Alexandra Bac

POLYTECH 4A INFORMATIQUE REVA

3 – COURBES ET SURFACES PARAMÉTRIQUES

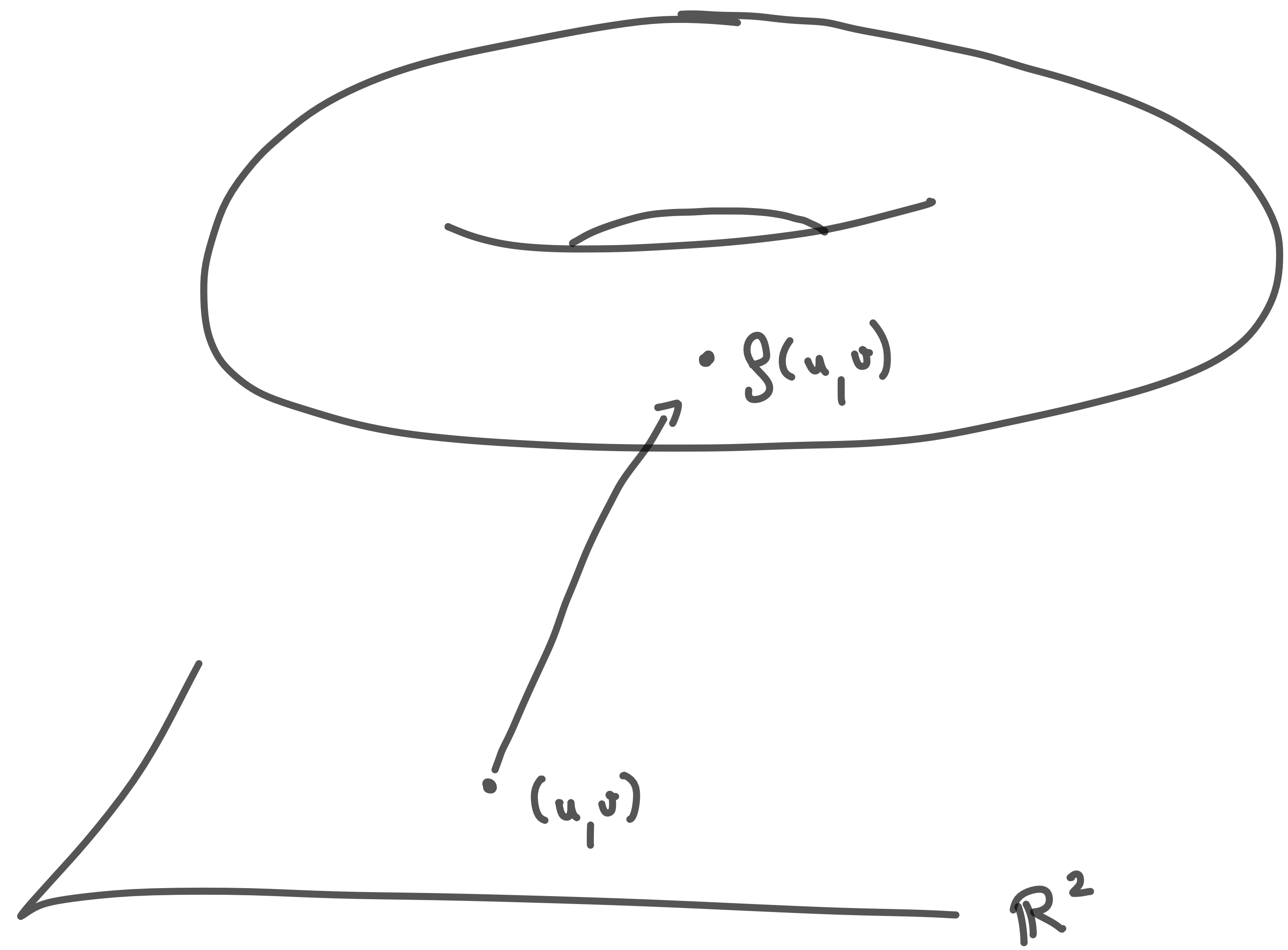
Certaines illustrations sont issues du livre « polygon mesh processing »

Parametric modelling of surfaces

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u,v) \longmapsto f(u,v) \in \mathbb{R}^3$$

parameters



Chapitre 2 ✓

MAILLAGES

Chapitre 4

GÉOMÉTRIE DES SURFACES

Chapitre 1

MODÉLISATION DES SURFACES

Chapitre 3 (+ 5A)

SURFACES PARAMÉTRIQUES

Chapitre 5

SURFACES IMPLICITES

COURBES ET SURFACES PARAMÉTRIQUES

Très incomplet (nécessiterait un module entier)

A suivre en 5A …

Commençons par les courbes

- Plus simple
- Base des modèles de surfaces (produit tensoriel)

Courbes paramétriques

GÉNÉRALITÉS

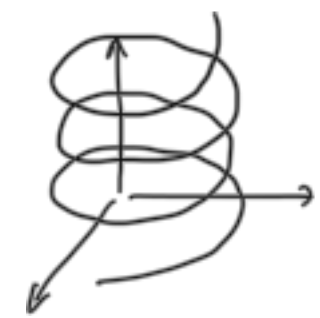
Intuitively : curves — 1D objects
$\Updownarrow$
1 parameter

COURBES PLANES

Courbes dans $\mathbb{R}^2$

COURBES GAUCHES

Courbes dans $\mathbb{R}^3$ → courbes gauches



REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE

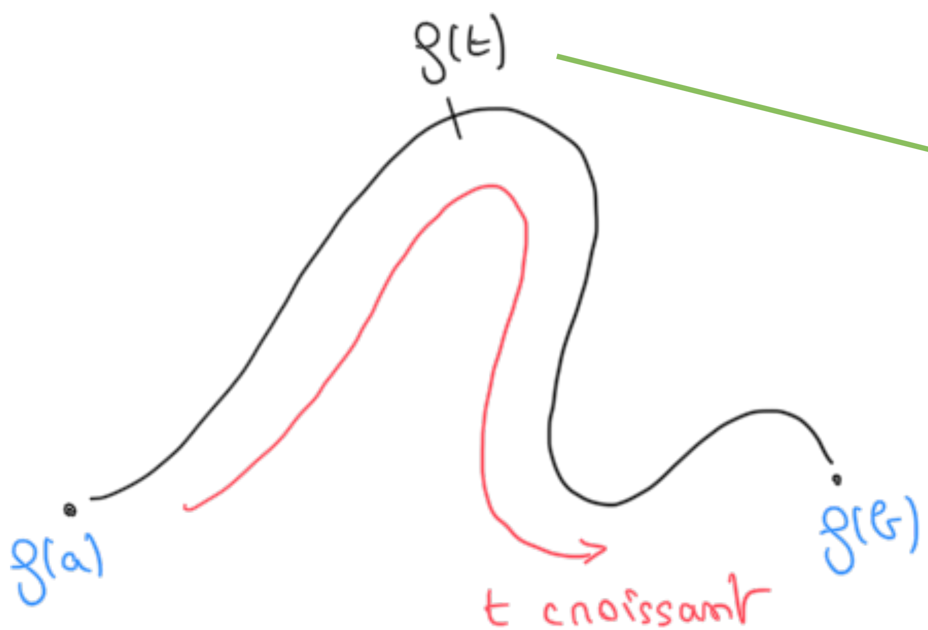
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto g(t) \in \mathbb{R}^2$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$
$$t \mapsto g(t) \in \mathbb{R}^3$$

COURBES

Courbe finie :

$f\ :\ [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$)



$f(t) \in \mathbb{R}^2$ donc :

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$$

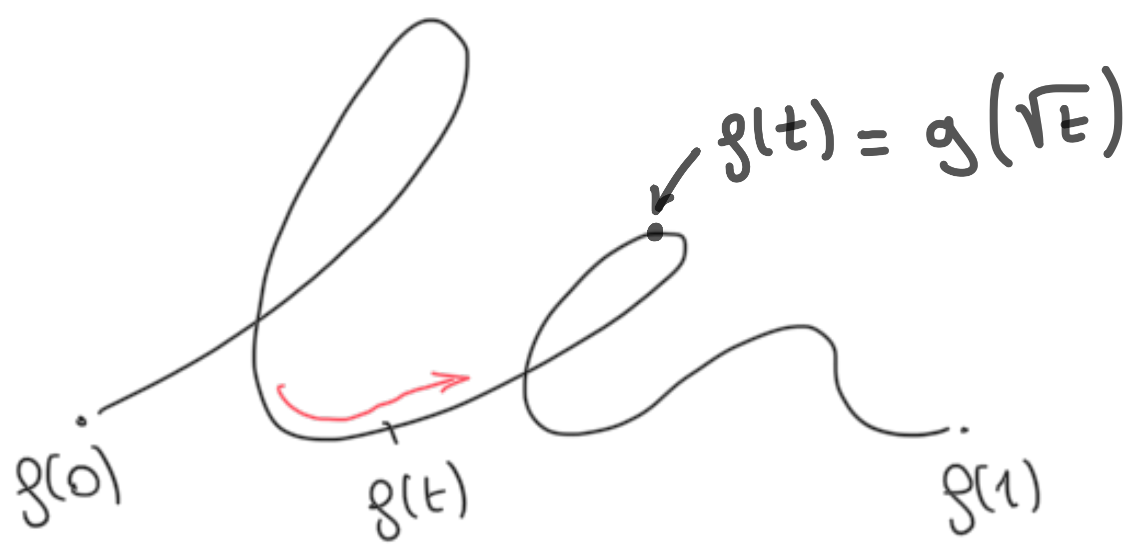
$\updownarrow$

$f_1, f_2\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

QUESTION DE LA PARAMÉTRISATION

Courbe $\leftrightarrow$ modèle paramétrique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$

unique ? $\longrightarrow$ $\boxed{\text{not unique}}$



$f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$

On pose $g(t) = f(t^2)$

- Quelle est la courbe décrite ?

↓

same curve

BUT

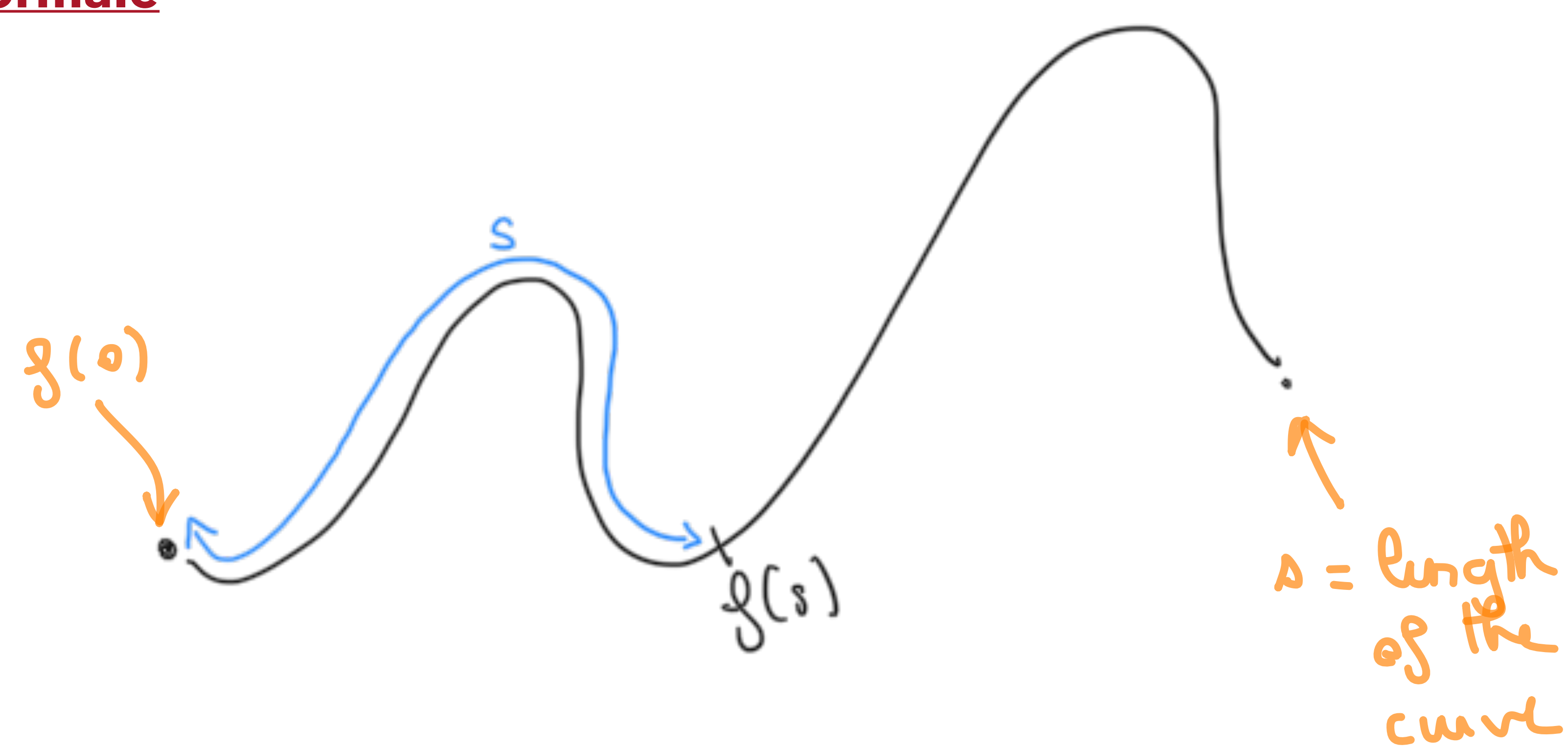
→ not the same speed

→ pts are not reached at the same time

PARAMÉTRISATION NORMALE

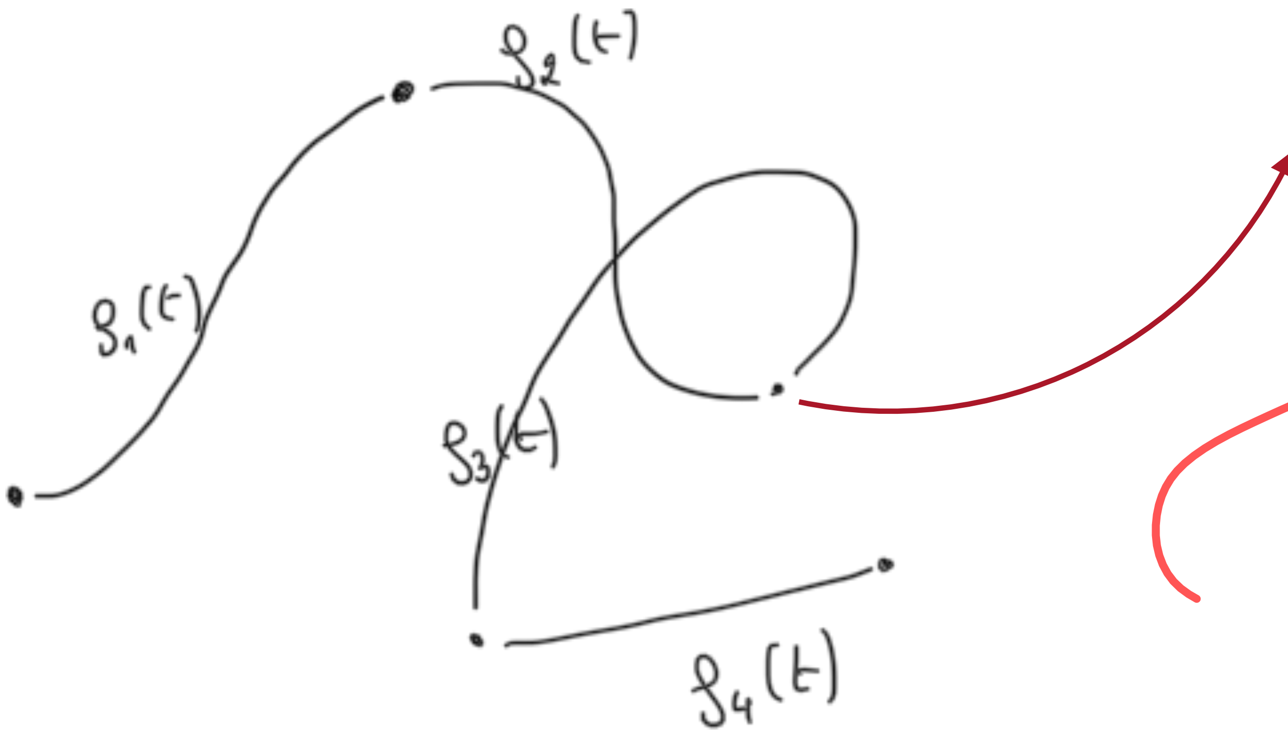
Pour toute courbe, il existe une paramétrisation selon laquelle la courbe est parcourue à vitesse constante :

- Unique
- Paramètre noté s (**abscisse curviligne**) : longueur le long de la courbe
- Appelée **paramétrisation normale**



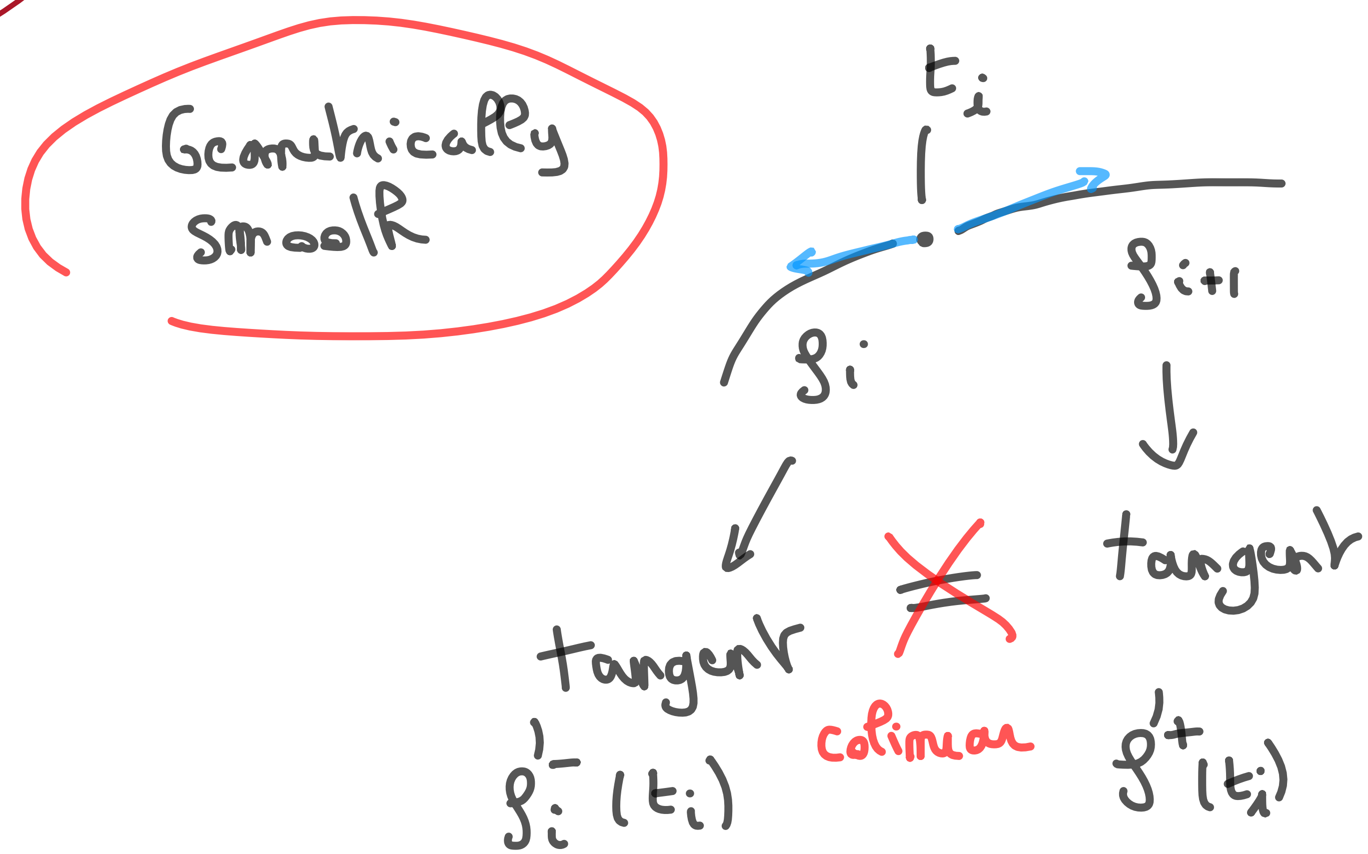
CONTINUITÉ GÉOMÉTRIQUE ($\mathscr{G}^k$)

Courbes modélisée par morceaux :



Courbe continue

Continuité de la dérivée / tangente ?



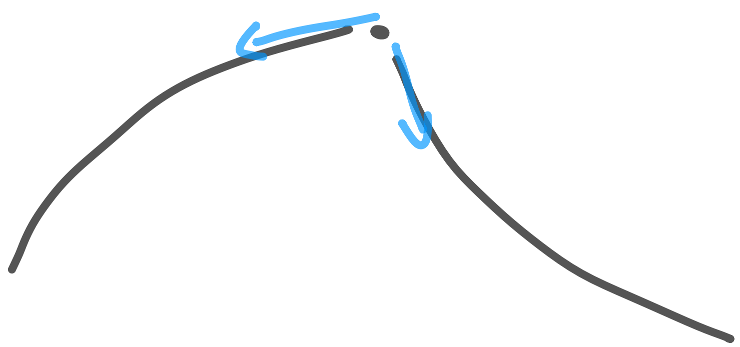
$f_1 \ : \ [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$

$f_2 \ : \ [b, c] \rightarrow \mathbb{R}^k$

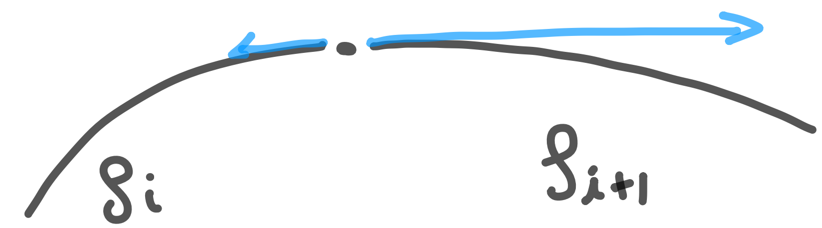
$f_3 \ : \ [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^k$

$f_4 \ : \ [d, e] \rightarrow \mathbb{R}^k$

Not geometrically smooth

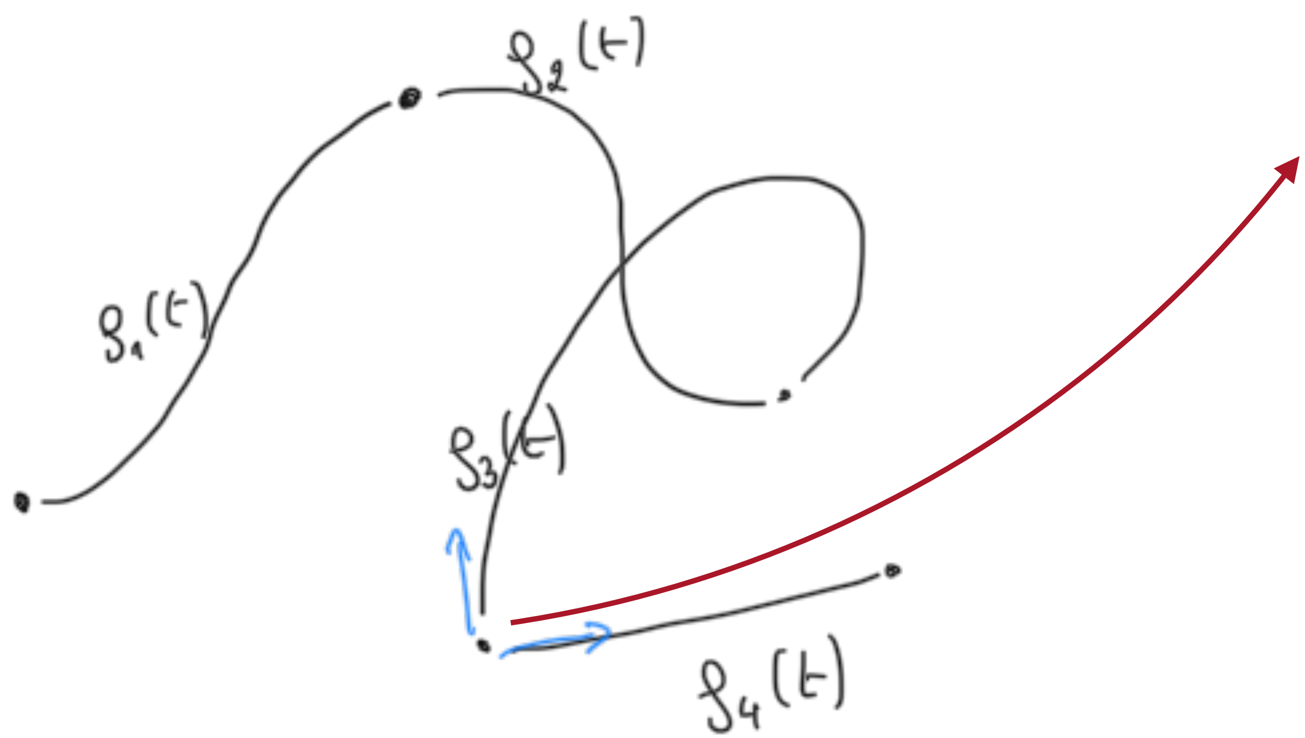


Geometrically smooth



CONTINUITÉ GÉOMÉTRIQUE ($\mathscr{G}^k$)

Courbes modélisée par morceaux :



Courbe continue

Continuité de la dérivée / tangente ?

- Discontinue

$$f_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^k$$

$$f_2 : [b, c] \to \mathbb{R}^k$$

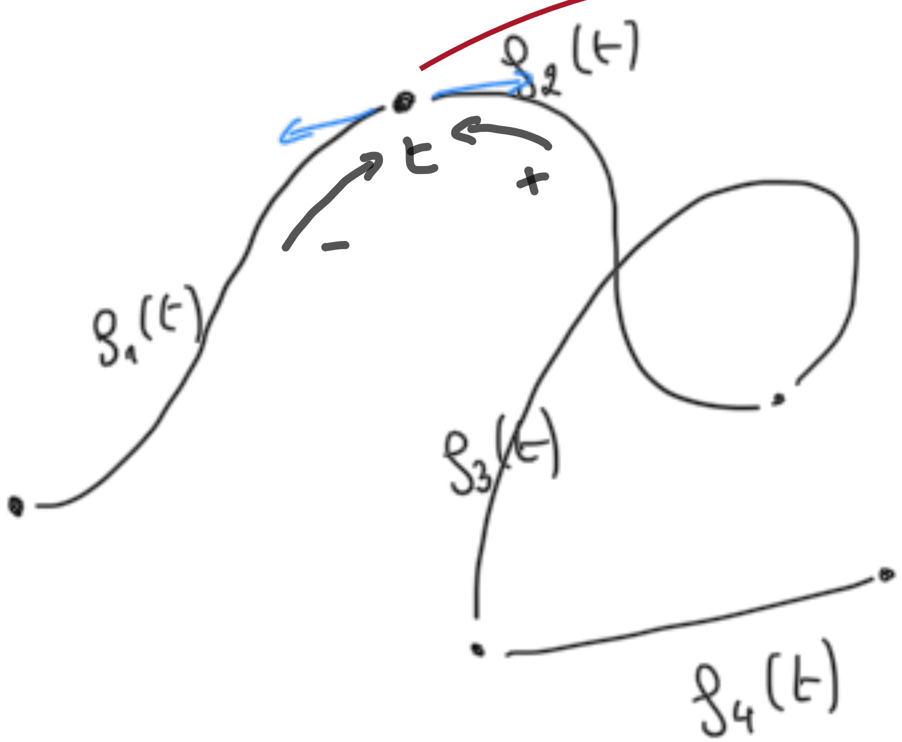
$$f_3 : [c, d] \to \mathbb{R}^k$$

$$f_4 : [d, e] \to \mathbb{R}^k$$

CONTINUITÉ GÉOMÉTRIQUE ($\mathscr{G}^k$)

$\mathscr{G}^0 = \mathscr{C}^0$

Courbes modélisée par morceaux :



$f_1 \; : \; [a, b] \to \mathbb{R}^k$

$f_2 \; : \; [b, c] \to \mathbb{R}^k$

$f_3 \; : \; [c, d] \to \mathbb{R}^k$

$f_4 \; : \; [d, e] \to \mathbb{R}^k$

Courbe continue

Continuité de la dérivée / tangente ?

$f_1'(b^-) = f_2'(b^+)$

Continuité paramétrique $\mathscr{C}^1$

Tangentes colinéaires en b

$f_1'(b^-) = \lambda \cdot f_2'(b^+)$

Continuité géométrique $\mathscr{G}^1$

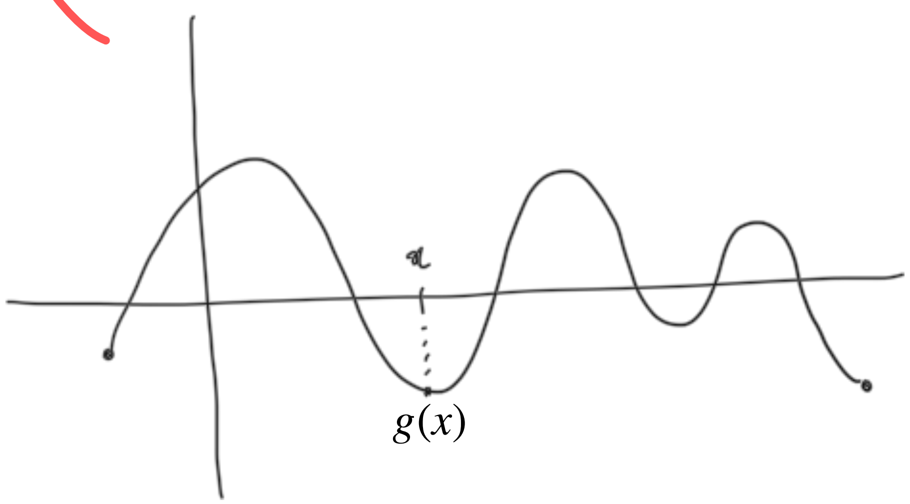
$\mathscr{G}^2, \ldots \mathscr{G}^n \ldots$

CAS PARTICULIER : MODÈLES CARTÉSIENS

Cas particulier où le paramètre est x :

$$y = g(x)$$

$t = x$



Représentation paramétrique associée :

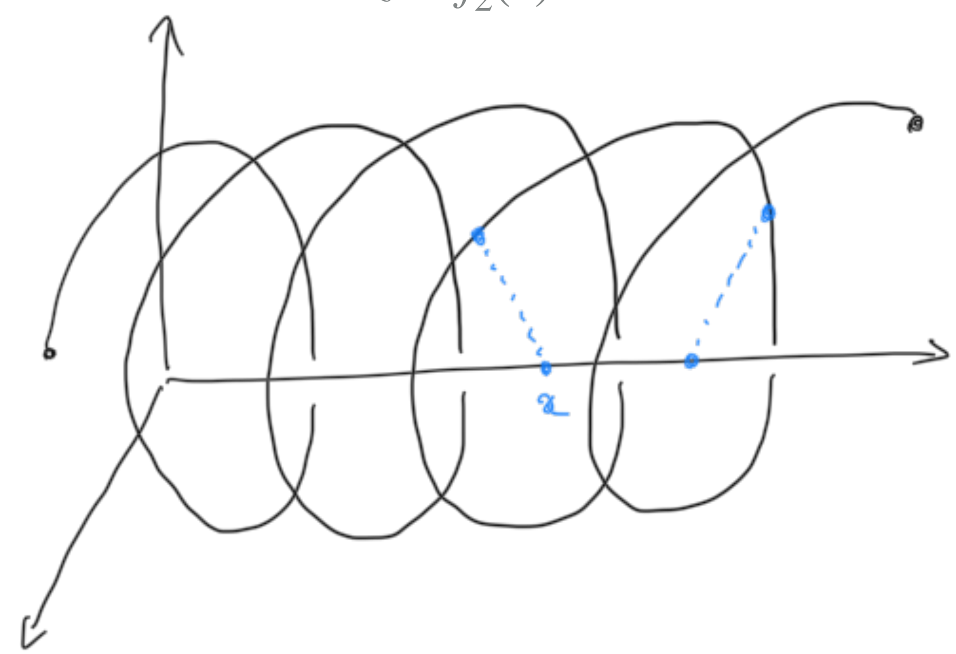
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix}$$

$$y = f_1(x)$$

$$z = f_2(x)$$

$t = x$



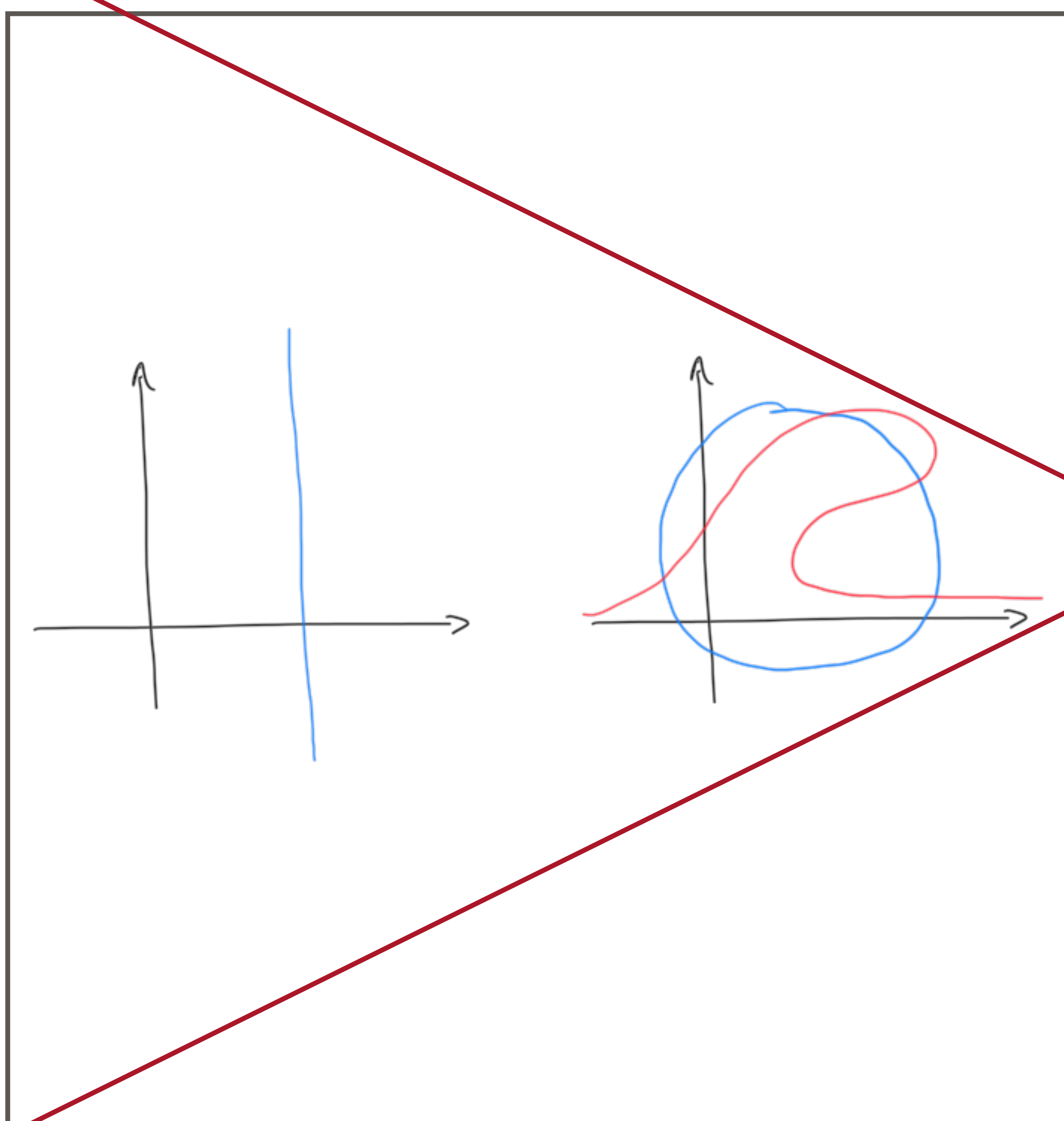
Représentation paramétrique associée :

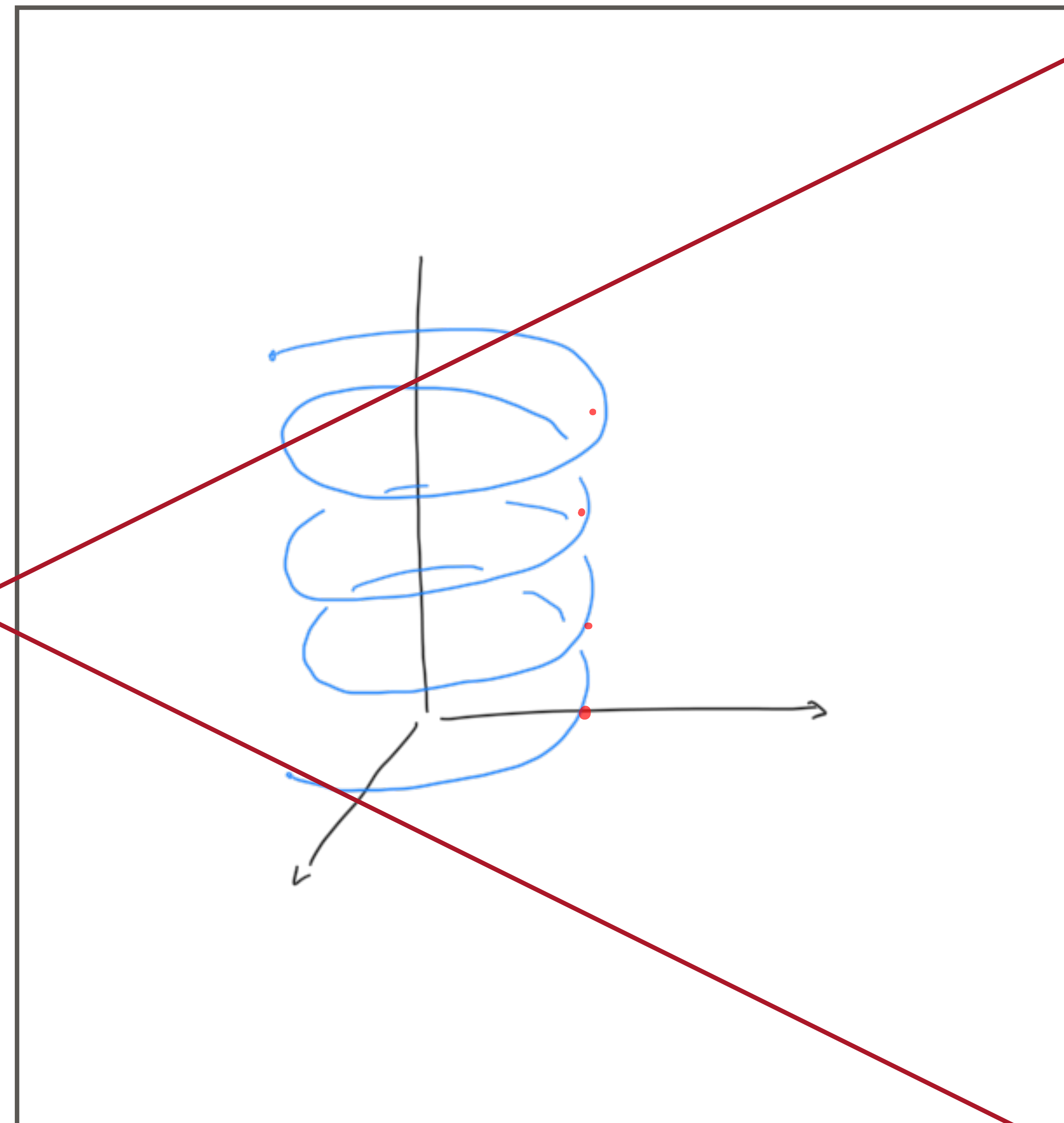
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} x \\ f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$$

CAS PARTICULIER : MODÈLES CARTÉSIENS

Attention : modèles restrictifs !

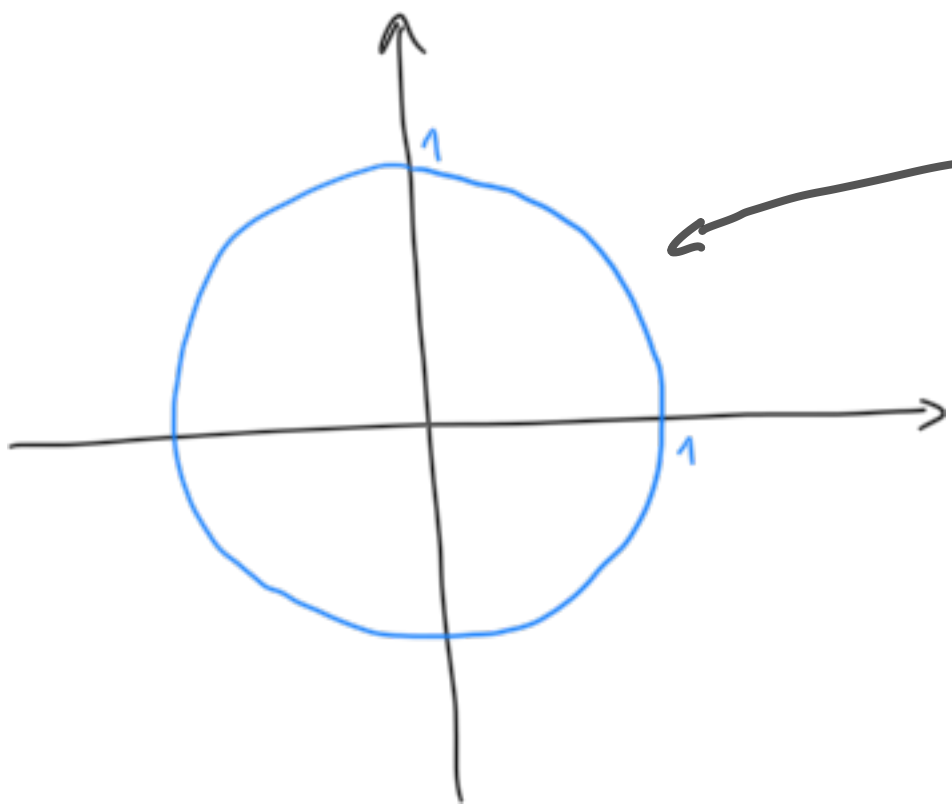


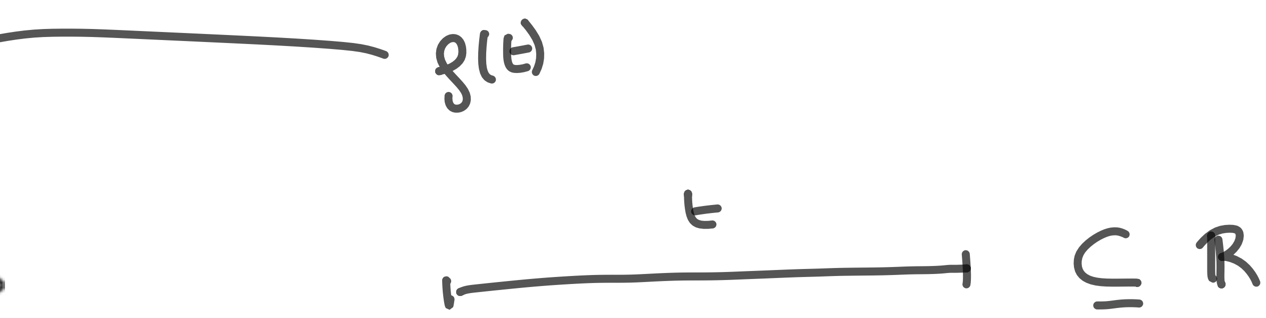


BÉZIERS, B-SPLINES … MOTIVATION

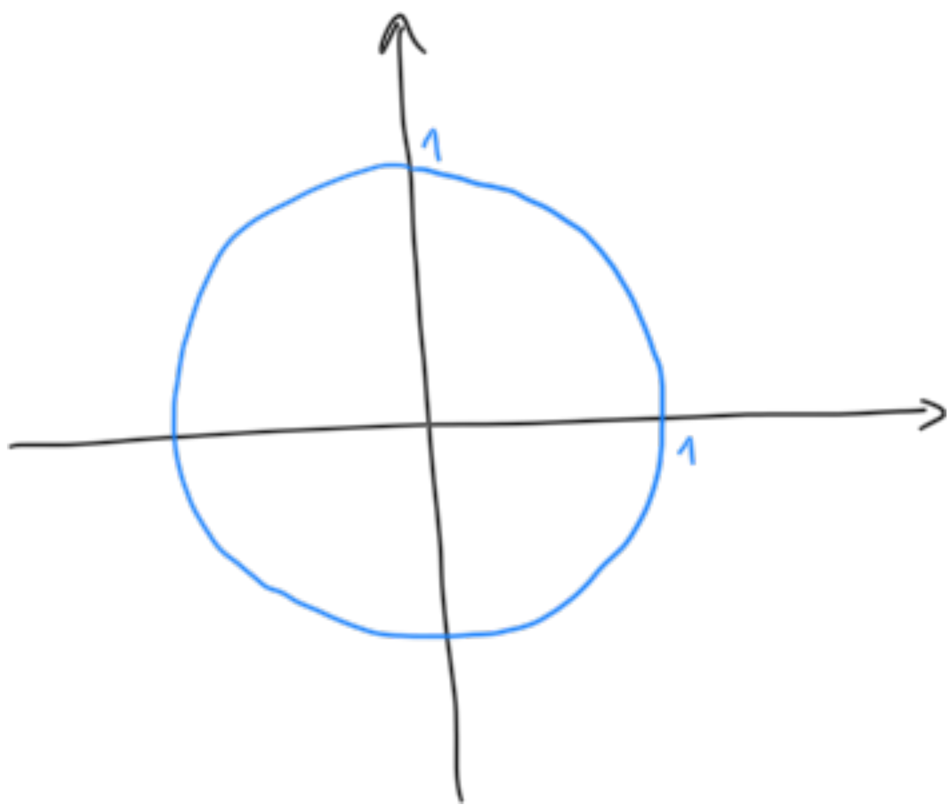
COMMENT CONTRÔLER LE FORME DE LA COURBE ?

Quelle équation $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$?





COMMENT CONTRÔLER LE FORME DE LA COURBE ?



Quelle équation $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$?

Pourtant courbe très simple ...

- Question trop générale

Choisir f d'une forme particulière

f built from these functions

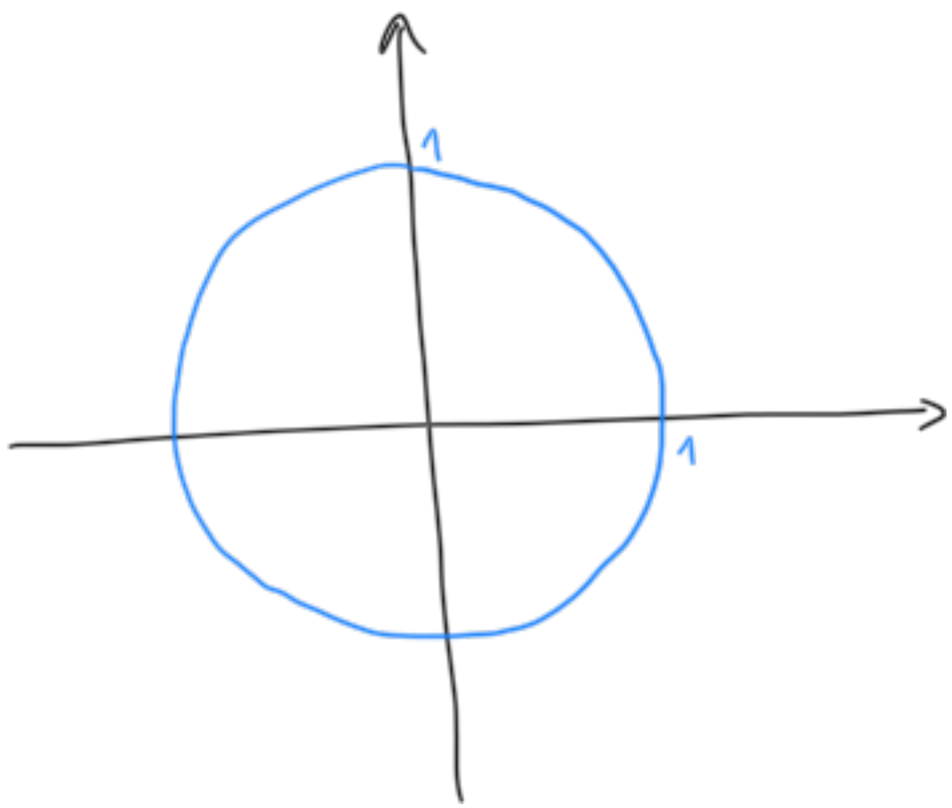
Dépendant de paramètres simples

Contrôlent la forme

Basic set of functions

↳ basis of functions

COMMENT CONTRÔLER LE FORME DE LA COURBE ?



Quelle équation $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$?

vector space — $f+g$, $\alpha \cdot f$

dimension ∞

Pourtant courbe très simple …

- Question trop générale

, subspace of dim $n+1$

Choisir f d'une forme particulière

Polynômes de degré $\leqslant n$ — $n+1$ coefficients

$\cap$

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Dépendant de <u>paramètres simples</u>

Contrôlent la forme

Béziers & B-spline modelling

.../...

COMMENT CONTRÔLER LE FORME DE LA COURBE ?

choose a basis of simple functions : φ_i

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) \cdot \widehat{P_i}$$

Fonctions de base fixes

Paramètres :
points de $\mathbb{R}^k$ (contrôlant la courbe)

φ_i polynômes de Bernstein → courbes de Béziers / Béziers surfaces
(ce cours)

φ_i fonctions B-spline → courbes B-spline / B-spline surfaces
(5A)

NURBS φ_i ~~polynomials~~ quotients of polynomials $\frac{P}{Q}$

COURBES DE BÉZIERS

COURBES DE BÉZIERS

First attempt

↳ φ_i — canonical basis of polynomials

$1, x, x^2 \; .... \; x^n$

$g(t) = \sum \underbrace{\varphi_i(t)}_{\text{poly.}} \cdot \underbrace{P_i}_{\text{pts}}$

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$$

polynômes de degré au plus n

~~dans la base canonique :~~ Pas la bonne base …

$$f_1(t) = a_0 + a_1 t + \cdots a_n t^n$$

$$f_2(t) = b_0 + b_1 t + \cdots b_n t^n$$

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) \cdot P_i$$

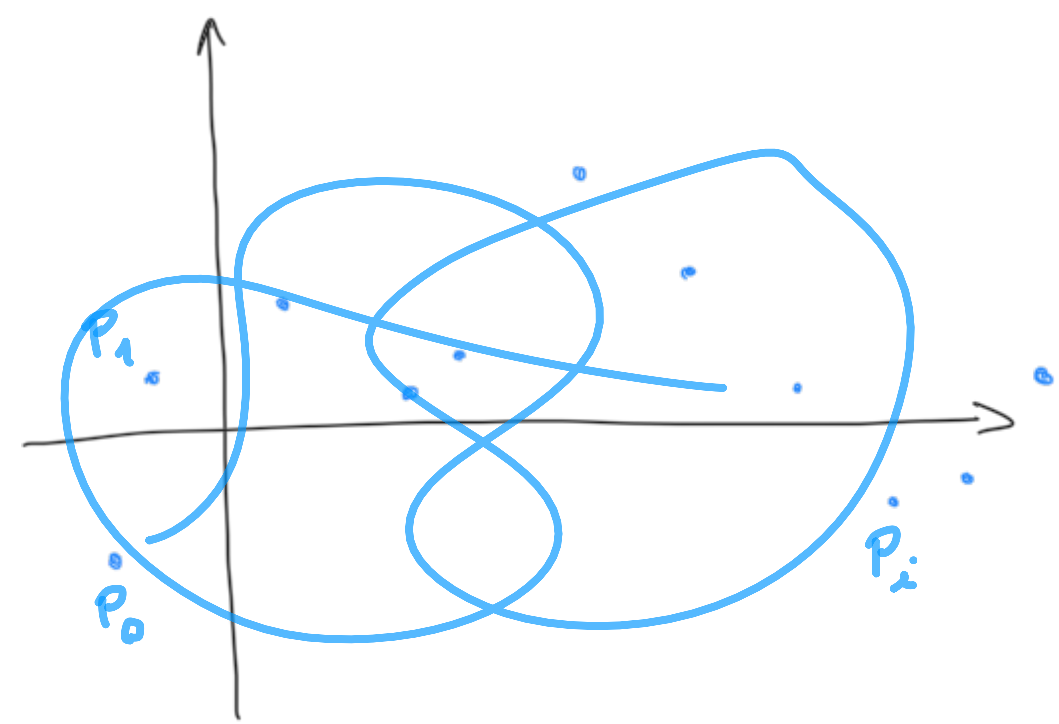
Base

Paramètre de contrôle

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} t^i \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$$

we get this expression …

$g(0) = P_0$



$\{P_i\}$ tq la courbe passe près de ces points ?

POLYNÔMES DE BERNSTEIN

Base de Bernstein de $\mathbb{R}_n[t]$

d° $\underline{\underline{n}}$

- $n+1$ polynômes
- $\varphi_{n,i}\ :\ [0,1] \to \mathbb{R}$ pour le $i = 0 \dots n$
  $\varphi_{n,i}(t) = C_n^i \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i}$

Parenté avec le binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Ex : pour $n = 3$

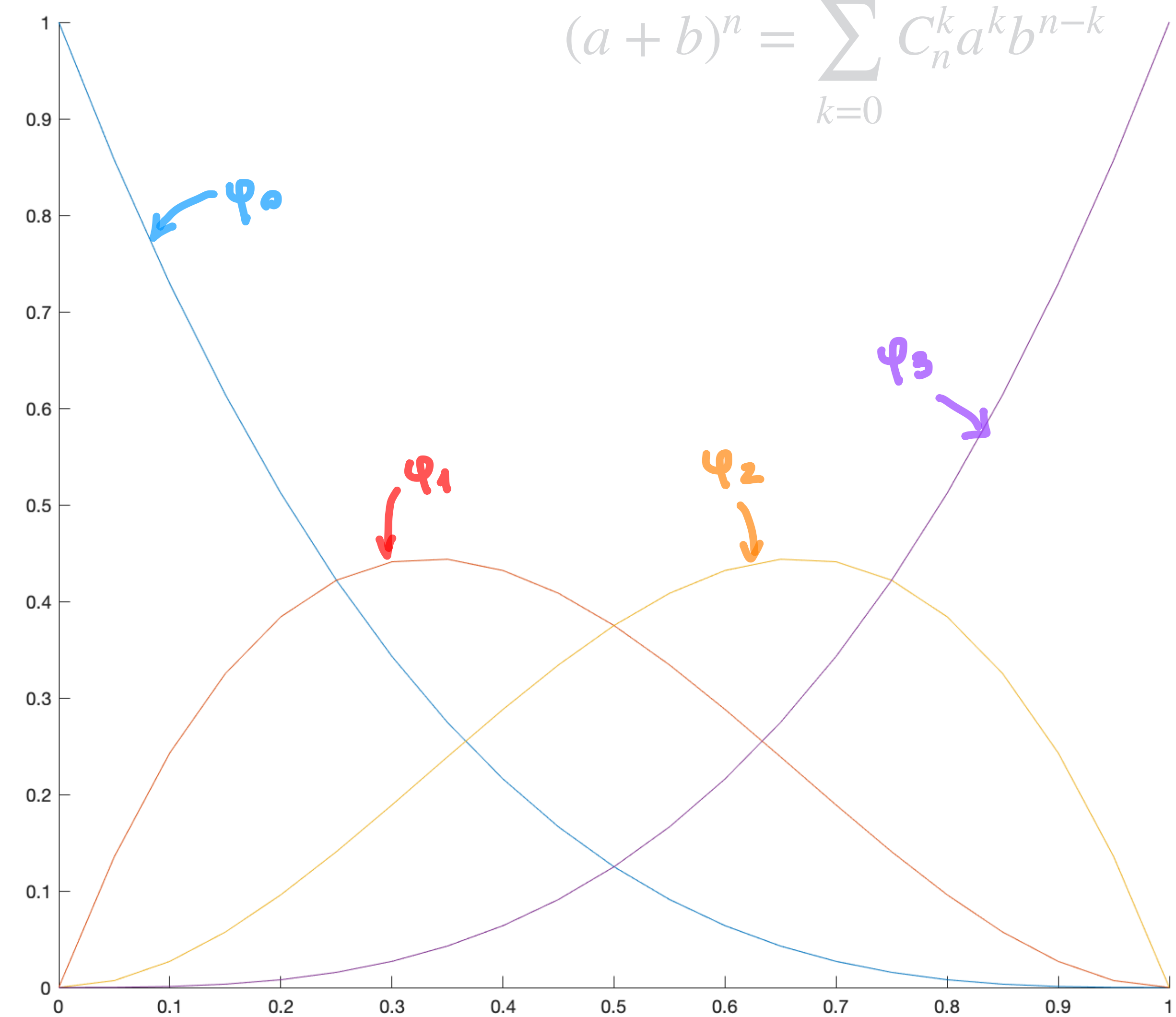
$\varphi_{3,0}(t) = (1-t)^3$

$\varphi_{3,1}(t) = 3t(1-t)^2$

$\varphi_{3,2}(t) = 3t^2(1-t)$

$\varphi_{3,3}(t) = t^3$

↳ $\varphi_{n,i}$ max at time $\frac{i}{n}$



POLYNÔMES DE BERNSTEIN – PROPRIÉTÉS

$\varphi_{n,0}(0) = 1$

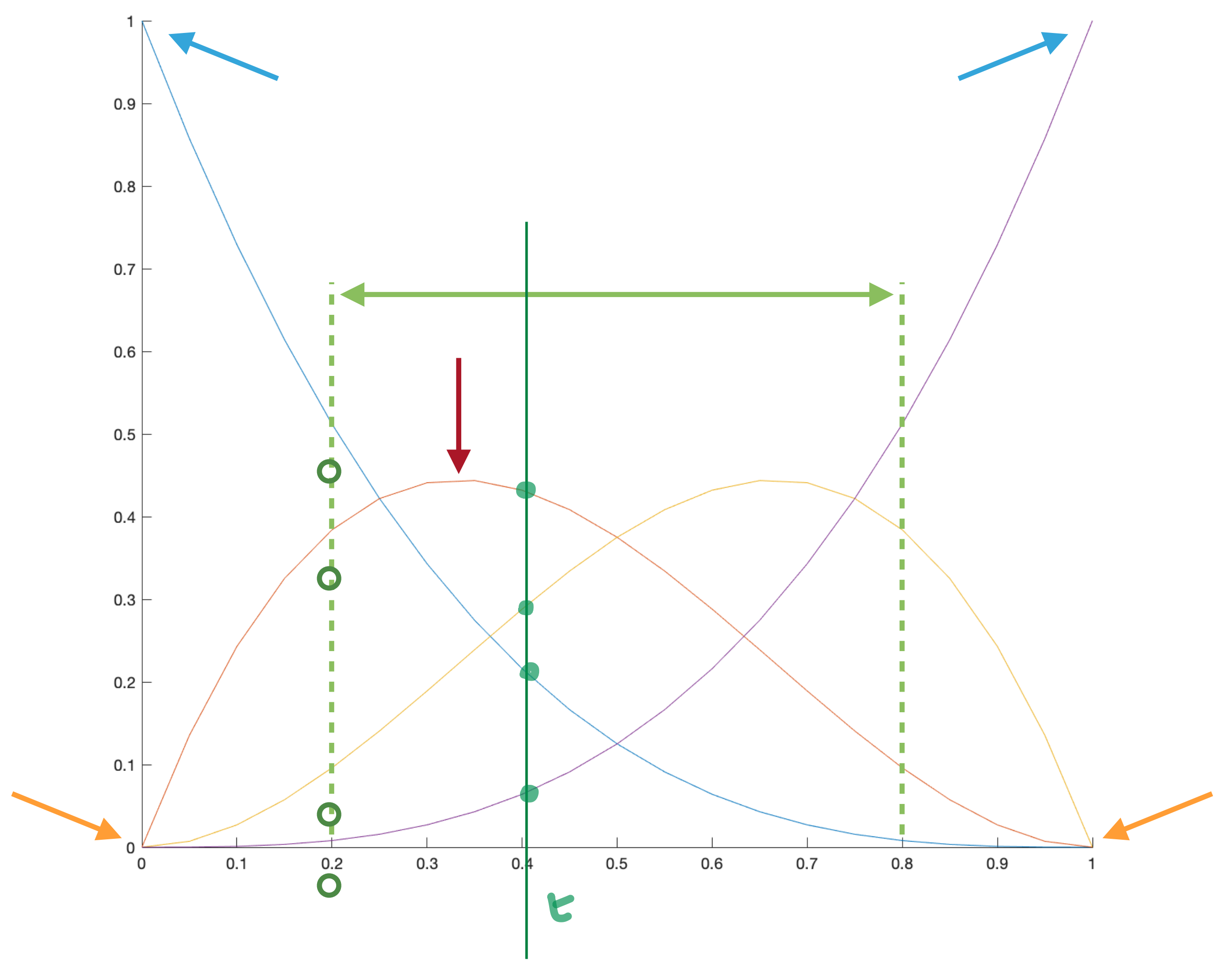
$\varphi_{n,n}(1) = 1$

$\varphi_{n,i}(0) = 0$

$0 < i < n$

Symétrie

$$\varphi_{n,i}(t) = \varphi_{n,n-i}(1-t)$$



Partition de l'unité

$$\sum_{i=0}^{n} \varphi_{n,i}(t) = 1 \qquad \forall t \in [0,1]$$

Maximum de $\varphi_{n,i}(t)$

en $\dfrac{i}{n}$

POLYNÔMES DE BERNSTEIN – PROPRIÉTÉS

$C_m^i = C_{n-1}^i + C_{n-1}^{i-1}$

Proche triangle Pascal

$\varphi_{n,0}(0) = 1$

$\varphi_{n,n}(1) = 1$

$\varphi_{n,i}(0) = 0$

$0 < i < n$

Formule récursive

en $\varphi_{n,i}(t) = t\varphi_{n-1,i-1}(t) + (1-t)\varphi_{n-1,i}(t)$

Symétrie

$\varphi_{n,i}(t) = \varphi_{n,n-i}(1-t)$

Partition de l'unité

$$\sum_{i=0}^{n} \varphi_{n,i}(t) = 1 \qquad \forall t \in [0,1]$$

Maximum de $\varphi_{n,i}(t)$

en $\dfrac{i}{n}$

COURBES DE BÉZIERS

$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{\text{Courbe de Béziers de degré } n} \\ \\ f(t) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_{n,i}(t) \cdot P_i\end{array}}$$

$P_0, \ldots, P_n$ points de contrôle

the curve starts from P_0

- $f(0) = P_0$ 1)
- $f(1) = P_n$ ⟶ the curve ends at P_n
- Influence maximale de P_i en $\underbrace{\frac{i}{n}}$

ie. when $t = \frac{i}{n}$

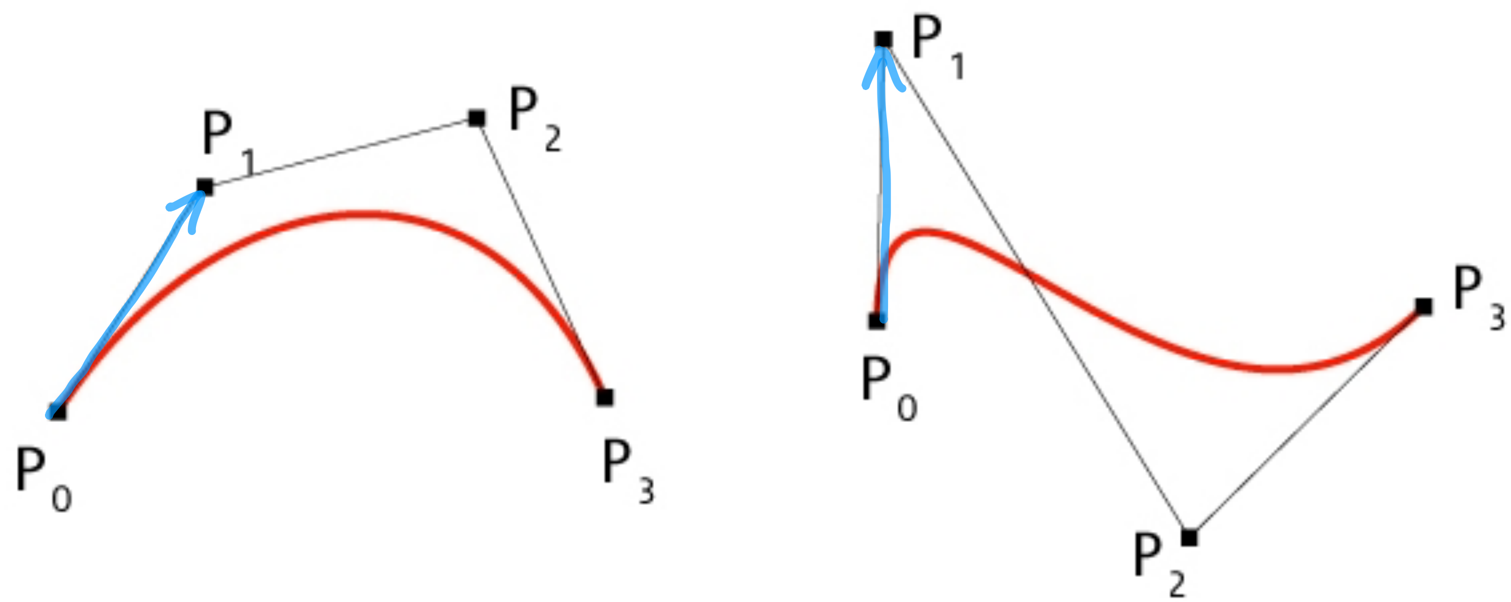
1) $f(0) = \sum_i \underbrace{\varphi_{n,i}(0)} \cdot P_i = P_0$

0 if $i \neq 0$

1 if $i = 0$

COURBES DE BÉZIERS

Degree
$n = 3$
↓
4 pts



- $f(t)$ barycentre des P_i pondérés par $\varphi_{n,i}(t)$
- Courbe dans l'enveloppe convexe des points de contrôle

convex hull of pts

weighted barycenter

$$\frac{\sum w_i \cdot P_i}{\sum w_i}$$

DÉRIVÉES / TANGENTES DES COURBES DE BÉZIERS

$$\varphi'_{n,i}(t) = C_n^i \left(i \cdot t^{i-1} (1-t)^{n-i} + (n-i)\, t^i (1-t)^{n-i-1} \right)$$

$$\varphi_{n,i}(t) = C_n^i \cdot t^i (1-t)^{n-i}$$

$$\varphi_{n-1,i}(t) = C_{n-1}^i \cdot t^i (1-t)^{n-i-1}$$

$$\varphi_{n-1,i-1}(t) = C_{n-1}^{i-1} \cdot t^{i-1} (1-t)^{n-i}$$

$$\varphi'_{n,i}(t) = n(\varphi_{n-1,i-1}(t) - \varphi_{n-1,i}(t))$$

$$g(t) = \sum \varphi_{n,i}(t) \cdot P_i$$

$$f'(t) = \sum_i \varphi_{n,i}'(t) \cdot P_i$$

$$g(t) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_{n,i}(t) \cdot P_i$$

Béziers d° n / contrôle pts $P_0 \dots P_n$

slope of g

$$\boxed{f'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_{n-1,i}(t) \cdot (P_{i+1} - P_i)}$$

Bézier curve d° $n-1$ — contrôle pts $P_1 - P_0, \dots, P_n - P_{n-1}$

$f'(t)$ → $f'(0)$ — starts from the first pt: $P_1 - P_0$

tangent of f for $t=0$

$f'(1)$ — ends at the last pt: $P_n - P_{n-1}$

tangent of f for $t=1$

DÉRIVÉES / TANGENTES DES COURBES DE BÉZIERS

$$\boxed{f'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_{n-1,i}(t) \cdot (P_{i+1} - P_i)} \longrightarrow$$

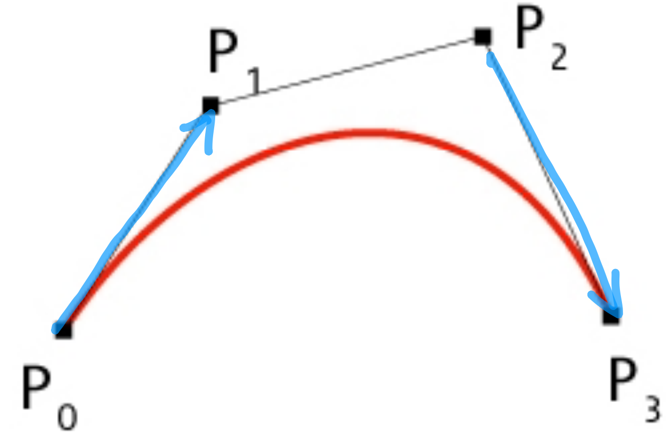
Courbe de Béziers

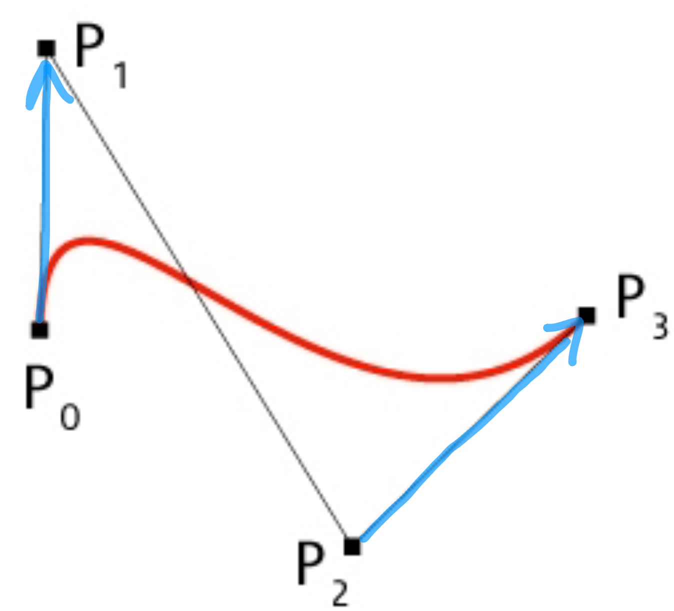
- Degré $n-1$
- Points de contrôle $P_1 - P_0, \ldots, P_n - P_{n-1}$

Tangente à la courbe en 0 :
$n \cdot \overrightarrow{P_0 P_1}$

Tangente à la courbe en 1 :
$n \cdot \overrightarrow{P_{n-1} P_n}$

Permet de raccorder des courbes de Béziers





CALCUL DE POINT : ALGORITHME DE DE CASTELJAU

Algorithme similaire déjà connu : calcul de $\boxed{C_n^k \ldots}$

$$\cancel{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Débordements de capacité …

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

~~Fonction récursive :~~

duplication des calculs …

Calcul itératif via un tableau :

Triangle de Pascal

$$f(t) = \sum_{i=0}^{m} \varphi_{m,i}(t) \cdot P_i$$

$$\varphi_{m,i}(t) = C_m^i \cdot \underbrace{t^i (1-t)^{n-i}}_{m \times}$$

costly ....

CALCUL DE POINT : ALGORITHME DE DE CASTELJAU

↳ compute the curve efficiently

1) Formule récursive

$$\varphi_{n,i}(t) = t\varphi_{n-1,i-1}(t) + (1-t)\varphi_{n-1,i}(t)$$

↓

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_{n,i}(t) \cdot P_i =$$

CALCUL DE POINT : ALGORITHME DE DE CASTELJAU

1) Formule récursive

$$\varphi_{n,i}(t) = t\varphi_{n-1,i-1}(t) + (1-t)\varphi_{n-1,i}(t)$$

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_{n,i}(t) \cdot P_i =$$

$$= t\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n-1} \varphi_{n-1,i}(t)P_{i+1}\right)}_{P_1^{n-1}} + (1-t)\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n-1} \varphi_{n-1,i}(t)P_i\right)}_{P_0^{n-1}}$$

Points de courbes intermédiaires de degré $n-1$

On pose :

$$P_i^j = f_{P_i,\ldots,P_{i+j}}(t)$$

CALCUL DE POINT : ALGORITHME DE DE CASTELJAU

1) Formule récursive

$$\boxed{P_i^j = tP_{i+1}^{j-1} + (1-t)P_i^{j-1}}$$

avec $P_i^0 = P_i$

Ressemble fortement au triangle de Pascal

CALCUL DE POINT : ALGORITHME DE DE CASTELJAU

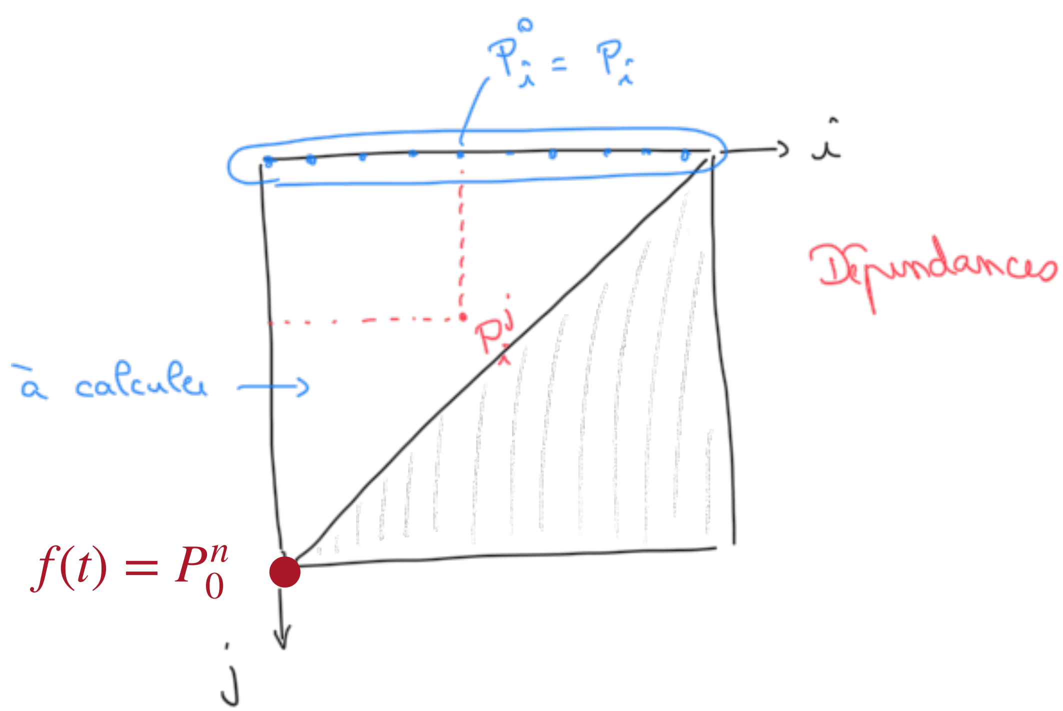
1) Formule récursive

$$\boxed{P_i^j = tP_{i+1}^{j-1} + (1-t)P_i^{j-1}}$$

avec $P_i^0 = P_i$

Ressemble fortement au triangle de Pascal

2) Dépendances de calcul



CALCUL DE POINT : ALGORITHME DE DE CASTELJAU

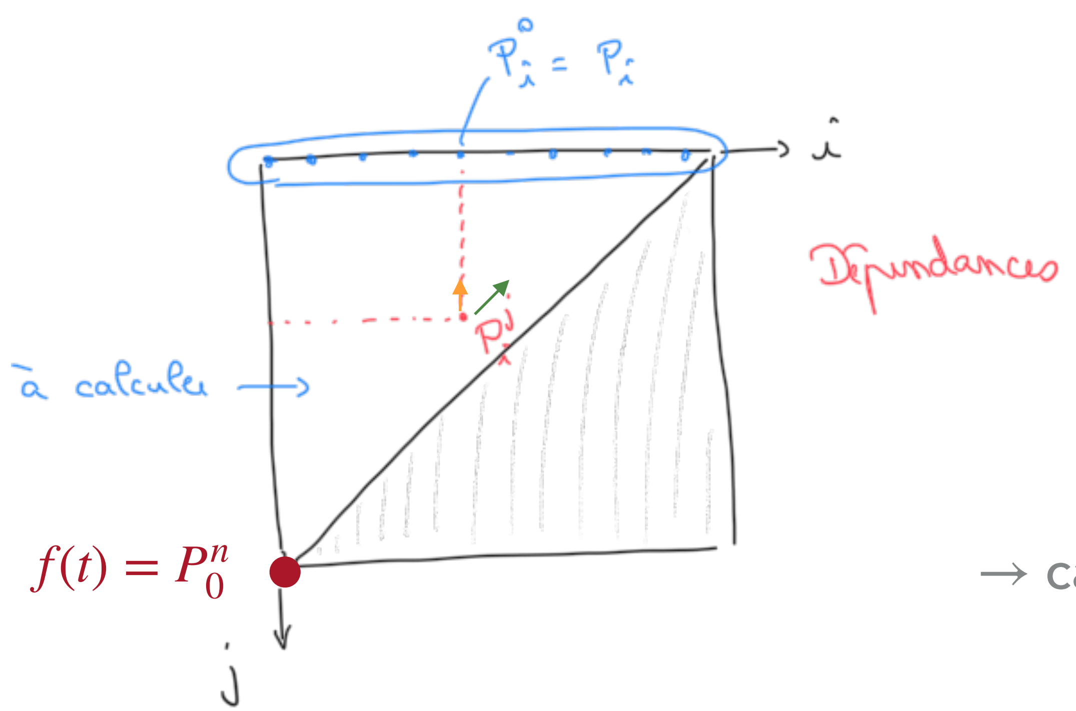
1) Formule récursive

$$\boxed{P_i^j = tP_{i+1}^{j-1} + (1-t)P_i^{j-1}}$$

Ressemble fortement au triangle de Pascal

avec $P_i^0 = P_i$

2) Dépendances de calcul



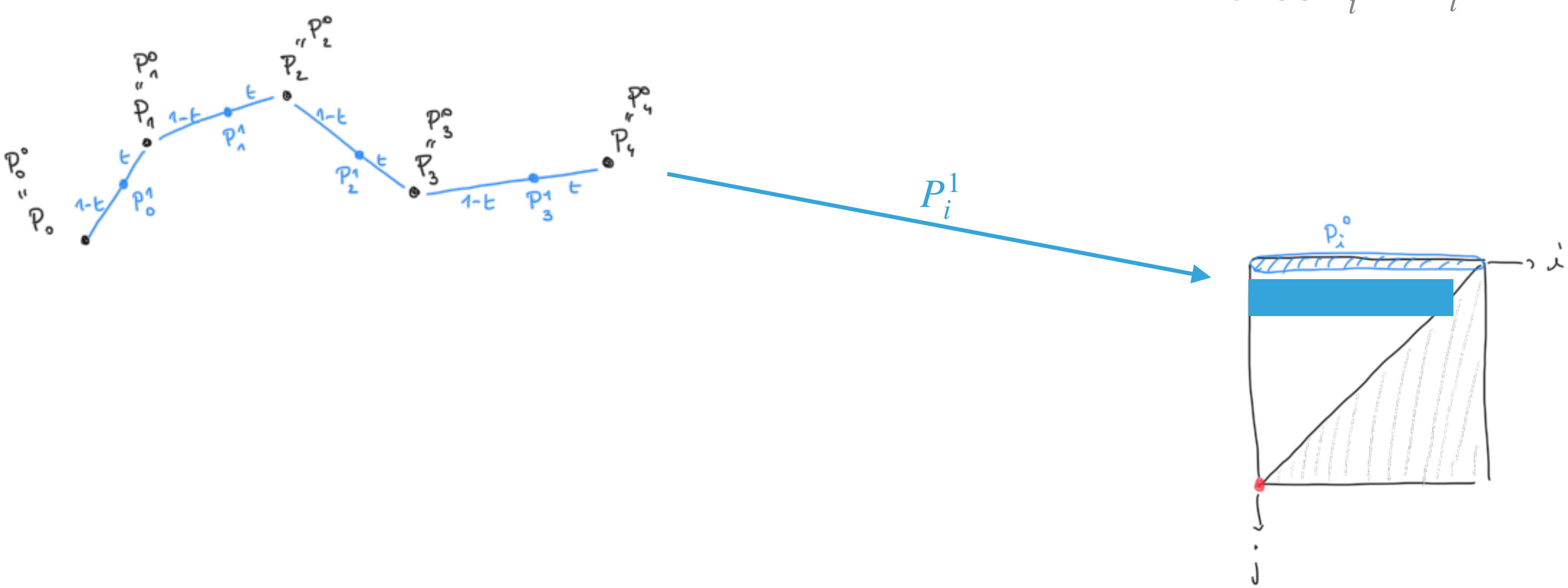
→ calcul par lignes

CALCUL DE POINT : ALGORITHME DE DE CASTELJAU

$$\boxed{P_i^j = tP_{i+1}^{j-1} + (1-t)P_i^{j-1}}$$

avec $P_i^0 = P_i$

Interprétation géométrique

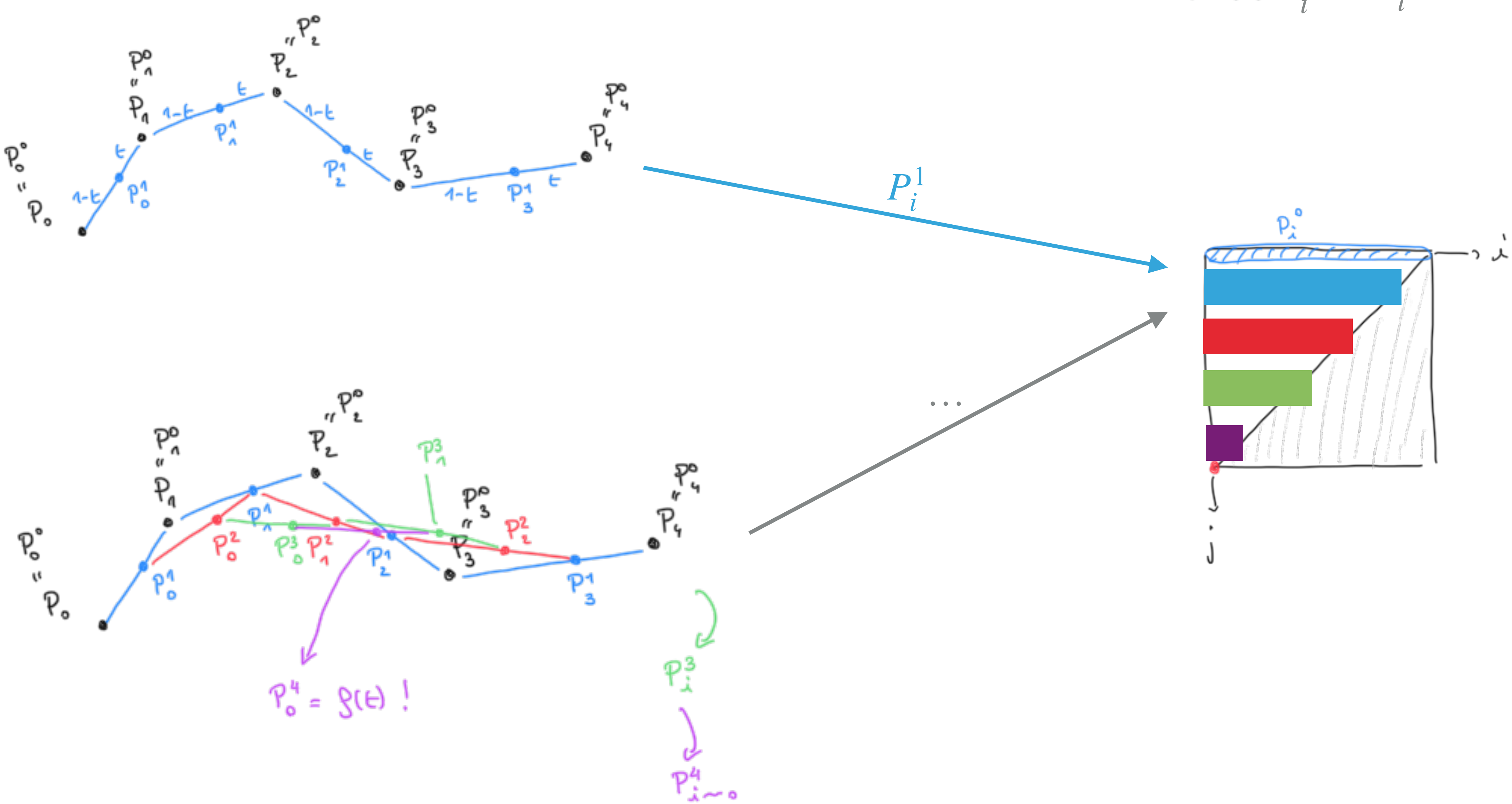


CALCUL DE POINT : ALGORITHME DE DE CASTELJAU

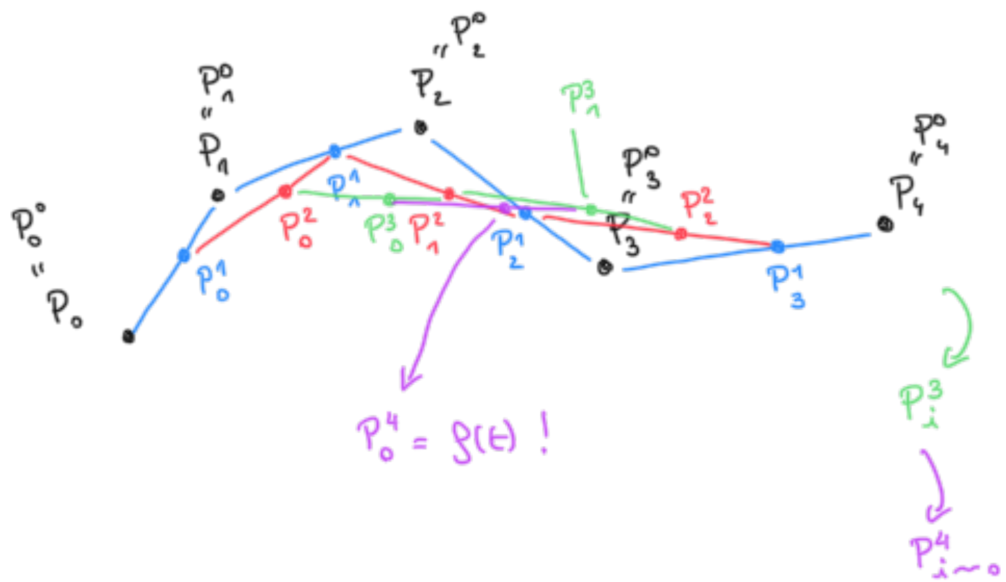
$$\boxed{P_i^j = tP_{i+1}^{j-1} + (1-t)P_i^{j-1}}$$

avec $P_i^0 = P_i$

Interprétation géometrique



DE CASTELJAU ET SUBDIVISION



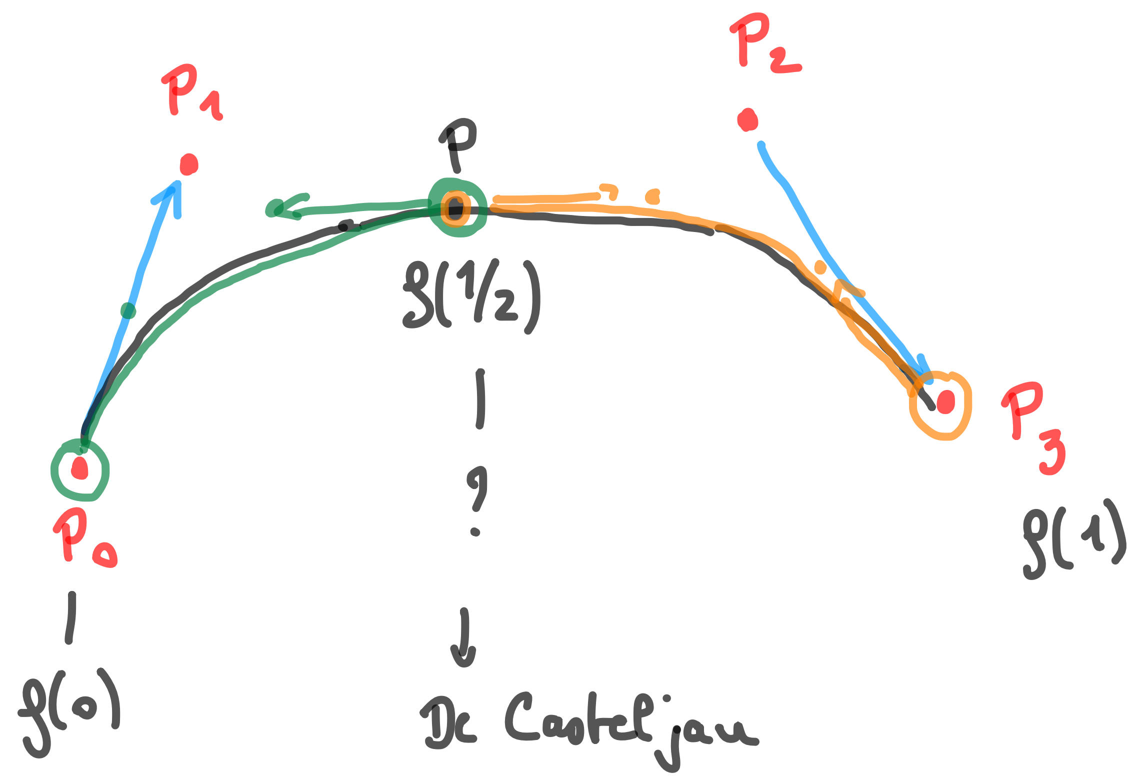
$$
\begin{array}{ccccc}
P_0^0 & P_1^0 & P_2^0 & P_3^0 & P_4^0 \\
P_0^1 & P_1^1 & P_2^1 & P_3^1 & \\
P_0^2 & P_1^2 & P_2^2 & & \\
P_0^3 & P_1^3 & & & \\
P_0^4 & & & &
\end{array}
$$

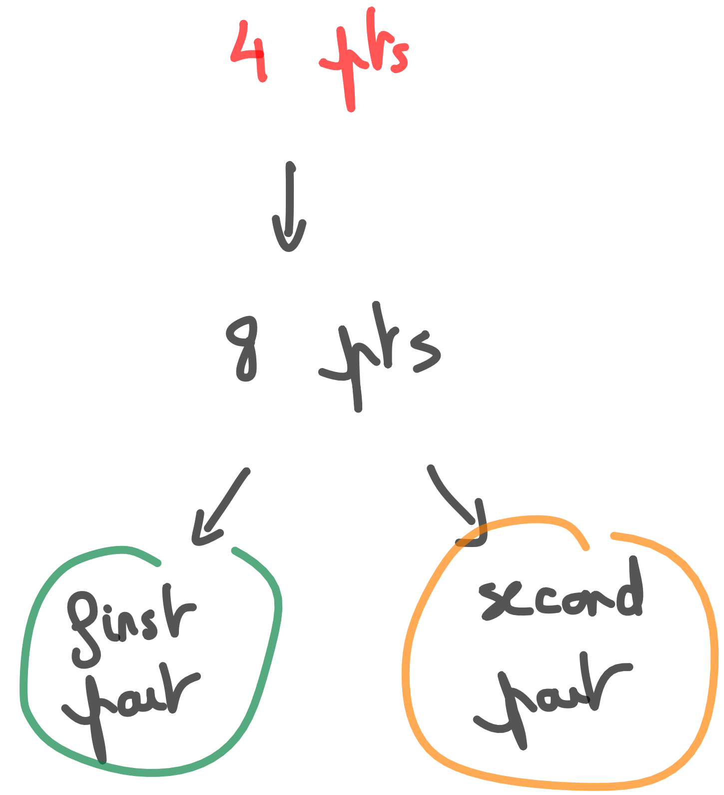
Créent la courbe $f\,|_{[0,t]}$

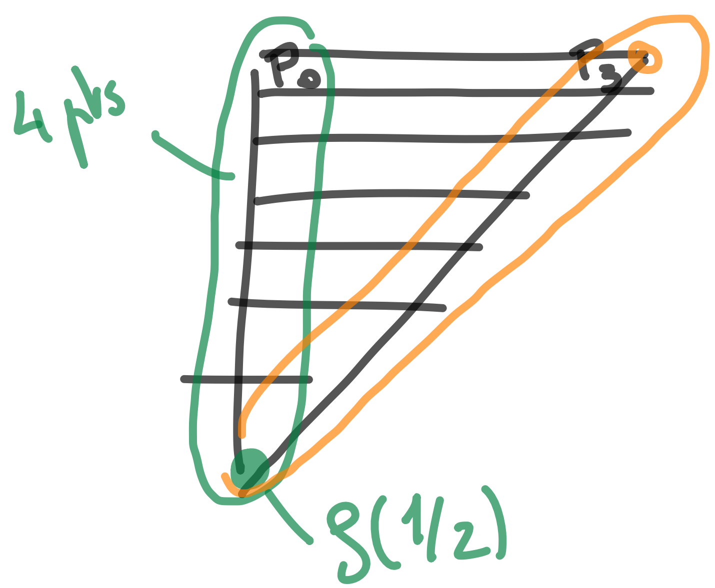
Créent la courbe $f\,|_{[t,1]}$

→ Augmenter le nombre de points de contrôle

→ Subdivision de la courbe en deux courbes de même degré


P_1
P
P_2
$g(1/2)$
P_0
P_3
$g(1)$
$g(0)$
?
De Casteljau


4 pts
8 pts
first part
second part


4 pts
P_0
P_3
$g(1/2)$

ÉLÉVATION DE DEGRÉ

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_{n,i}(t) \cdot P_i$$

Evident …

$$\varphi_{n,i}(t) = t\varphi_{n,i}(t) + (1-t)\varphi_{n,i}(t)$$

$$\left| \begin{array}{l} t\varphi_{n,i}(t) = \dfrac{i+1}{n+1} t\varphi_{n+1,i+1}(t) \\[2ex] (1-t)\varphi_{n,i}(t) = \dfrac{n+1-i}{n+1} t\varphi_{n+1,i}(t) \end{array} \right.$$

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n+1} \varphi_{n+1,i}(t) \cdot P'_i$$

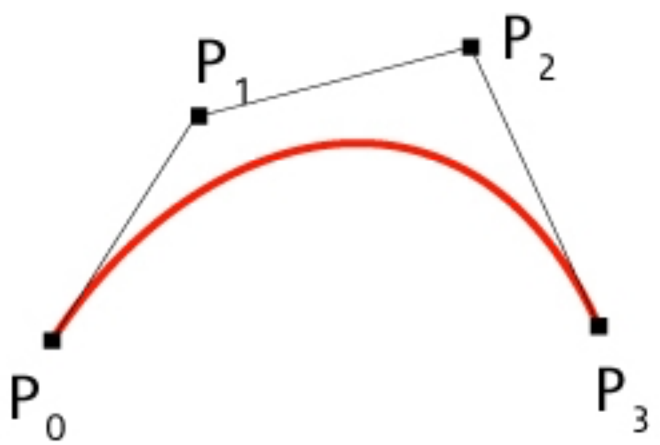
$$\left| \begin{array}{l} P'_0 = P_0 \\ P'_{n+1} = P_n \\ P'_i = \dfrac{i}{n+1} P_{i-1} + \dfrac{n+1-i}{n+1} P_i \end{array} \right.$$

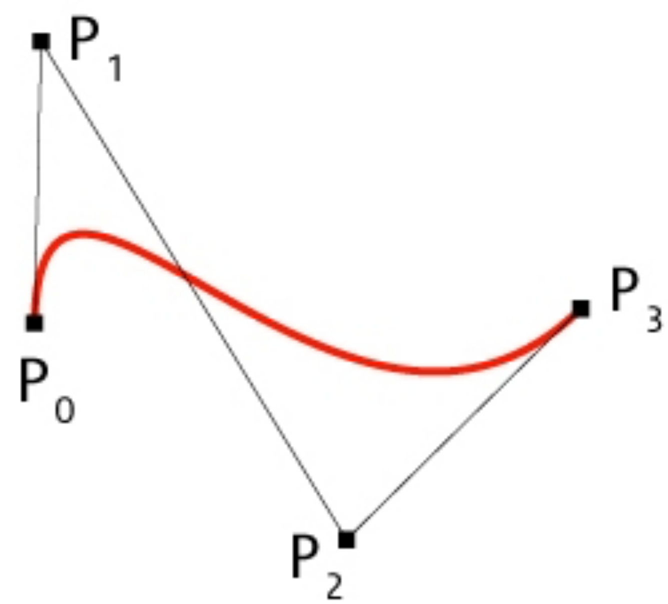
→ Augmenter le degré à $n+1$

→ Courbe inchangée

CONCLUSION

CONCLUSION





- $f(t)$ s'approche de P_i en $t = \dfrac{i}{n}$
- Pas de contrôle plus précis
- Paramétrisation « cachée »

PLUS DE . . . ?

Base B-spline

A suivre en 5A …

Sera aussi beaucoup plus technique (paramétrisation explicite)

CONCLUSION / RACCORDEMENT ?

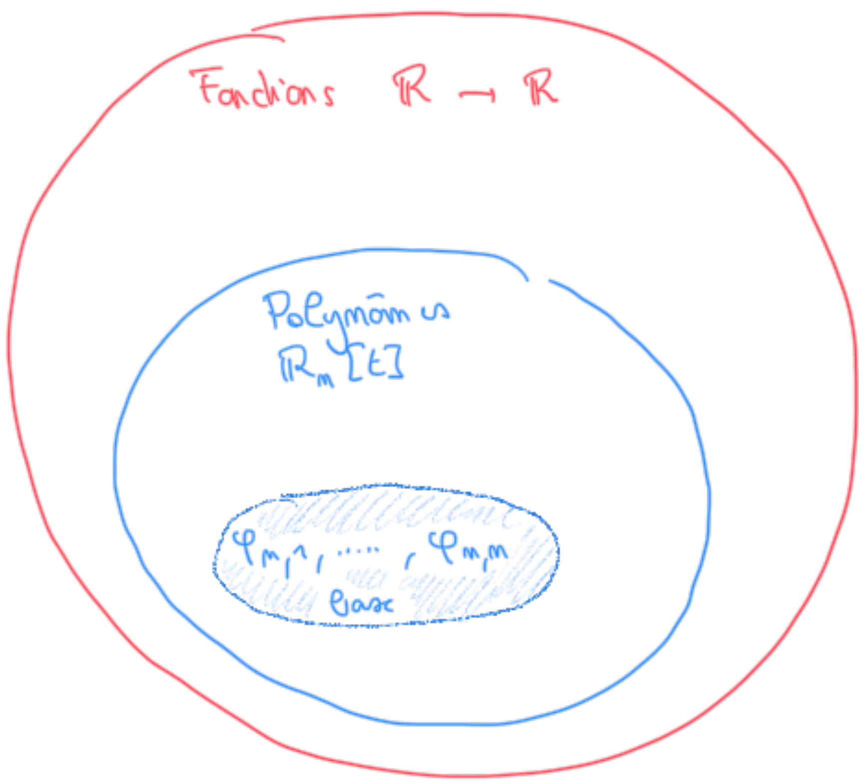
n pts de contrôle
→ d° n−1

2 pts contrôle
↓
d° 1

d° 3 — 4 pts contrôle

Surfaces paramétriques (Béziers)

Base de Bernstein …



Courbes (Béziers)

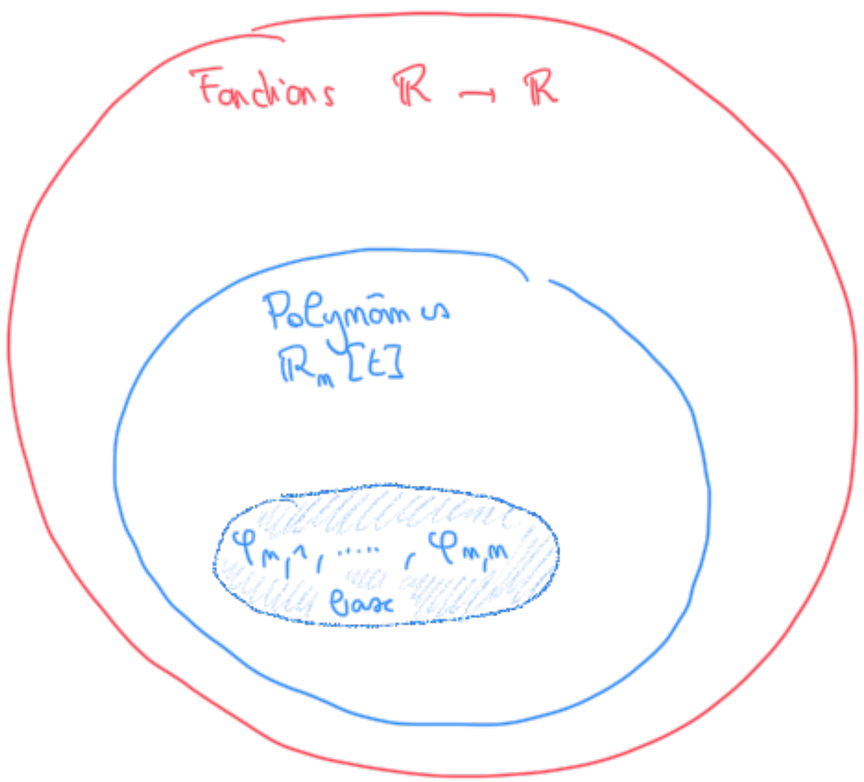
$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_{n,i}(t) \cdot P_i$$

Surfaces paramétriques

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$f(u, v) =$

Base de Bernstein …



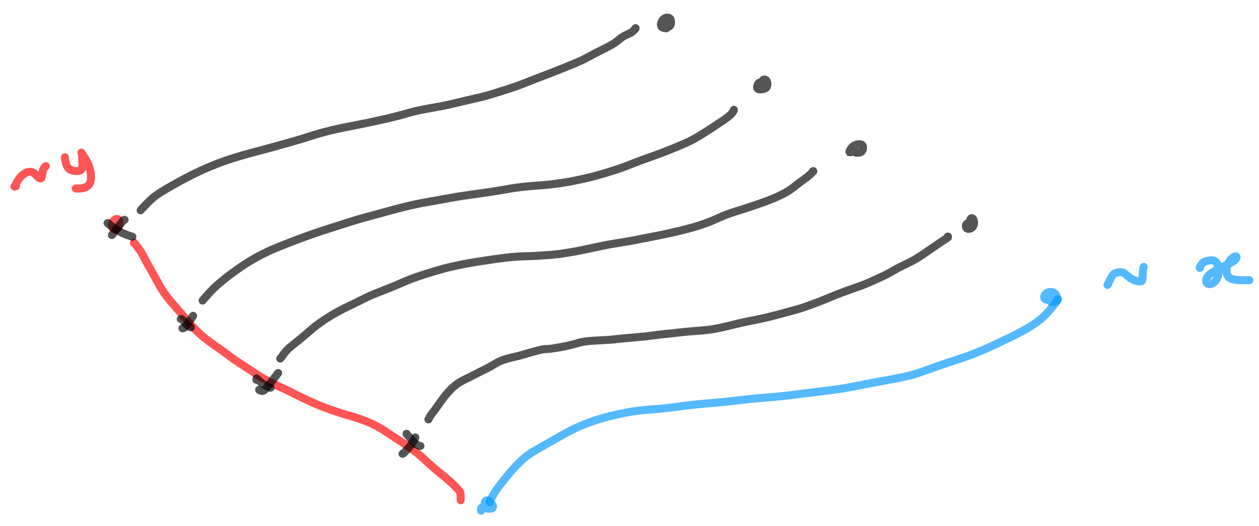
Courbes (Béziers)

$$f(t) = \sum_{i=0}^{m} \varphi_{m,i}(t) \cdot P_i$$

Surfaces paramétriques

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f(u,v) = \sum_i f_i(u,v) \cdot P_i$$

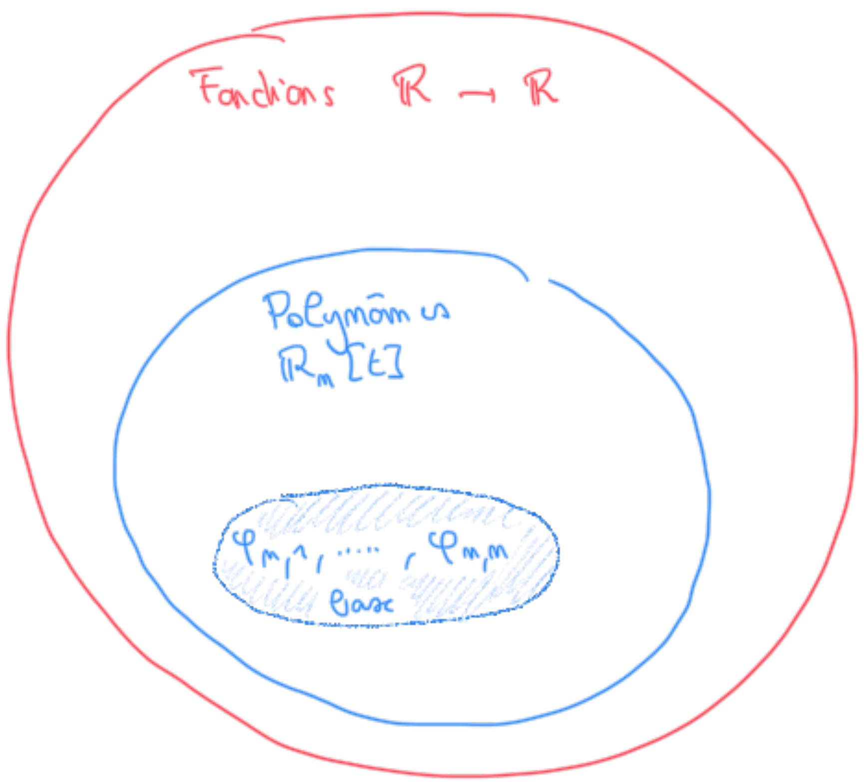


$\sim y$
$\sim x$

Base de Bernstein …

$$f, g \; : \; \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \longrightarrow \quad f \otimes g \; : \; \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(f \otimes g)(u, v) = f(u)g(v)$$



Courbes (Béziers)

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_{n,i}(t) \, . \, P_i$$

Surfaces paramétriques

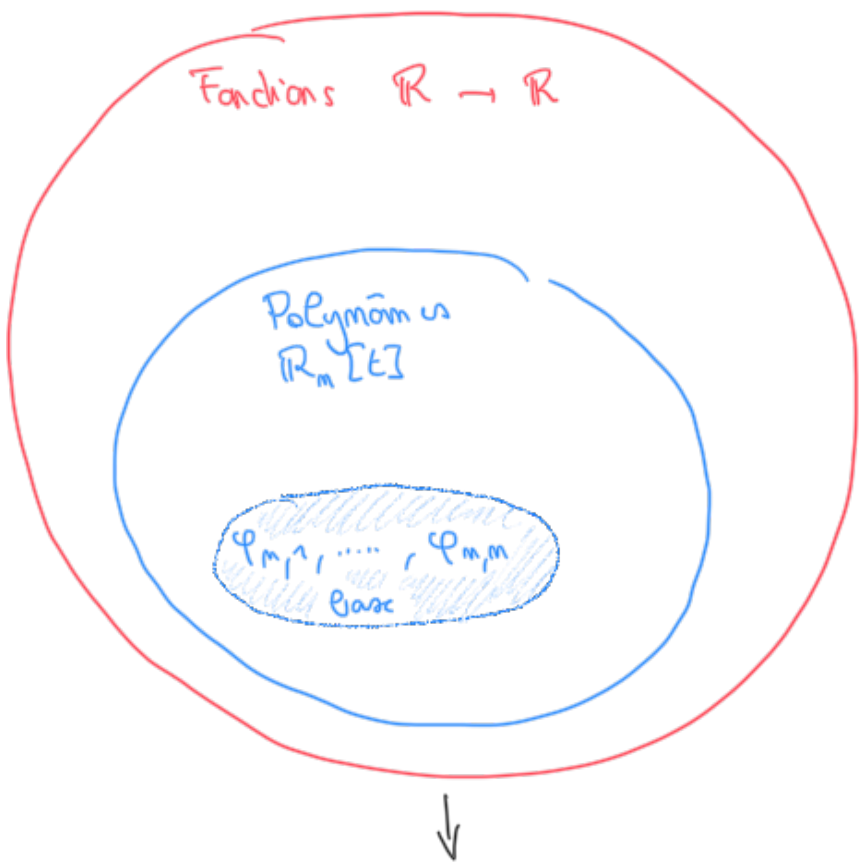
$$f \; : \; \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f(u, v) = \sum_i f_i(u, v) \cdot P_i$$

Base de Bernstein …

$f, g \, : \, \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\longrightarrow$ $f \otimes g \, : \, \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(f \otimes g)(u, v) = f(u)g(v)$



Courbes (Béziers)

$f(t) = \sum_{i=0}^{m} \varphi_{m,i}(t) \cdot P_i$

Surfaces paramétriques

$f \, : \, \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

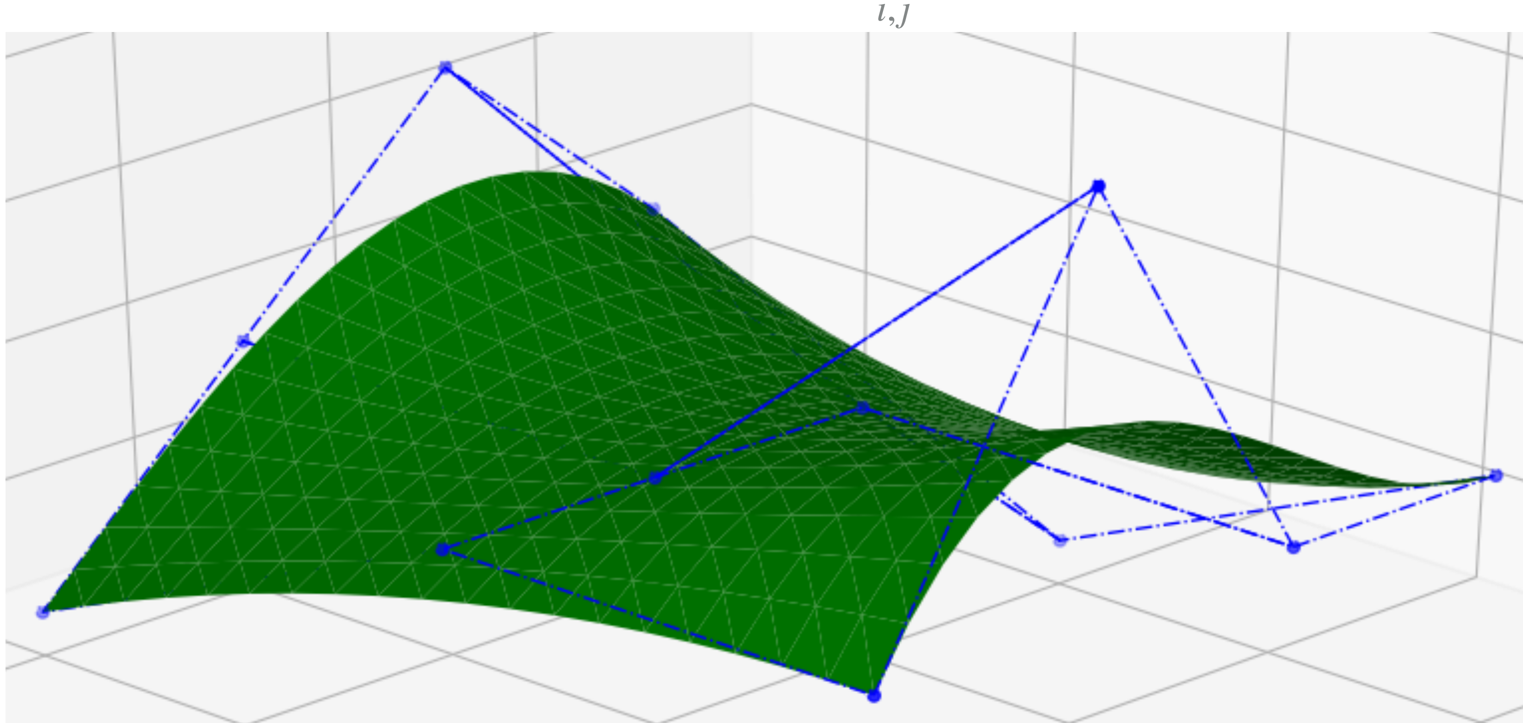
$$f(u, v) = \sum_{i,j} \varphi_{n,i}(u)\varphi_{m,j}(v) \cdot P_{i,j}$$

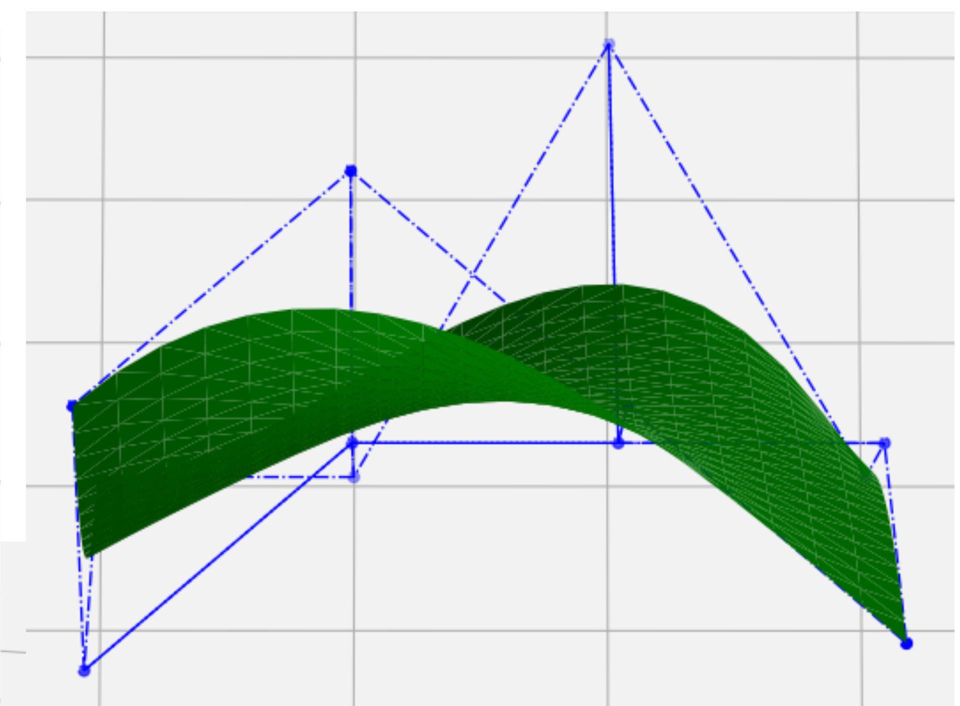
CARREAUX DE BÉZIERS

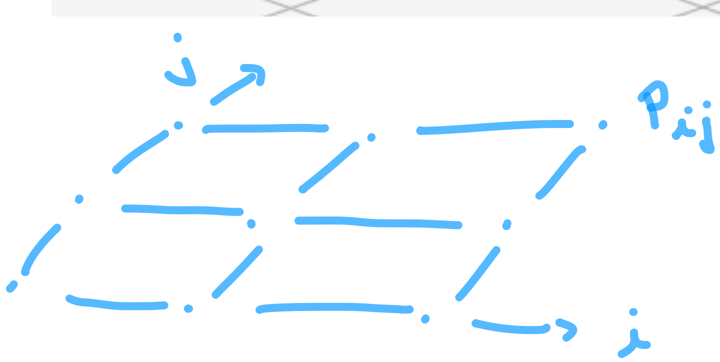
polygone de contrôle

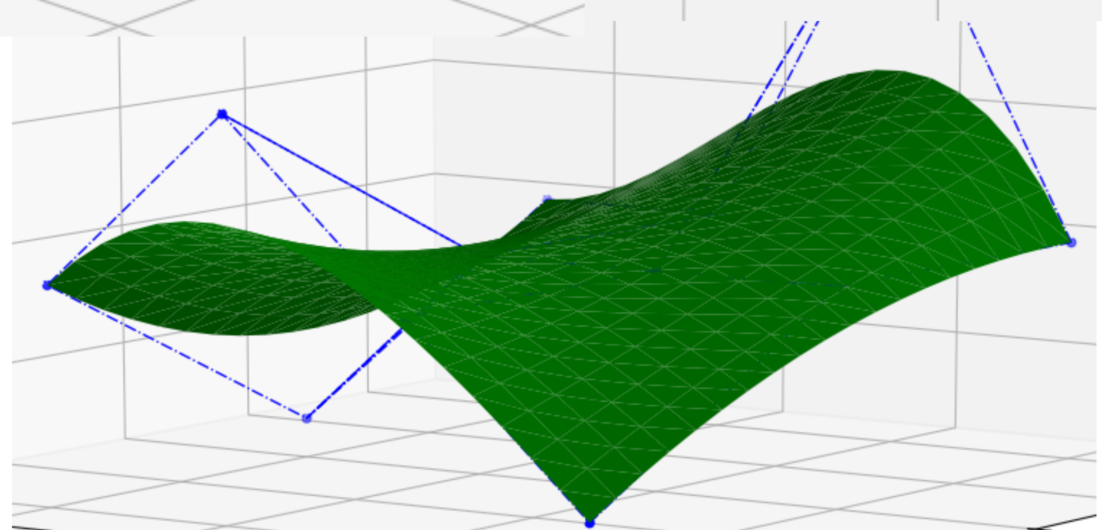
Surface produit tensoriel - carreaux de Béziers

$$f(u,v) = \sum_{i,j} \varphi_{n,i}(u)\varphi_{m,j}(v) \cdot P_{i,j}$$









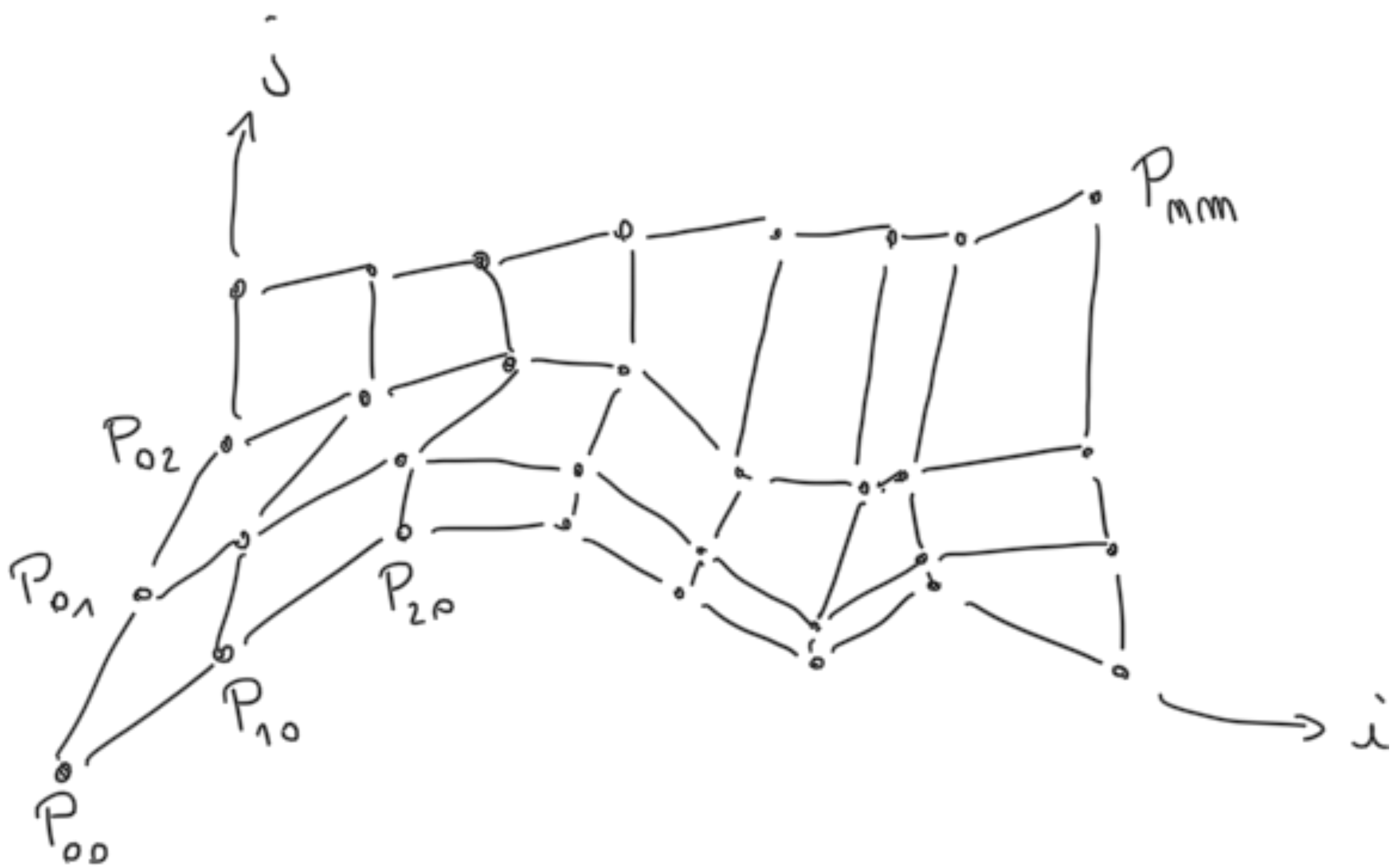
```
conda install -c orbingol geomdl
```

CARREAUX DE BÉZIERS

polygone de contrôle

Surface produit tensoriel - carreaux de Béziers

$$f(u,v) = \sum_{i,j} \varphi_{n,i}(u)\varphi_{m,j}(v) \cdot P_{i,j}$$



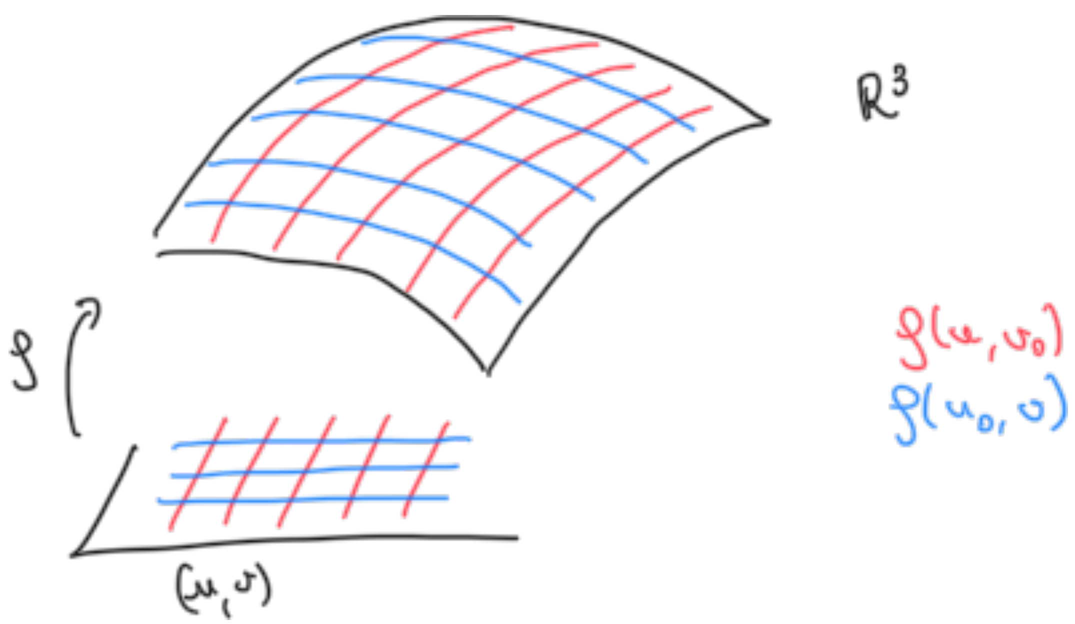

```
conda install -c orbingol geomdl
```

CARREAUX DE BÉZIERS

Surface produit tensoriel - carreaux de Béziers

$$f(u, v) = \sum_{i,j} \varphi_{n,i}(u)\varphi_{m,j}(v) \cdot P_{i,j}$$

Courbes
isoparamétriques



CARREAUX DE BÉZIERS

Surface produit tensoriel - carreaux de Béziers

polygone de contrôle

$$f(u,v) = \sum_{i,j} \varphi_{n,i}(u)\varphi_{m,j}(v) \cdot P_{i,j}$$

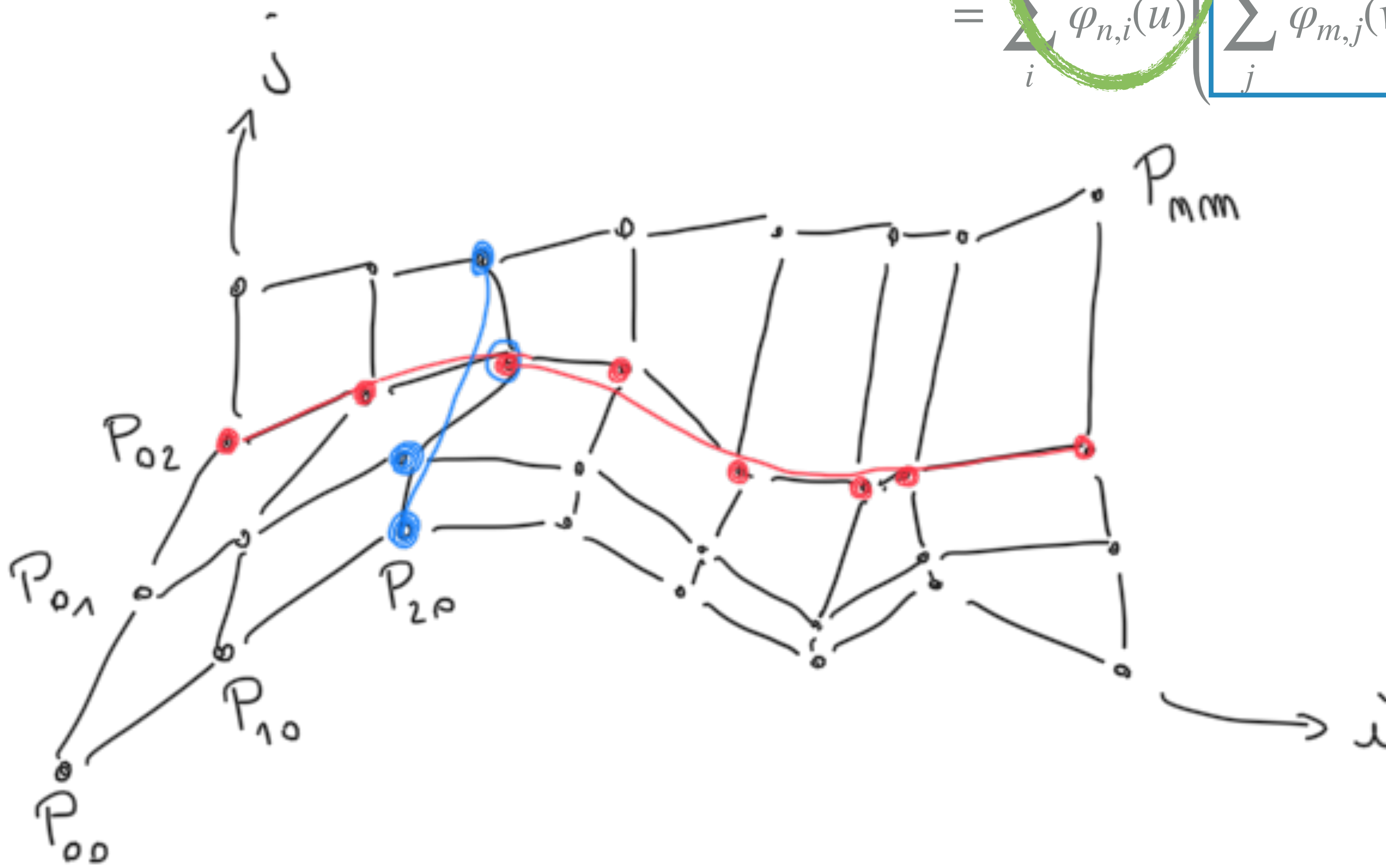
$$= \sum_{j} \varphi_{m,j}(v) \left(\boxed{\sum_{i} \varphi_{n,i}(u) \cdot P_{i,j}} \right)$$

$$= \sum_{i} \varphi_{n,i}(u) \left(\boxed{\sum_{j} \varphi_{m,j}(v) \cdot P_{i,j}} \right)$$

Courbes de Bézier

Pas sur la surface !

PAS COURBES ISOPARA-MÉTRIQUES



CARREAUX DE BÉZIERS / RACCORDEMENT