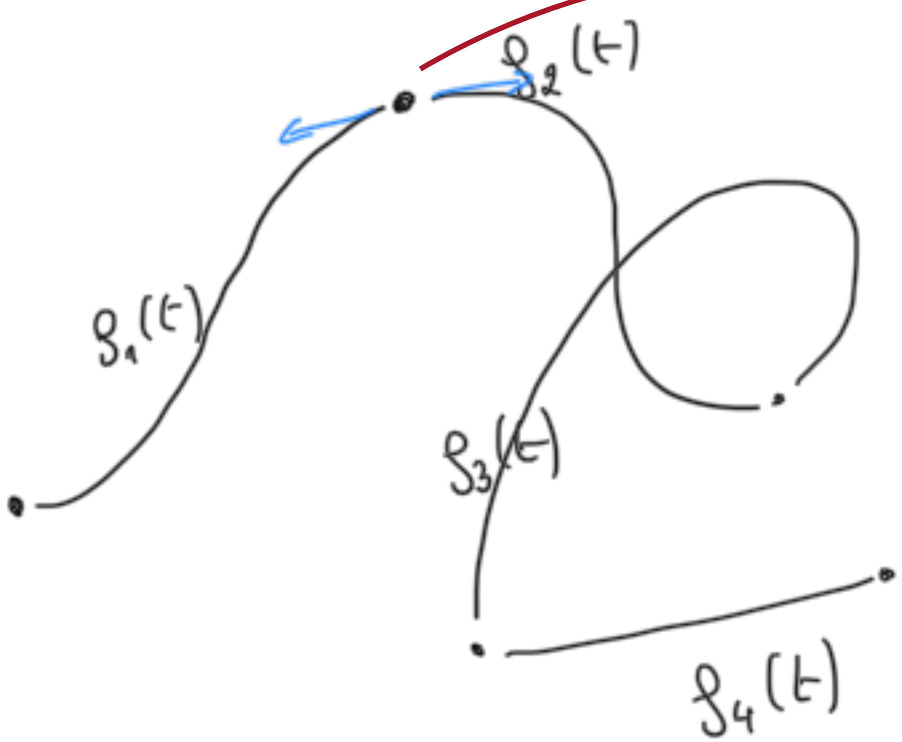
$\Longleftrightarrow \quad f_1'(e) = \lambda \cdot f_2'(e) \quad \lambda \neq 0$.

$$f_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^k$$
$$f_2 : [b,c] \to \mathbb{R}^k$$
$$f_3 : [c,d] \to \mathbb{R}^k$$
$$f_4 : [d,e] \to \mathbb{R}^k$$

⇝ geometric continuity ⇝ $\boxed{G^k}$ $\cancel{C^k}$

CONTINUITÉ GÉOMÉTRIQUE ($\mathscr{G}^k$)

Courbes modélisée par morceaux :



$f_1 \,:\, [a,b] \to \mathbb{R}^k$

$f_2 \,:\, [b,c] \to \mathbb{R}^k$

$f_3 \,:\, [c,d] \to \mathbb{R}^k$

$f_4 \,:\, [d,e] \to \mathbb{R}^k$

Courbe continue

Continuité de la dérivée / tangente ?

$f_1'(b^-) = f_2'(b^+)$

Continuité paramétrique $\mathscr{C}^1$

Tangentes colinéaires en b

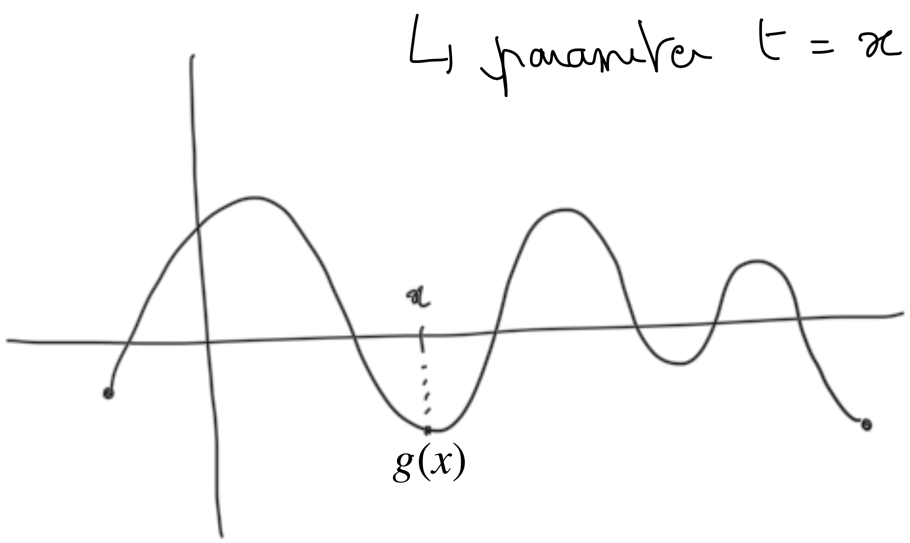
$f_1'(b^-) = \lambda \cdot f_2'(b^+)$

Continuité géométrique $\mathscr{G}^1$

CAS PARTICULIER : MODÈLES CARTÉSIENS

Cas particulier où le <u>paramètre est x</u> :

$$y = g(x)$$



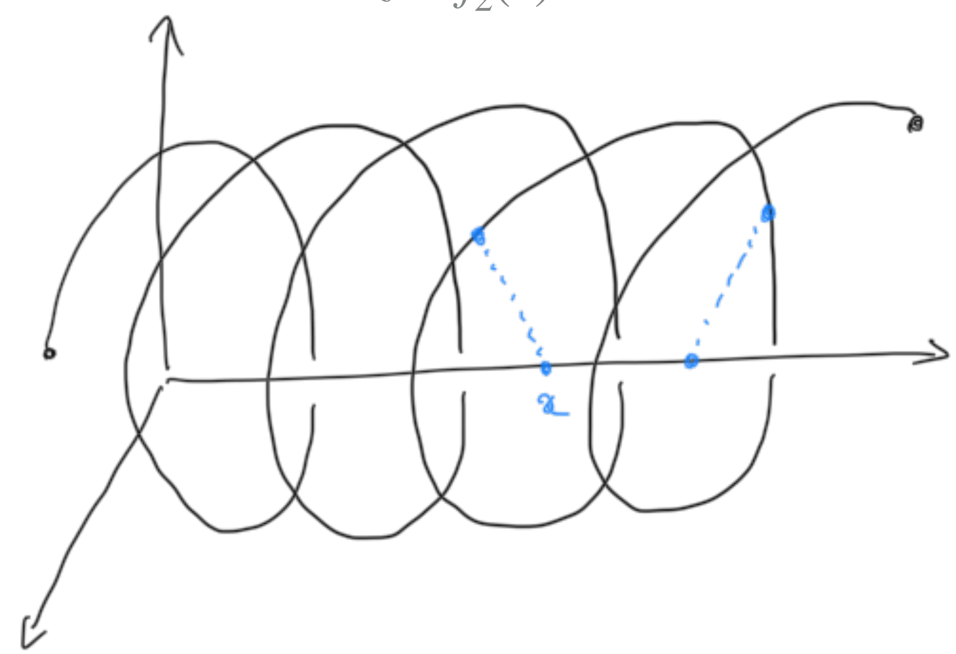
Représentation paramétrique associée :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix}$$

$$y = f_1(x)$$

$$z = f_2(x)$$



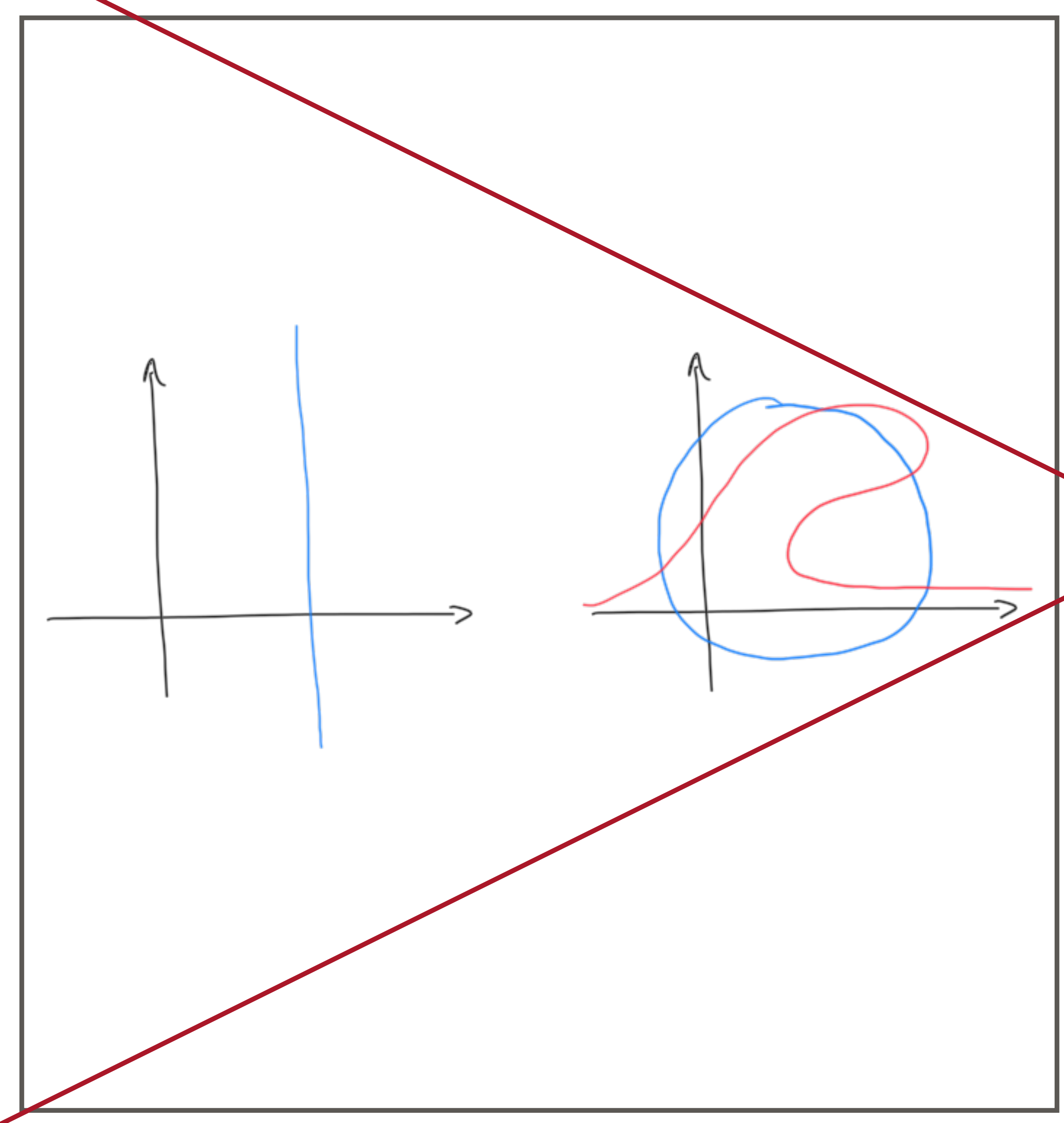
Représentation paramétrique associée :

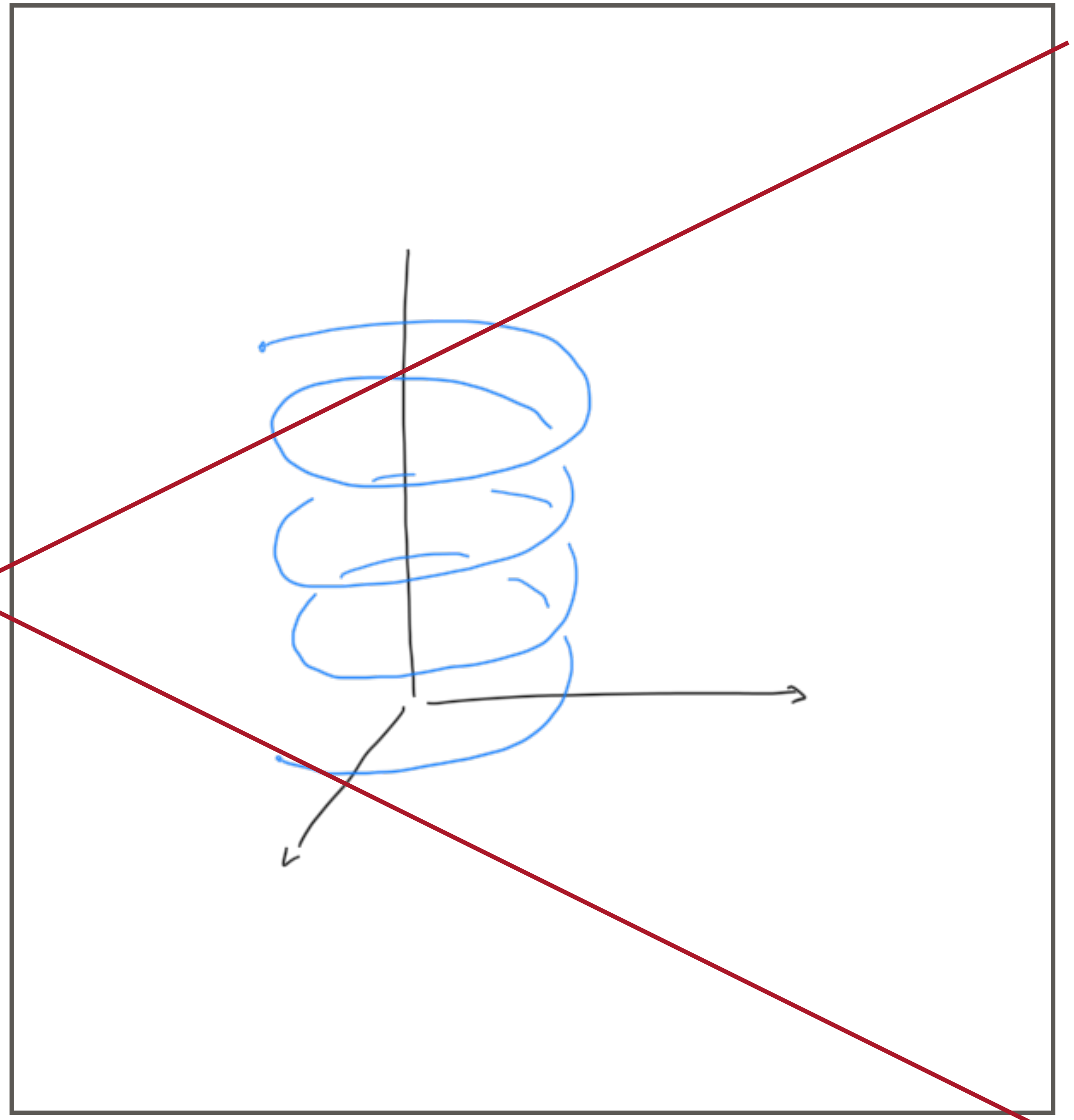
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} x \\ f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$$

CAS PARTICULIER : MODÈLES CARTÉSIENS

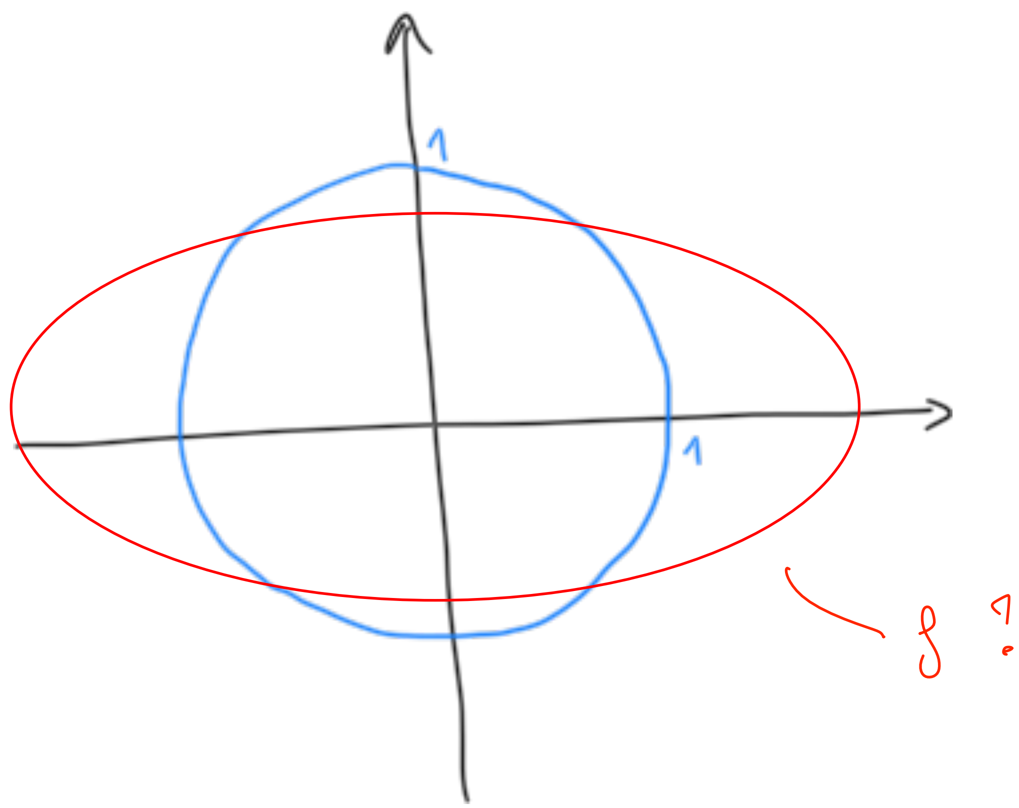
Attention : modèles restrictifs !





BÉZIERS, B-SPLINES … MOTIVATION

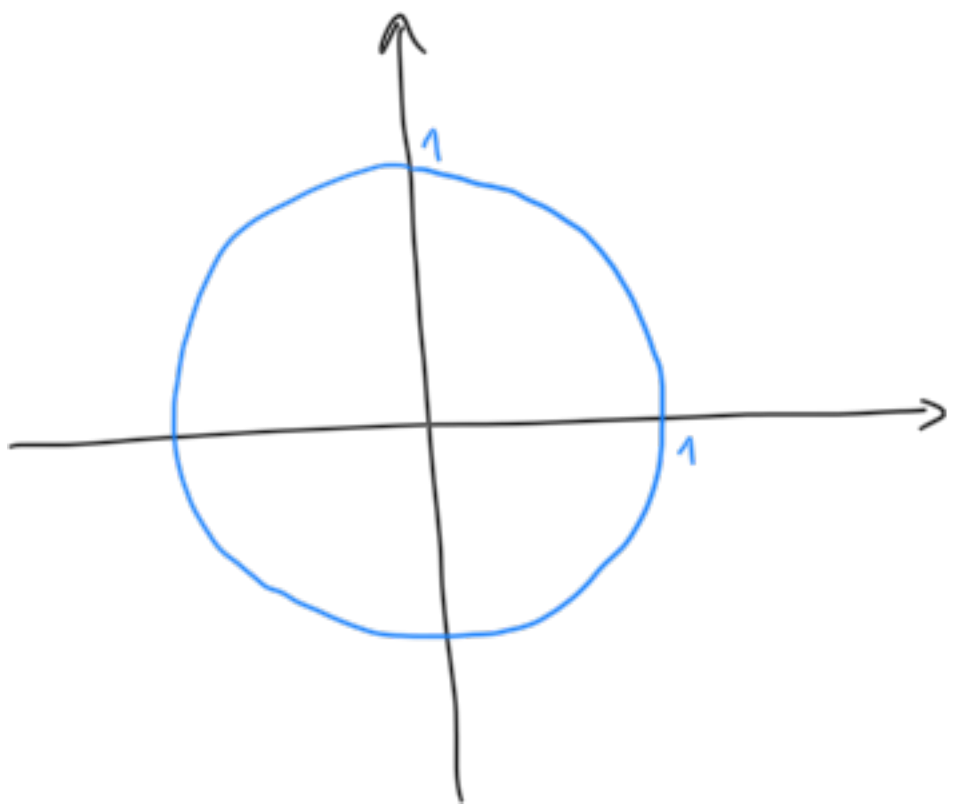
COMMENT CONTRÔLER LE FORME DE LA COURBE ?



Quelle équation $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$?

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

COMMENT CONTRÔLER LE FORME DE LA COURBE ?



Quelle équation $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$?

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

Pourtant courbe très simple …

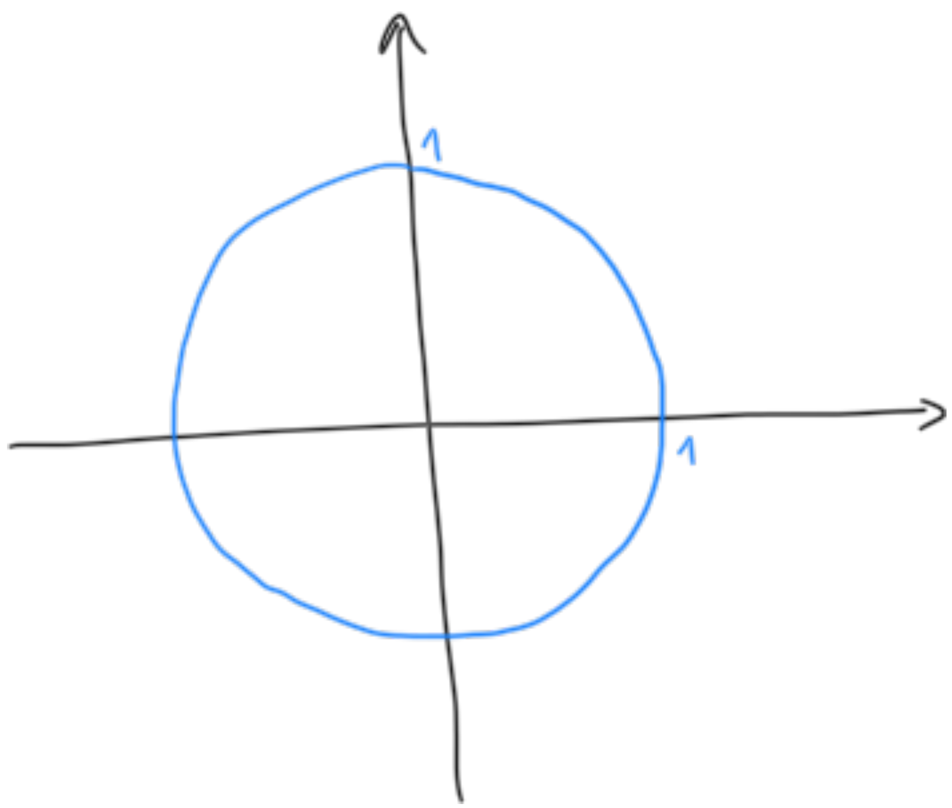
- Question trop générale

Choisir f d'une forme particulière

Dépendant de <u>paramètres simples</u>

Contrôlent la forme

COMMENT CONTRÔLER LE FORME DE LA COURBE ?



Quelle équation $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$?

Pourtant courbe très simple …

- Question trop générale

Choisir f d'une forme particulière

Polynômes de degré $\leqslant n$

n: degree (set)

$a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$

↳ vector space of dim $n+1$

Dépendant de paramètres simples

$n + 1$ coefficients

?

Contrôlent la forme

…/…

$\mathbb{R}_n[X]$ — Poly with degree $\leq n$

$\mathbb{R}$-Vect. space of dim $n+1$

$\rightsquigarrow$ canonical basis:

$$\left. 1, X, X^2 \dots X^n \right) \text{ } n+1 \text{ -poly.}$$

COMMENT CONTRÔLER LE FORME DE LA COURBE ?

$\mathbb{R}_m[X]$

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) \cdot P_i$$

φ_i : few polynomials $(m+1)$

↳ basis of $\mathbb{R}_m[X]$

Fonctions de base fixes

Paramètres :

points de $\mathbb{R}^k$ (contrôlant la courbe)

φ_i polynômes de Bernstein $\rightarrow$ courbes de Béziers

(ce cours)

φ_i fonctions B-spline $\rightarrow$ courbes B-spline

(5A)

↳ NURBS

COURBES DE BÉZIERS

COURBES DE BÉZIERS

2D - curves

$\mathbb{R}_n[X]$

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$$

polynômes de degré au plus n

dans la ~~base canonique~~ : Pas la bonne base …

$$f_1(t) = a_0 + a_1 t + \cdots a_n t^n$$

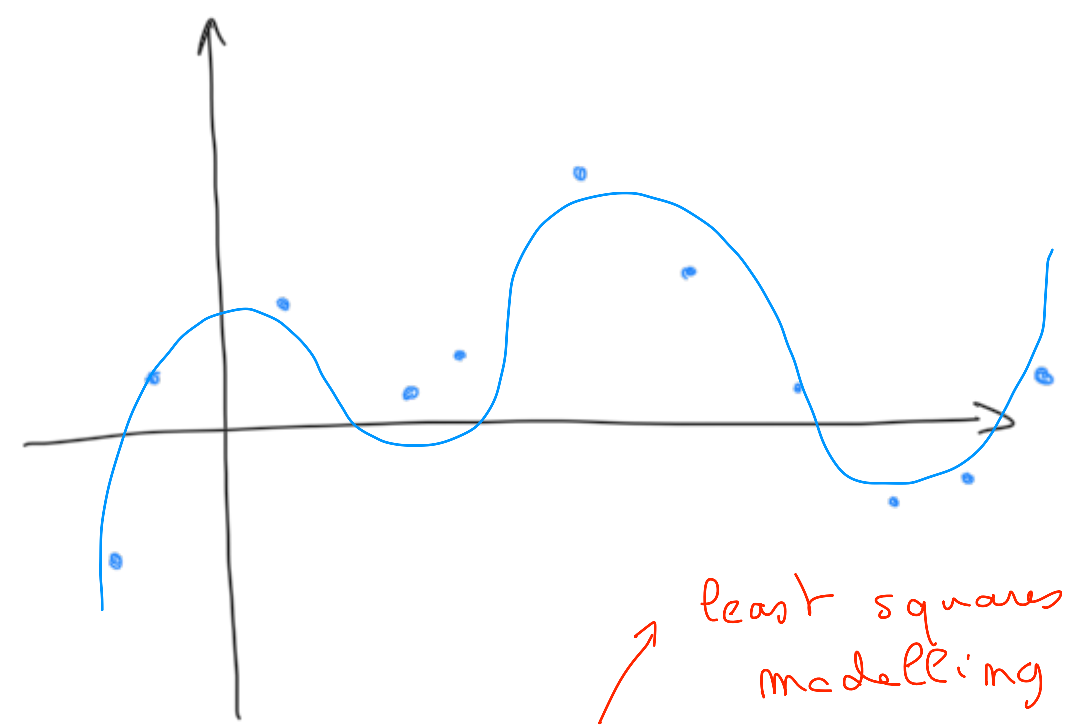
$$f_2(t) = b_0 + b_1 t + \cdots b_n t^n$$

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) \cdot P_i$$

Base

Paramètre de contrôle

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} t^i \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$$



least squares modelling …

solve cq …

$\{P_i\}$ tq la courbe passe près de ces points ?

POLYNÔMES DE BERNSTEIN

Choose degree : $\boxed{n}$

$(\cancel{t}+(1-\cancel{t}))^n = \sum_{k=0}^{n} \varphi_{n,k}(t)$

$\| $

1

Base de Bernstein de $\mathbb{R}_n[t]$

- $n+1$ polynômes
- $\varphi_{n,i} \ : \ [0,1] \to \mathbb{R}$ pour le $i = 0\ldots n$

  $\varphi_{n,i}(t) = C_n^i \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i}$

  $a = t$ $b = (1-t)$

  $i : 0 \to n$

  $n+1$ poly.

Parenté avec le binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

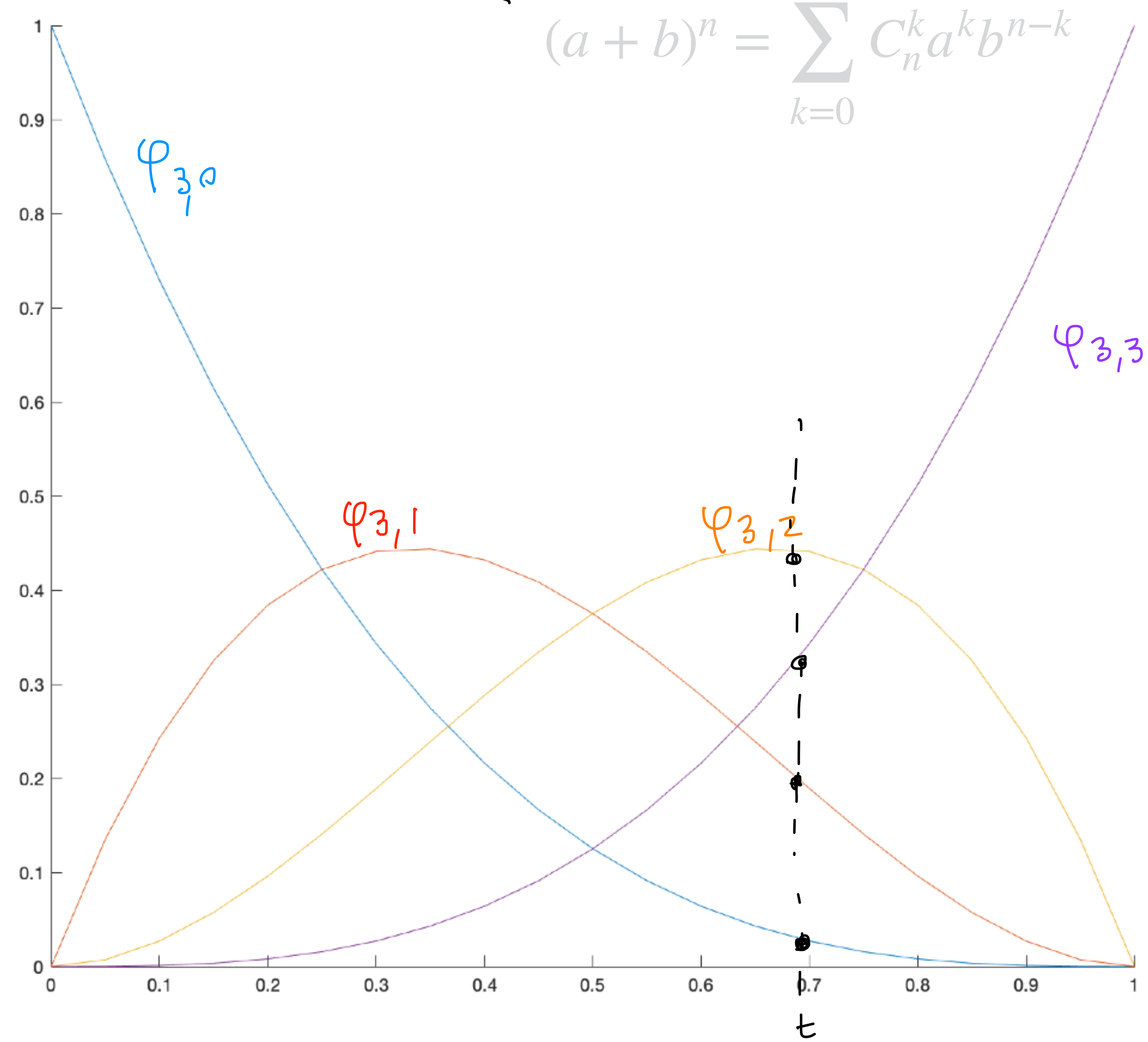
Ex : pour $n = 3$

$\varphi_{3,0}(t) = (1-t)^3$

$\varphi_{3,1}(t) = 3t(1-t)^2$

$\varphi_{3,2}(t) = 3t^2(1-t)$

$\varphi_{3,3}(t) = t^3$



POLYNÔMES DE BERNSTEIN - PROPRIÉTÉS

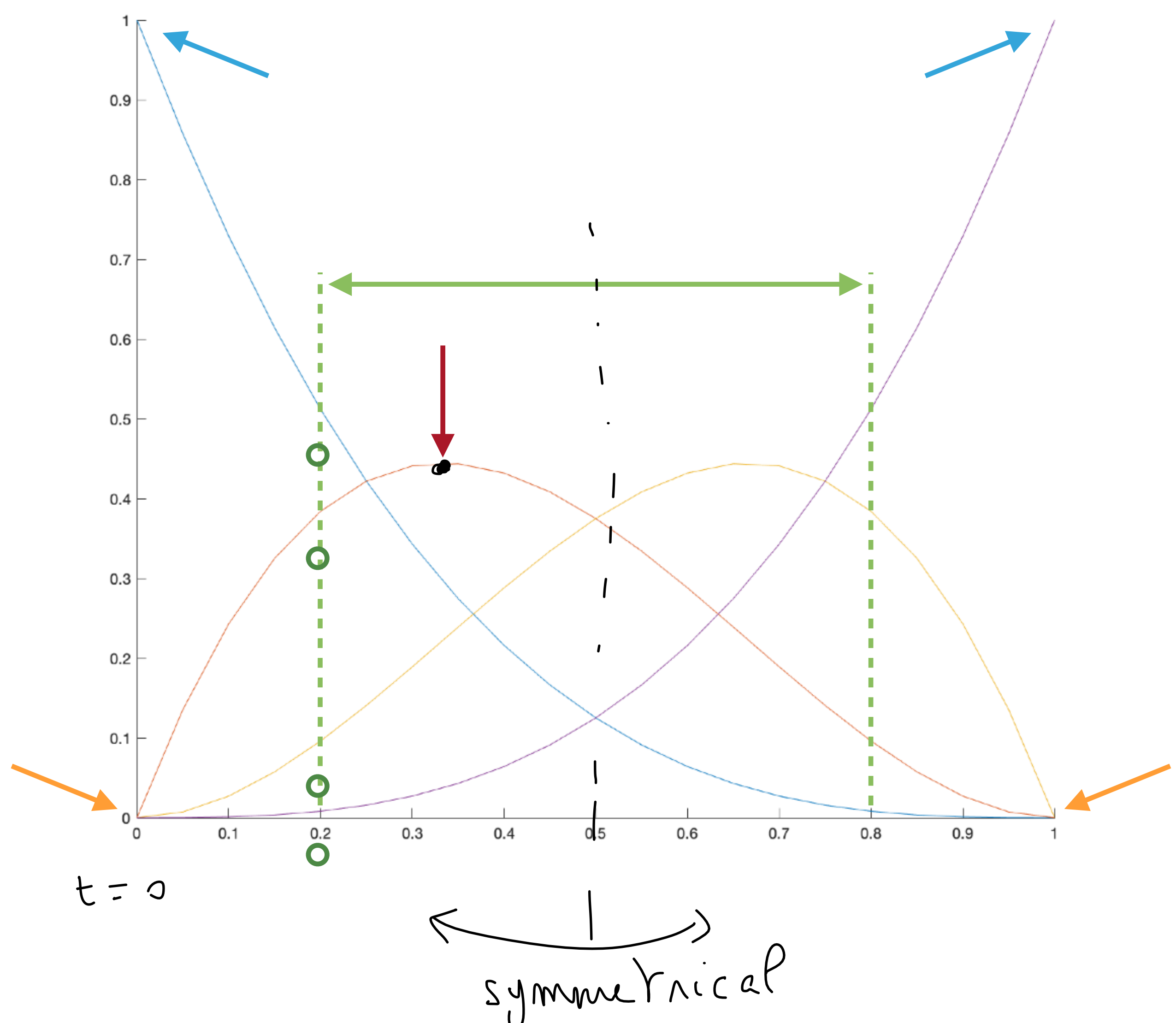
$\varphi_{n,0}(0) = 1$

$\varphi_{n,n}(1) = 1$

t = 0

$\varphi_{n,i}(0) = 0$

$0 < i < n$



Symétrie

$\varphi_{n,i}(t) = \varphi_{n,n-i}(1-t)$

Partition de l'unité

$$\sum_{i=0}^{n} \varphi_{n,i}(t) = 1 \qquad \forall t \in [0,1]$$

Maximum de $\varphi_{n,i}(t)$

en $\dfrac{i}{n}$

POLYNÔMES DE BERNSTEIN - PROPRIÉTÉS

$\varphi_{n,0}(0) = 1$

$\varphi_{n,n}(1) = 1$

$\varphi_{n,i}(0) = 0$

$0 < i < n$

Proche triangle Pascal

<u>Formule récursive</u>

en $\varphi_{n,i}(t) = t\varphi_{n-1,i-1}(t) + (1-t)\varphi_{n-1,i}(t)$

<u>Symétrie</u>

$\varphi_{n,i}(t) = \varphi_{n,n-i}(1-t)$

<u>Partition de l'unité</u>

$$\sum_{i=0}^{n} \varphi_{n,i}(t) = 1 \qquad \forall t \in [0,1]$$

<u>Maximum</u> de $\varphi_{n,i}(t)$

en $\dfrac{i}{n}$

COURBES DE BÉZIERS

Courbe de Béziers de degré n

pts - parameters

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_{n,i}(t) \cdot P_i$$

curve

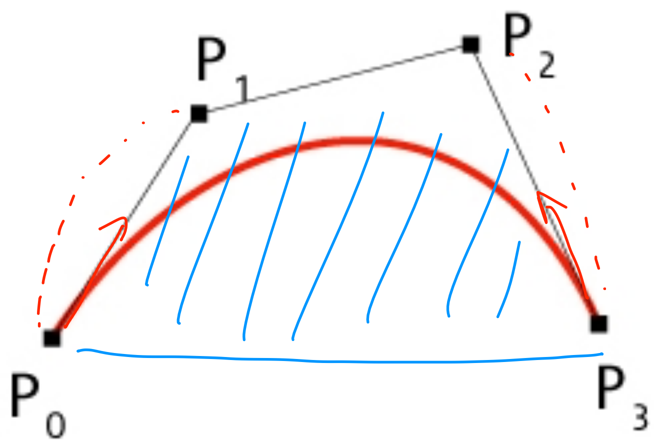
$P_0, \ldots, P_n$ points de contrôle

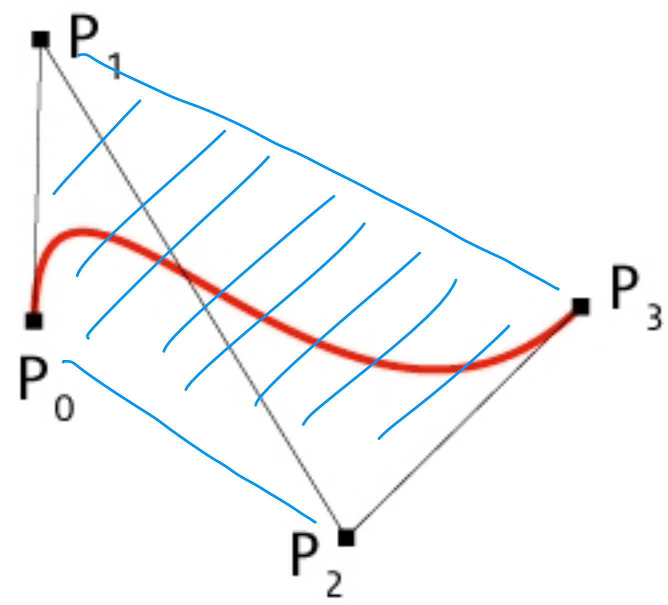
- $f(0) = P_0$ ⟵ $t = 0$ → curve starts from P_0
- $f(1) = P_n$ ⟵ $t = 1$ → curve ends at P_1
- Influence maximale de P_i en $\frac{i}{n}$

$\cancel{f\left(\frac{i}{m}\right) = P_i}$?

$t = \frac{i}{m}$ $f(t)$ closest from P_i

COURBES DE BÉZIERS





- $f(t)$ barycentre des P_i pondérés par $\varphi_{n,i}(t)$
- Courbe dans l'enveloppe convexe des points de contrôle

convex hull

DÉRIVÉES / TANGENTES DES COURBES DE BÉZIERS

$\varphi'_{n,i}(t) =$

Exercise ....

$\varphi'_{n,i}(t) = n(\varphi_{n-1,i-1}(t) - \varphi_{n-1,i}(t))$

$f'(t) =$

$$f(t) = \sum_{i=0}^{m} \varphi_{m,i}(t) \cdot P_i$$

Bézier curve with (d° m)
control pts
$P_0 \dots P_m$

$f'(t)$

$$\boxed{f'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_{n-1,i}(t) \cdot (\overline{P_{i+1} - P_i})}$$

← Bézier curve → d° m-1
→ control. pts : $P_{i+1} - P_i = \overrightarrow{P_i P_{i+1}}$

$t = 0$ $f'(0) = P_1 - P_0 = \overrightarrow{P_0 P_1}$

$t = 1$ $f'(1) = P_m - P_{m-1} = \overrightarrow{P_{m-1} P_m}$

DÉRIVÉES / TANGENTES DES COURBES DE BÉZIERS

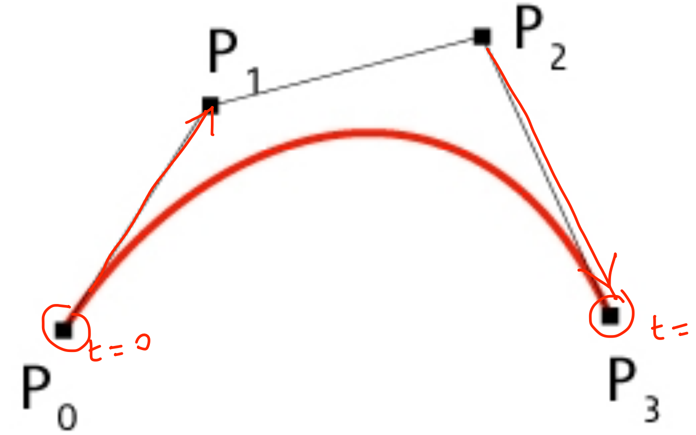
$$\boxed{f'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_{n-1,i}(t) \cdot (P_{i+1} - P_i)} \longrightarrow \text{Courbe de Béziers}$$

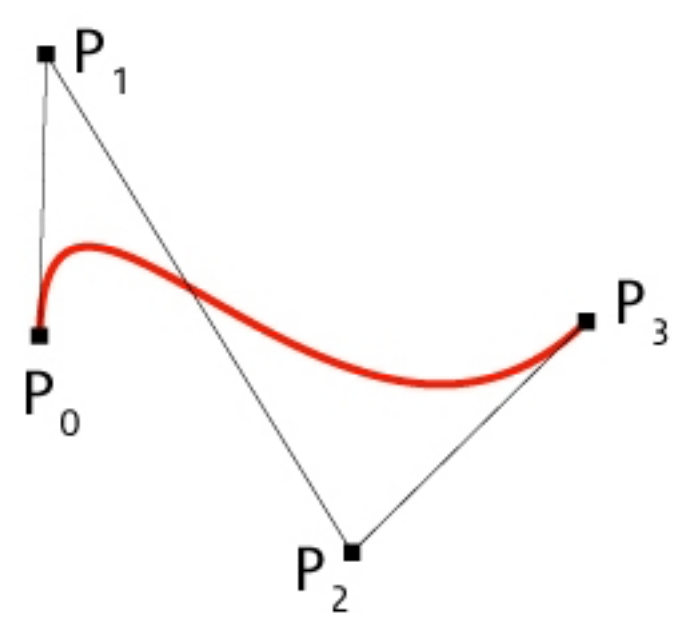
- Degré $n-1$
- Points de contrôle $P_1 - P_0, \ldots, P_n - P_{n-1}$

Tangente à la courbe en 0 :
$n \cdot \overrightarrow{P_0P_1}$

Tangente à la courbe en 1 :
$n \cdot \overrightarrow{P_{n-1}P_n}$

Permet de raccorder des courbes de Béziers





Rough computation …

CALCUL DE POINT : ALGORITHME DE DE CASTELJAU

curve $\longrightarrow$ $\left[\; \underline{g}(t) = \sum_{i=0}^{m} \varphi_{m,i}(t) \cdot P_i \right.$ — $G(m^2)$ …

$d^o m$

$\varphi_{m,i}(t) = C_m^i\, t^i\, (1-t)^{m-i}$ — $G(m)$

computing pts … $g(t_0)$? — $G(m^2)$

Algorithme similaire déjà connu : calcul de $\boxed{C_n^k \dots}$

$\cancel{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$

Débordements de capacité …

$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

~~Fonction récursive :~~

duplication des calculs …

Calcul itératif via un tableau :

Triangle de Pascal $\leftarrow$

CALCUL DE POINT : ALGORITHME DE DE CASTELJAU

1) Formule récursive

$$\varphi_{n,i}(t) = t\varphi_{n-1,i-1}(t) + (1-t)\varphi_{n-1,i}(t)$$

rec. expr. of $\varphi_{n,i}$

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_{n,i}(t) \cdot P_i =$$

.../...

rec. expr. of $f(t)$

CALCUL DE POINT : ALGORITHME DE DE CASTELJAU

1) Formule récursive

$$\varphi_{n,i}(t) = t\varphi_{n-1,i-1}(t) + (1-t)\varphi_{n-1,i}(t)$$

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_{n,i}(t) \cdot P_i =$$

d° n-1 Bézier curve

d° n-1 Bézier curve.

$$g(t) \quad = t\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n-1} \varphi_{n-1,i}(t) P_{i+1}\right)}_{P_1^{n-1}} + (1-t)\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n-1} \varphi_{n-1,i}(t) P_i\right)}_{P_0^{n-1}}$$

Points de courbes intermédiaires de degré $n-1$

On pose :

$$P_i^j = f_{P_i,\ldots,P_{i+j}}(t)$$

CALCUL DE POINT : ALGORITHME DE DE CASTELJAU

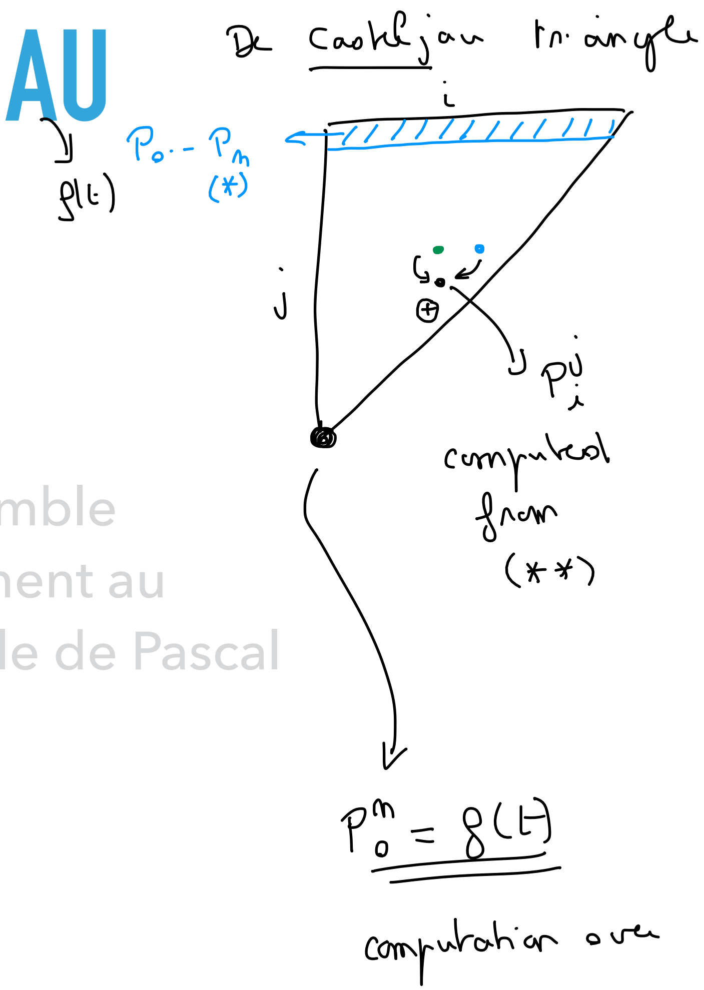
Init: n+1 pts $P_0 \dots P_n$

1) Formule récursive

$$(**) \quad \boxed{P_i^j = tP_{i+1}^{j-1} + (1-t)P_i^{j-1}}$$

avec $\boxed{P_i^0 = P_i}$ $(*)$

Ressemble fortement au triangle de Pascal



CALCUL DE POINT : ALGORITHME DE DE CASTELJAU

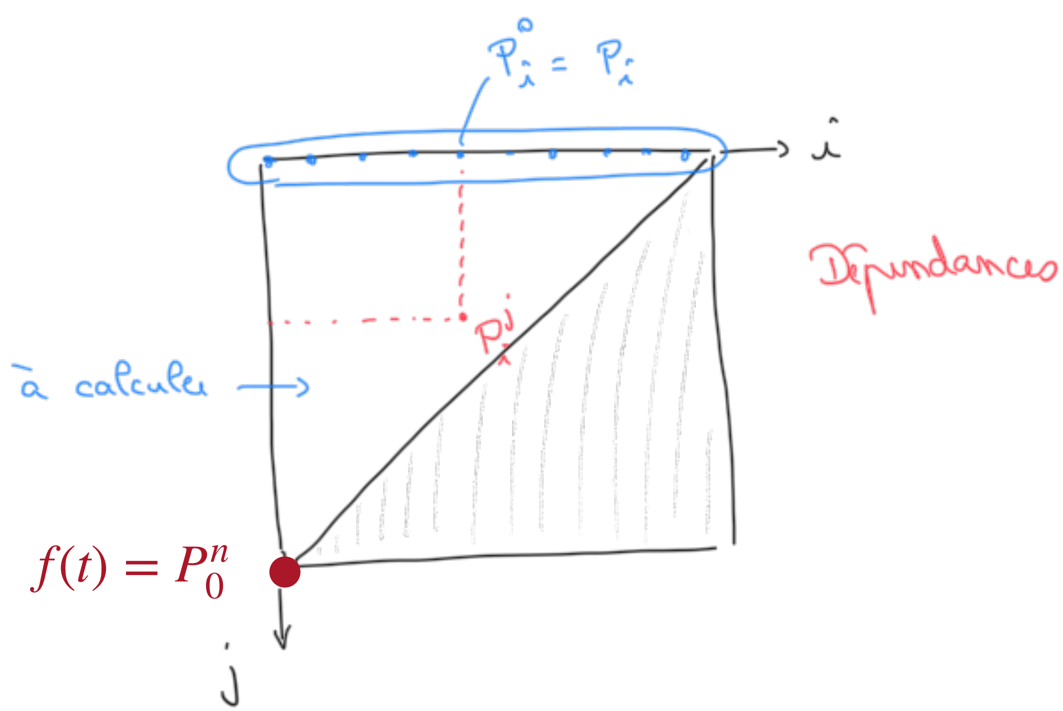
1) Formule récursive

$$\boxed{P_i^j = tP_{i+1}^{j-1} + (1-t)P_i^{j-1}}$$

avec $P_i^0 = P_i$

Ressemble fortement au triangle de Pascal

2) Dépendances de calcul



CALCUL DE POINT : ALGORITHME DE DE CASTELJAU

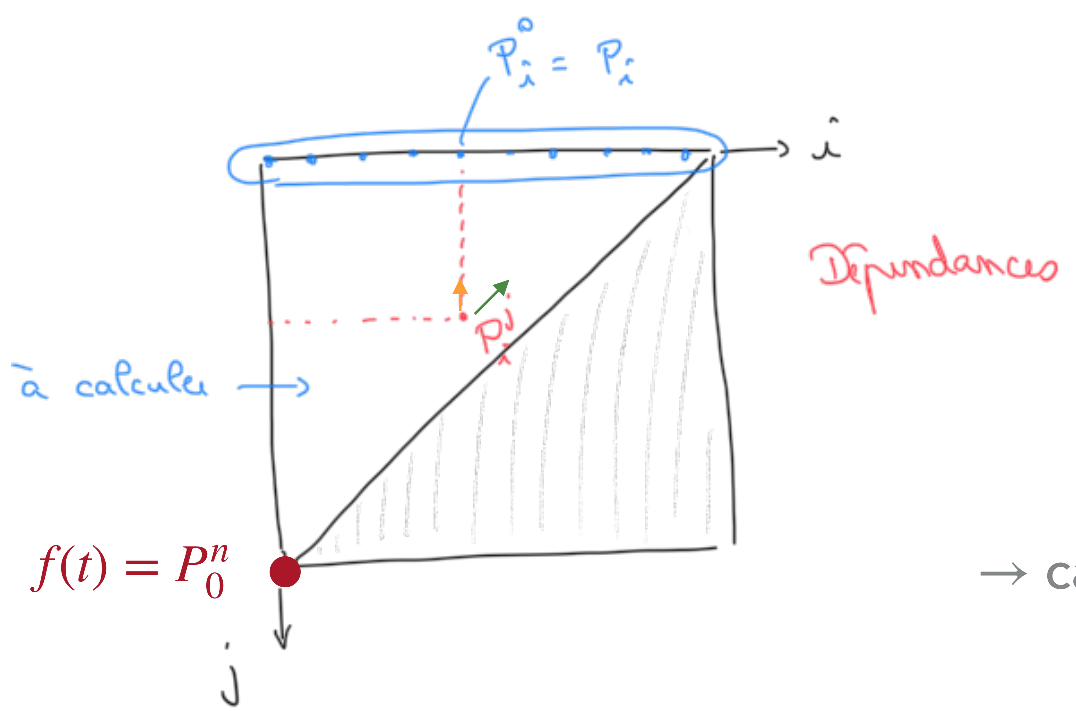
1) Formule récursive

$$\boxed{P_i^j = tP_{i+1}^{j-1} + (1-t)P_i^{j-1}}$$

Ressemble fortement au triangle de Pascal

avec $P_i^0 = P_i$

2) Dépendances de calcul



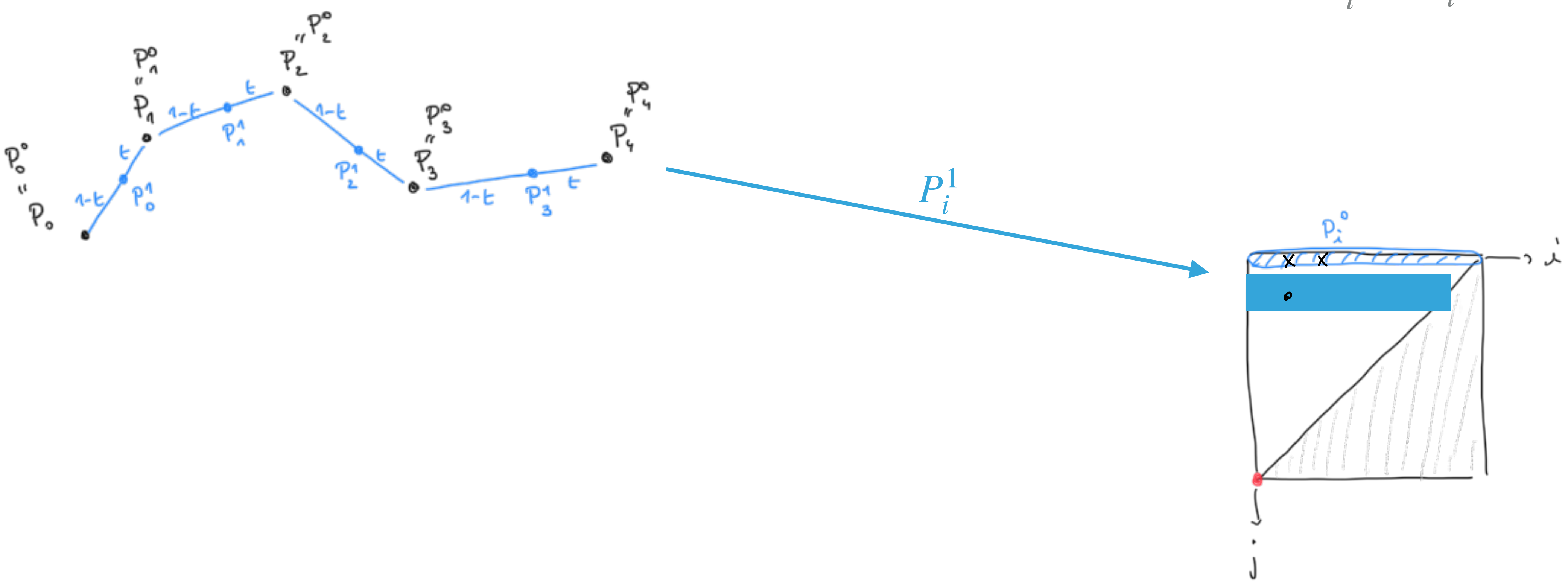
→ calcul par lignes

CALCUL DE POINT : ALGORITHME DE DE CASTELJAU

$$\boxed{P_i^j = tP_{i+1}^{j-1} + (1-t)P_i^{j-1}}$$

avec $P_i^0 = P_i$

Interprétation géométrique

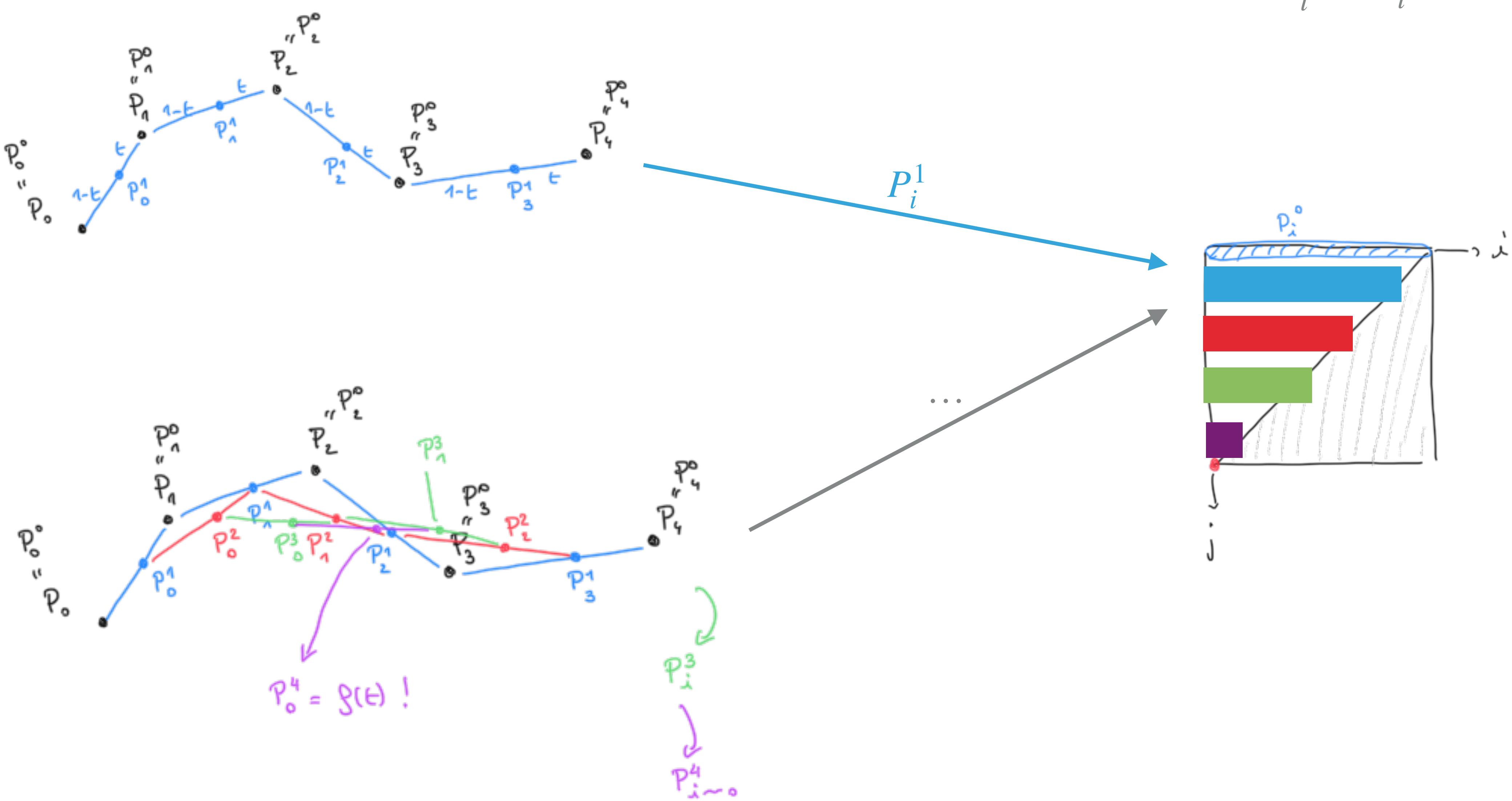


CALCUL DE POINT : ALGORITHME DE DE CASTELJAU

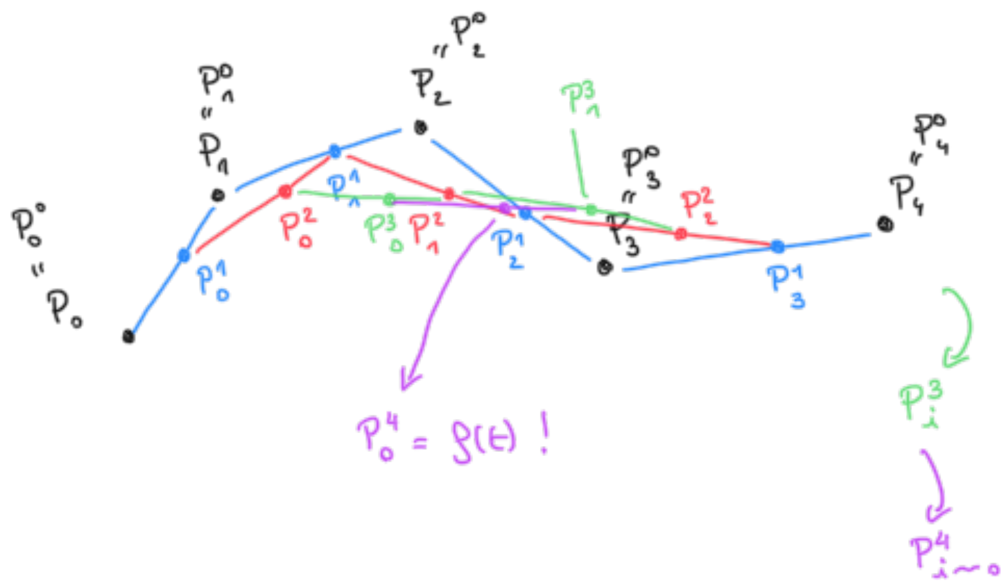
$$\boxed{P_i^j = tP_{i+1}^{j-1} + (1-t)P_i^{j-1}}$$

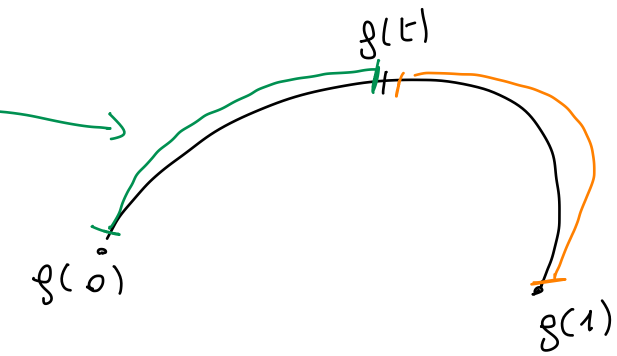
avec $P_i^0 = P_i$

Interprétation géométrique



DE CASTELJAU ET SUBDIVISION





$$
\begin{array}{ccccc}
P_0^0 & P_1^0 & P_2^0 & P_3^0 & P_4^0 \\
P_0^1 & P_1^1 & P_2^1 & P_3^1 & \\
P_0^2 & P_1^2 & P_2^2 & & \\
P_0^3 & P_1^3 & & & \\
P_0^4 & & & &
\end{array}
$$

Créent la courbe $f\,|_{[0,t]}$

Créent la courbe $f\,|_{[t,1]}$

→ Augmenter le nombre de points de contrôle

→ Subdivision de la courbe en deux courbes de même degré

ÉLÉVATION DE DEGRÉ

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_{n,i}(t) \cdot P_i$$

Evident …

$$\varphi_{n,i}(t) = t\varphi_{n,i}(t) + (1-t)\varphi_{n,i}(t)$$

$$\left| \begin{array}{l} t\varphi_{n,i}(t) = \dfrac{i+1}{n+1} t\varphi_{n+1,i+1}(t) \\ (1-t)\varphi_{n,i}(t) = \dfrac{n+1-i}{n+1} t\varphi_{n+1,i}(t) \end{array} \right.$$

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n+1} \varphi_{n+1,i}(t) \cdot P'_i$$

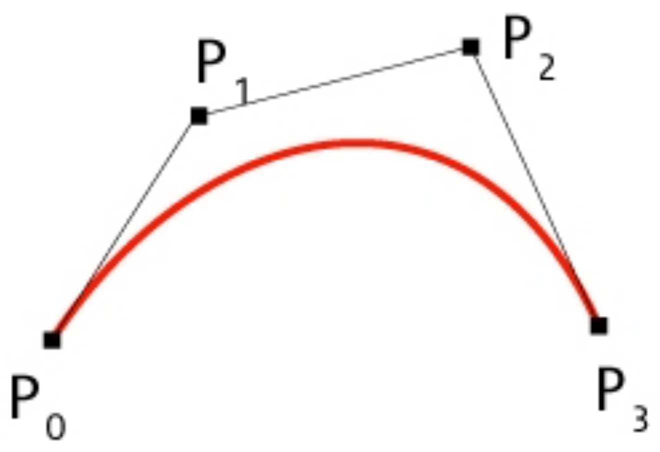
$$\left| \begin{array}{l} P'_0 = P_0 \\ P'_{n+1} = P_n \\ P'_i = \dfrac{i}{n+1} P_{i-1} + \dfrac{n+1-i}{n+1} P_i \end{array} \right.$$

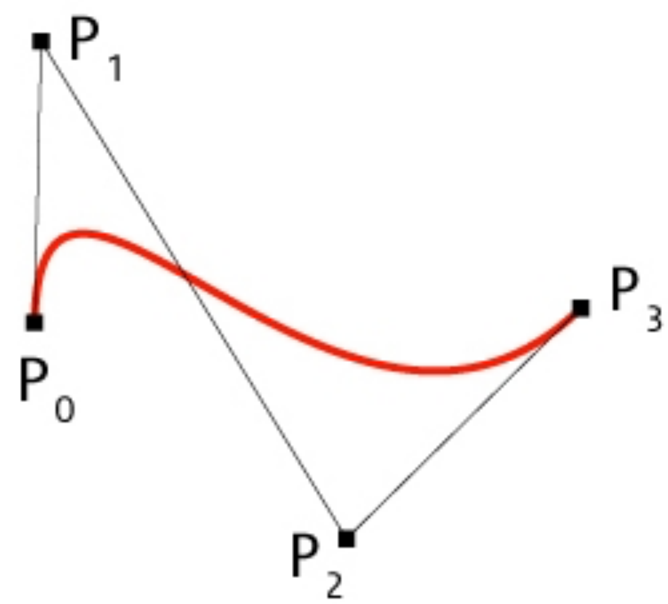
→ Augmenter le degré à $n+1$

→ Courbe inchangée

CONCLUSION

CONCLUSION





- $f(t)$ s'approche de P_i en $t = \dfrac{i}{n}$
- Pas de contrôle plus précis
- Paramétrisation « cachée »

PLUS DE ... ?

Base B-spline

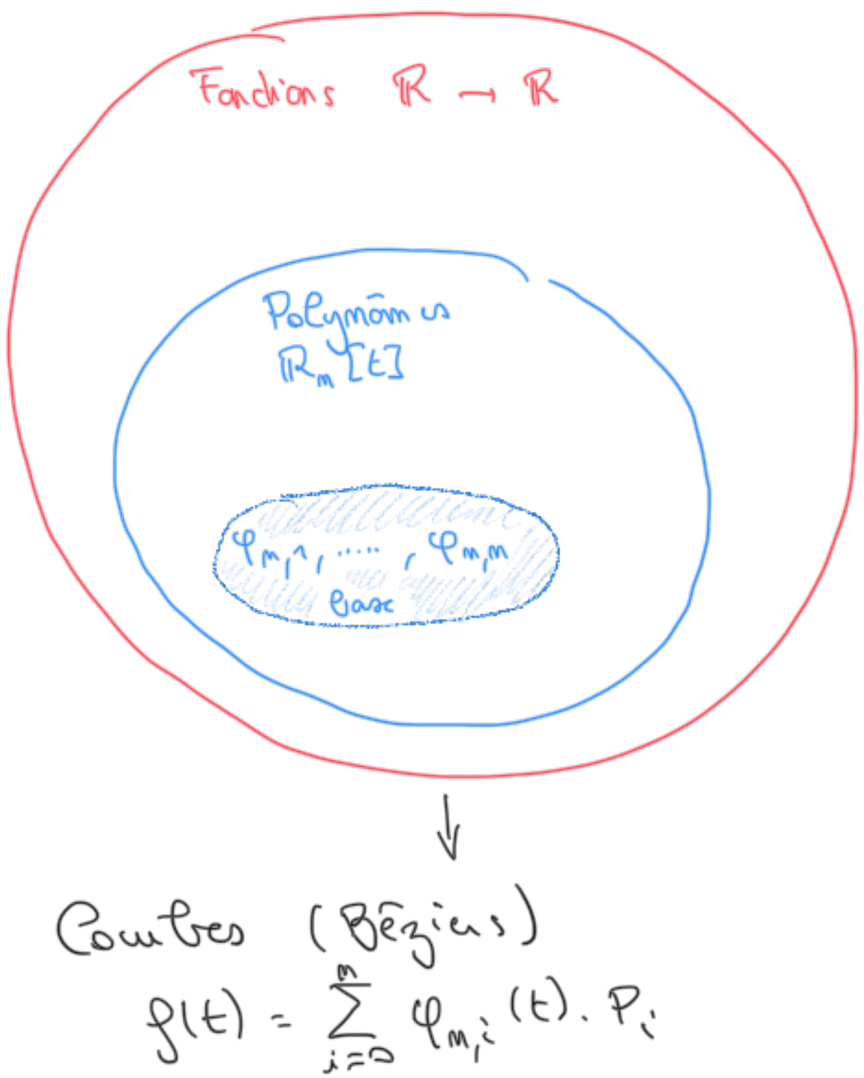
A suivre en 5A ...

Sera aussi beaucoup plus technique (paramétrisation explicite)

CONCLUSION / RACCORDEMENT ?

Surfaces paramétriques (Béziers)

Base de Bernstein …

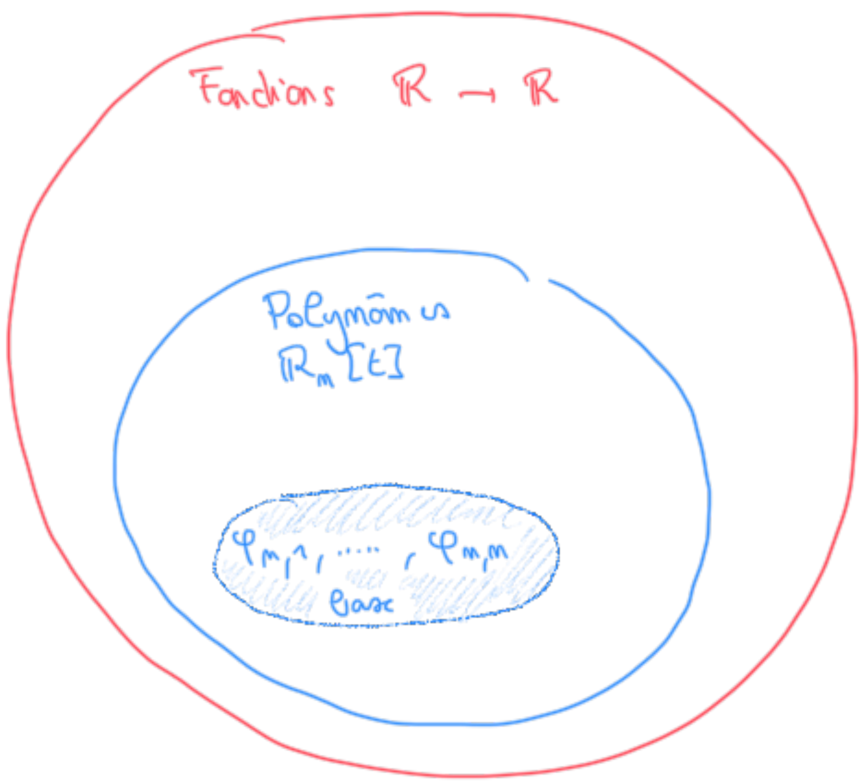


Surfaces paramétriques

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

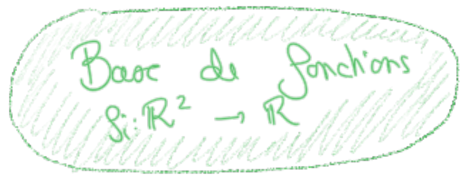
$f(u, v) =$

Base de Bernstein …



Courbes (Béziers)

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_{n,i}(t) \cdot P_i$$



Surfaces paramétriques

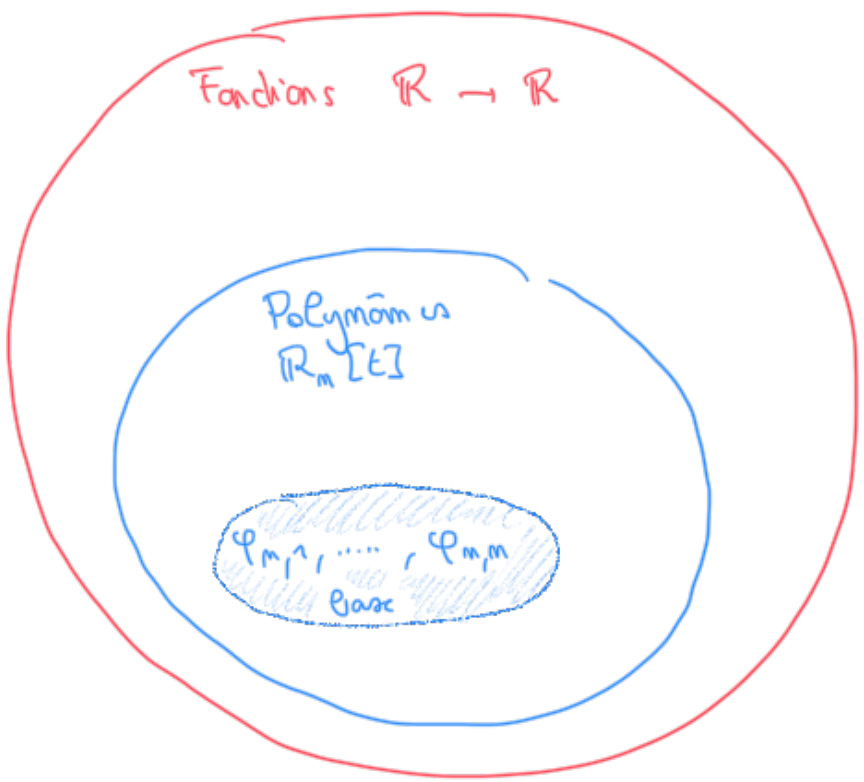
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(u, v) = \sum_i f_i(u, v) \cdot P_i$$

Base de Bernstein …

$$f, g \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \longrightarrow \quad f \otimes g \,:\, \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(f \otimes g)(u, v) = f(u)g(v)$$



Courbes (Béziers)

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_{n,i}(t) \cdot P_i$$

Surfaces paramétriques

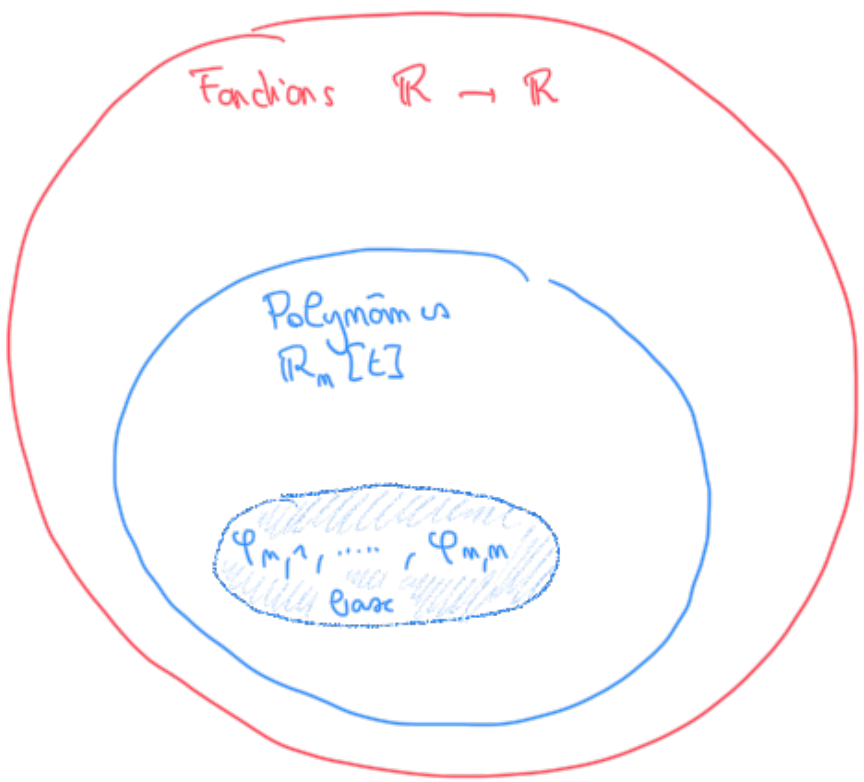
$$f \,:\, \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f(u, v) = \sum_i f_i(u, v) \cdot P_i$$

Base de Bernstein ...

$$f, g \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \longrightarrow \quad f \otimes g \,:\, \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(f \otimes g)(u, v) = f(u)g(v)$$



Courbes (Béziers)

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_{n,i}(t) \cdot P_i$$

Surfaces paramétriques

$$f \,:\, \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

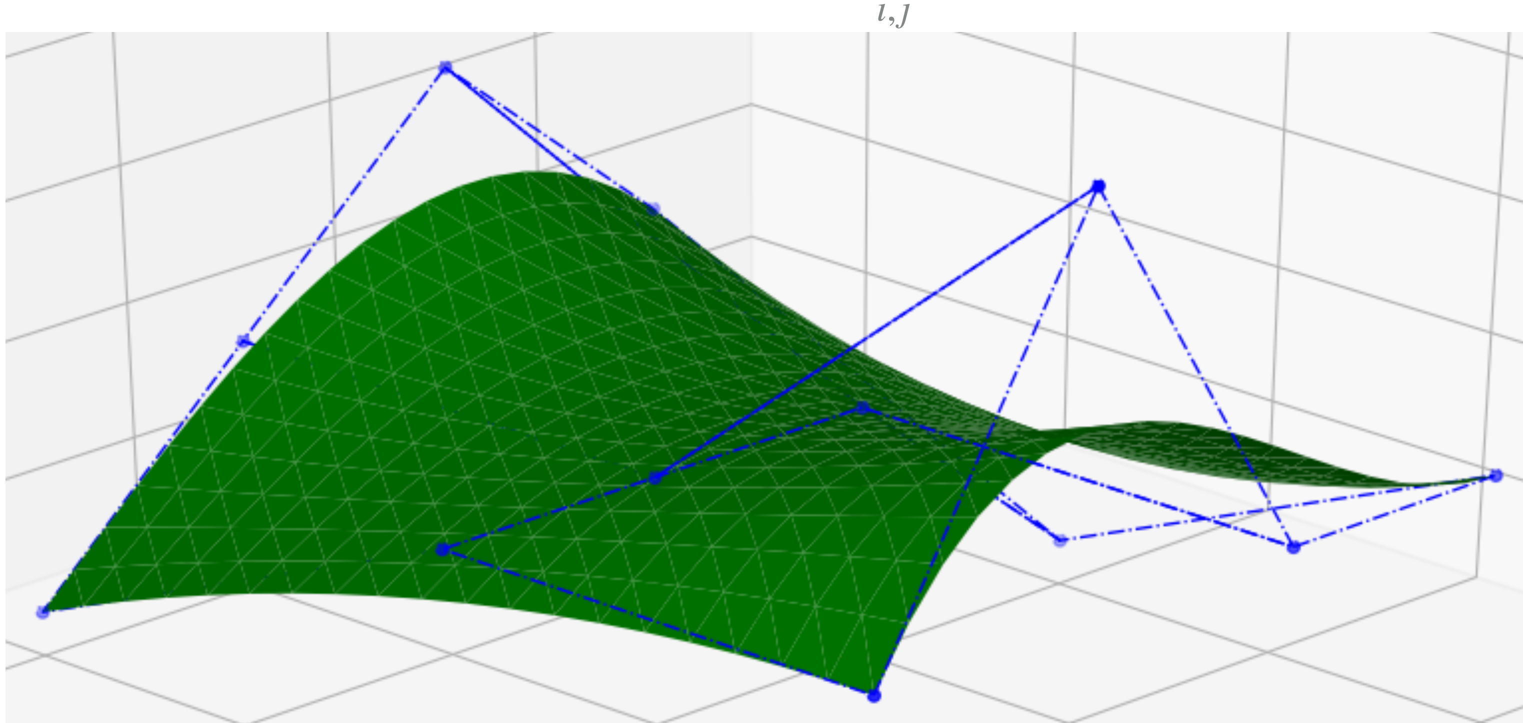
$$f(u, v) = \sum_{i,j} \varphi_{n,i}(u)\varphi_{m,j}(v) \cdot P_{i,j}$$

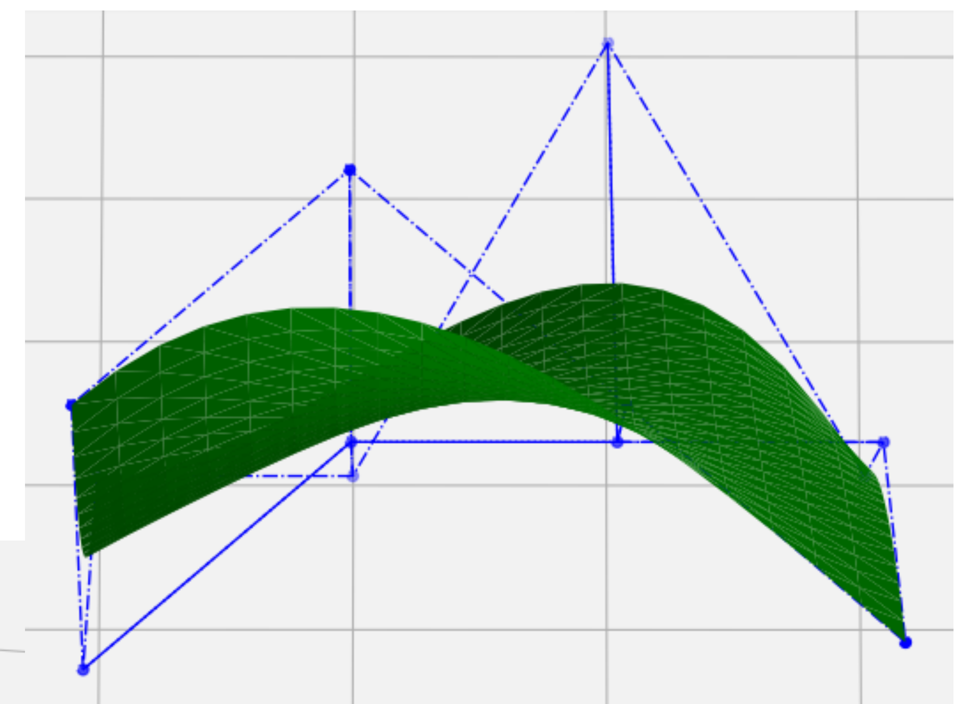
CARREAUX DE BÉZIERS

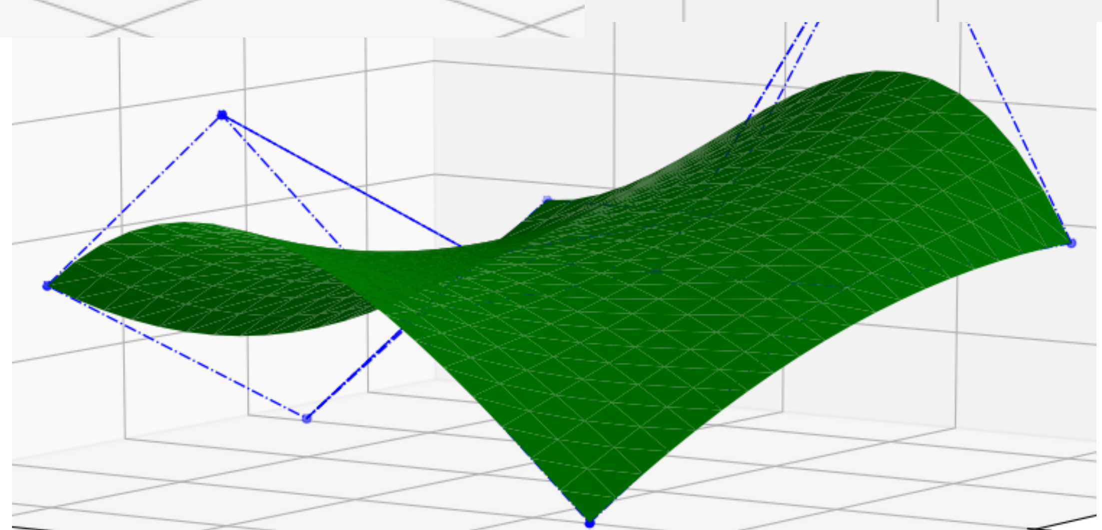
polygone de contrôle

<u>Surface produit tensoriel</u> - carreaux de Béziers

$$f(u,v) = \sum_{i,j} \varphi_{n,i}(u)\varphi_{m,j}(v) \cdot P_{i,j}$$







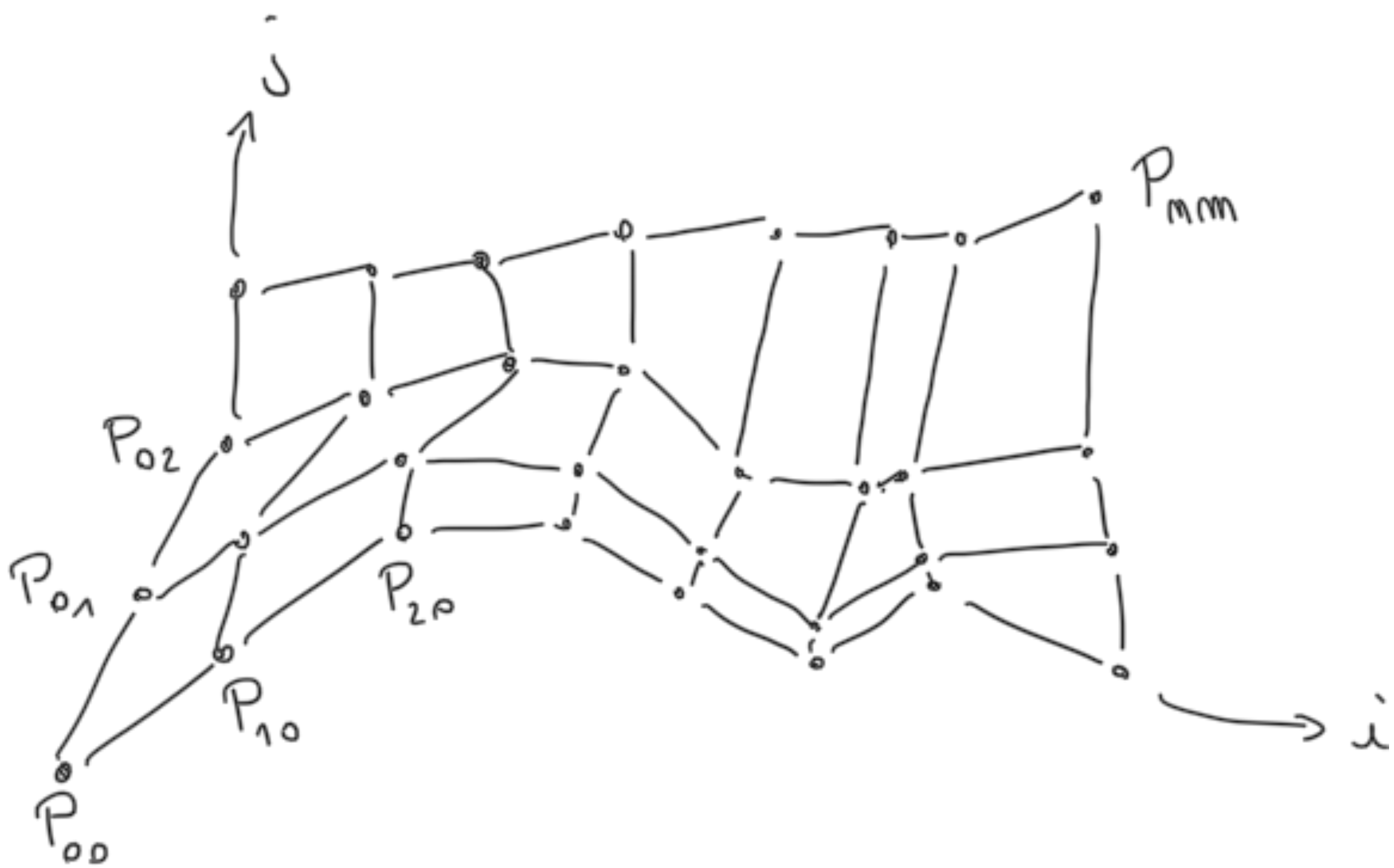
```
conda install -c orbingol geomdl
```

CARREAUX DE BÉZIERS

polygone de contrôle

Surface produit tensoriel - carreaux de Béziers

$$f(u,v) = \sum_{i,j} \varphi_{n,i}(u)\varphi_{m,j}(v) \cdot P_{i,j}$$



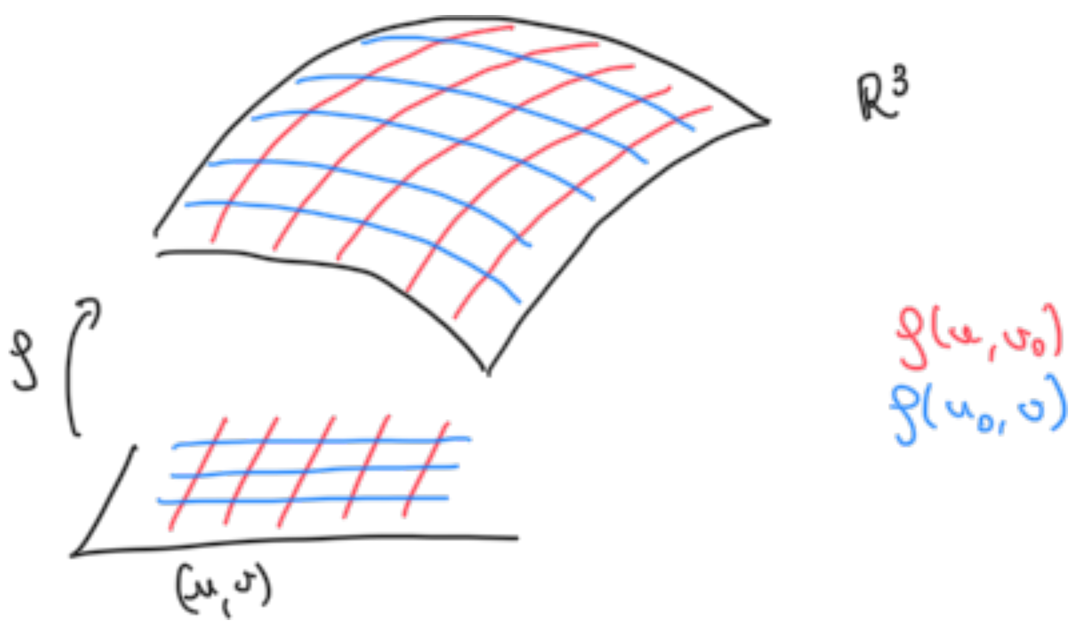

```
conda install -c orbingol geomdl
```

CARREAUX DE BÉZIERS

Surface produit tensoriel - carreaux de Béziers

$$f(u,v) = \sum_{i,j} \varphi_{n,i}(u)\varphi_{m,j}(v) \cdot P_{i,j}$$

Courbes
isoparamétriques



CARREAUX DE BÉZIERS

polygone de contrôle

Surface produit tensoriel - carreaux de Béziers

$$f(u,v) = \sum_{i,j} \varphi_{n,i}(u)\varphi_{m,j}(v) \cdot P_{i,j}$$

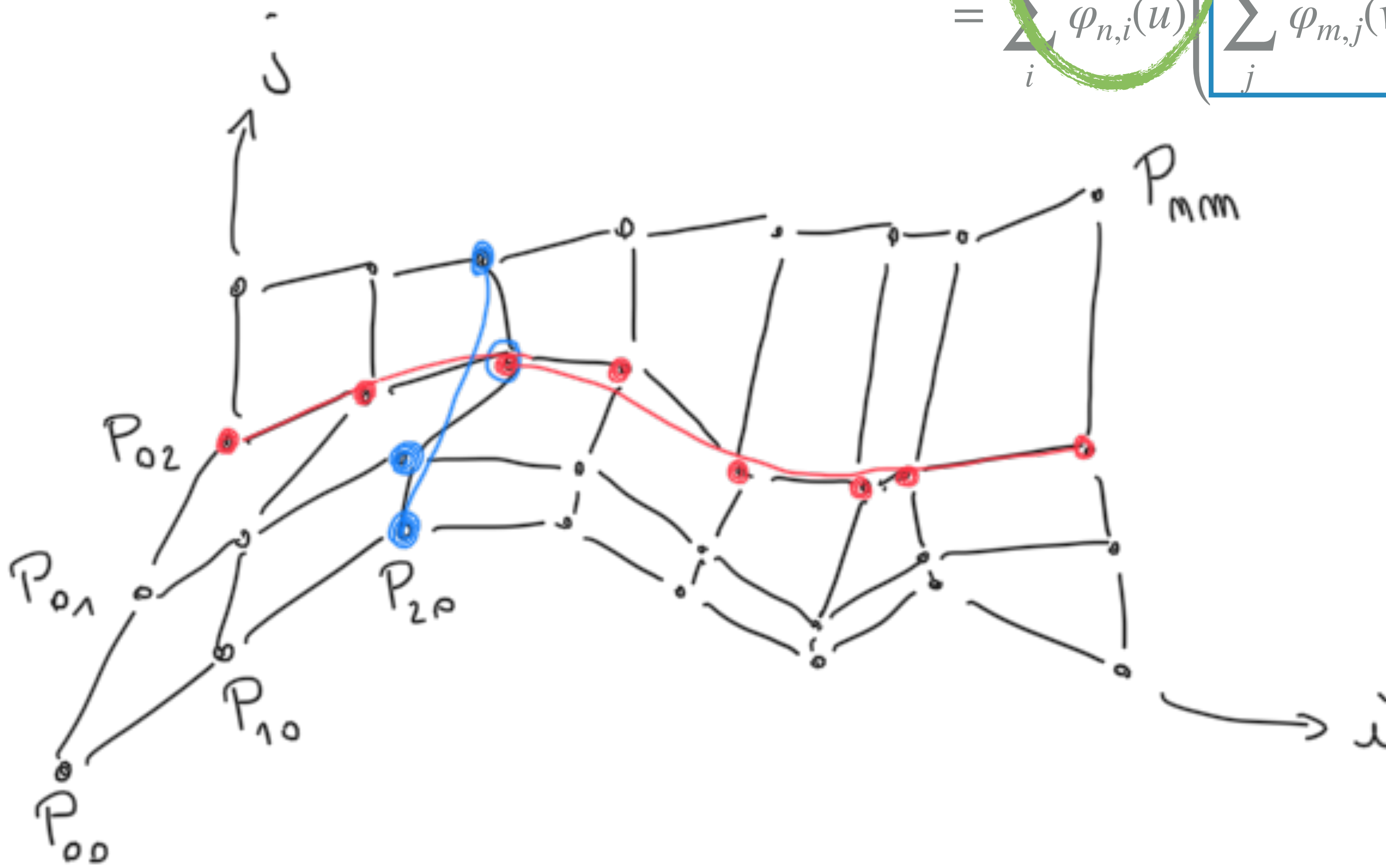
$$= \sum_{j} \varphi_{m,j}(v) \left(\boxed{\sum_{i} \varphi_{n,i}(u) \cdot P_{i,j}} \right)$$

$$= \sum_{i} \varphi_{n,i}(u) \left(\boxed{\sum_{j} \varphi_{m,j}(v) \cdot P_{i,j}} \right)$$

Courbes de Bézier

Pas sur la surface !

PAS COURBES ISOPARA-MÉTRIQUES



CARREAUX DE BÉZIERS / RACCORDEMENT