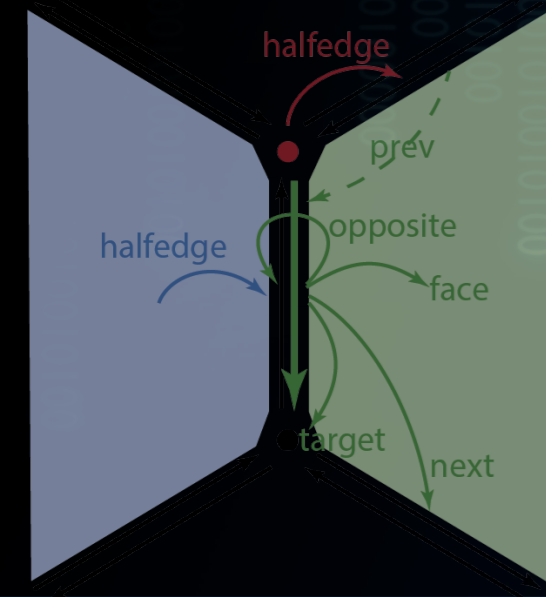


MODELISATION GEOMETRIQUE



Alexandra Bac

POLYTECH 4A INFORMATIQUE **REVA**

4 - GÉOMÉTRIE DES SURFACES

Certaines illustrations sont issues du livre « polygon mesh processing »

Chapitre 2

MAILLAGES

Chapitre 4

**GÉOMÉTRIE DES
SURFACES**

Chapitre 1

**MODÉLISATION DES
SURFACES**

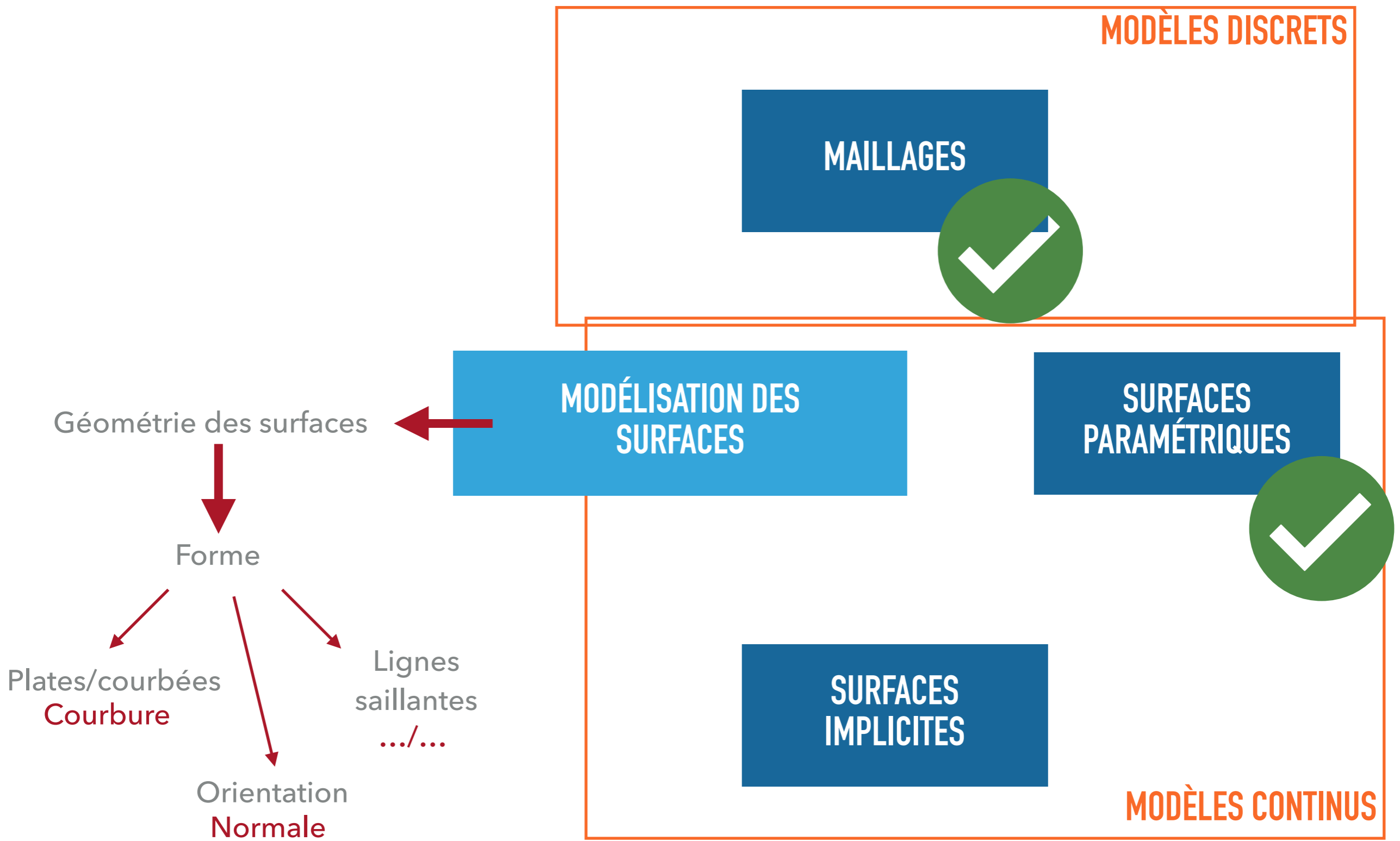
Chapitre 3 (+ 5A)

**SURFACES
PARAMÉTRIQUES**

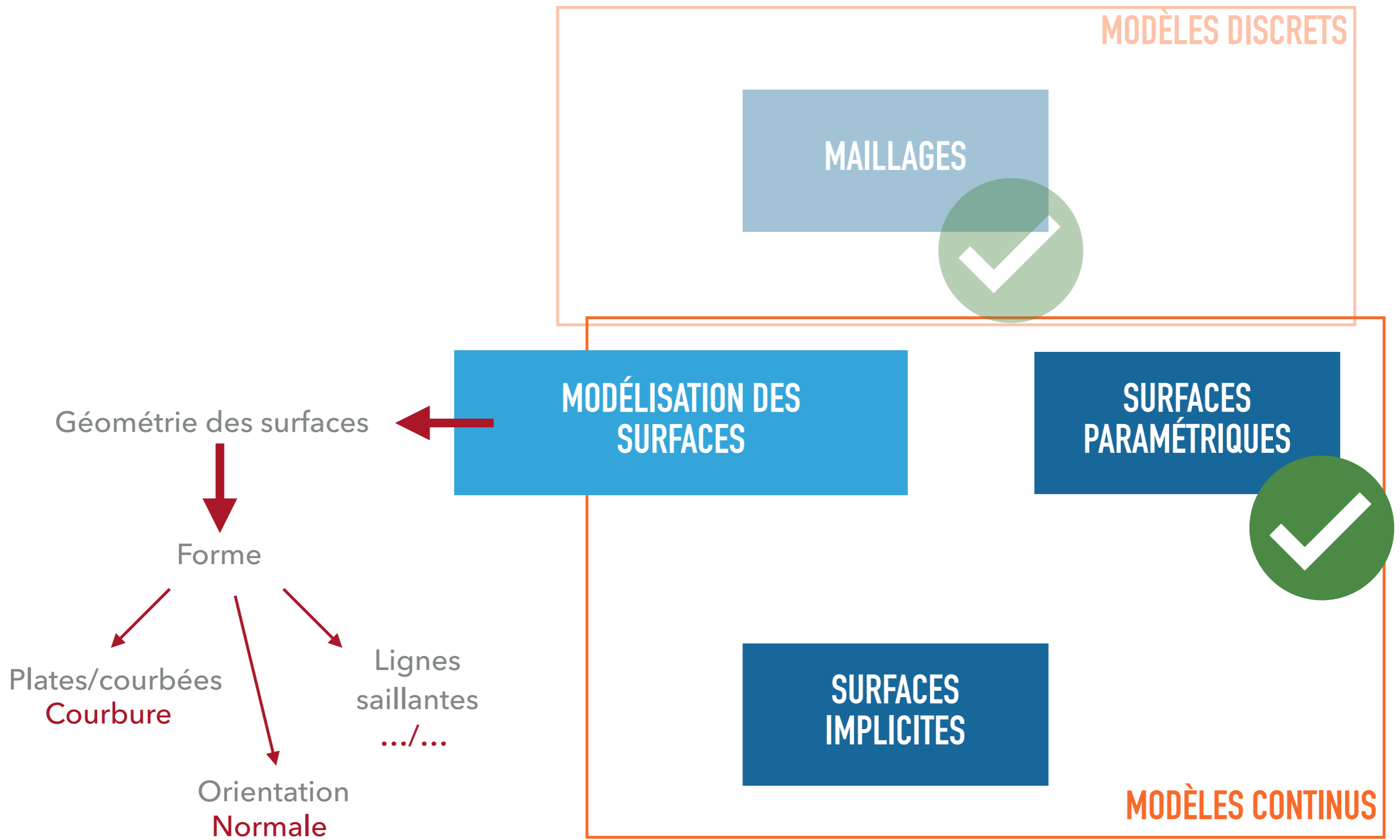
Chapitre 5

**SURFACES
IMPLICITES**

« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - GÉOMÉTRIE DES SURFACES



« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - GÉOMÉTRIE DES SURFACES



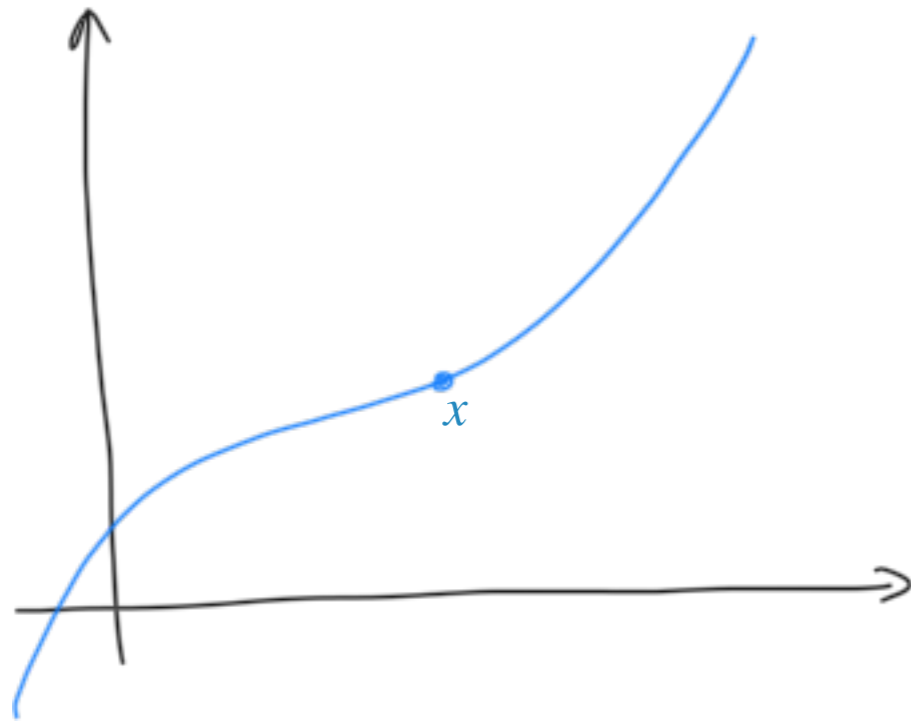
POUR L'INTUITION :
GÉOMÉTRIE DES COURBES
PARAMÉTRIQUES



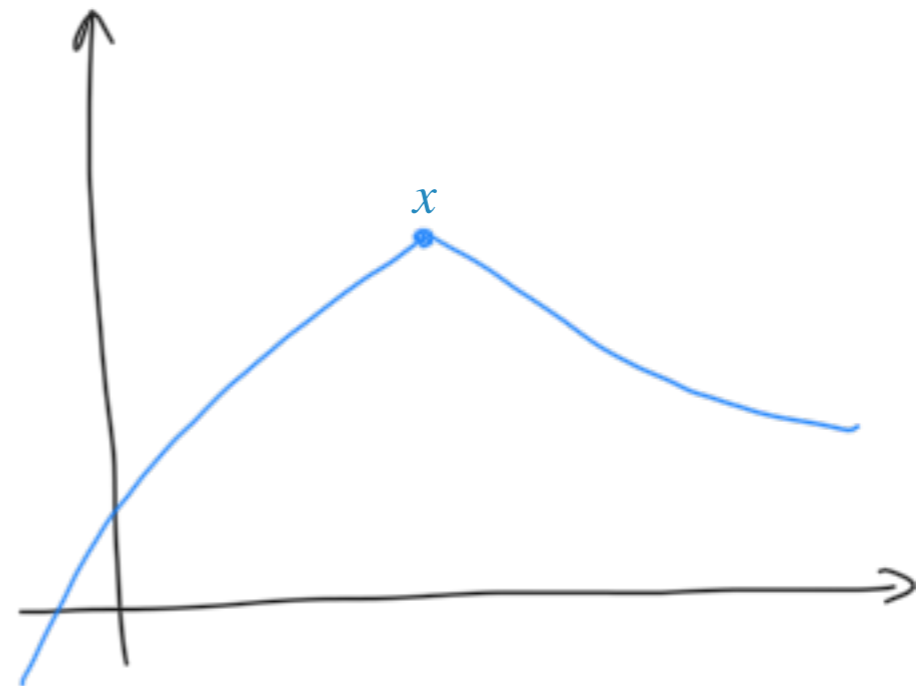
COURBES CARTÉSIENNES

« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - GÉOMÉTRIE DES SURFACES

Modélisées sous la forme $y = f(x)$



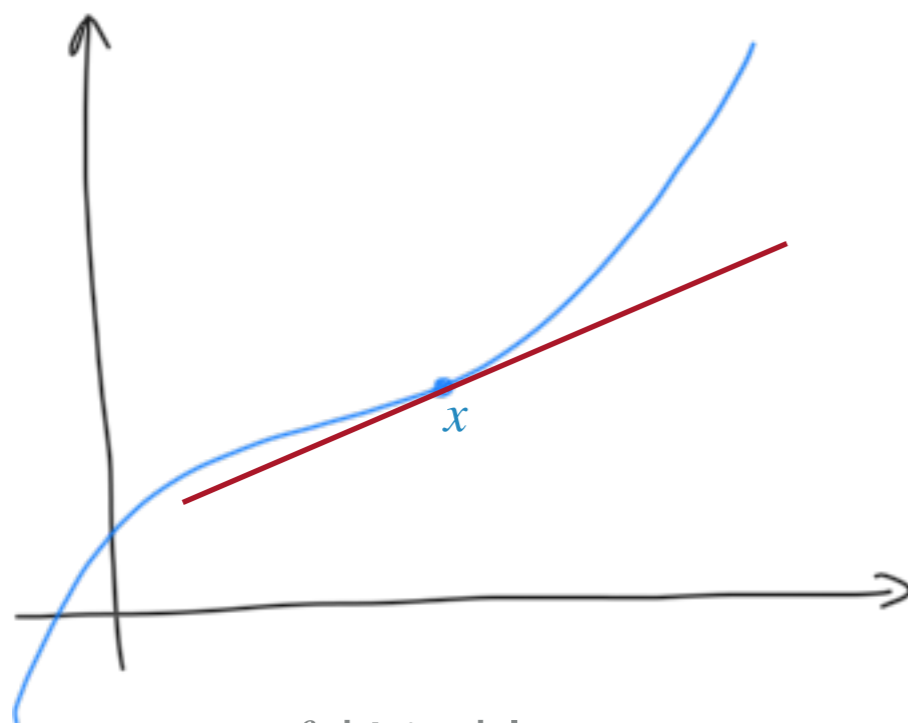
Connues depuis la terminale ...



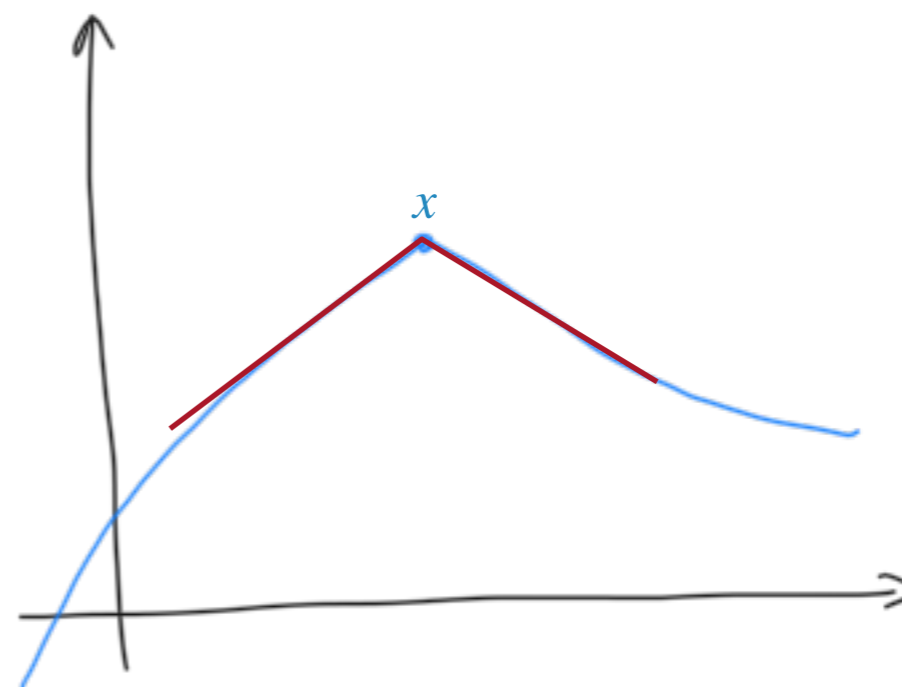
« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - GÉOMÉTRIE DES SURFACES

Modélisées sous la forme $y = f(x)$

Connues depuis la terminale ...



f dérivable



f non dérivable

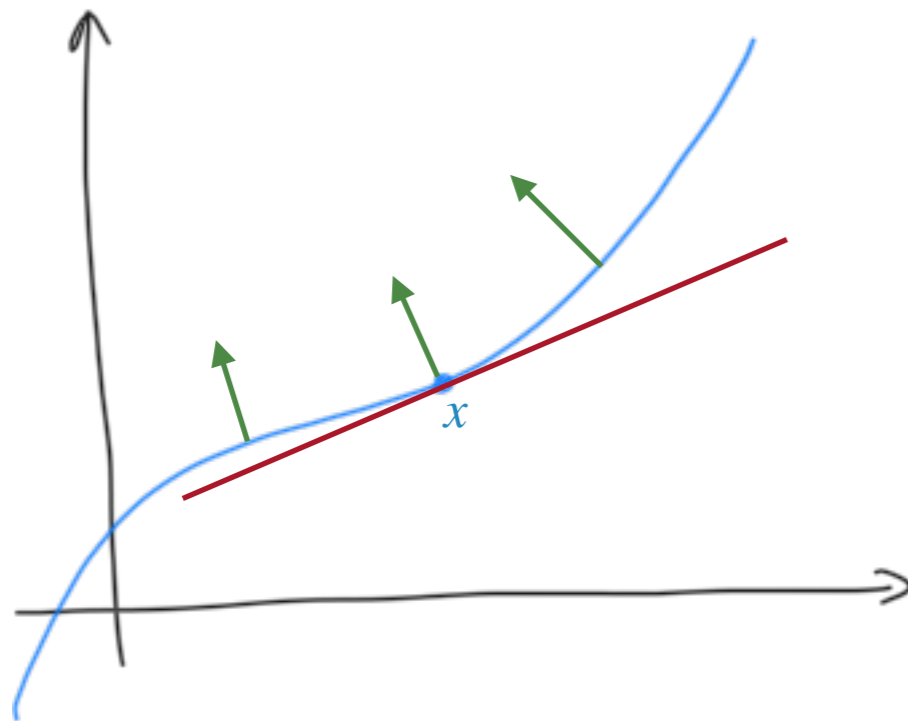
Courbe proche d'une droite de pente $f'(x)$

Tangente

« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - GÉOMÉTRIE DES SURFACES

Modélisées sous la forme $y = f(x)$

Connues depuis la terminale ...

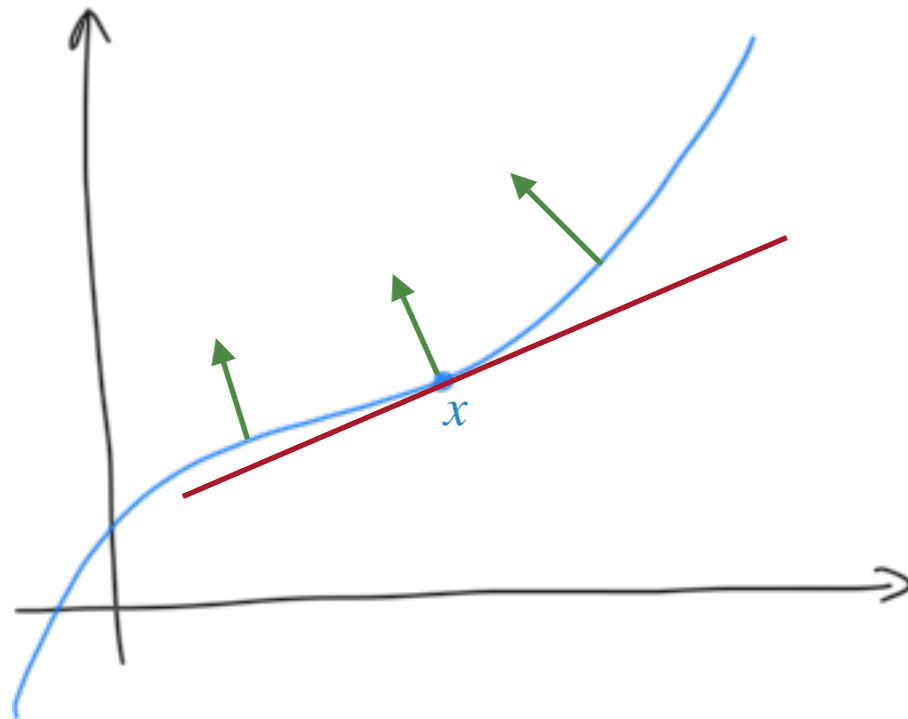


Normale :
orthogonale à la courbe/tangente

« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - GÉOMÉTRIE DES SURFACES

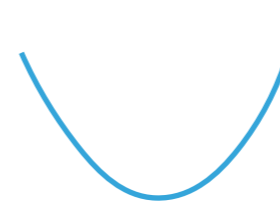
Modélisées sous la forme $y = f(x)$

Connues depuis la terminale ...

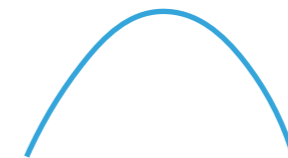


Dérivées secondes :

$f''(x)$ indique la concavité de la courbe



Concave
 $f''(x) > 0$



Convexe
 $f''(x) < 0$



Inflexion
 $f''(x) = 0$



Courbure

5.56	+740.21	-0
3.24	+122.56	-0
0.62	+140.04	-0
.36	+180.98	-0
.56	+740.21	-0
.24	+122.56	-0
.62	+140.04	-0
.36	+180.98	-0
.56	+740.21	-0

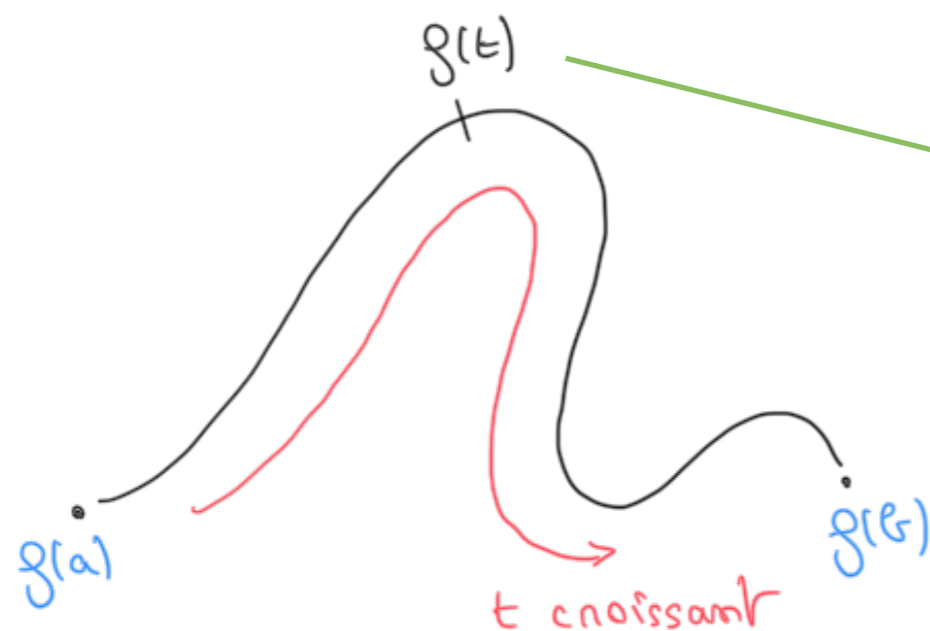
COURBES PARAMÉTRIQUES GÉNÉRALES

Cf. Chapitre 3

COURBES

Courbe finie :

$$f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ (ou } \mathbb{R}^3)$$

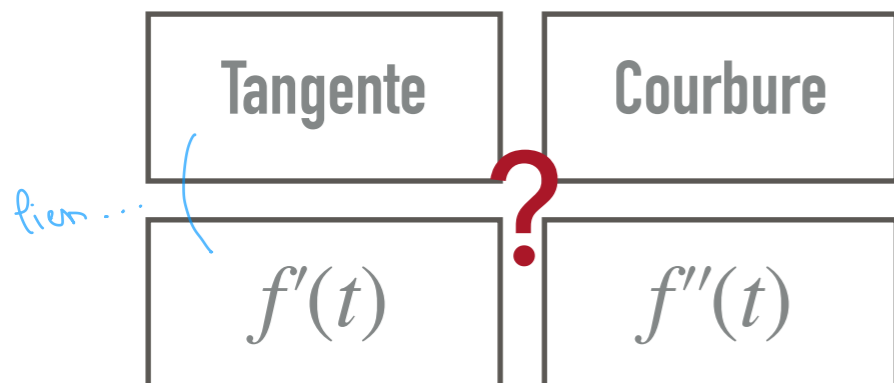


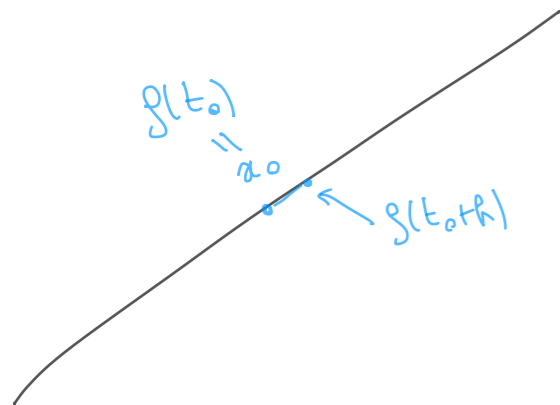
$f(t) \in \mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$ donc :

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ [f_3(t)] \end{pmatrix}$$

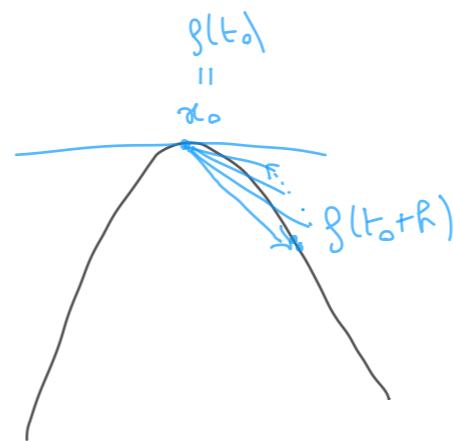


$$f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$





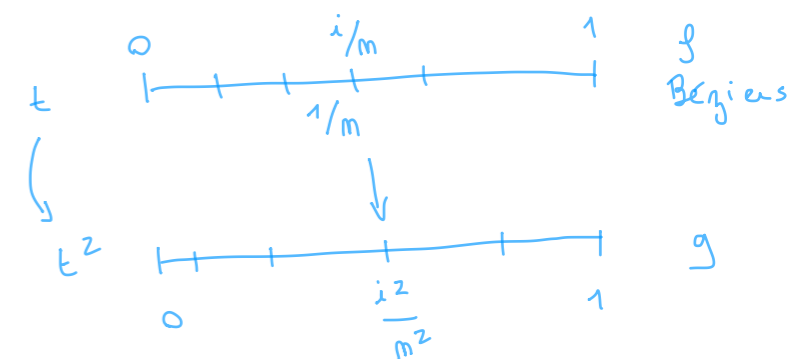
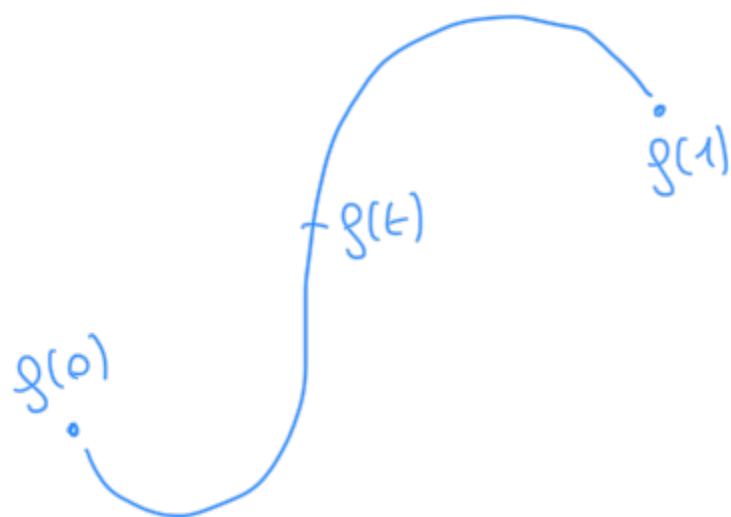
$$g'(t_0) = \frac{g(t_0+h) - g(t_0)}{h}$$



« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - GÉOMÉTRIE DES SURFACES

Cf. Chapitre 3

$$f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$



Comme vu au chapitre 3 :

$$g(t) = f(t^2)$$

décrit la même courbe parcourue à une vitesse différente

$$\vec{g}'(t) = \vec{f}'(t^2) \times 2t$$

$$\vec{g}' \neq \vec{f}'$$

$$\parallel$$

~> pourtant même courbe ...

unique : parcourir la courbe à vitesse constante

$$g''(t) = (2 \cdot \vec{f}'(t^2)) + 4t^2 \cdot \vec{f}''(t^2)$$

$$g'' / g'' \neq$$

Paramétrisation normale

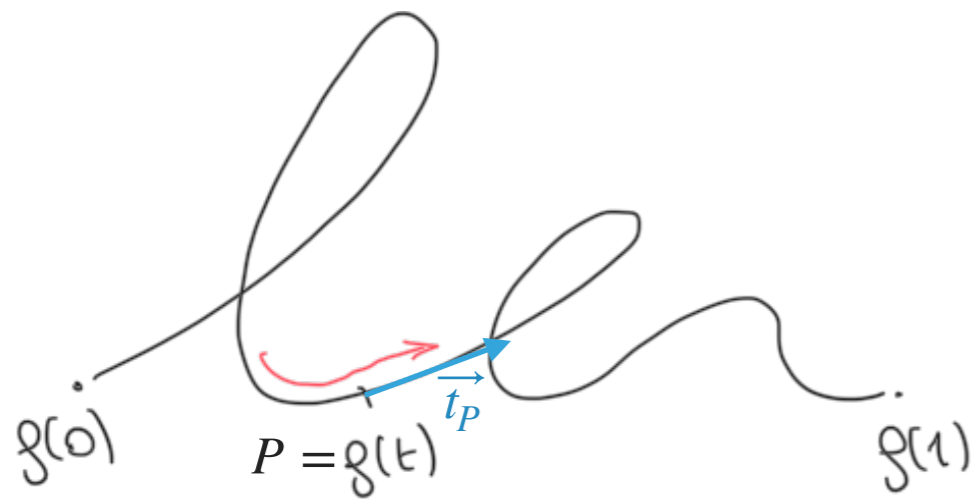
Tangente

Courbure

$f'(s)$

$f''(s)$

TANGENTE / NORMALE



En paramétrisation normale :

$$\vec{t}_P = f'(s)$$

En paramétrisation quelconque :

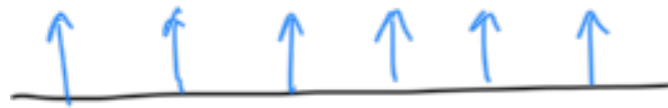
$$\vec{t}_P = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$$

vitesse

param. normale

$$\|g'(t)\| = 1 \quad \forall t$$

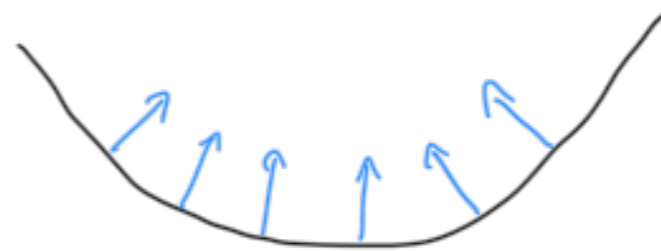
COURBURE



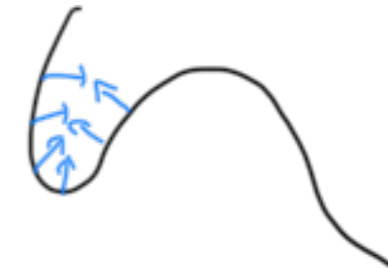
Non courbé



Normale/
tangente
constante



Moyennement courbé



Fortement courbé



Variation
violente de la
normale/
tangente

Courbure \leftrightarrow variation de la normale

Moyennant la paramétrisation ...

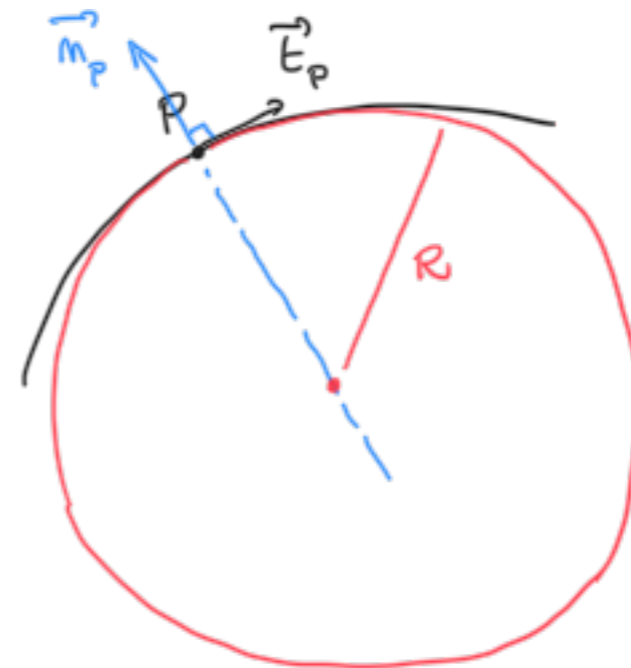
COURBURE

En paramétrisation normale, on montre que :

$$\frac{d\vec{t}_P}{ds} = \frac{1}{R} \cdot \vec{n}_P = k_P \cdot \vec{n}_P$$

R rayon de courbure

courbure au point P



$$P = f(s)$$

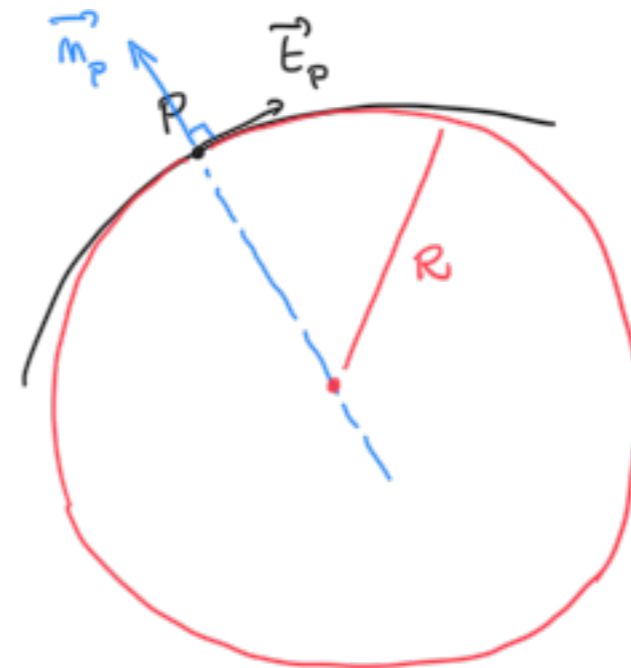
COURBURE

En paramétrisation normale, on montre que :

$$\frac{d\vec{t}_P}{ds} = \frac{1}{R} \cdot \vec{n}_P = k_P \cdot \vec{n}_P$$

R rayon de courbure

courbure au point P



$$P = f(s)$$

En paramétrisation quelconque :

$$k_P \cdot \vec{n}_P = \frac{f'(t) \wedge f''(t)}{\|f'(t)\|^3}$$

TRIÈDRE DE FRENET (COURBES GAUCHES)

On pose le vecteur de la binormale :

$$\vec{b}_P = \vec{t}_P \wedge \vec{n}_P$$

$$\frac{d\vec{t}_P}{ds} = \frac{1}{R} \cdot \vec{n}_P = k_P \cdot \vec{n}_P$$

R rayon de courbure

courbure

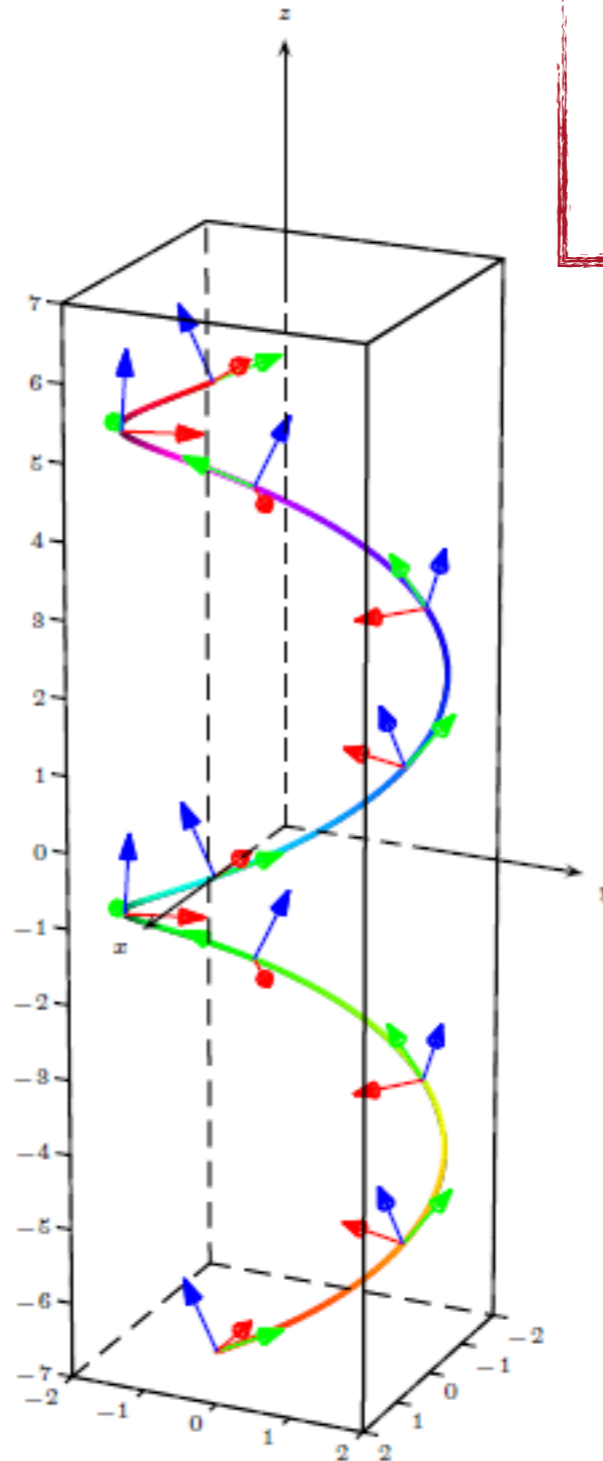
$$\frac{d\vec{b}_P}{ds} = \frac{1}{\tau_P} \cdot \vec{n}_P$$

rayon de torsion

$\frac{1}{\tau_P}$ torsion

Repère de Frénet :

$$(P, \vec{t}_P, \vec{n}_P, \vec{b}_P)$$



5.56	+740.21	-
3.24	+122.56	-
0.62	+140.04	-
.36	+180.98	-
.56	+740.21	-
24	+122.56	-
.62	+140.04	-
.36	+180.98	-
.56	+740.21	-
24	+122.56	-
.62	+140.04	-
.36	+180.98	-
.56	+740.21	-

BONUS : FORMES QUADRATIQUES

FORMES QUADRATIQUES ET MATRICES

Forme quadratique sur \mathbb{R}^n :

Φ : polynôme de degré 2 exactement (n variables)



Codable par une matrice Ω de taille $n \times n$:

$$\Phi(X) = X^t \cdot \Omega \cdot X$$

Sur \mathbb{R}^3 :

$$\Phi(x, y, z) = x^2 - y^2 + 2z^2 - xy + 2yz$$



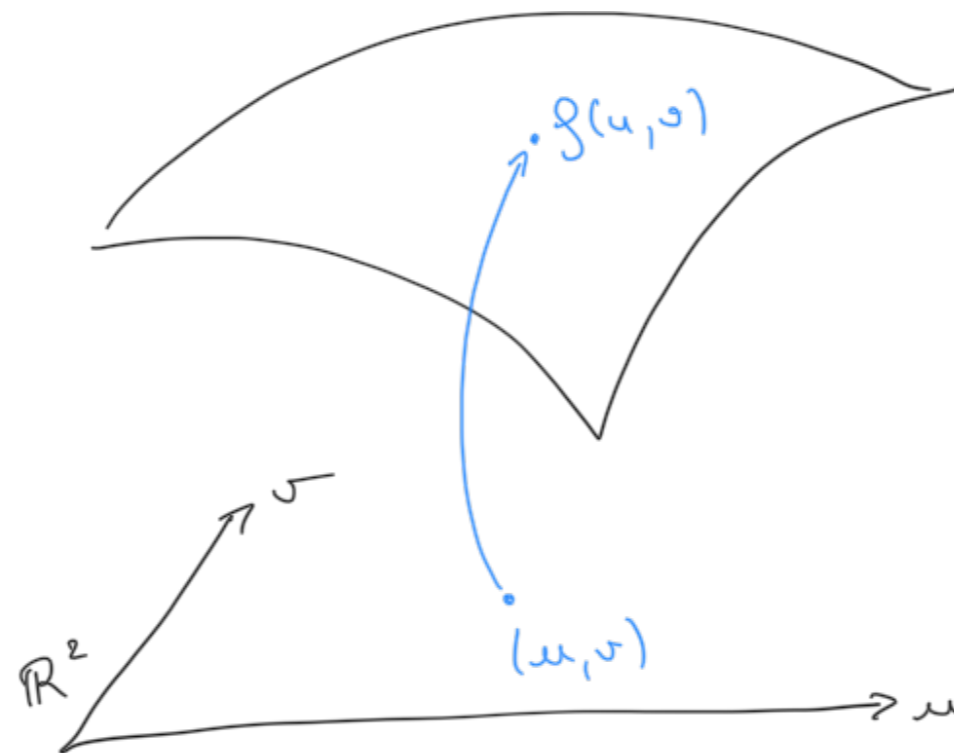
$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

GÉOMÉTRIE DES SURFACES PARAMÉTRIQUES

« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - GÉOMÉTRIE DES SURFACES

Cadre : surfaces paramétriques

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$



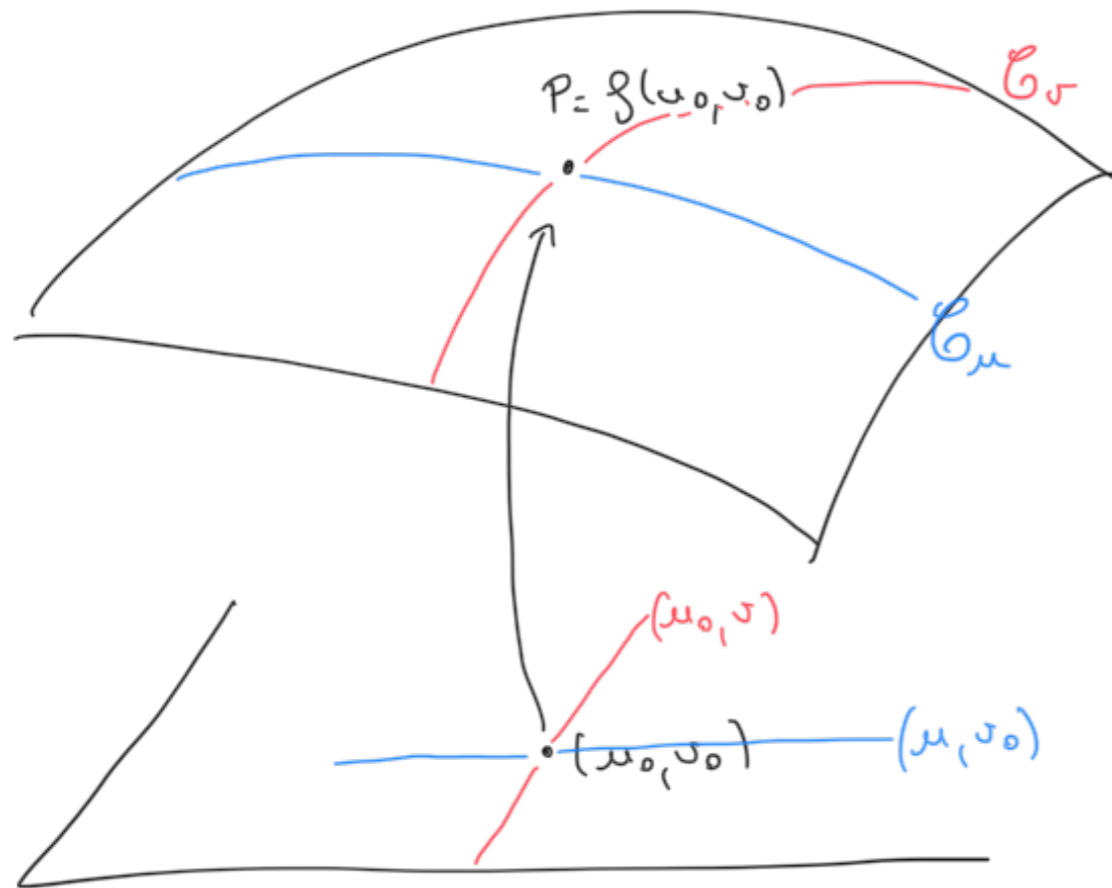
5.56	+740.21	-
3.24	+122.56	-
9.62	+140.04	-
.36	+180.98	-
.56	+740.21	-
.24	+122.56	-
.62	+140.04	-
.36	+180.98	-
.56	+740.21	-

NORMALE

« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - GÉOMÉTRIE DES SURFACES

On obtient naturellement deux courbes sur la surface :

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$



En fixant v_0 :

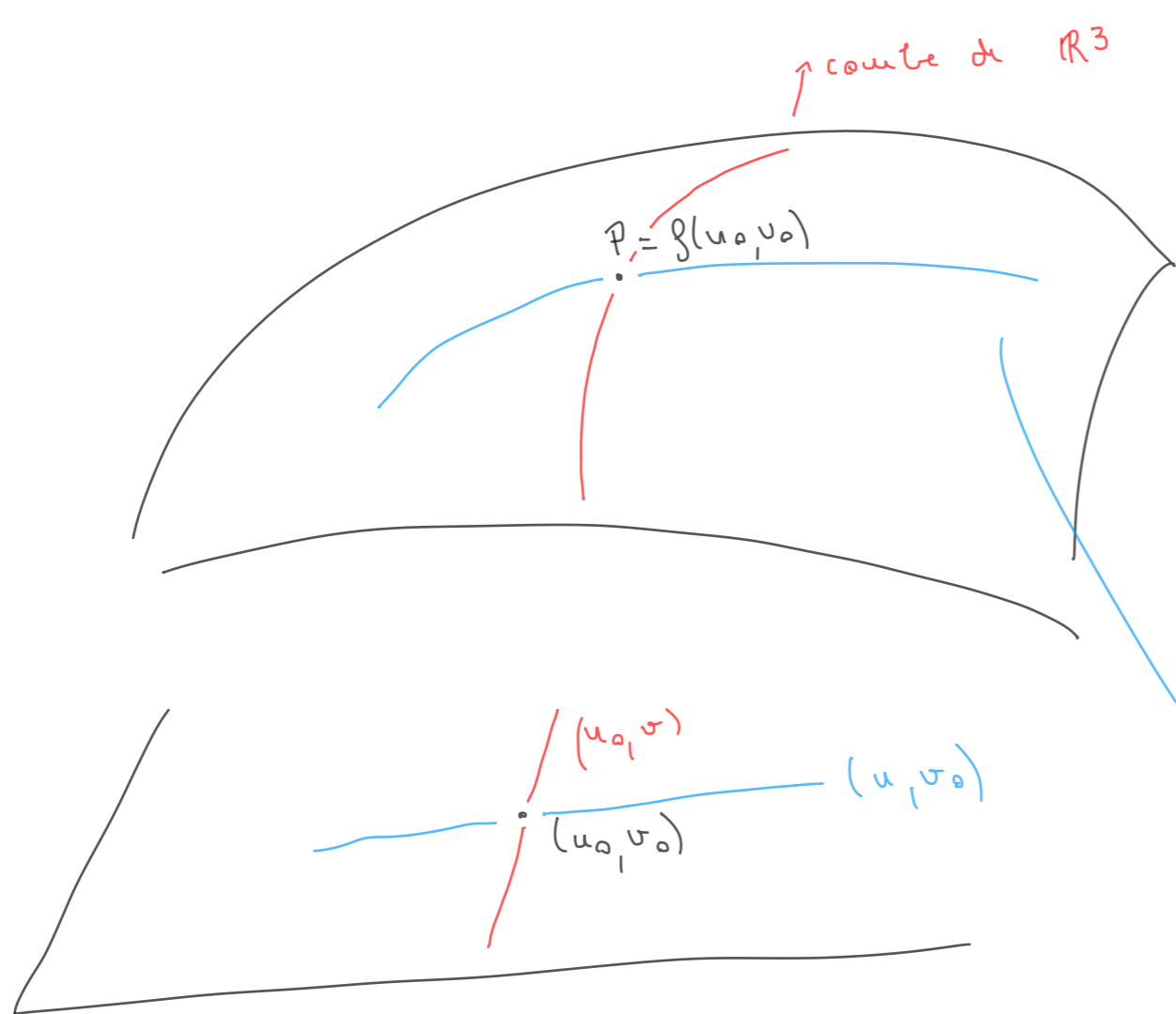
$$\mathcal{C}_u : u \mapsto f(u, v_0)$$

En fixant u_0 :

$$\mathcal{C}_v : v \mapsto f(u_0, v)$$



On connaît la tangente de courbes ...



↑ courbe de \mathbb{R}^3 \rightarrow $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $v \mapsto g(u_0, v)$

tangente d'une courbe :
 colinéaire dérivée ~~$\parallel dx/dt$~~

$$\varphi'(v) = \frac{\partial g}{\partial v}(u_0, v)$$

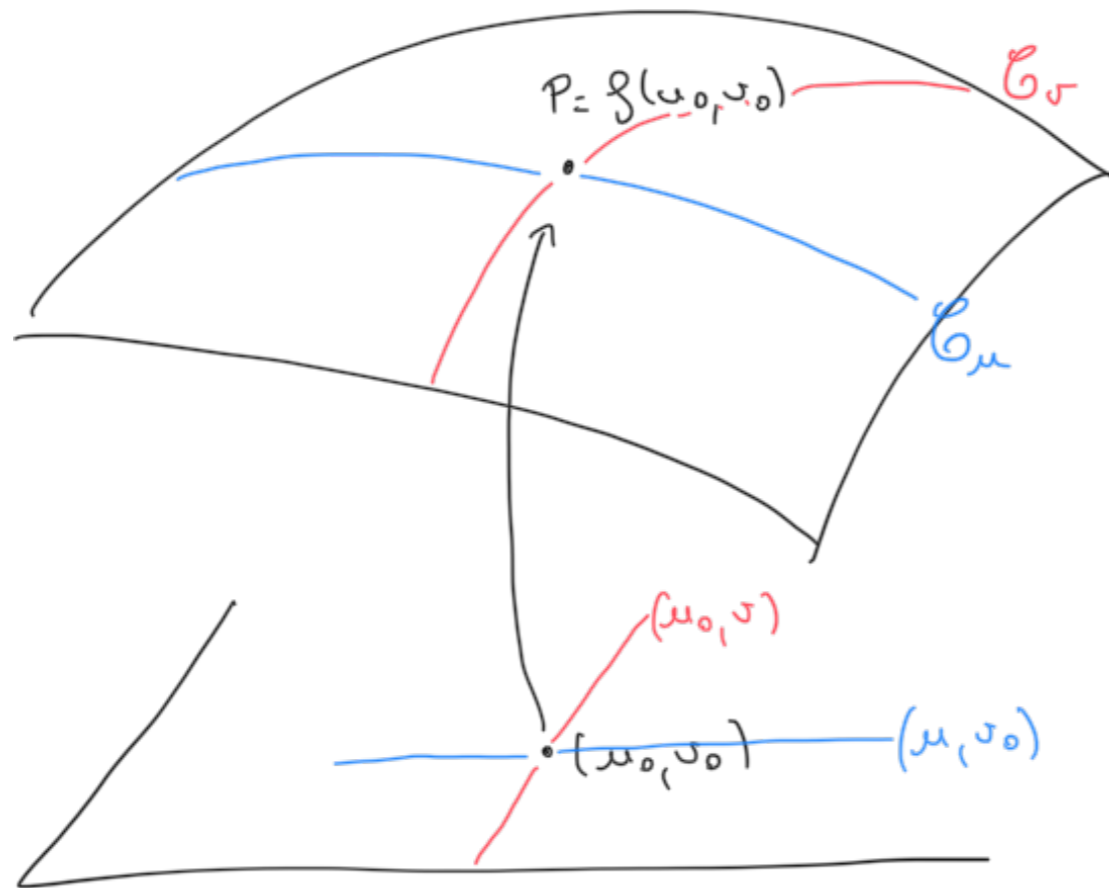
$$\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$u \mapsto g(u, v_0)$$

tangente colinéaire à $\psi'(u)$
 " $\frac{\partial g}{\partial u}(u, v_0)$

« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - GÉOMÉTRIE DES SURFACES

On obtient naturellement deux courbes sur la surface :



En fixant v_0 :

$$C_u : u \mapsto f(u, v_0)$$

En fixant u_0 :

$$C_v : v \mapsto f(u_0, v)$$



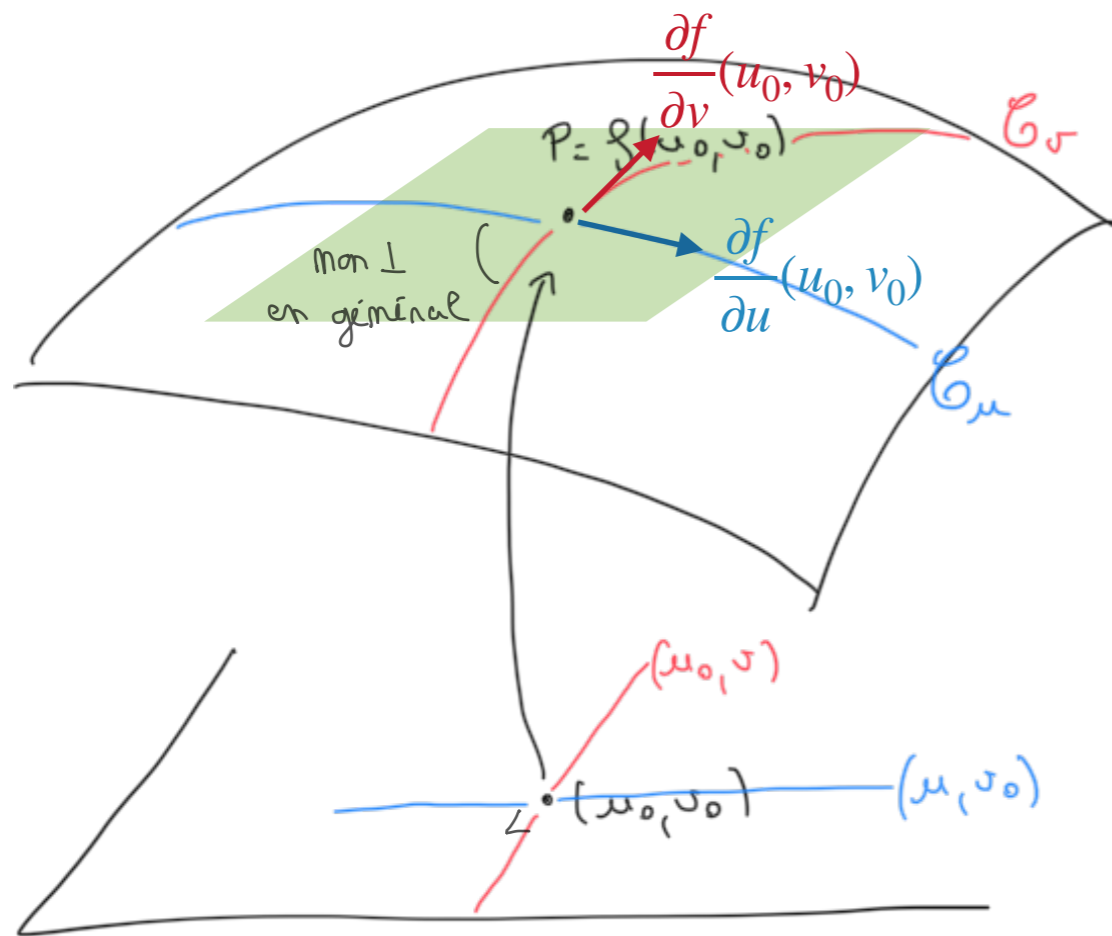
On connaît la tangente de courbes ...

$$\begin{aligned} & (f(u, v_0))' \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (f(u_0, v))' \\ &= \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \end{aligned}$$

« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - GÉOMÉTRIE DES SURFACES

On obtient naturellement deux courbes sur la surface :



Si f différentiable en (u_0, v_0) :

- ▶ Tangentes aux courbes sur la surface forment un plan

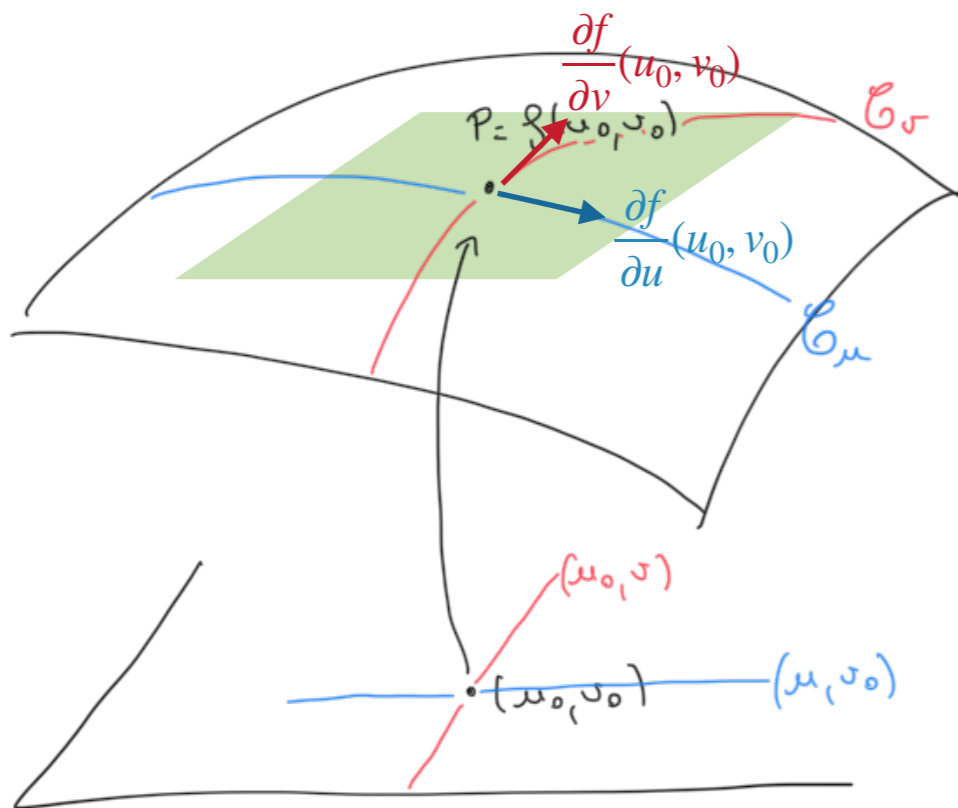
- ▶ $\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)$ en forment une base si ...



non
colinéaires
|
fibres

« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - GÉOMÉTRIE DES SURFACES

On obtient naturellement deux courbes sur la surface :



$P = f(u_0, v_0)$ **point régulier** si :

- ▶ $\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)$ libres, ie.
- ▶ $\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \neq 0$

Prop :

si $P = f(u_0, v_0)$ régulier, le **plan tangent** T_P en P a pour repère :

$$\left(P, \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \right)$$

Son vecteur normal :

$$\vec{n}_P = \frac{\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)}{\left\| \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \right\|}$$

« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - GÉOMÉTRIE DES SURFACES

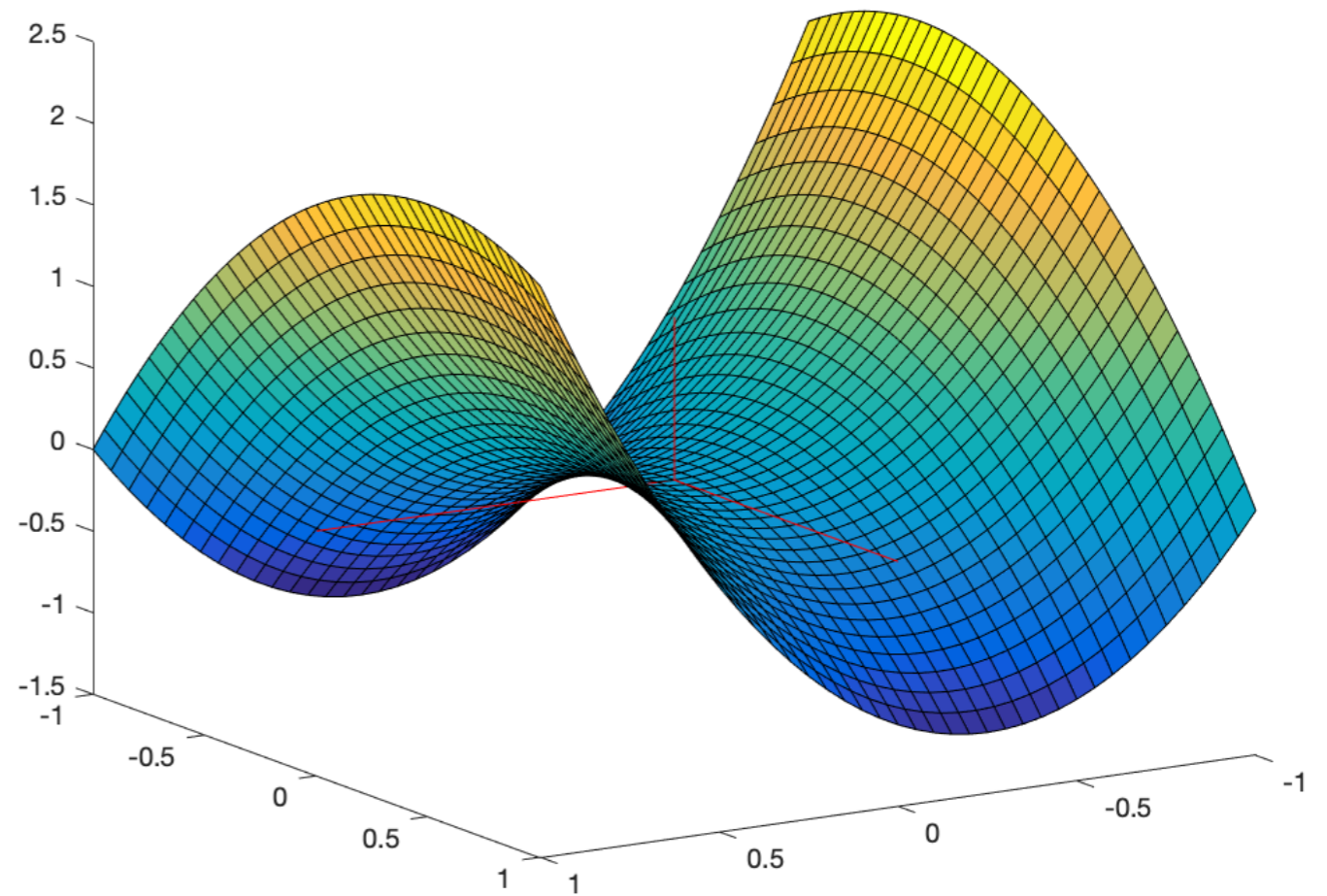
$$f: (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \\ 2u^2 - v^2 + uv \end{pmatrix}$$

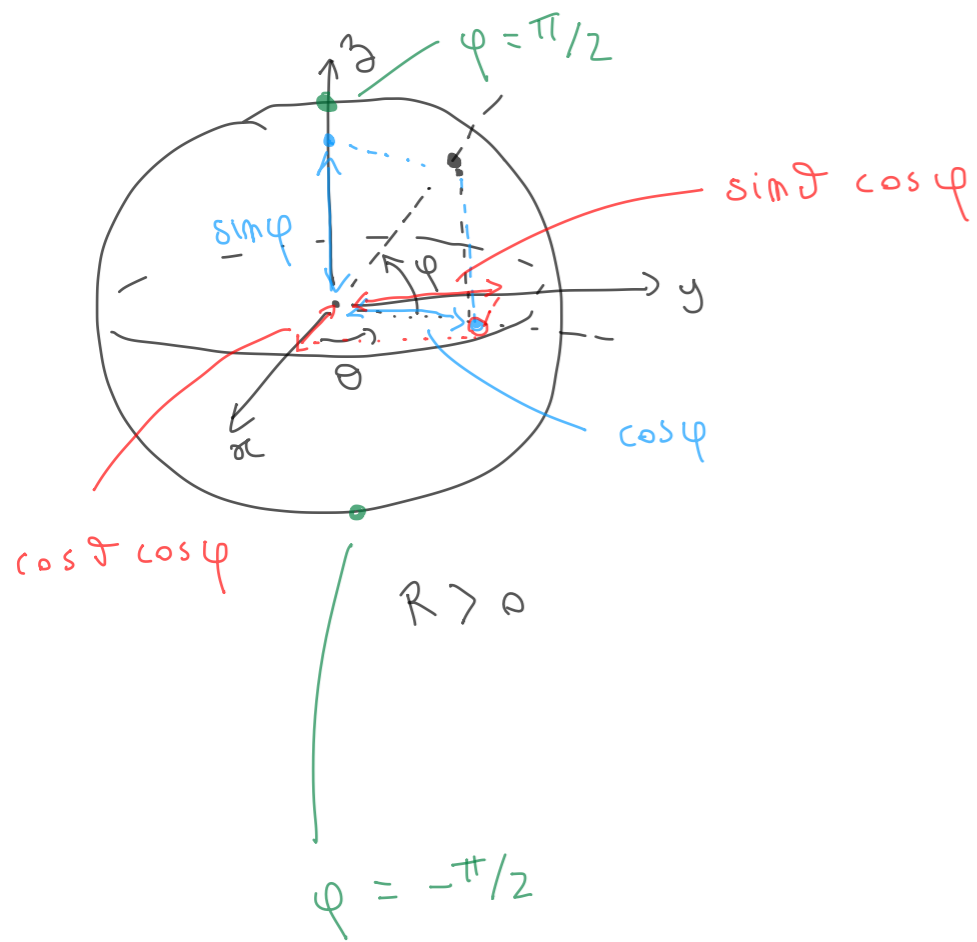
$$\text{Soit } P = f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u+v \end{pmatrix} \rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -v+u \end{pmatrix} \rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Puis } \vec{m}_P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$





$$f: \begin{matrix} \mathbb{R}^2 \\ (\theta, \varphi) \\ u \quad v \end{matrix} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \begin{pmatrix} R \cos \theta \cdot \cos \varphi \\ R \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ R \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$[0, 2\pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Tangentos:

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta}$$

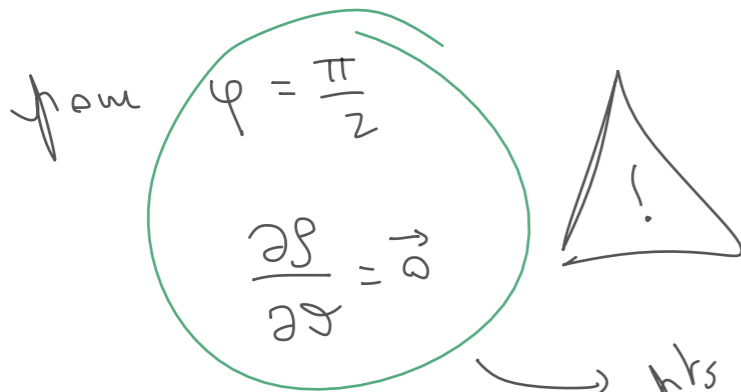
$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -R \sin \theta \cos \varphi \\ R \cos \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -R \cos \theta \sin \varphi \\ -R \sin \theta \sin \varphi \\ R \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$\neq \vec{0}!$

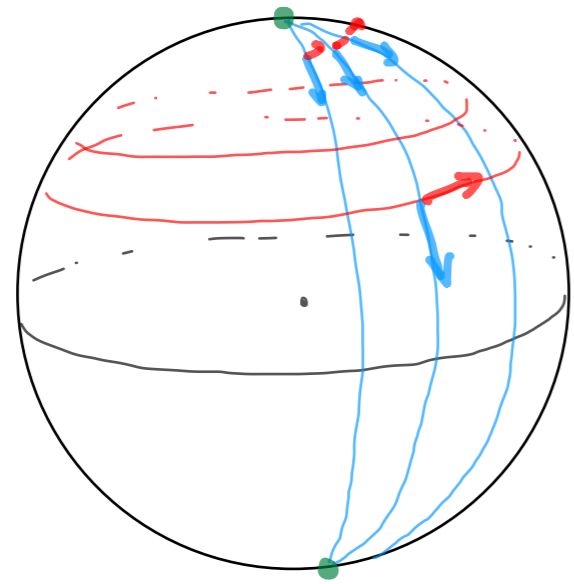
$\forall \varphi \neq \pm \frac{\pi}{2}$

fibres !



\rightarrow pts non réguliers (singuliers...)

singularitēs ...



5.56	+740.21	-
3.24	+122.56	-
9.62	+140.04	-
.36	+180.98	-
.56	+740.21	-
.24	+122.56	-
.62	+140.04	-
.36	+180.98	-
.56	+740.21	-

COURBURE

« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - GÉOMÉTRIE DES SURFACES

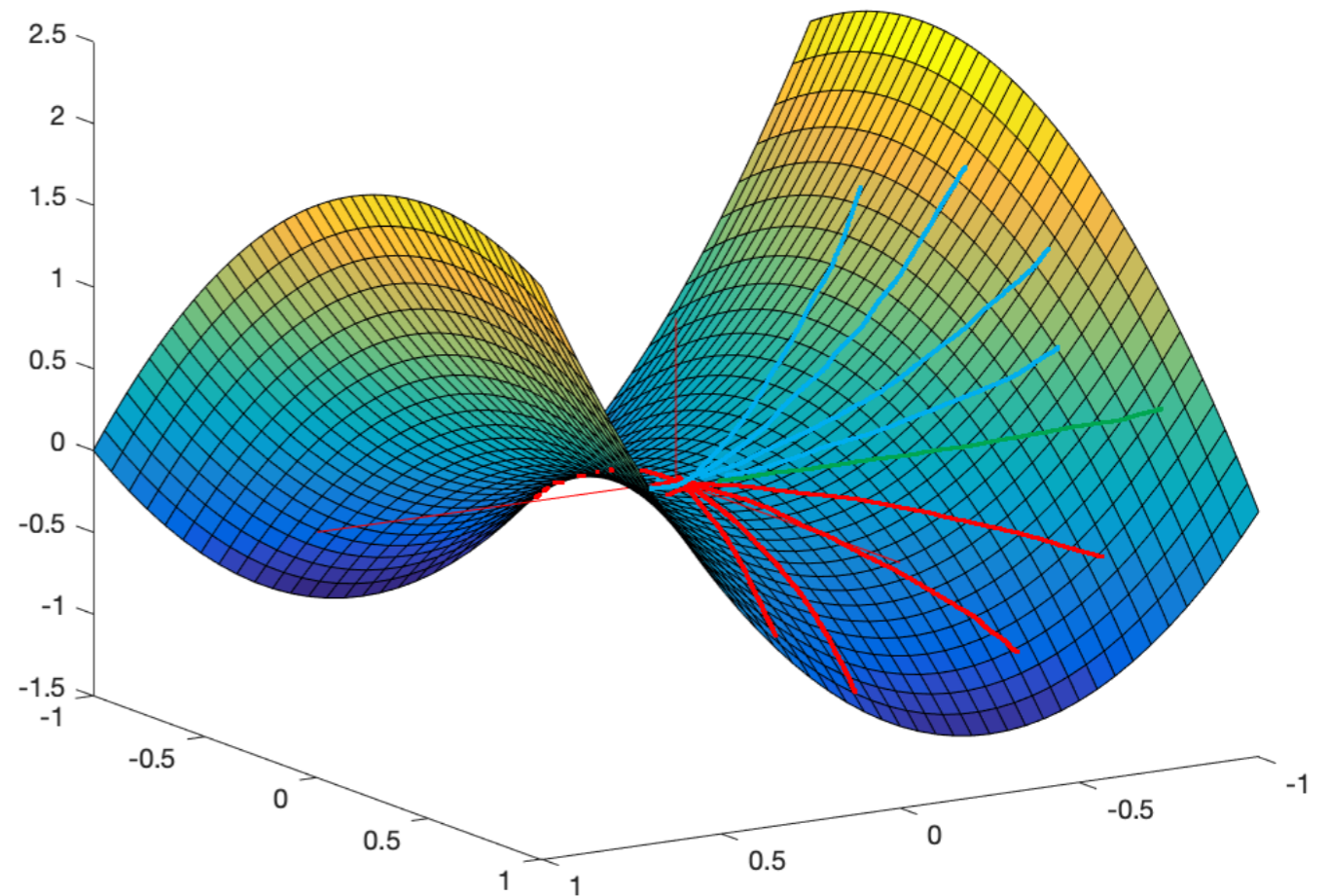
$$f: (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \\ 2u^2 - v^2 + uv \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit } P = f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u+v \end{pmatrix} \rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

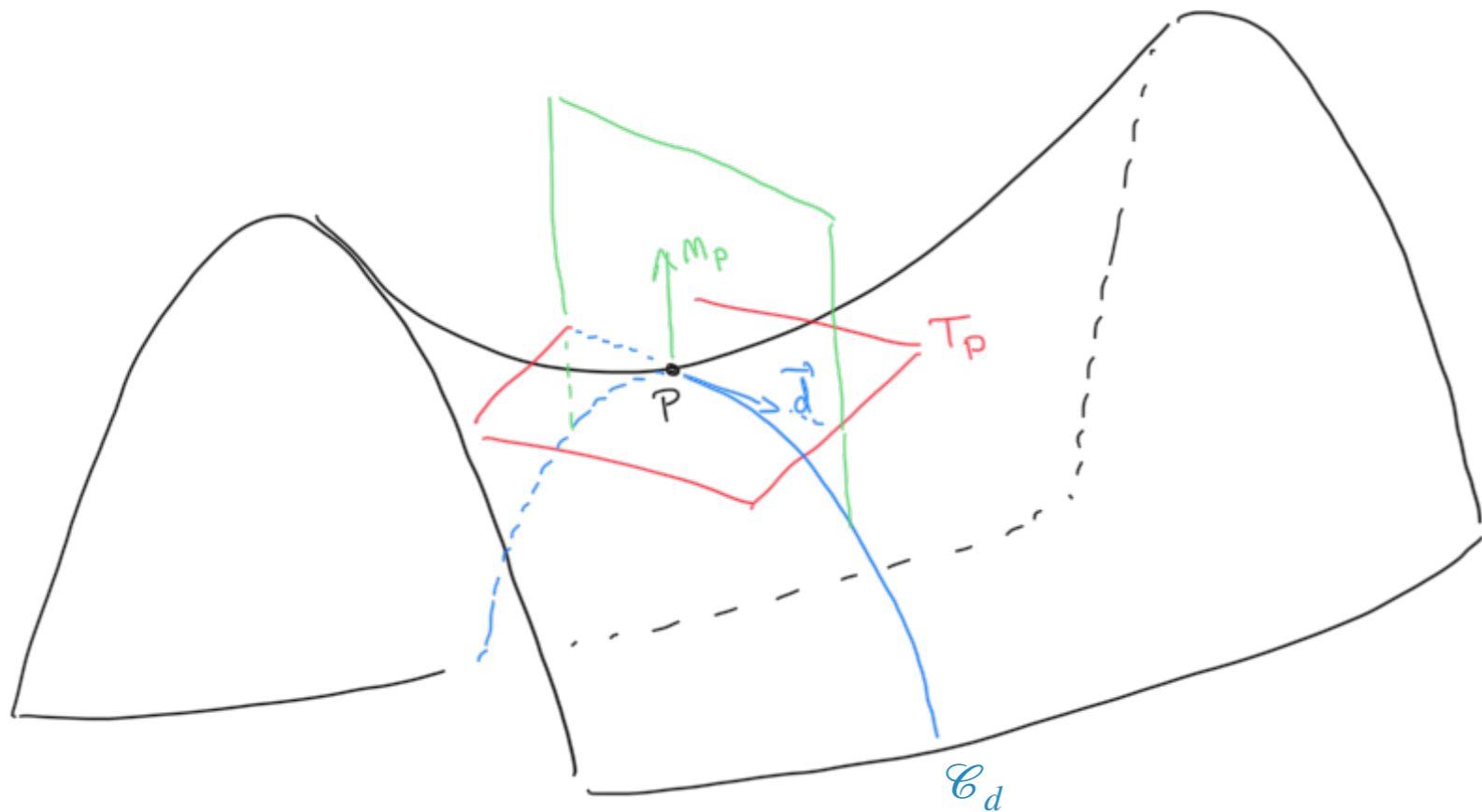
$$\frac{\partial f}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -v+u \end{pmatrix} \rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Puis } \vec{m}_P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Pas une mais des courbures
(selon direction)

COURBURE NORMALE



Courbure normale dans la direction \vec{d} :

$$k_{\vec{d}}$$

$$k_{\vec{d}}$$



Dérivées secondes de f

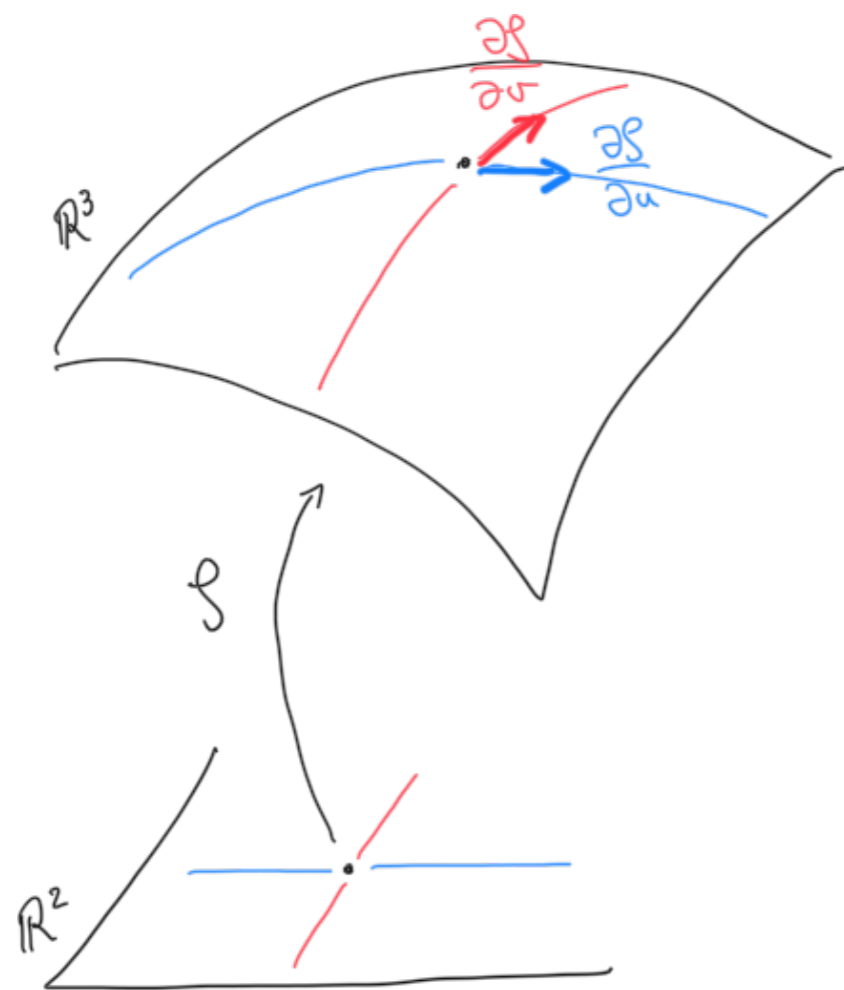
renormalisée par

Dérivées premières de f

Deuxième forme fondamentale

Première forme fondamentale

PREMIÈRE FORME FONDAMENTALE



Première forme fondamentale au point P :

$$I_P = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

$$E = \left\langle \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial u}, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial u} \right\rangle = \left\| \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial u} \right\|^2$$

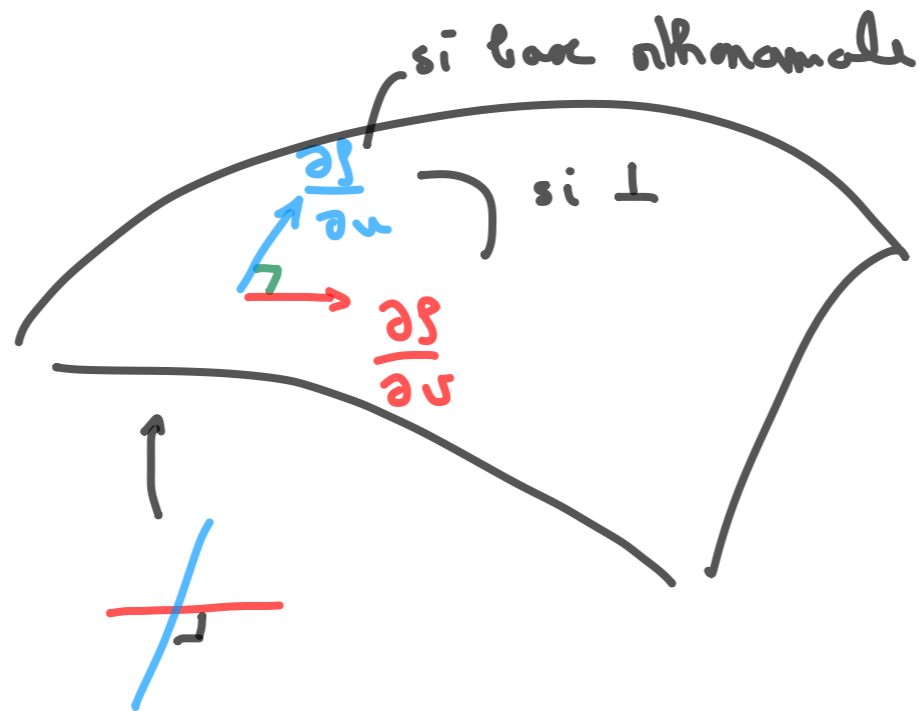
$$F = \left\langle \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial u}, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial v} \right\rangle$$

$$G = \left\langle \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial v}, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial v} \right\rangle = \left\| \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial v} \right\|^2$$



Tenseur métrique de la surface

si f univoie



$$I_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

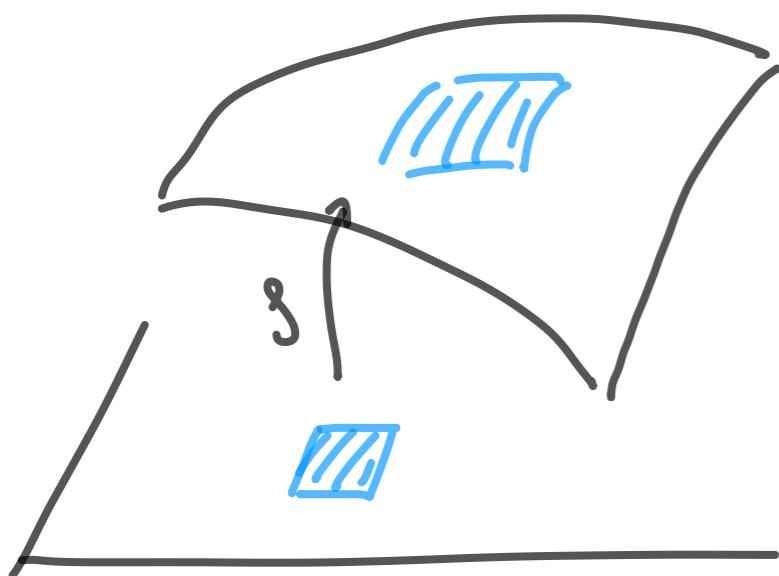
$\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = 0$

$I_p \rightarrow$ mesure "l'écart" entre

base $(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v})$
et |
base orthogonale

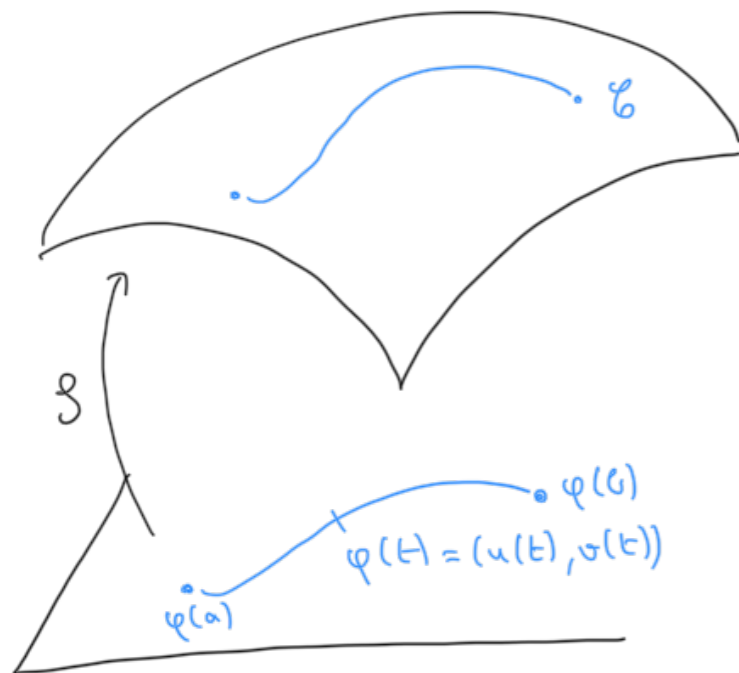
✓
 $I_p = I$

mesure la
distorsion



PREMIÈRE FORME FONDAMENTALE

Surfaces



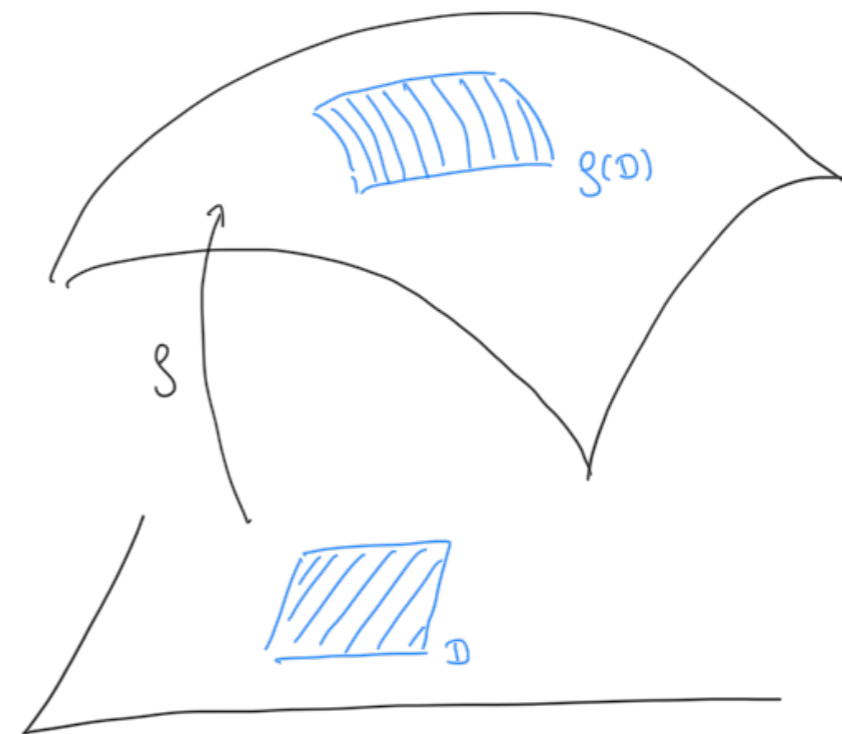
f « déforme »
les longueurs



I_P mesure cette
déformation

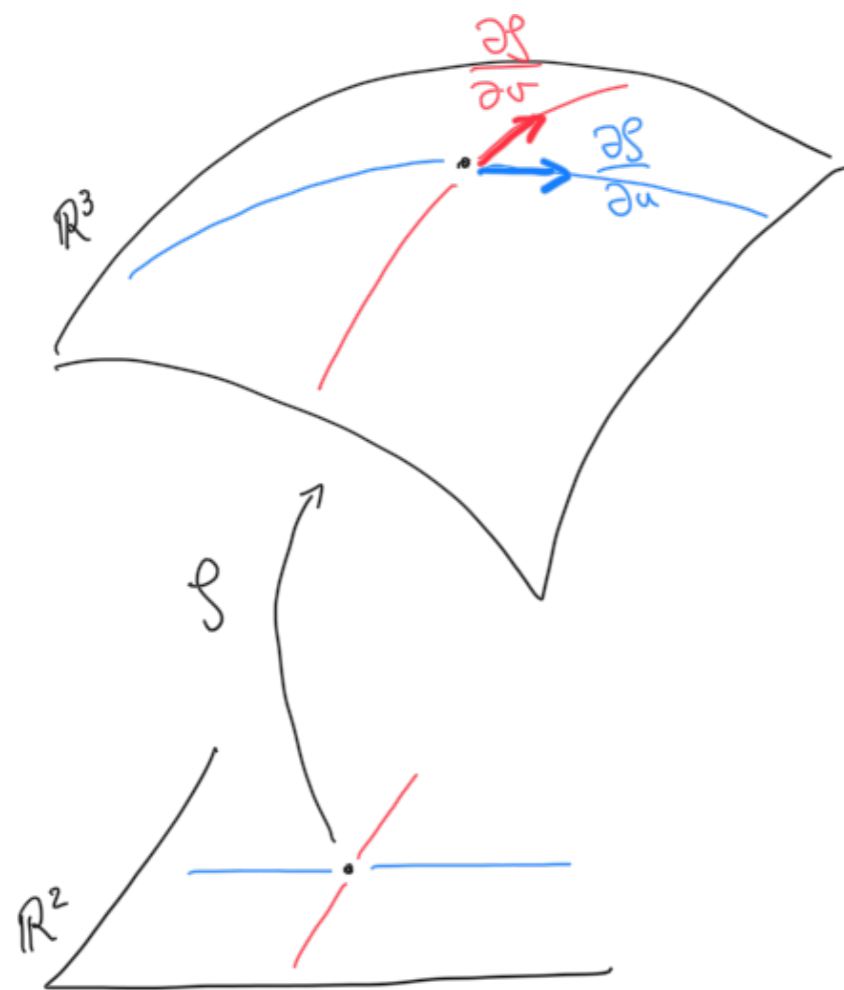
$$l(\mathcal{C}) = \int_a^b \sqrt{((u'(t), v'(t)) * I_P * (u'(t), v'(t))^t)} dt$$

Aires



$$\text{Aire}(f(D)) = \iint_D \sqrt{\det(I_P)} du dv$$

DEUXIÈME FORME FONDAMENTALE



Deuxième forme fondamentale au point P :

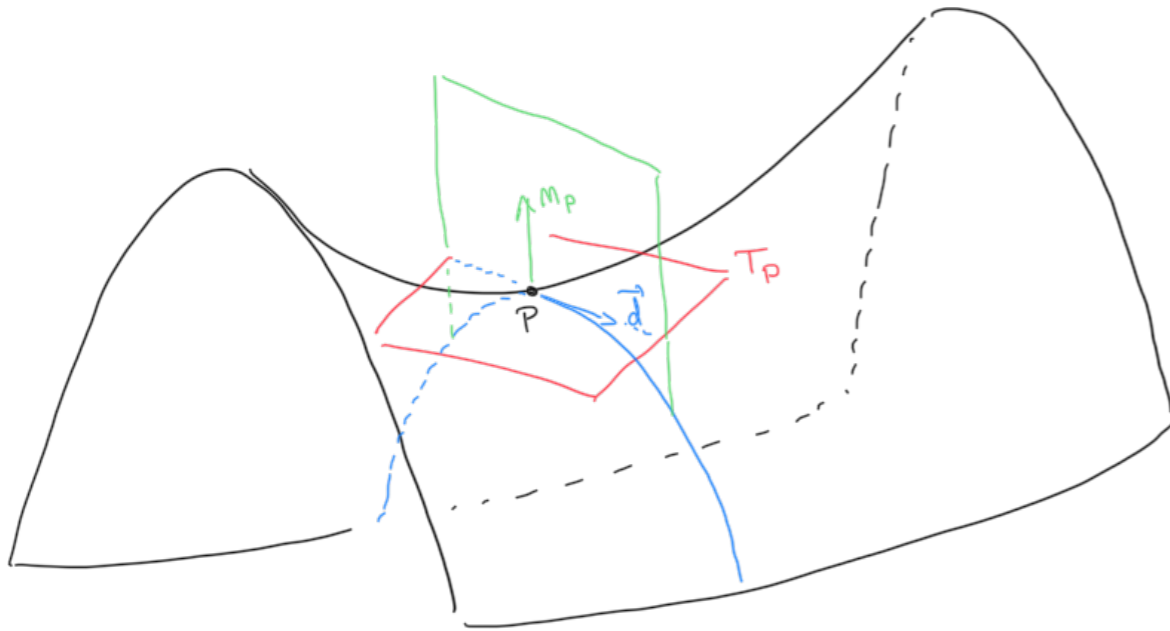
$$II_P = \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix}$$

$$l = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}, \vec{n}_P \right\rangle$$

$$m = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}, \vec{n}_P \right\rangle$$

$$n = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}, \vec{n}_P \right\rangle$$

COURBURE



La courbure normale varie comme un polynôme de degré 2, en fonction de d :

$$k_{\vec{d}} = \vec{d}^t \cdot \kappa_P \cdot \vec{d}$$

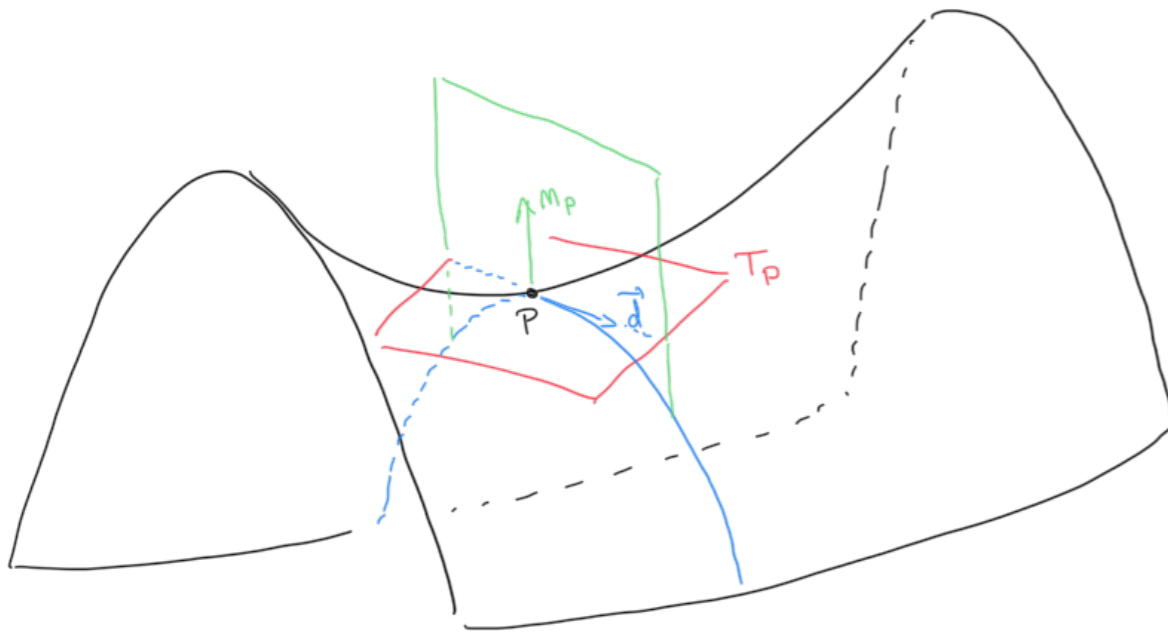
exactement

Tenseur de courbure au point P

$$\kappa_P = I_P^{-1} \times II_P$$

Dans le repère $(P, \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v})$ du plan tangent

COURBURE(S)



$$\kappa_P = I_P^{-1} \times II_P$$

- ▶ Matrice 2x2 symétrique
- ▶ Donc diagonalisable en base orthonormale

- ▶ Vecteurs propres : \vec{d}_1, \vec{d}_2 - **directions principales**
- ▶ Valeurs propres associées : $\vec{\kappa}_1, \vec{\kappa}_2$ - **courbures principales**
 - $\kappa_i > 0$: convexe selon \vec{d}_i
 - $\kappa_i = 0$: plat selon \vec{d}_i
 - $\kappa_i < 0$: concave selon \vec{d}_i

Extréma des courbures

Dans la base d_1, d_2 (vect. propres)

\hookrightarrow K_p devient : $\begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix}$

$$R_{\vec{d}} = \vec{d}^t \cdot K_p \cdot \vec{d} = \vec{d}^t \cdot \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix} \cdot \vec{d} = K_1 x^2 + K_2 y^2$$

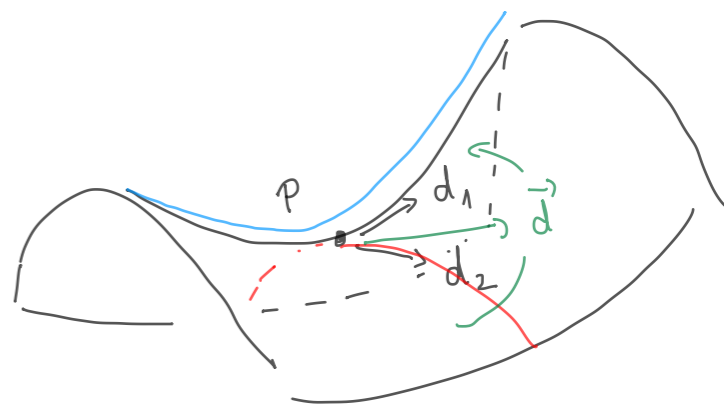
$$\vec{d} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$R_{\vec{d}} = \underbrace{K_1}_{>0} x^2 + \underbrace{K_2}_{<0} y^2$$

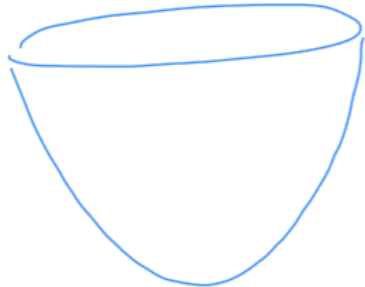
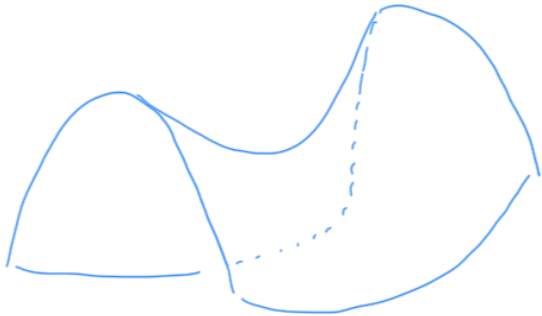
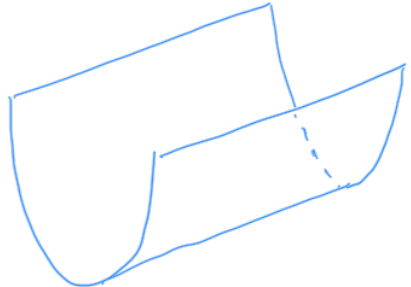
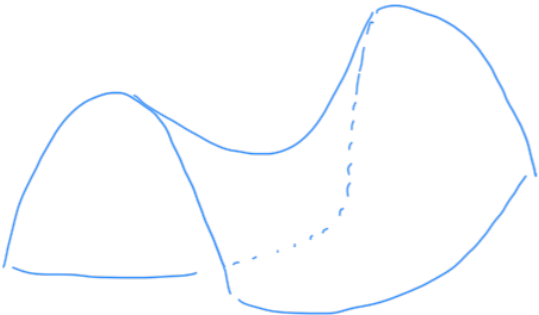
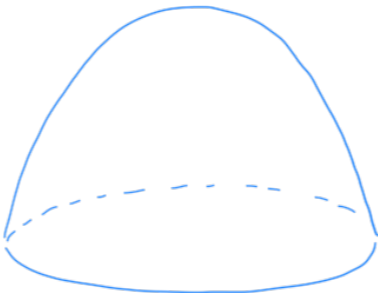
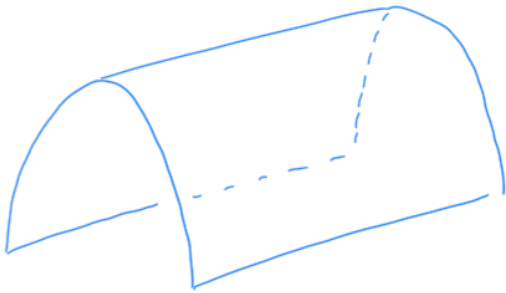
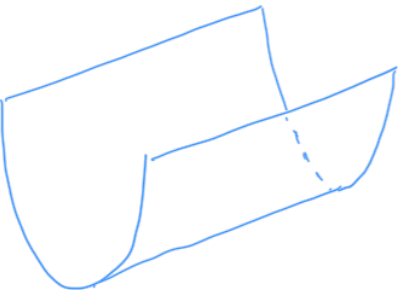
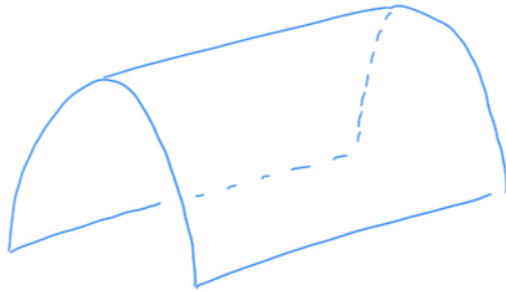

$$K_1 > 0$$

$$K_2 < 0$$

\hookrightarrow



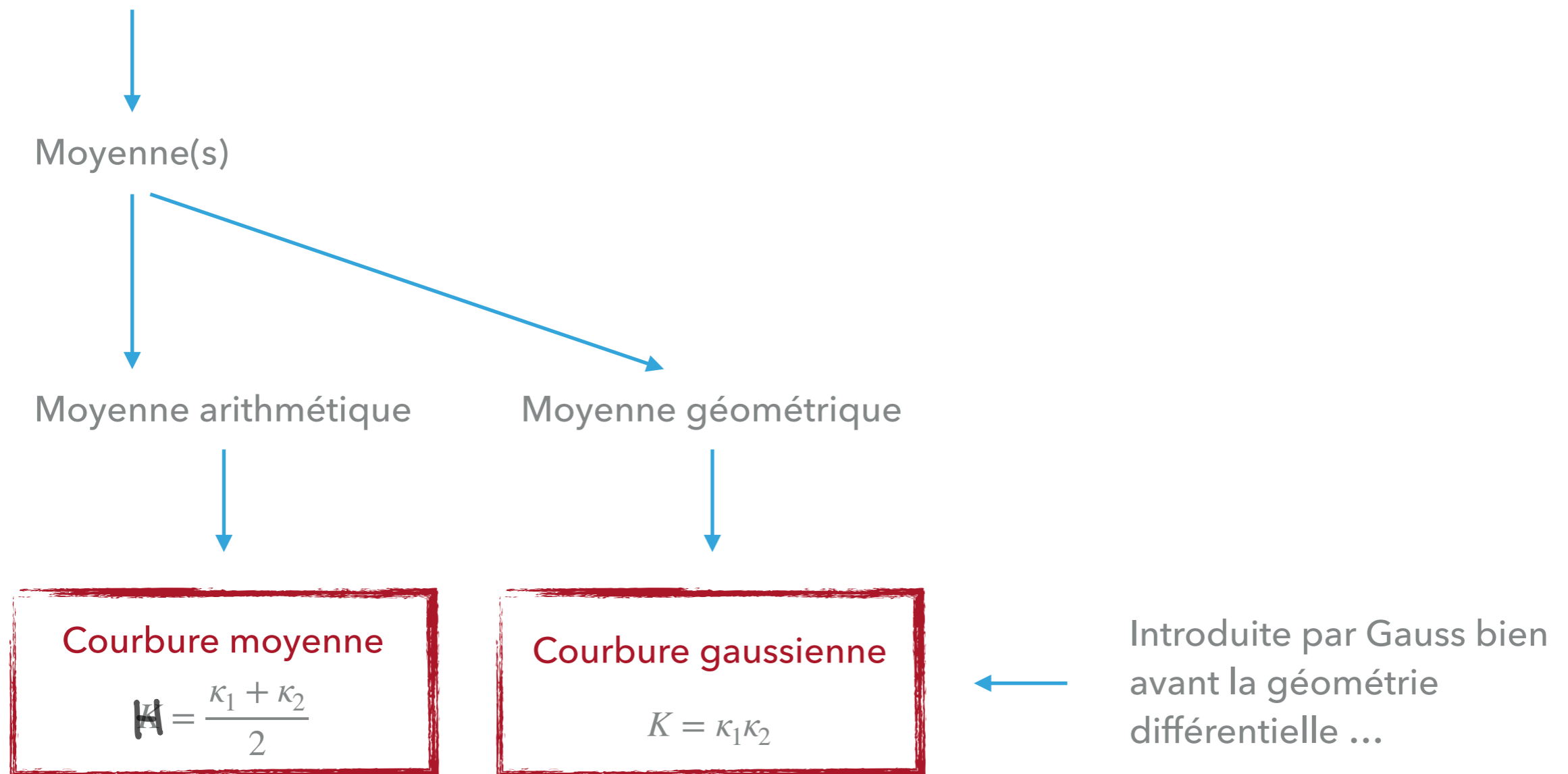
COURBURE(S)

$\begin{matrix} \vec{\kappa}_1 \\ \vec{\kappa}_2 \end{matrix}$	> 0	< 0	$= 0$
> 0			
< 0			
$= 0$			

Classification locale

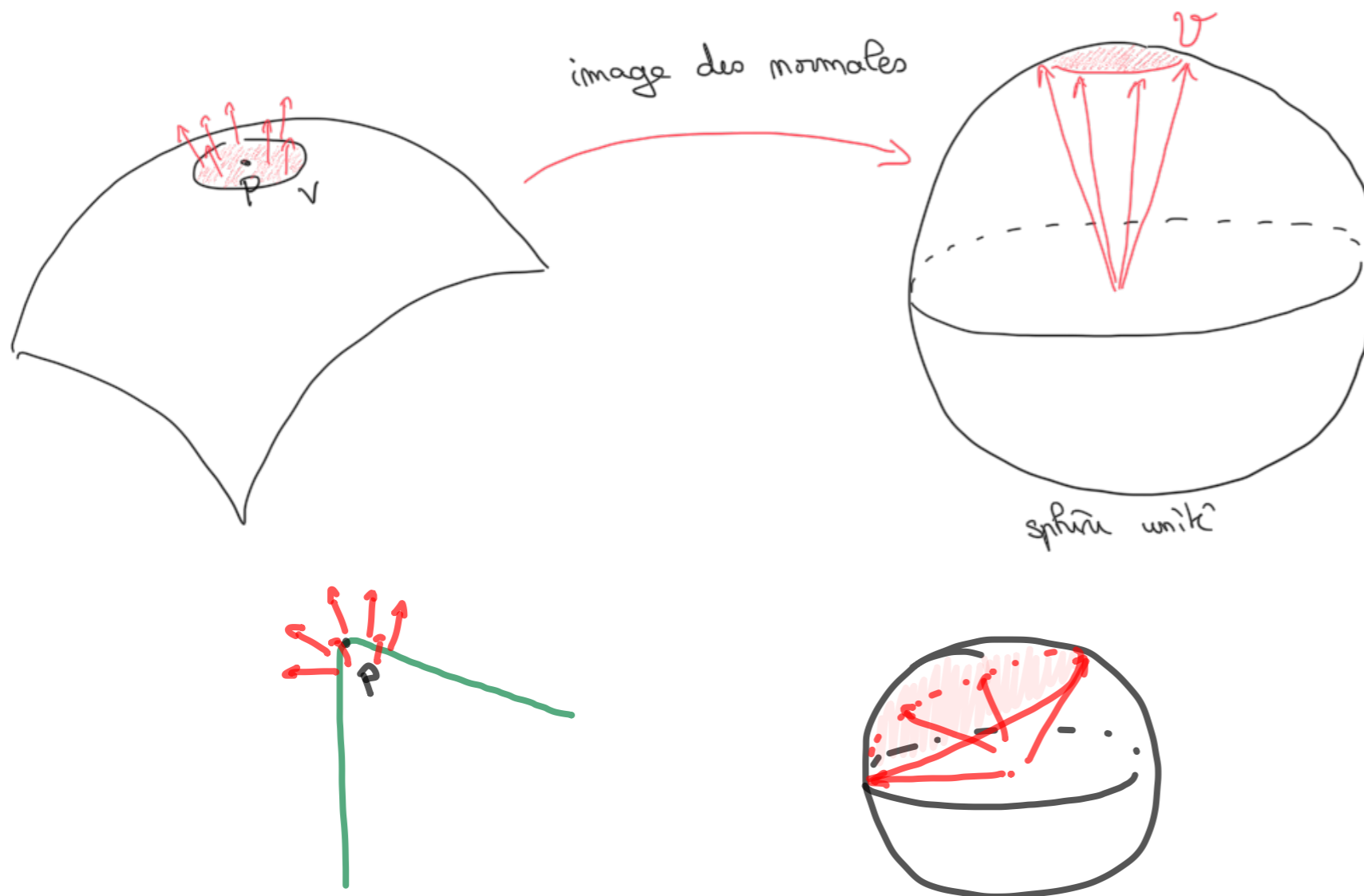
COURBURE(S)

Deux mesures ... difficile à manipuler (ex : carte de courbure, critère algorithmique de courbure ...)



COURBURE GAUSSIENNE

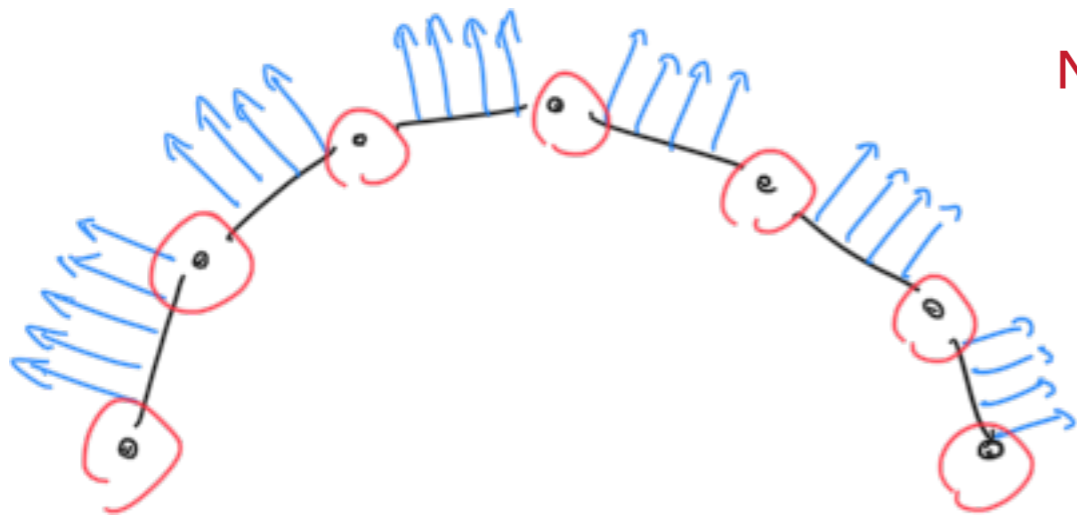
Theorema Egregium de Gauss



$$\lim_{V \rightarrow \{P\}} \frac{\text{Aire}(\mathcal{V})}{\text{Aire}(V)} = \kappa_P$$

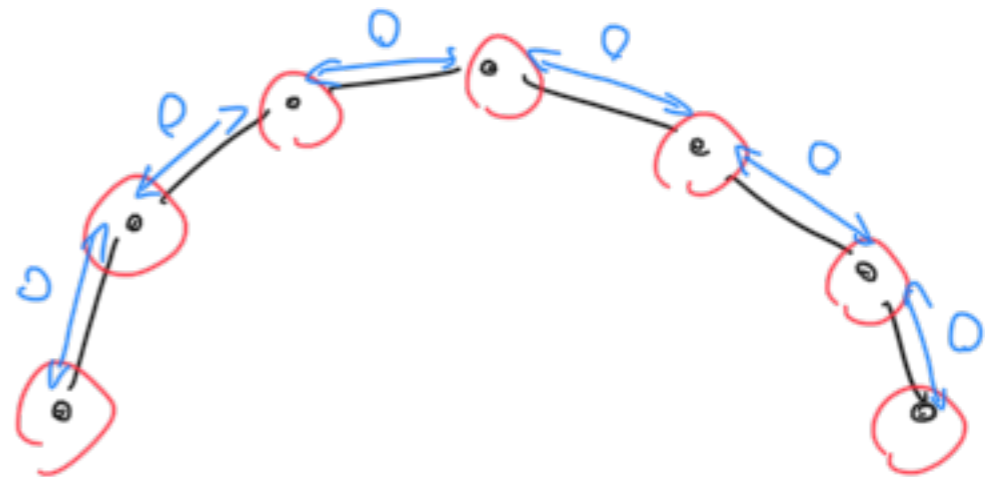
GÉOMÉTRIE DES MAILLAGES

NORMALES/COURBURES D'UN MAILLAGE ?



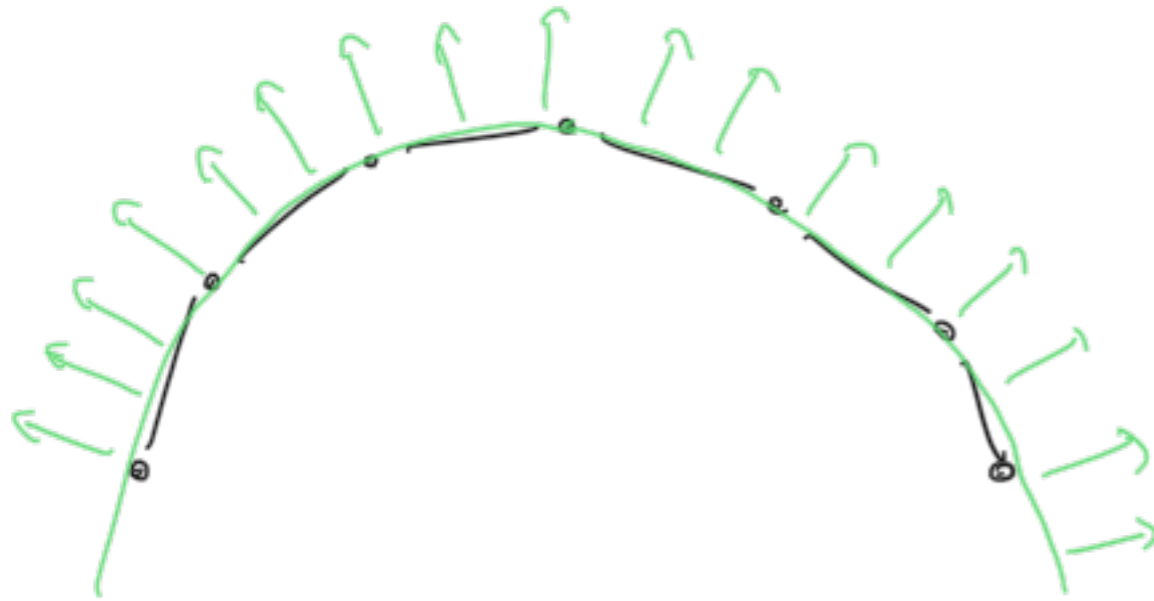
Normales

Non défini



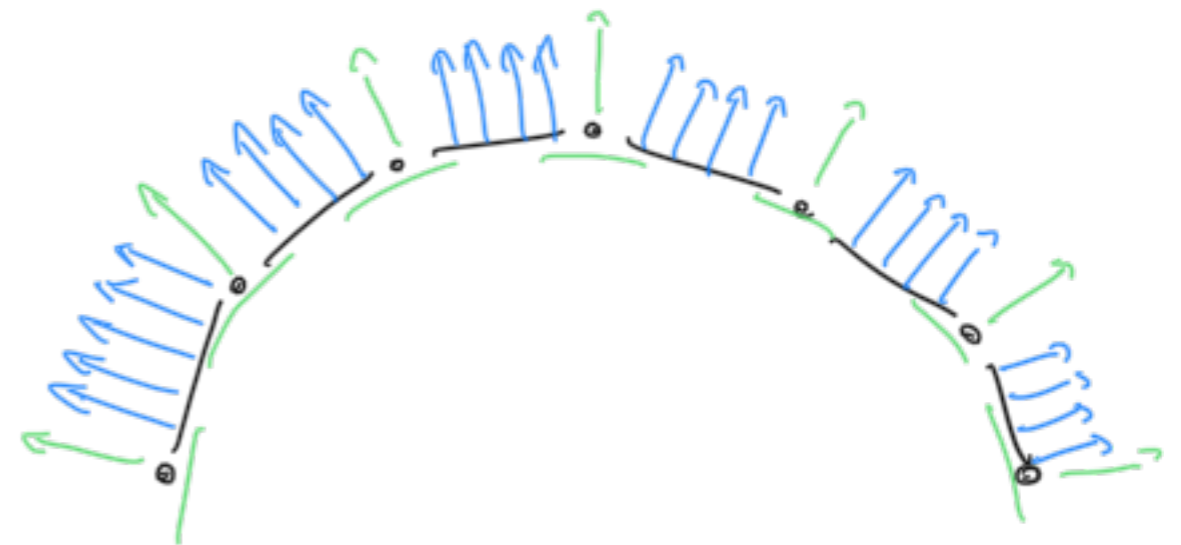
Courbure(s)

NORMALES/COURBURES D'UN MAILLAGE ?



Intuition ...

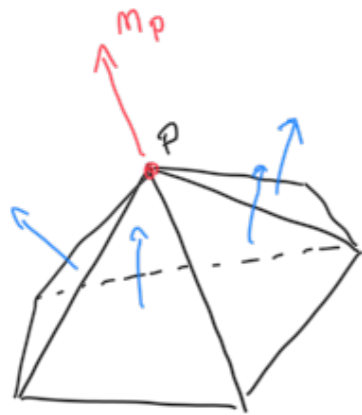
Le maillage est la
discrétisation d'une surface
continue



Pb : calculer des valeurs approchées cohérentes

→ approximations / heuristiques

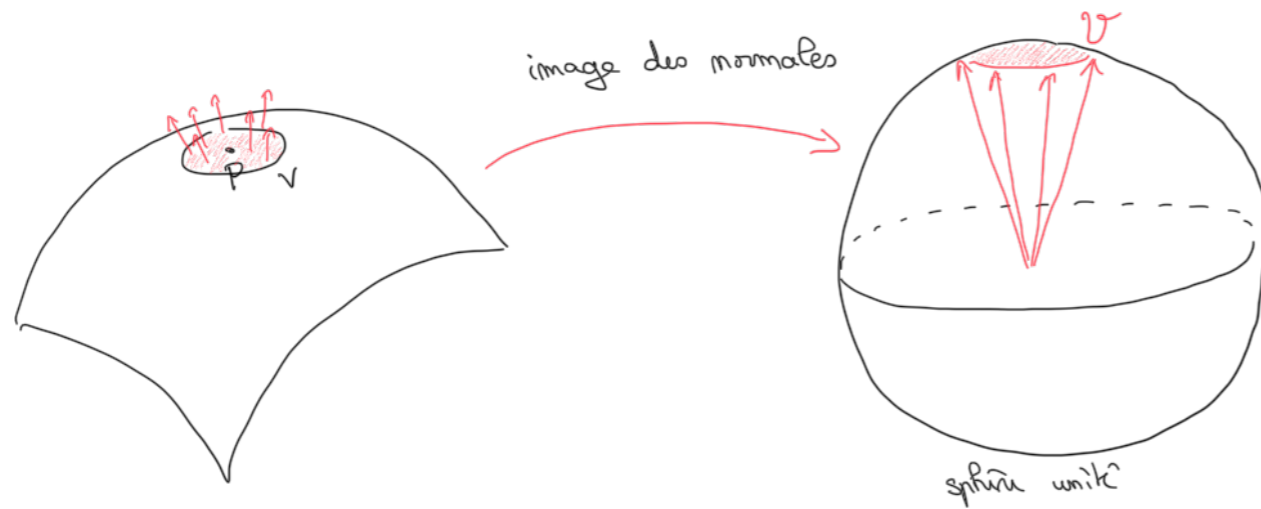
ESTIMATION DES NORMALES



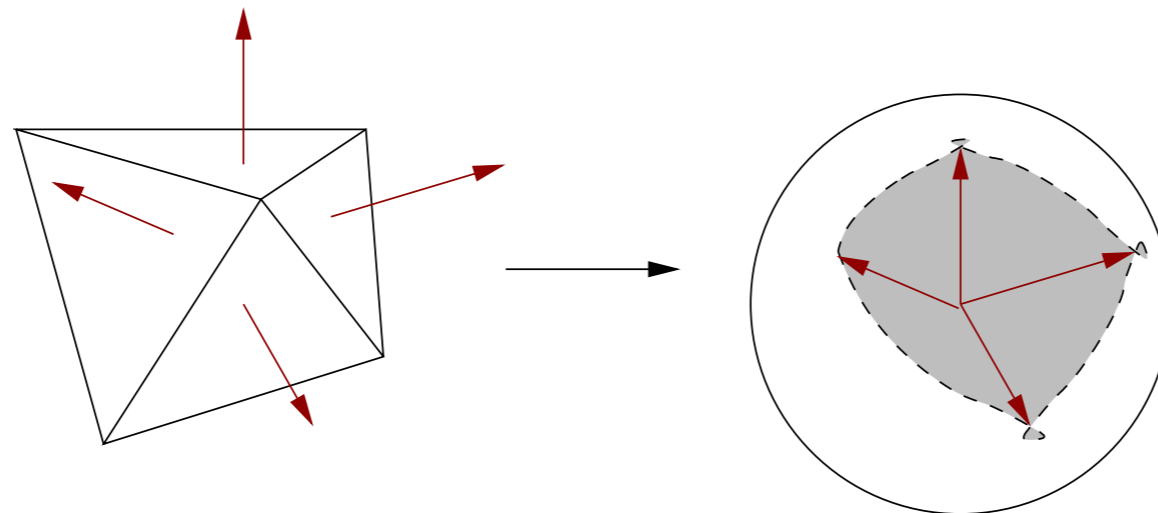
On estime généralement la **normale au point P** comme :

- Moyenne des normales des faces voisines
- Eventuellement pondérée par l'aire des faces

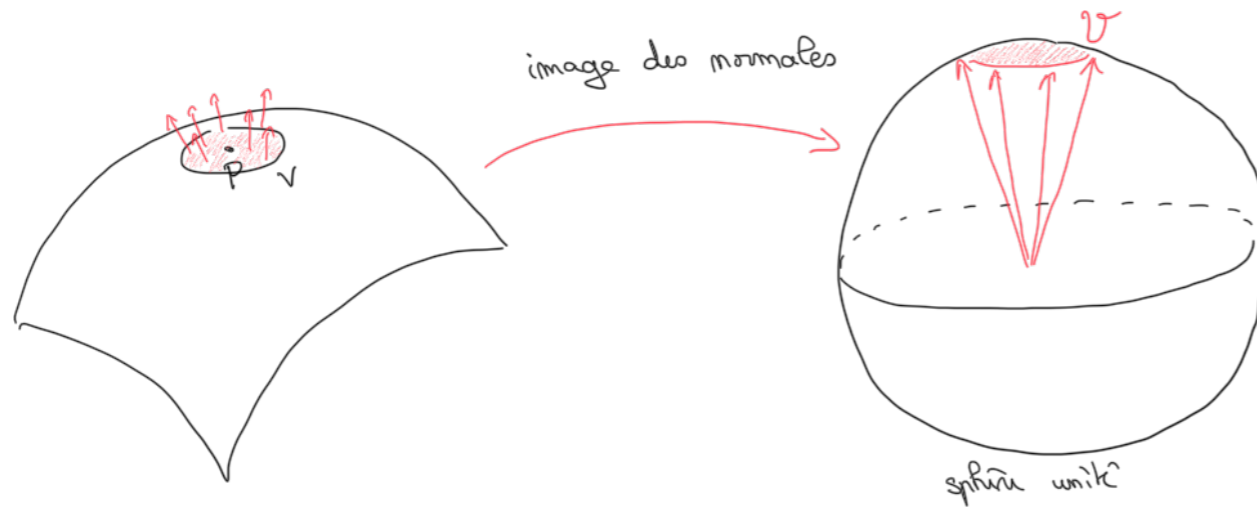
COURBURES : TH. EGREGIUM DE GAUSS ET DÉFAUT ANGULAIRE



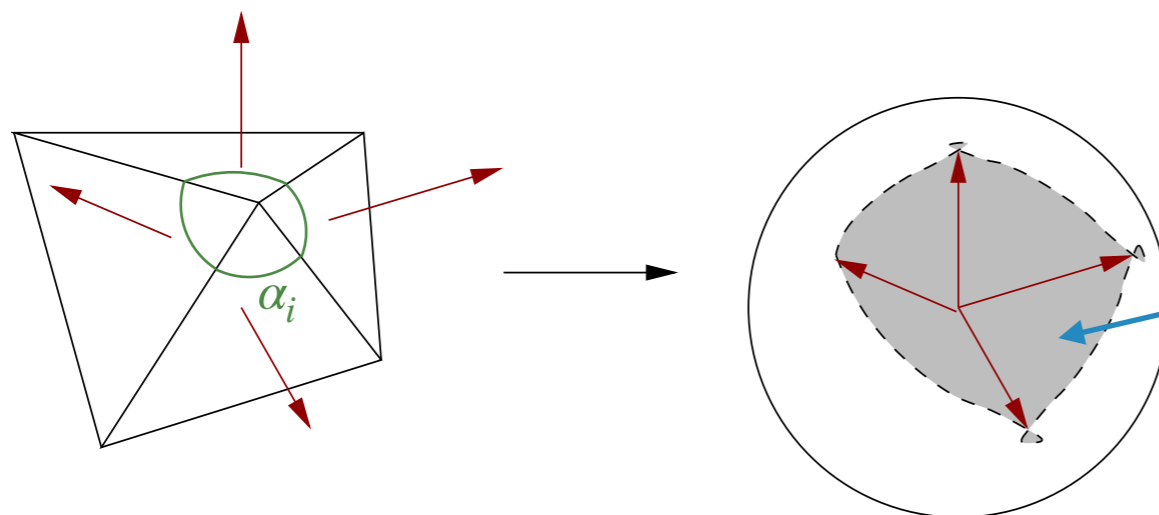
$$\lim_{V \rightarrow \{P\}} \frac{\text{Aire}(\mathcal{V})}{\text{Aire}(V)} = \kappa_P$$



COURBURES : TH. EGREGIUM DE GAUSS ET DÉFAUT ANGULAIRE



$$\lim_{V \rightarrow \{p\}} \frac{\text{Aire}(V')}{\text{Aire}(V)} = \kappa_p$$

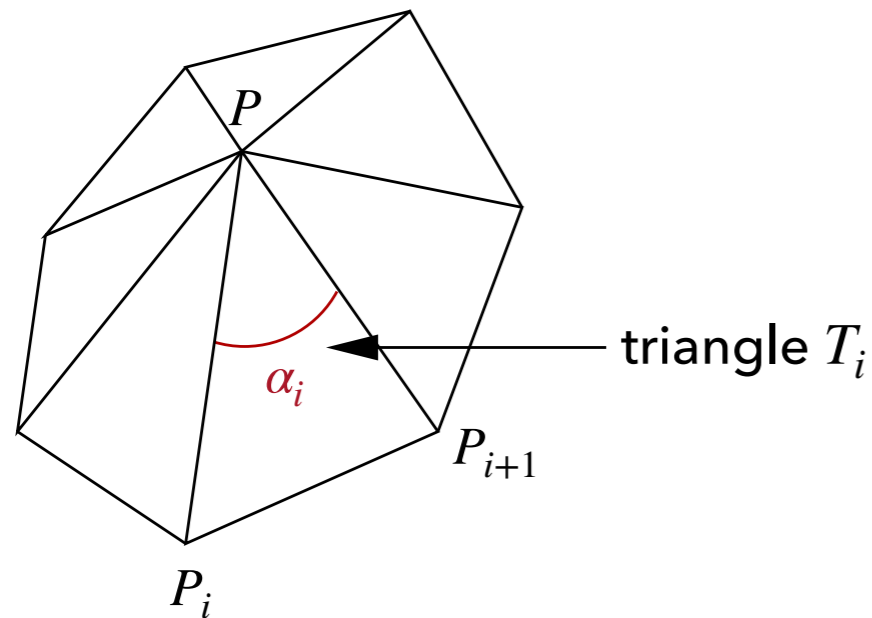


Valeur de cette aire sphérique :

$$2\pi - \sum_i \alpha_i$$

Défaut angulaire

COURBURE GAUSSIENNE « CLASSIQUE » (REGGE)

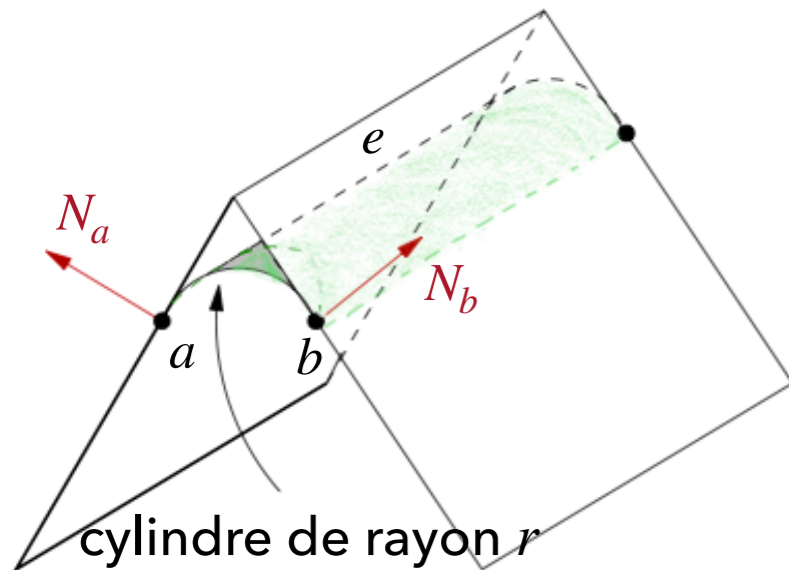


Approximation de la courbure Gaussienne :

$$K_P = \frac{2\pi - \sum_i \alpha_i}{\sum_i \text{Aire}(T_i)} \quad \text{au point } P$$

- ▶ C'est la formule que vous avez implémentée au TP1
- ▶ Peu précise, dépend du maillage
- ▶ Ne converge pas

COURBURE MOYENNE « CLASSIQUE »

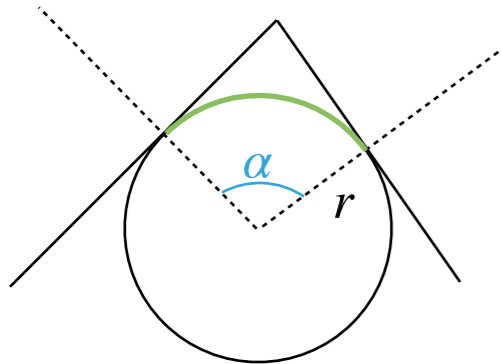


- ▶ Aire de la portion de cylindre :

$$l(e) \cdot \alpha \cdot r$$

- ▶ Intégrale de la courbure moyenne sur cette portion :

$$\frac{1}{2r} \cdot l(e) \cdot \alpha \cdot r = \frac{1}{2} \cdot l(e) \cdot \alpha$$



Approximation de la courbure moyenne :

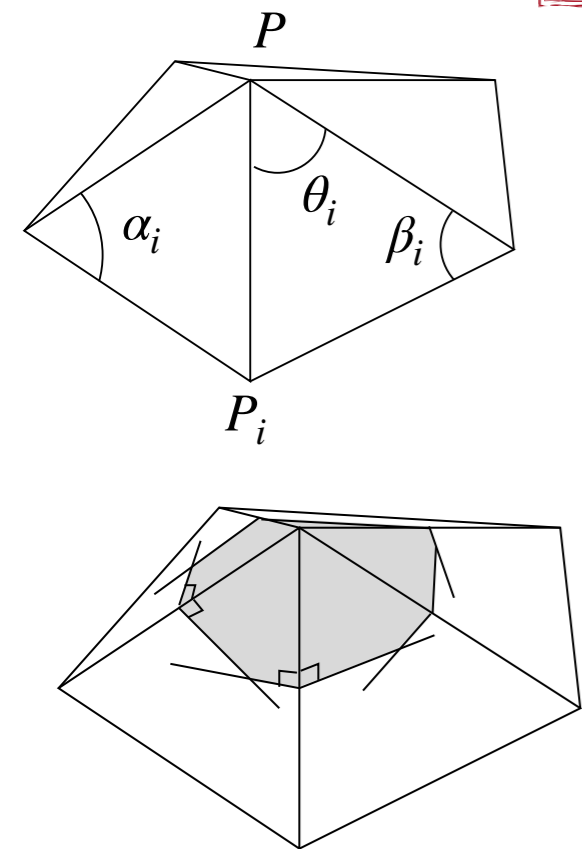
$$H_e = \frac{1}{2} l(e) \cdot \alpha \quad \text{le long de l'arête } e$$

- ▶ Peu précise ...
- ▶ Ne converge pas

APPROXIMATIONS PLUS FINES

On the angular defect of triangulations and the pointwise approximation of curvatures
V. Borrelli, F. Cazals, J.-M. Morvan

Discrete Differential-Geometry Operators for Triangulated 2-Manifolds
M. Meyer, M. Desbrun, P. Schröder, and A. Barr



$$H_P \cdot N_P = \frac{1}{2 \text{Aire}_{\text{mixte}}} \sum_i (\cot \alpha_i + \cot \beta_i) (P - P_i)$$

$$K(P) = \frac{2\pi - \sum_i \theta_i}{\text{Aire}_{\text{mixte}}}$$

La convergence n'est pas garantie :

- dépend de la triangulation
plus elle est régulière, meilleure est la convergence
 - idéal : régulière, valence 6
- sur une triangulation irrégulière, non garantie
 - au mieux, convergence en norme \mathcal{L}_1

AUTRES APPROCHES

On the angular defect of triangulations and the pointwise approximation of curvatures
V. Borrelli, F. Cazals, J.-M. Morvan

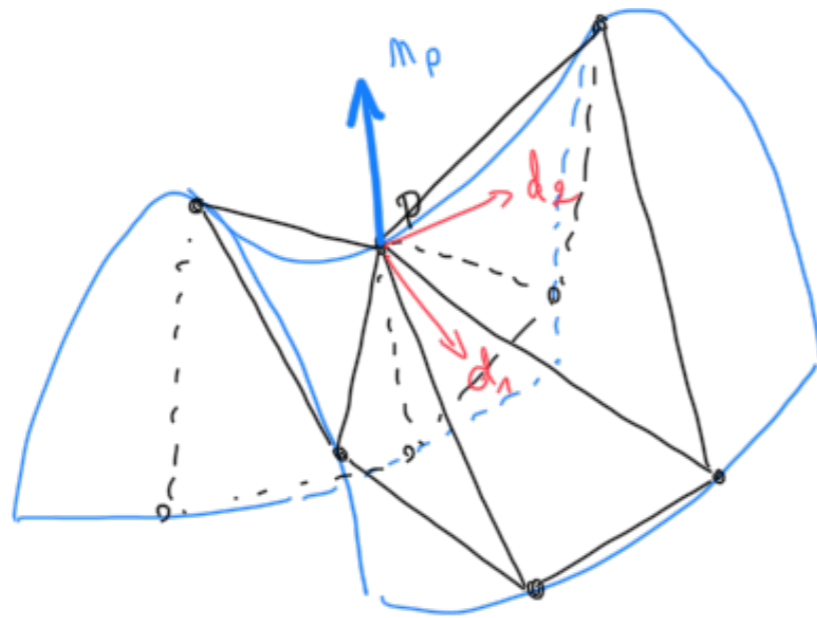
Discrete Differential-Geometry Operators for Triangulated 2-Manifolds
M. Meyer, M. Desbrun, P. Schröder, and A. Barr

Estimating the Tensor of Curvature of a Surface from a Polyhedral Approximation
G. Taubin



Estimation de K_p (tenseur de courbure)

CALCUL VIA UNE SURFACE CONTINUE



Ajuster une surface lisse
(paramétrique ou cartésienne)
au voisinage de P



Calculer normale et courbures
de la surface lisse

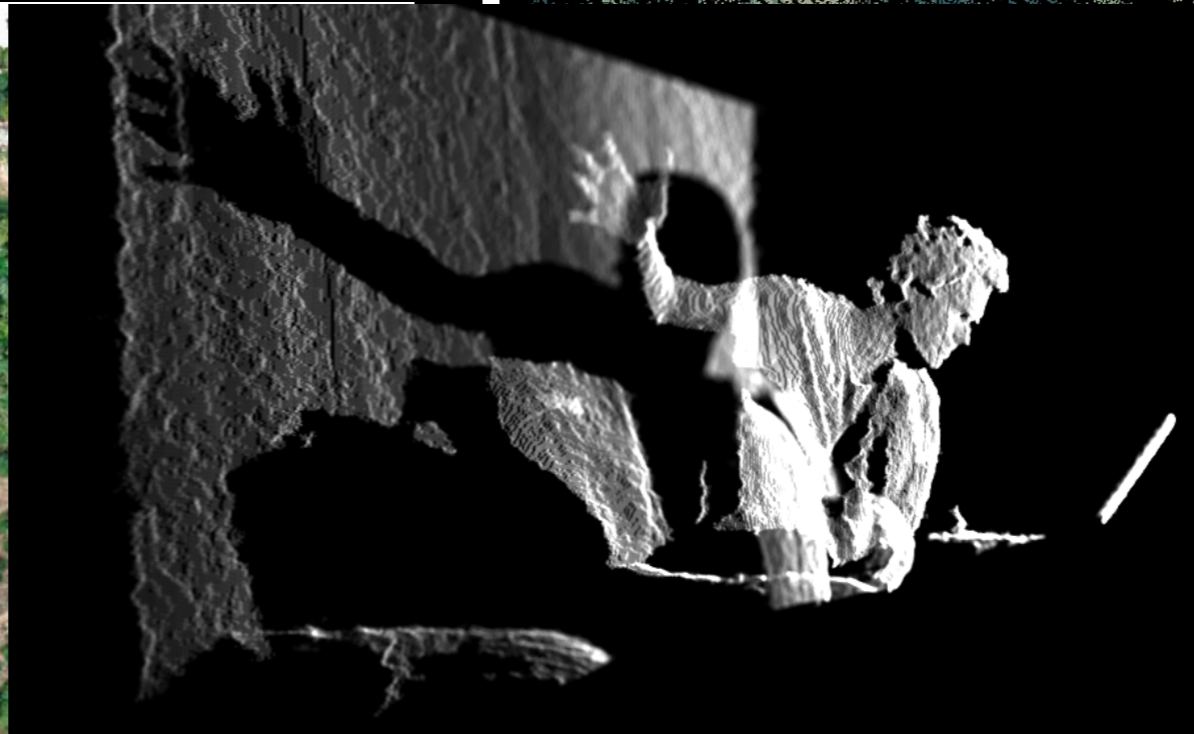
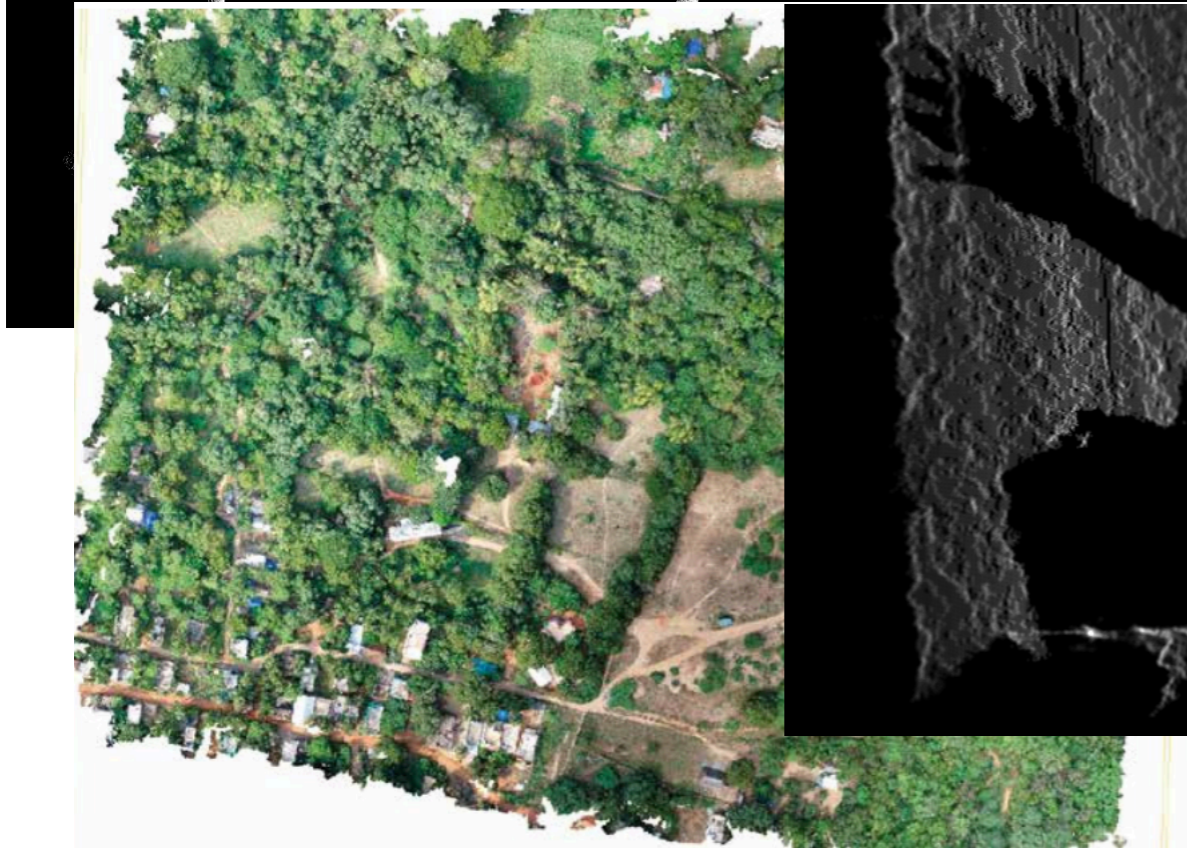
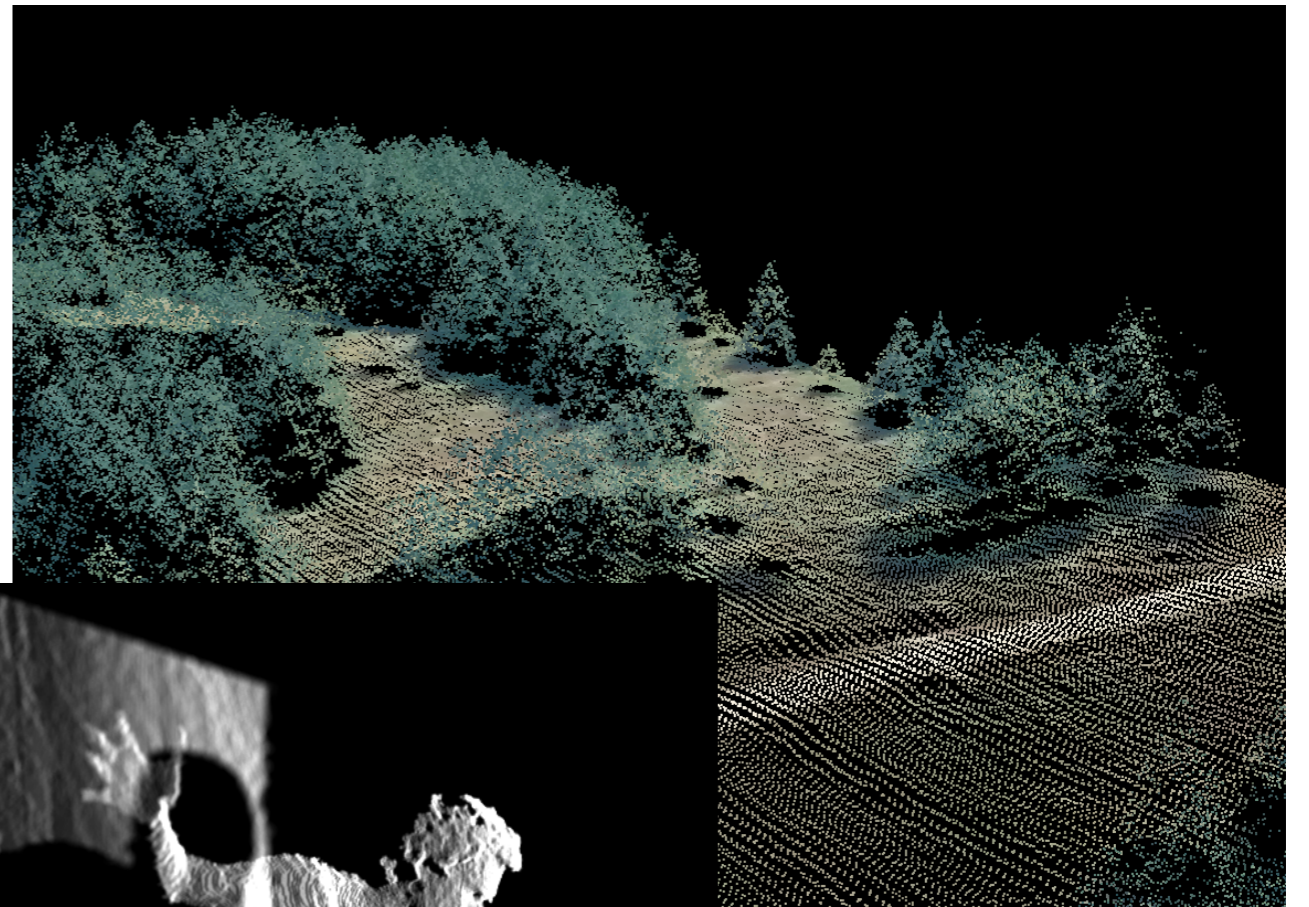
- ▶ Méthode **plus lente** mais **plus stable**
- ▶ La question est alors de bien approcher localement le maillage

GÉOMÉTRIE D'UN NUAGE DE POINTS

GÉOMÉTRIE D'UN NUAGE DE POINTS

Sujet très actif vu le développement des capteurs de numérisation :

- LiDAR
- Caméras temps de vol (Kinect etc. ...)
- Stéréo-photogrammétrie



AR



Kinect

Stéréo-photogrammétrie

UAV Stéréo-photogrammétrie



GÉOMÉTRIE D'UN NUAGE DE POINTS

Sujet très actif vu le développement des capteurs de numérisation :

- LiDAR
- Caméras temps de vol (Kinect etc. ...)
- Stéréo-photogrammétrie

Comment estimer la géométrie locale directement à partir du nuage de points ?



Approches par
ajustement de surfaces
lisses

Approches par étude de la
distribution des points

- Analyse en composantes
principales

→ Cf. TP

VARIÉTÉS

VARIÉTÉS (MANIFOLDS)

Qu'est-ce qu'une surface dans \mathbb{R}^3 ?



(2)-variétés :

formalisation très générale

- Maillages
- Surfaces paramétriques
- Surfaces implicites



Exemples de surfaces,
modèles surfaciques ...

Une variété de dimension n (dans \mathbb{R}^m) est un sous-ensemble $M \subseteq \mathbb{R}^m$ tel que tout point de M a un voisinage homéomorphe à un sous-ensemble de \mathbb{R}^n .

$f : E \rightarrow F$ **homéomorphisme** si f bijective, continue,
d'inverse continue (déformation continue).

VARIÉTÉS (MANIFOLDS)

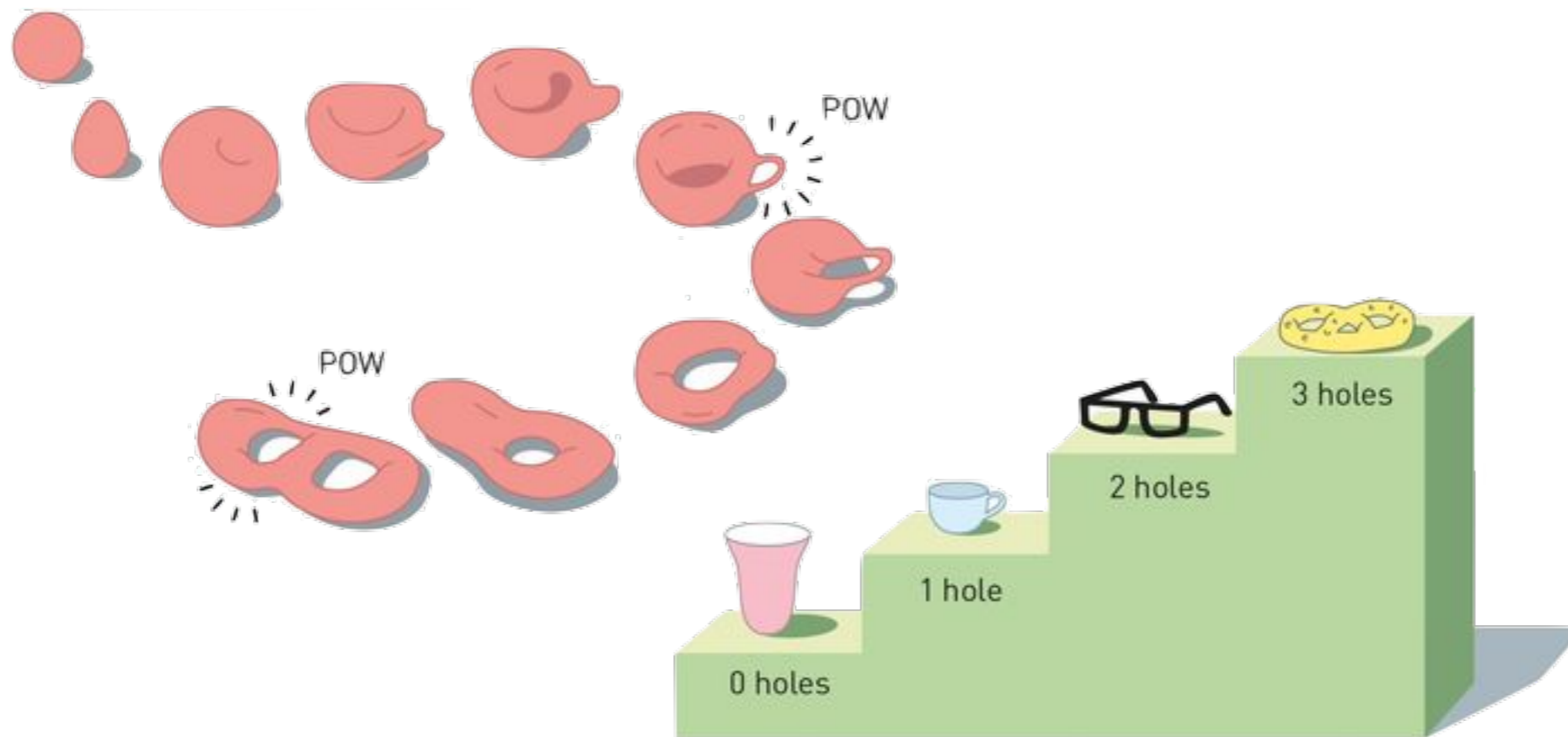
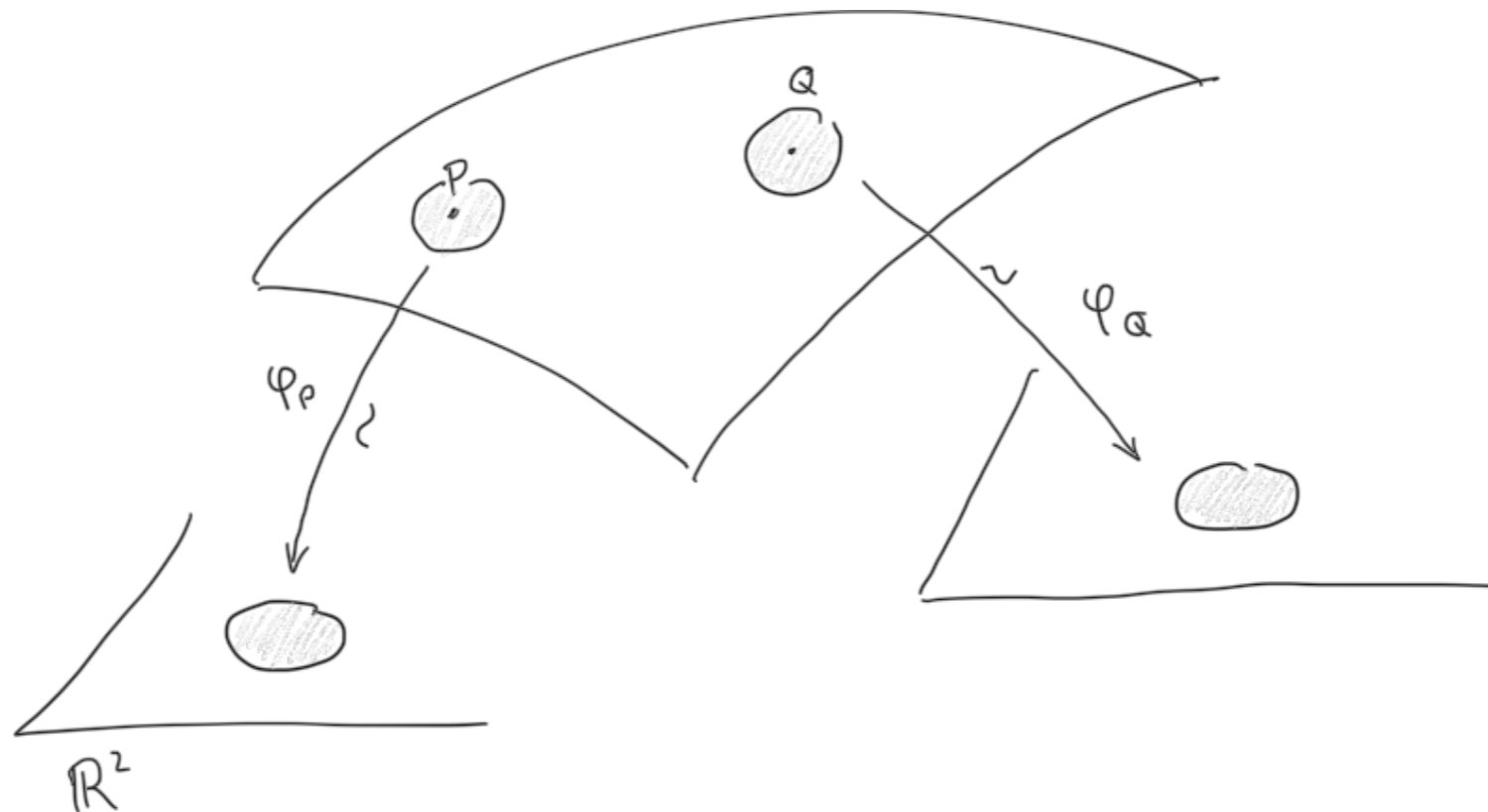


Illustration: ©Johan Jarneslad/The Royal Swedish Academy of Sciences

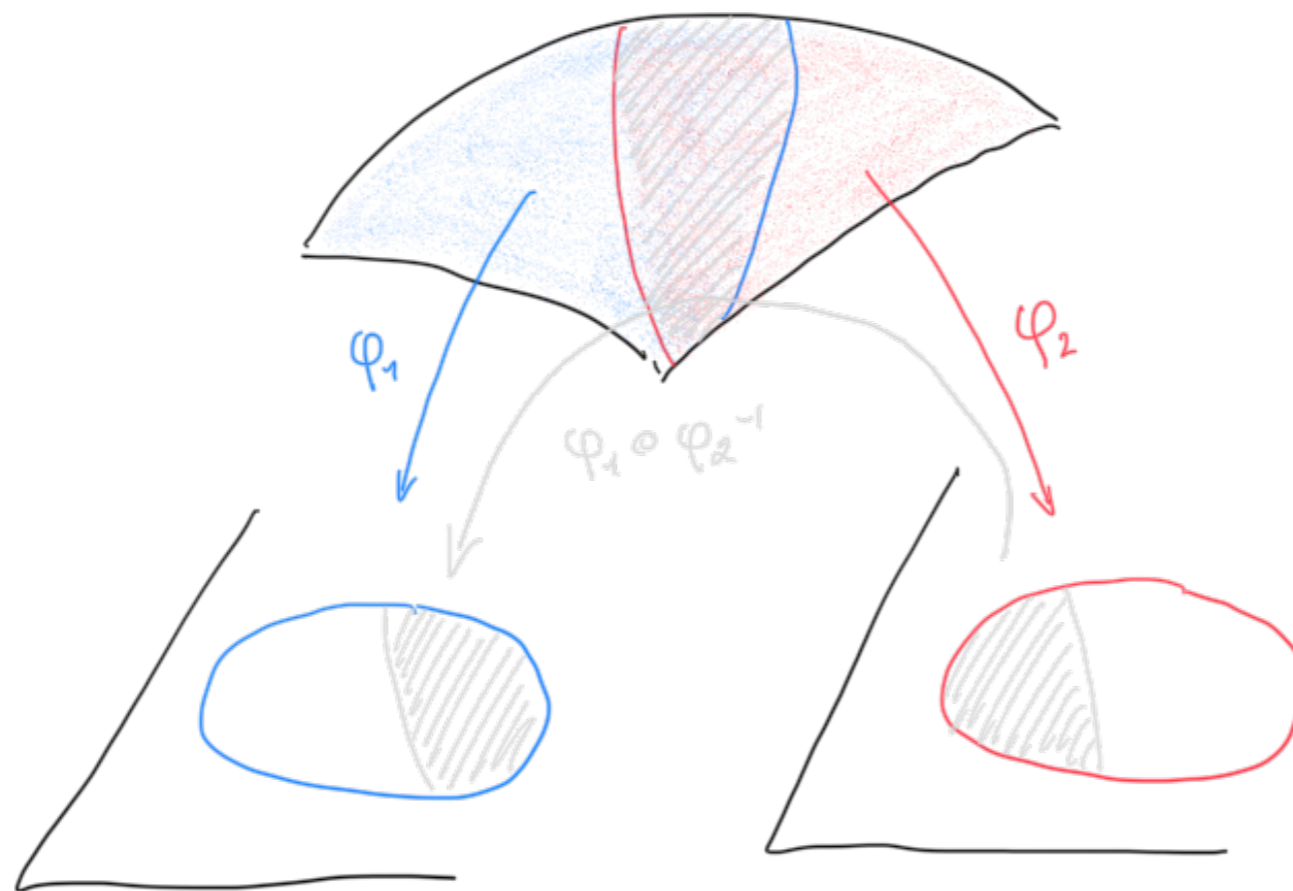
$f : E \rightarrow F$ **homéomorphisme** si f bijective, continue, d'inverse continue (déformation continue).

VARIÉTÉS (MANIFOLDS)



Une variété (manifold) de dimension n (dans \mathbb{R}^m) est un sous-ensemble $M \subseteq \mathbb{R}^m$ tel que tout point de M a un voisinage homéomorphisme à un sous-ensemble de \mathbb{R}^d .

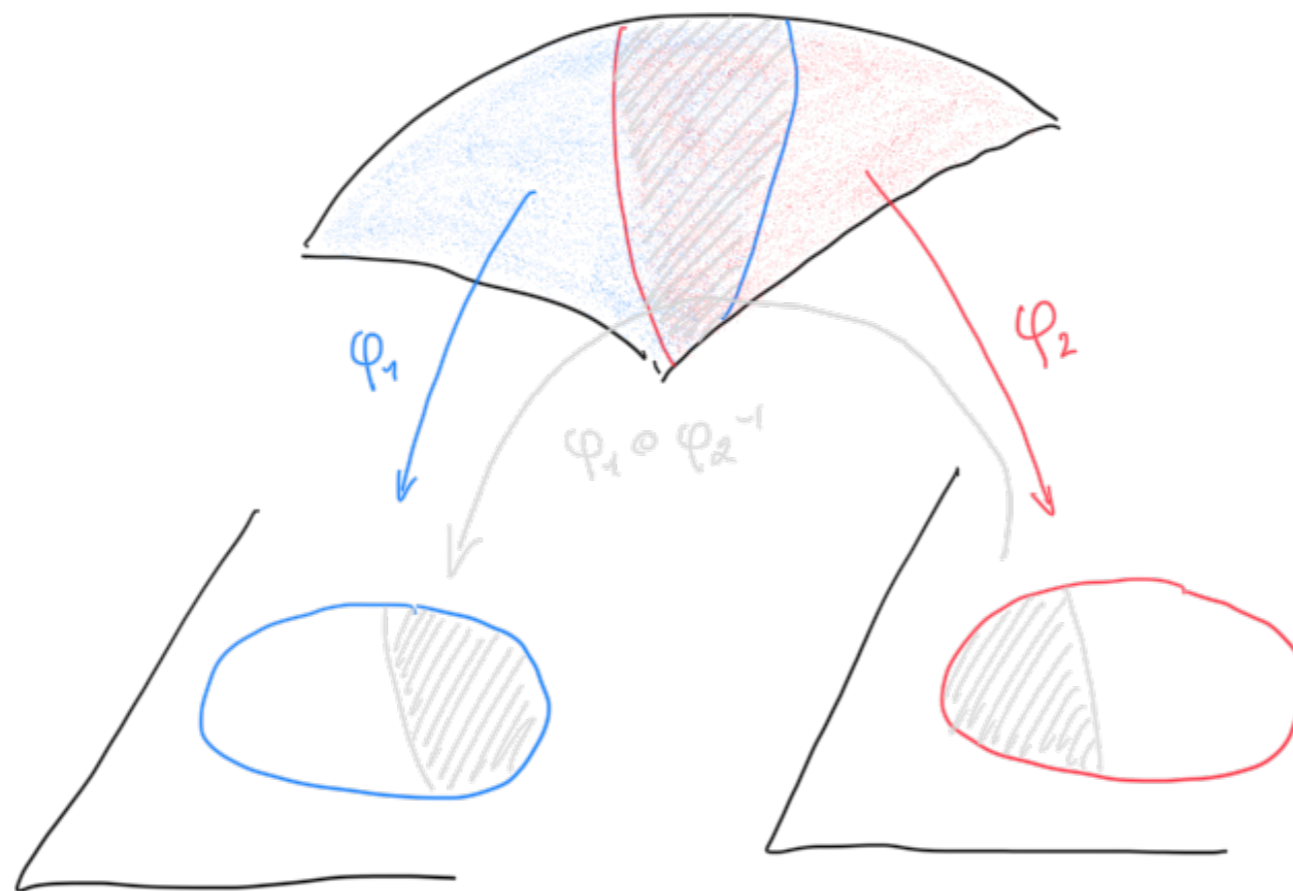
VARIÉTÉS (MANIFOLDS)



- ▶ Atlas de cartes $\{\varphi_i; i \in I\}$
- ▶ Compatibles de classe \mathcal{C}^k

Une variété (manifold) différentielle de dimension n (dans \mathbb{R}^m) est un sous-ensemble $M \subseteq \mathbb{R}^m$ tel que tout point de M a un voisinage homéomorphisme à un sous-ensemble de \mathbb{R}^d .

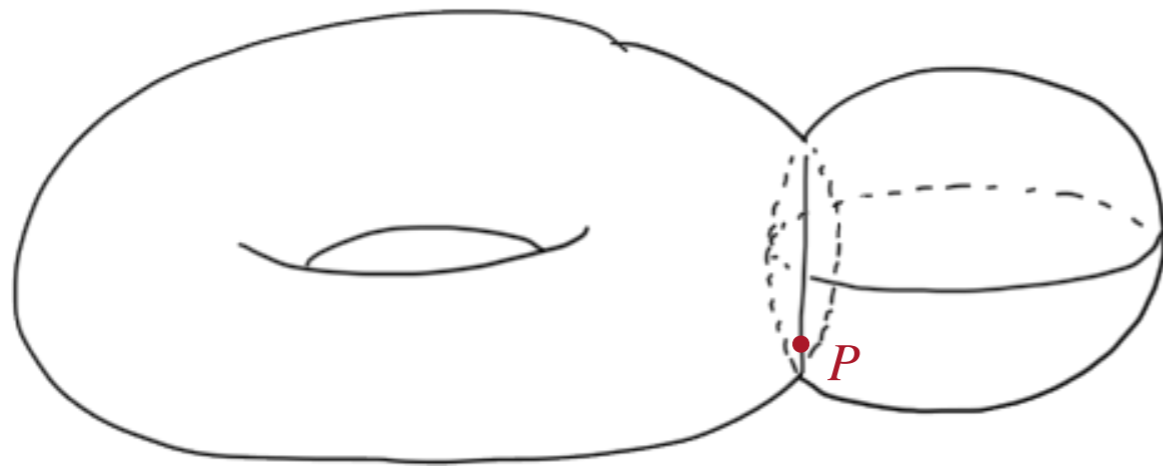
VARIÉTÉS (MANIFOLDS)



Surface lisse
↓
2-variété différentielle

Une variété (manifold) différentielle de dimension n (dans \mathbb{R}^m) est un sous-ensemble $M \subseteq \mathbb{R}^m$ tel que tout point de M a un voisinage homéomorphisme à un sous-ensemble de \mathbb{R}^d .

VARIÉTÉS (MANIFOLDS)



Tout se généralise dans ce contexte :

- ▶ Plan tangent, normale
- ▶ Courbures ...

