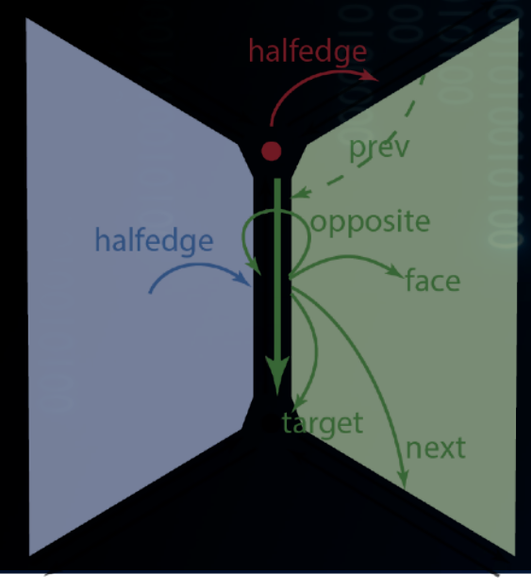
MODELISATION GEOMETRIQUE



Alexandra Bac

POLYTECH 4A INFORMATIQUE REVA

2 - MAILLAGES

apt-get install libcgal-dev / → Mac brew install cgal

Certaines illustrations sont issues du livre « polygon mesh processing »

« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - MAILLAGES

Chapitre 2

MAILLAGES

Chapitre 4

GÉOMÉTRIE DES SURFACES

Chapitre 1

MODÉLISATION DES SURFACES

Chapitre 3 (+ 5A)

SURFACES PARAMÉTRIQUES

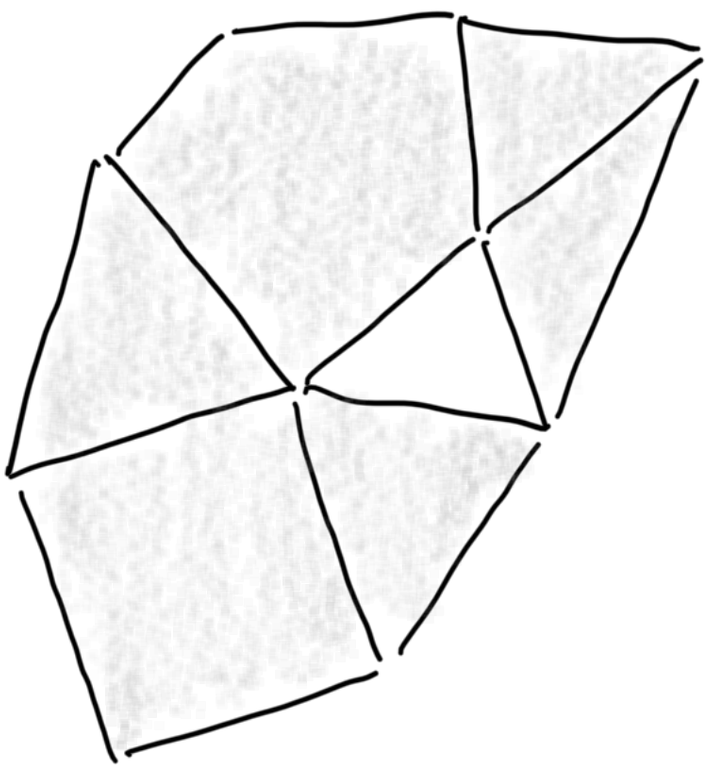
Chapitre 5

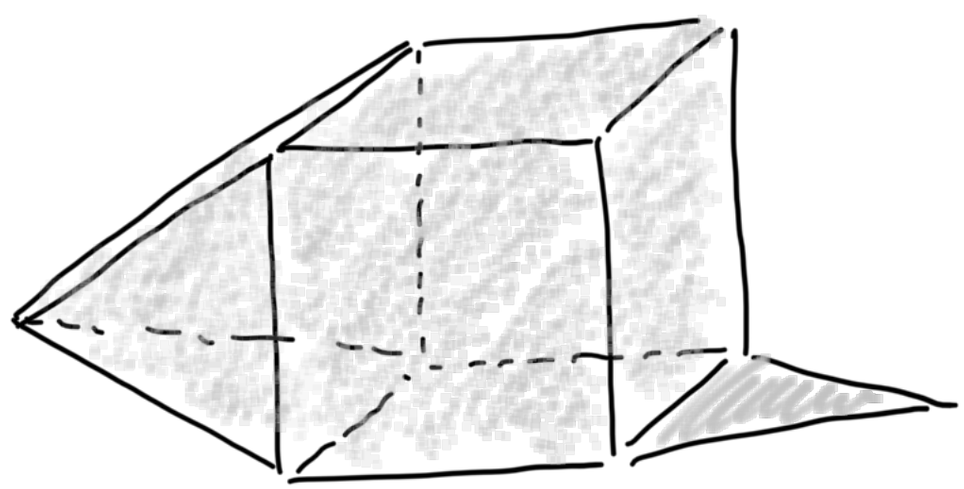
SURFACES IMPLICITES

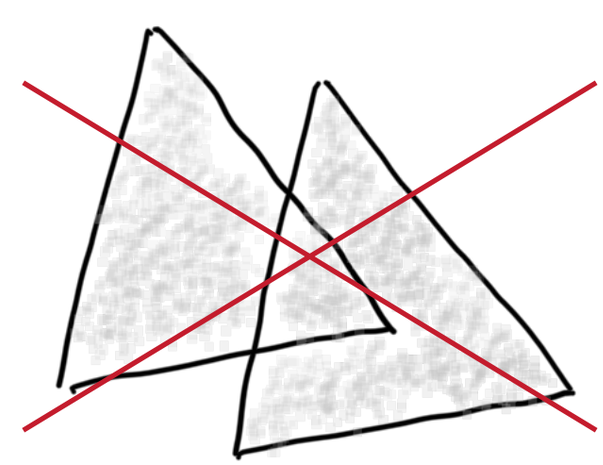
DÉFINITIONS, EXEMPLES

Maillage nD :

- Sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ composé de cellules élémentaires de dimension inférieure ou égale à n telles :
  - Toute face d'une cellule appartient également au maillage
  - Deux cellules s'intersectent selon une de leurs faces





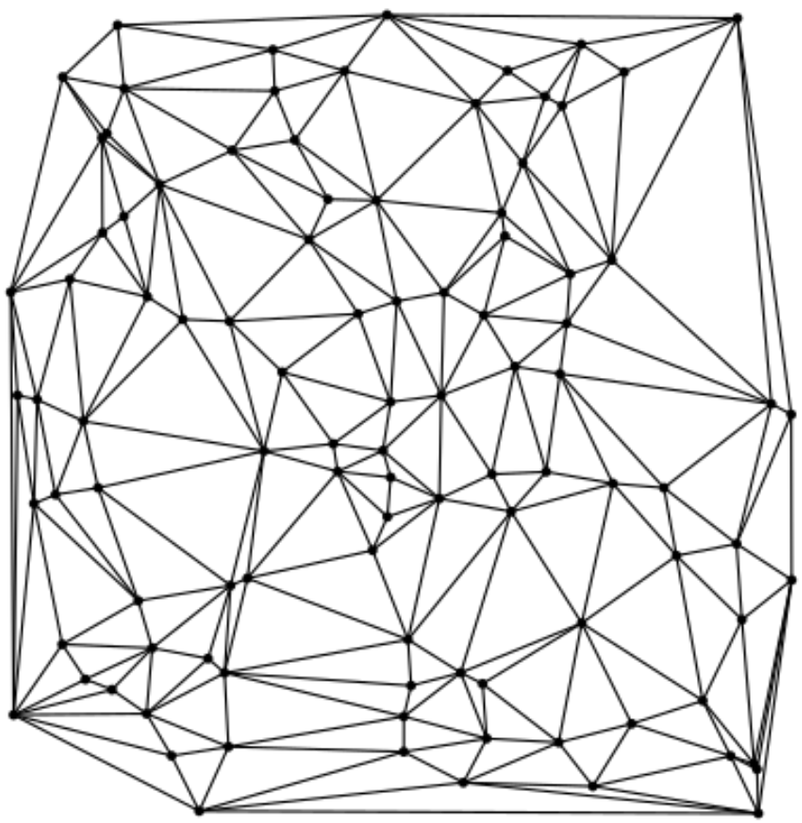


Maillage 2D :

- Sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ composé de cellules élémentaires de dimension inférieure ou égale à n telles :
  - Toute face d'une cellule appartient également au maillage
  - Deux cellules s'intersectent selon une de leurs faces

Maillage triangulaire ou triangulation (triangular mesh)

- 0-cellules : sommets (de $\mathbb{R}^2$)
  vertices
- 1-cellules : arêtes
  edges
- 2-cellules : triangles
  triangles



Maillage 2D :

- Sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ composé de cellules élémentaires de dimension inférieure ou égale à n telles :
  - Toute face d'une cellule appartient également au maillage
  - Deux cellules s'intersectent selon une de leurs faces

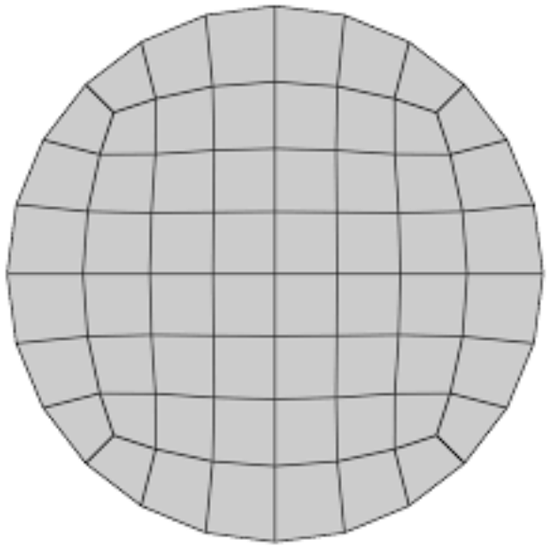
Maillage triangulaire ou triangulation (triangular mesh)

- 0-cellules : sommets (de $\mathbb{R}^2$)
- 1-cellules : arêtes
- 2-cellules : triangles

Maillage quadrangulaires ou cartésien (quad mesh)

- 0-cellules : sommets (de $\mathbb{R}^2$)
- 1-cellules : arêtes
- 2-cellules : carrés

Squares



Maillage 2D :

- Sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ composé de cellules élémentaires de dimension inférieure ou égale à n telles :
  - Toute face d'une cellule appartient également au maillage
  - Deux cellules s'intersectent selon une de leurs faces

Maillage triangulaire ou triangulation (triangular mesh)

- 0-cellules : sommets (de $\mathbb{R}^2$)
- 1-cellules : arêtes
- 2-cellules : triangles

75 %

Maillage quadrangulaires ou cartésien (quad mesh)

- 0-cellules : sommets (de $\mathbb{R}^2$)
- 1-cellules : arêtes
- 2-cellules : carrés

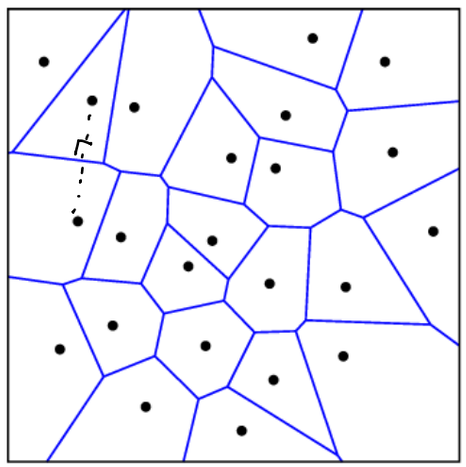
10 %

Maillage polyédriques

- 0-cellules : sommets (de $\mathbb{R}^2$)
- 1-cellules : arêtes
- 2-cellules : polygones

5 %

chemical
physical
simulation

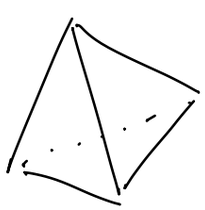


Maillage 3D :

- Sous ensemble de $\mathbb{R}^3$ composé de cellules élémentaires de dimension inférieure ou égale à n telles :
  - Toute face d'une cellule appartient également au maillage
  - Deux cellules s'intersectent selon une de leurs faces

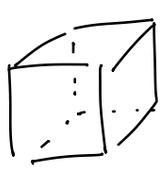
Maillage tétraédrique

- 0-cellules : sommets (de $\mathbb{R}^3$)
- 1-cellules : arêtes
- 2-cellules : triangles
- **3-cellules : tétraèdres**



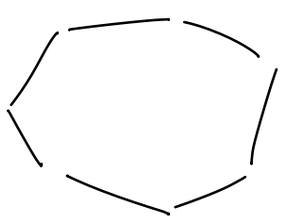
Maillage hexaédrique ou cartésien (hex mesh)

- 0-cellules : sommets (de $\mathbb{R}^3$)
- 1-cellules : arêtes
- 2-cellules : carrés
- **3-cellules : cubes (hexaèdres)**

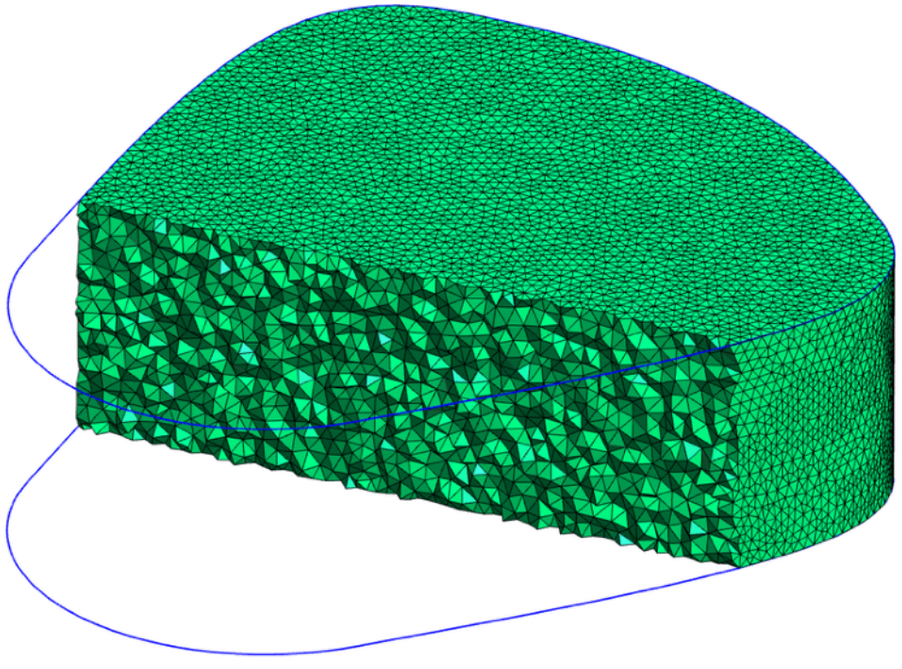


Maillage polyédriques

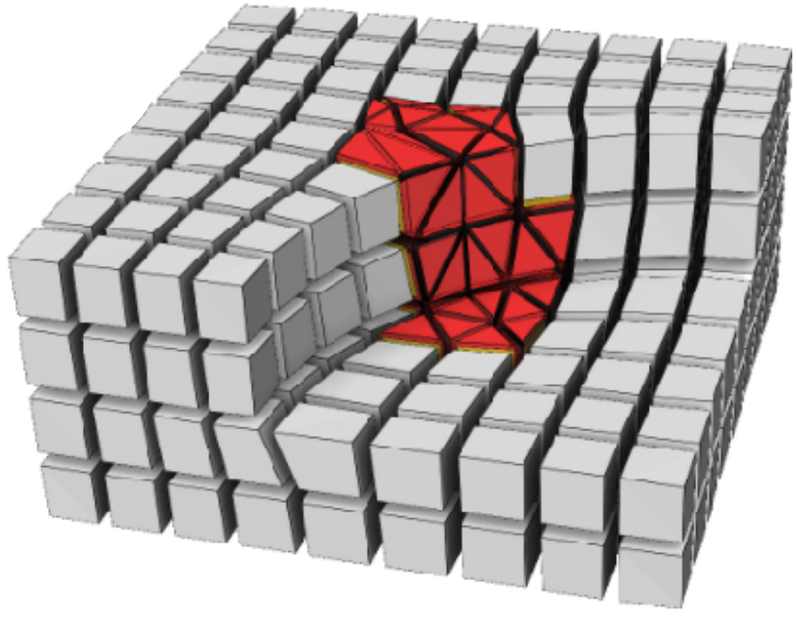
- 0-cellules : sommets (de $\mathbb{R}^3$)
- 1-cellules : arêtes
- 2-cellules : polygone
- **3-cellules : polyèdres**



« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - MAILLAGES



- Maillage tétraédrique -



- Maillage hex dominant -

<u>Maillage tétraédrique</u>

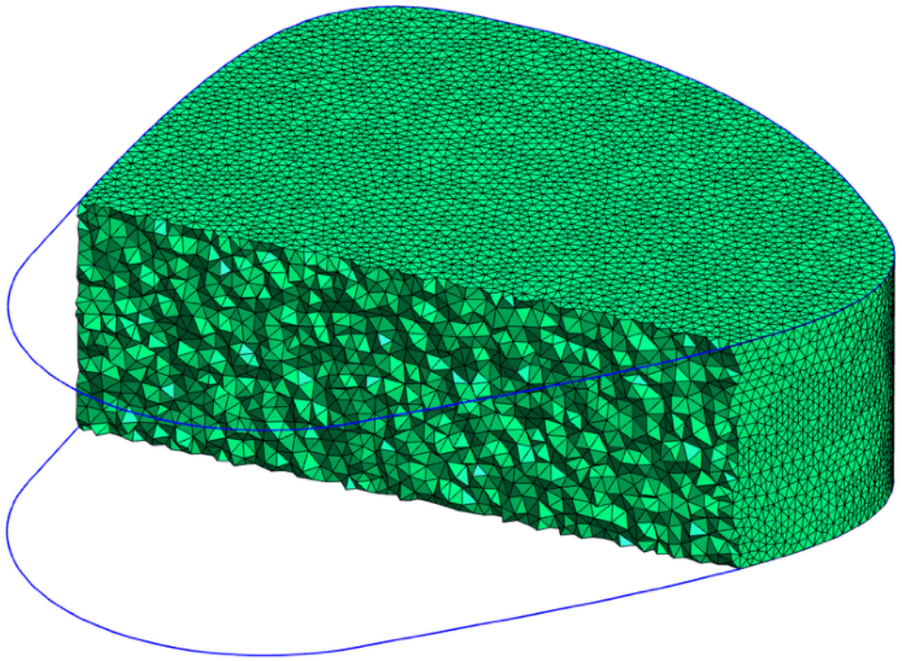
- 0-cellules : sommets (de $\mathbb{R}^3$)
- 1-cellules : arêtes
- 2-cellules : triangles
- **3-cellules : tétraèdres**

<u>Maillage hexaédrique ou cartésien</u> (hex mesh)

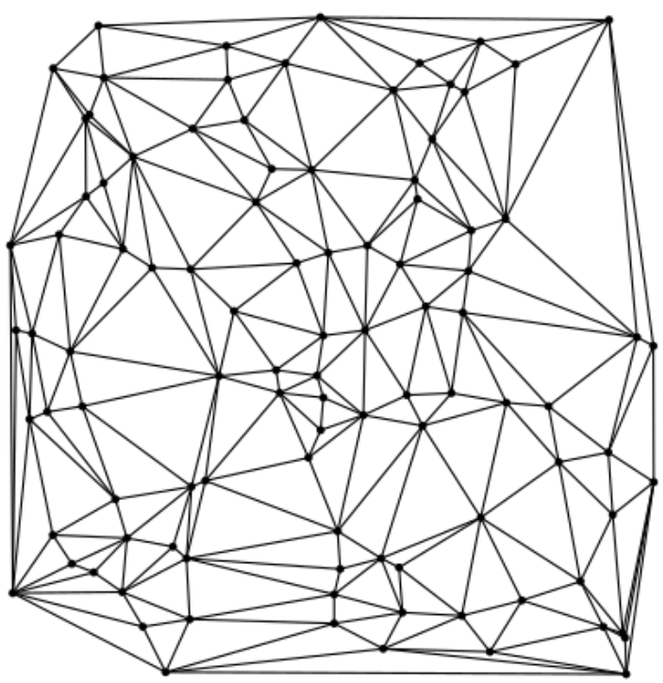
- 0-cellules : sommets (de $\mathbb{R}^3$)
- 1-cellules : arêtes
- 2-cellules : carrés
- **3-cellules : cubes (hexaèdres)**

<u>Maillage polyédriques</u>

- 0-cellules : sommets (de $\mathbb{R}^3$)
- 1-cellules : arêtes
- 2-cellules : polygone
- **3-cellules : polyèdres**



- Maillage tétraédrique 3D -



- Maillage triangulaire 2D -

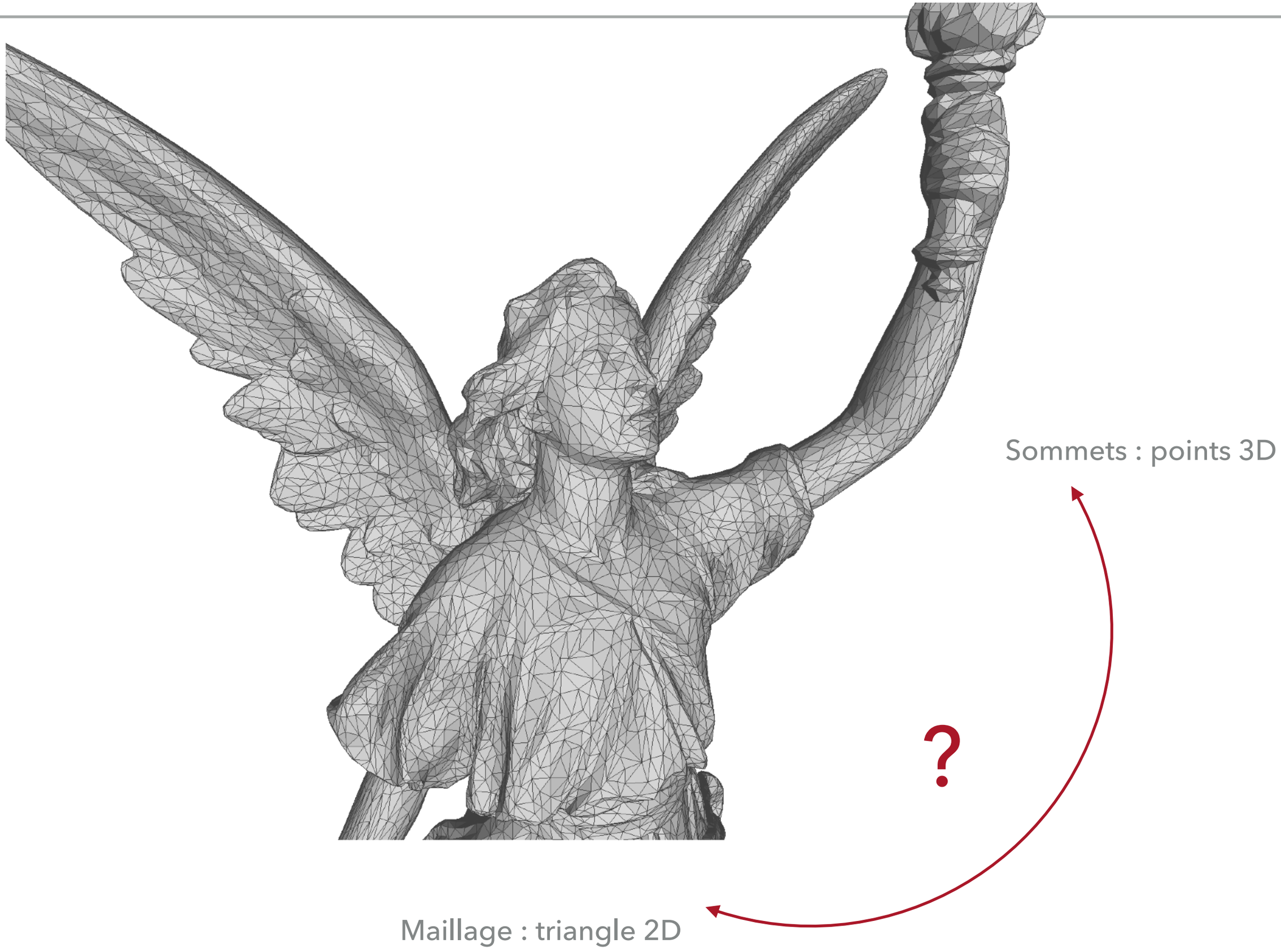
Existence :

Tout domaine est maillable par un complexe simplicial (maillage triangulaire en 2D, tétraédrique en 3D, etc. …)

Maillages 2D triangulaires / 3D tétraédriques très utilisés

(cf. cours suivant)

« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - MAILLAGES



« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - MAILLAGES

Sommets : points 3D

Maillage 2,5 D

- Très utilisés
- Moins de propriétés

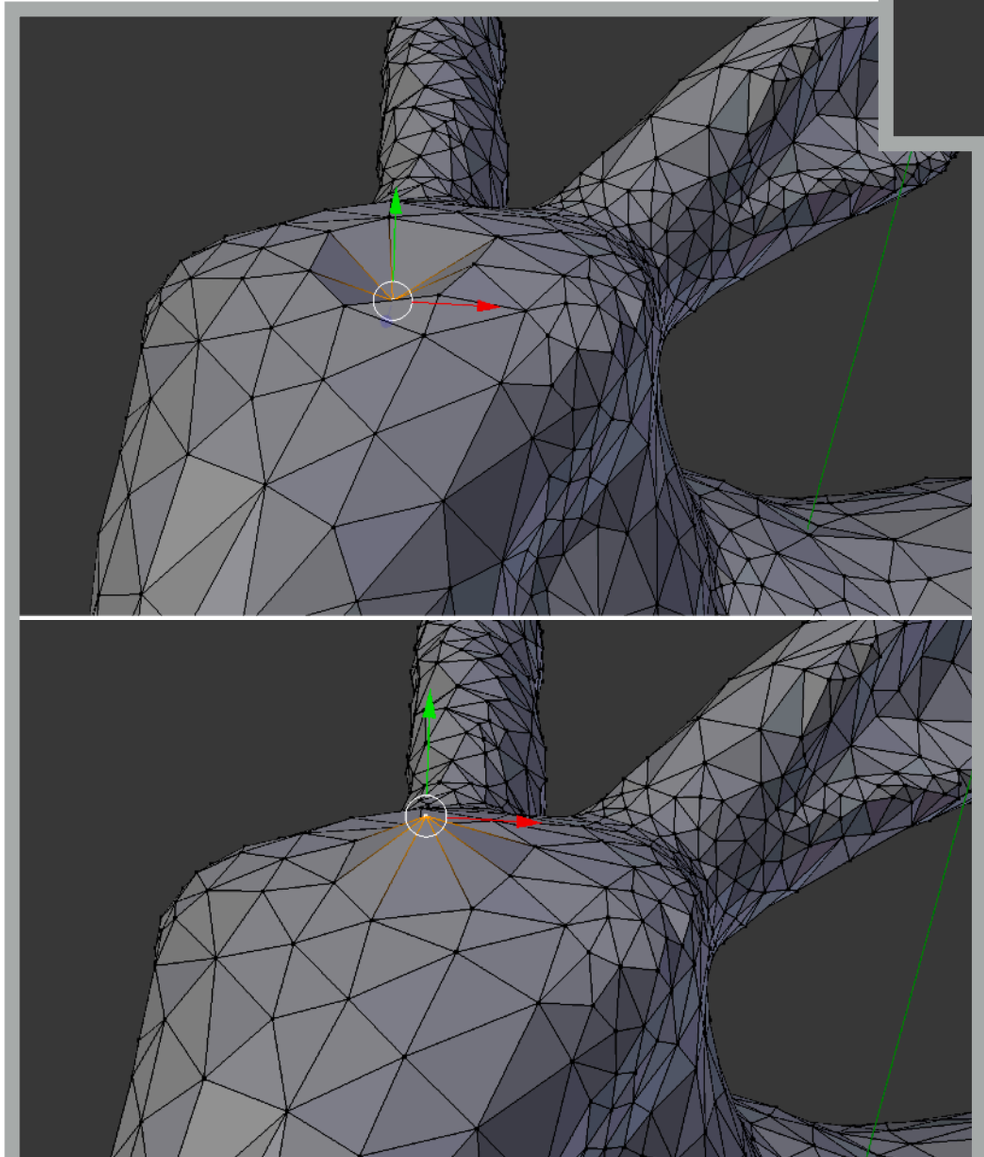
Maillage : triangle 2D

GÉOMÉTRIE / TOPOLOGIE

Géométrie
Coordonnées des points

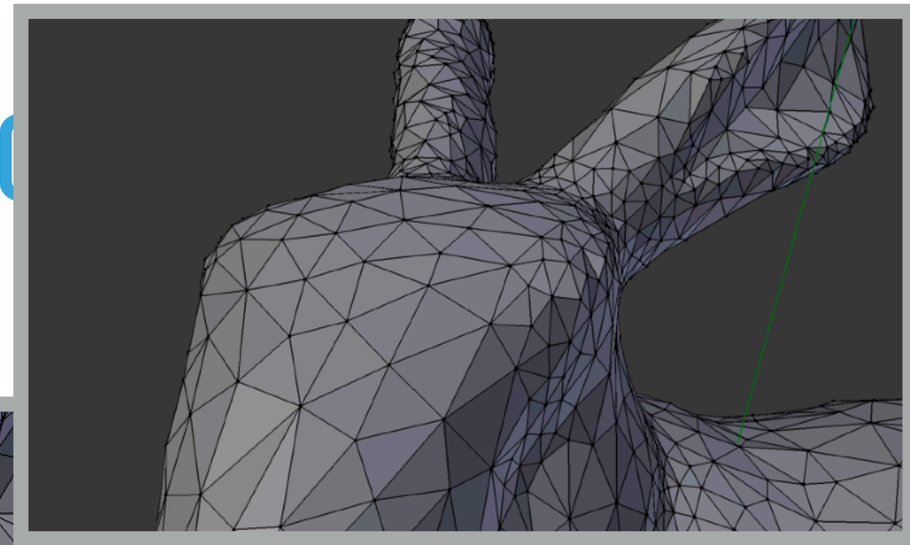
Topologie
Adjacence, connectivité des cellules

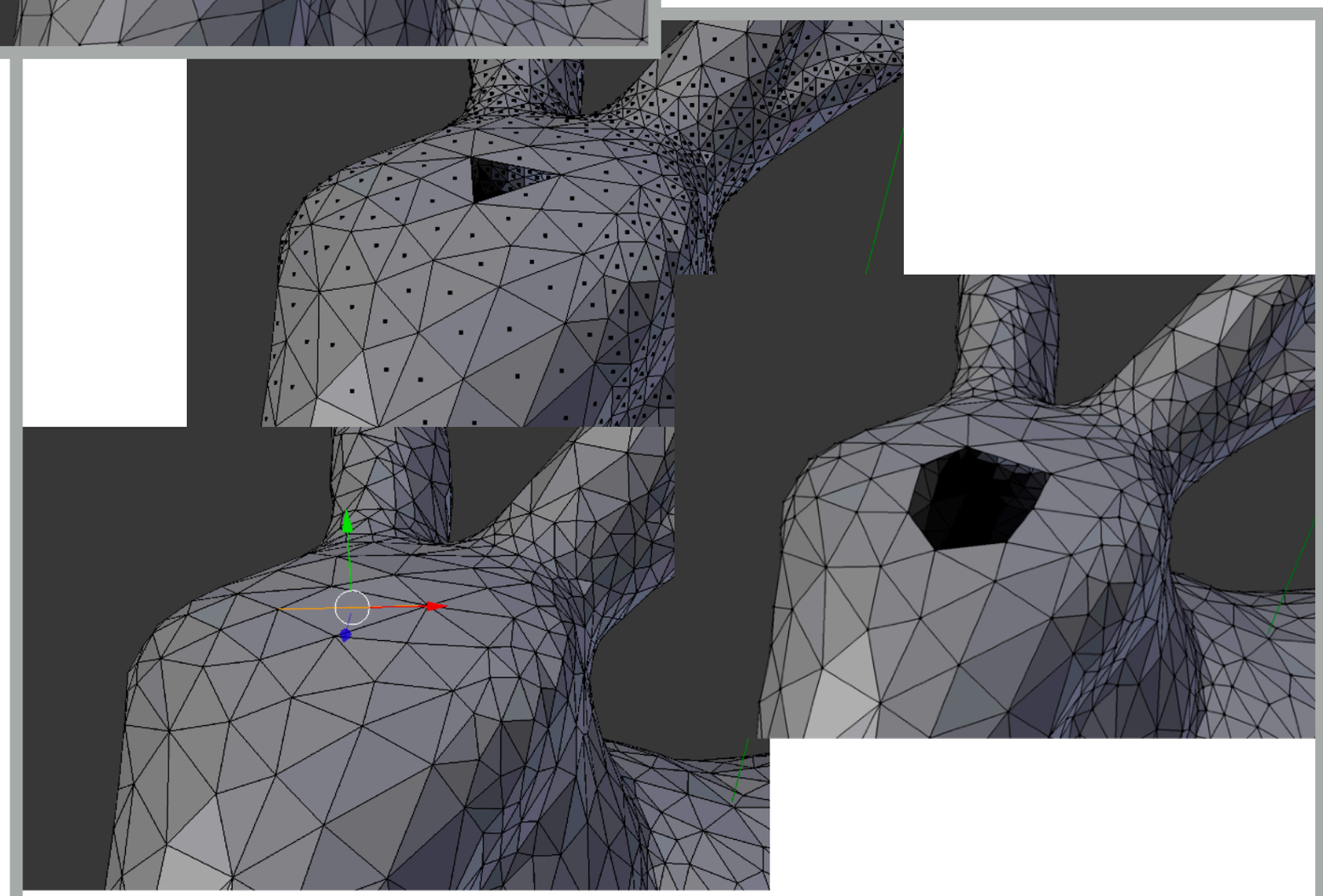
GÉOMÉTRIE / TOPOLOG



Géométrie

Coordonnées des points

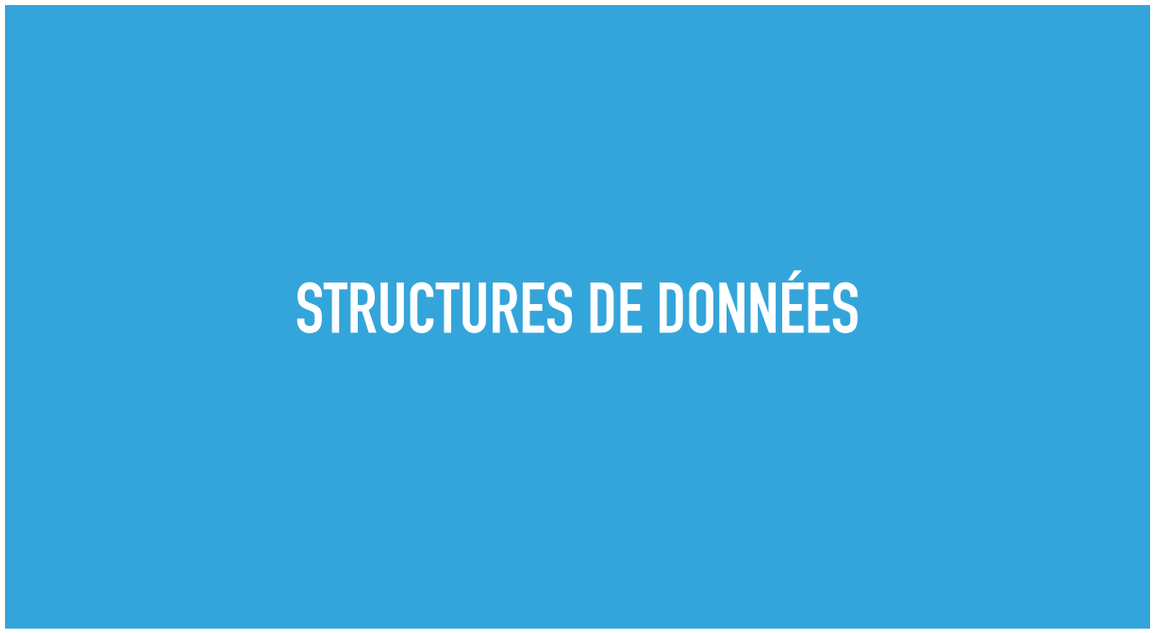




Topologie

Adjacence, connectivité des cellules

GÉOMÉTRIE / TOPOLOGIE



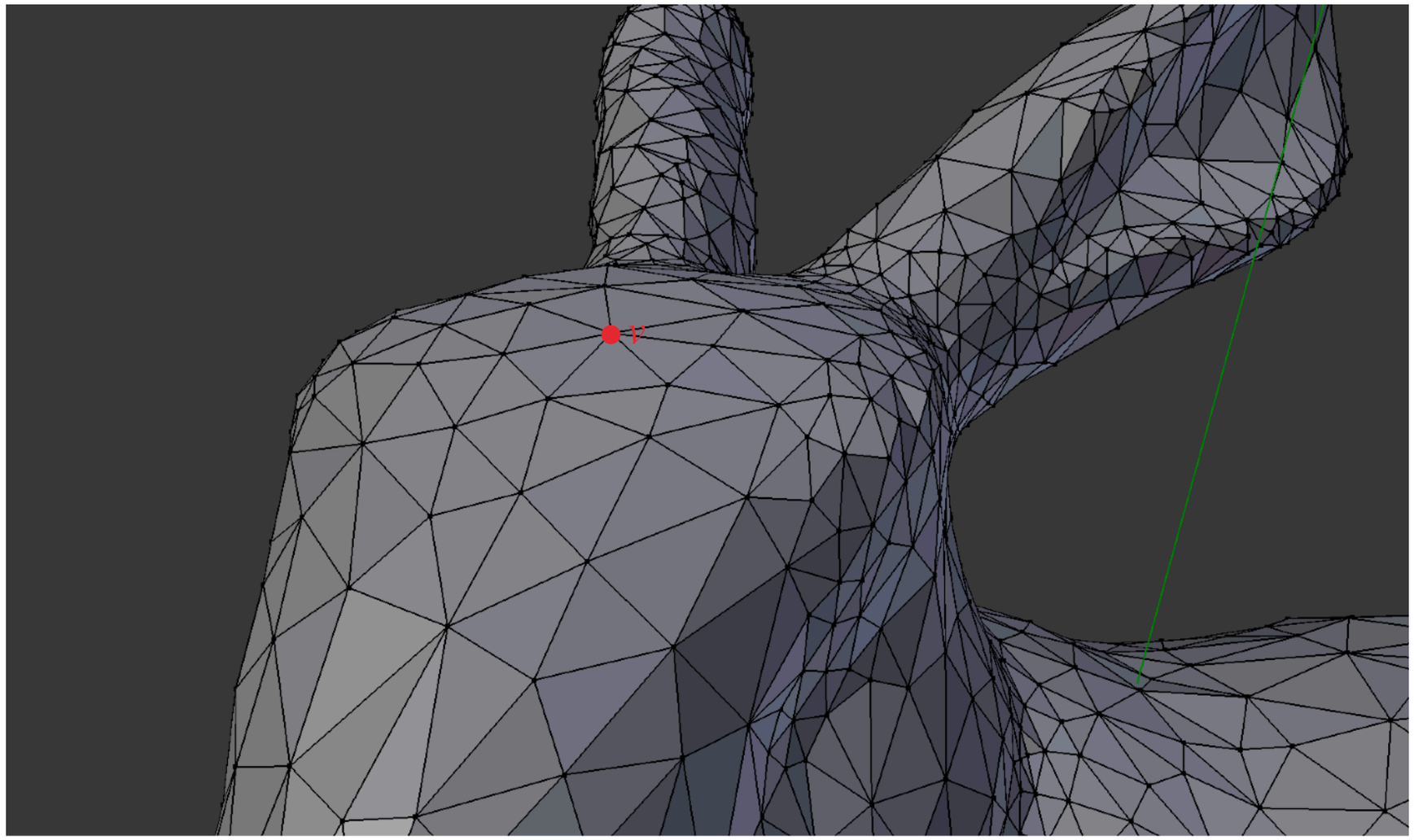
Géométrie
Coordonnées des points

Topologie
Adjacence, connectivité des cellules

CODAGE DES MAILLAGES

QUELLE REPRÉSENTATION DES MAILLAGES ?

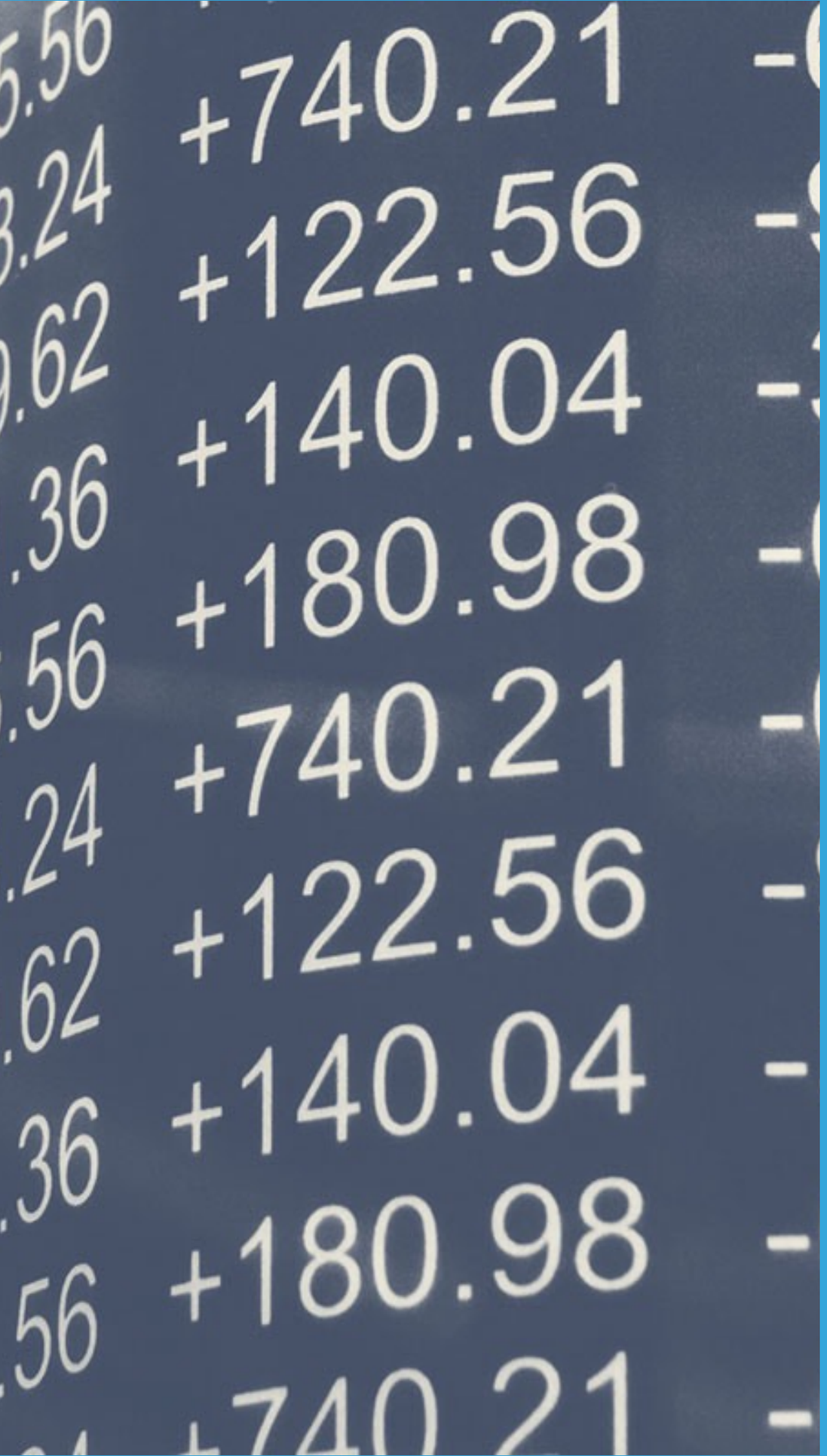
Parcourir les sommets voisins de v ?



→ Accès efficace à la topologie …

QUELLE REPRÉSENTATION DES MAILLAGES ?

- Stockage fichier
  - Pour le stockage / transmission
  - Représentation compacte
- Stockage mémoire
  - Pour la conception d'algorithmes
  - Parcours des maillages
  - Modification de la topologie
  - Modification de la géométrie



CODAGE FICHIERS

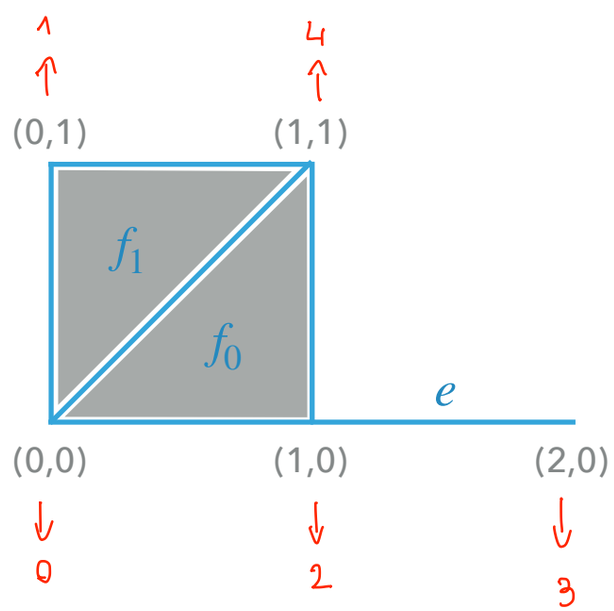
REPRÉSENTATION DES MAILLAGES : FICHIERS

Stockage compact des informations :

- **Liste des sommets**
- [opt] Liste d'**arêtes** : couple d'indices de sommets
- Liste des **faces** : triplets d'indices de sommets

- Plus … couleurs, normales, textures …

indices



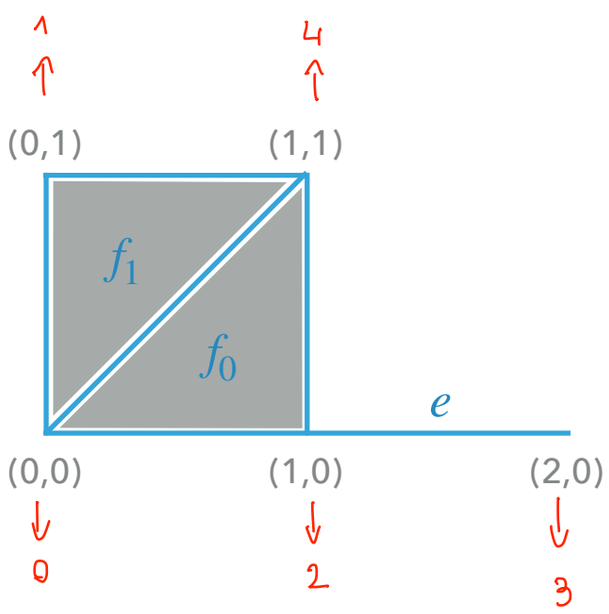
$v_0 \leftarrow$ 0 0
$v_1 \leftarrow$ 0 1
$v_2 \leftarrow$ 1 0
$v_3 \leftarrow$ 2 0
$v_4 \leftarrow$ 1 1
$e \leftarrow$
$f_0 \leftarrow$
$f_1 \leftarrow$

REPRÉSENTATION DES MAILLAGES : FICHIERS

Stockage compact des informations :

- **Liste des sommets**
- [opt] Liste d'**arêtes** : couple d'indices de sommets
- Liste des **faces** : triplets d'indices de sommets

- Plus … couleurs, normales, textures …



$v_0 \leftarrow$ 0 0
$v_1 \leftarrow$ 0 1
$v_2 \leftarrow$ 1 0
$v_3 \leftarrow$ 2 0
$v_4 \leftarrow$ 1 1
$e \leftarrow$ 2 3
$f_0 \leftarrow$ 0 2 4
$f_1 \leftarrow$ 0 4 1

Nombreux formats
de fichiers, mais globalement
tous codent la même information

REPRÉSENTATION DES MAIL

Format .obj (et .mtl)

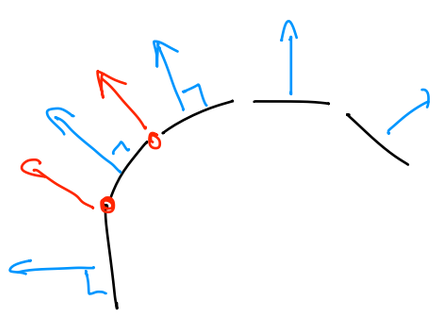
Sommet
  v 1.0 0.0 0.0
Texture
  vt 1.0 0.0
Normale
  vn 0.0 1.0 0.0
Face
  f v1/vt1/vn1 v2/vt2/vn2 v3/vt3/vn3
Désignation objets
  o [nom objet]

```
# cube.obj
#

o cube
usemtl cube.mtl

v  0.0  0.0  0.0
v  0.0  0.0  1.0
v  0.0  1.0  0.0
v  0.0  1.0  1.0
v  1.0  0.0  0.0
v  1.0  0.0  1.0
v  1.0  1.0  0.0
v  1.0  1.0  1.0

vt 0.25 0.0
vt 0.5  0.0
vt 0    0.25
vt 0.25 0.25
vt 0.5  0.25
vt 0.75 0.25
vt 0.0  0.5
vt 0.25 0.5
vt 0.5  0.5
vt 0.75 0.5
vt 0.25 0.75
vt 0.5  0.75
vt 0.25 1.0
vt 0.5  1.0

vn  0.0  0.0  1.0
vn  0.0  0.0 -1.0
vn  0.0  1.0  0.0
vn  0.0 -1.0  0.0
vn  1.0  0.0  0.0
vn -1.0  0.0  0.0

f  1/11/2  7/14/2  5/12/2
f  1/11/2  3/13/2  7/14/2
f  1/7/6  4/4/6  3/3/6
f  1/7/6  2/8/6  4/4/6
f  3/1/3  8/5/3  7/2/3
f  3/1/3  4/4/3  8/5/3
f  5/10/5  7/6/5  8/5/5
f  5/10/5  8/5/5  6/9/5
f  1/11/4  5/12/4  6/9/4
f  1/11/4  6/9/4  2/8/4
f  2/8/1  6/9/1  8/5/1
f  2/8/1  8/5/1  4/4/1
```

opt. information → texture, → normal

~ f 1 7 5

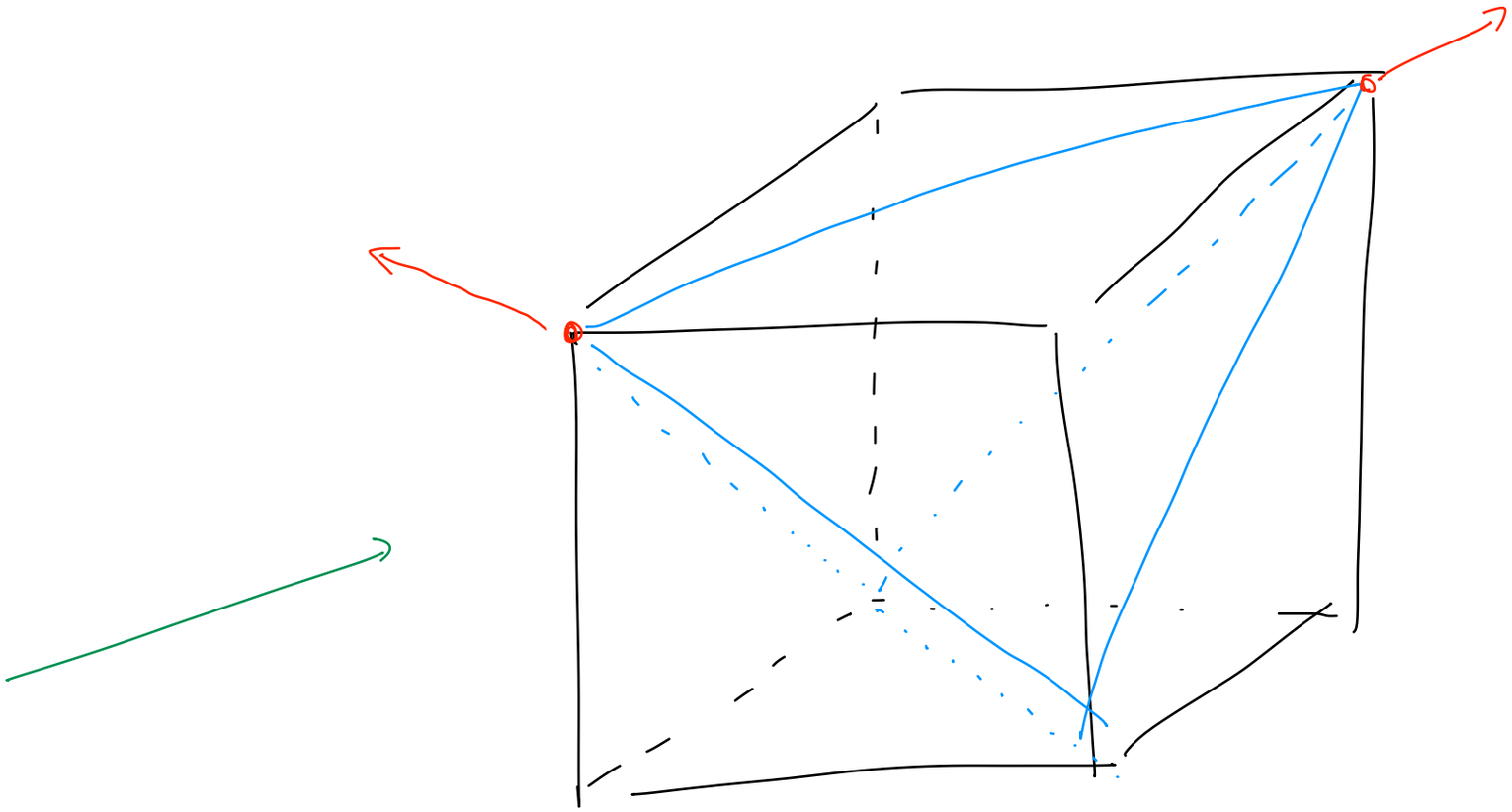
Format .ply (Stanford)



normals on faces

estimate normals on vertices

~ average of norm. on neigh. faces



REPRÉSENTATION DES MAILLAGES : FICHIERS

Format .obj (et .mtl)

Sommet
v 1.0 0.0 0.0
Texture
vt 1.0 0.0
Normale
vn 0.0 1.0 0.0
Face
f v1/vt1/vn1 v2/vt2/vn2 v3/vt3/vn3
Désignation objets
o [nom objet]

Format .off

Format .ply (Stanford)

Polygon file format

- Enrichit le format obj
- Propriétés facilement définissables
- Création simple de groupes d'objets

Format .stl

REPRÉSENTATION DES MAILLAGES : FICHIERS

Fo

```
OFF
# cube.off
# A cube

8 6 12
 1.0  0.0 1.4142
 0.0  1.0 1.4142
-1.0  0.0 1.4142
 0.0 -1.0 1.4142
 1.0  0.0 0.0
 0.0  1.0 0.0
-1.0  0.0 0.0
 0.0 -1.0 0.0
4  0 1 2 3  255 0 0 #red
4  7 4 0 3  0 255 0 #green
4  4 5 1 0  0 0 255 #blue
4  5 6 2 1  0 255 0
4  3 2 6 7  0 0 255
4  6 5 4 7  255 0 0
```

Fo

Polygon file format

- Enrichit le format obj
- Propriétés facilement définissables
- Création simple de groupes d'objets

Format .off

Format de fichiers très simple de codage de maillages :

- header
- nbr_sommets nbr_arêtes nbr_faces
- liste des coordonnées des sommets
- liste des faces :
  nbr_sommets indices sommets couleur

Format .stl

REPRÉSENTATION DES MAILLAGES : FICHIERS

Format .obj (et .mtl)

Sommet
v 1.0 0.0 0.0
Texture
vt 1.0 0.0
Normale
vn 0.0 1.0 0.0
Face
f v1/vt1/vn1 v2/vt2/vn2 v3/vt3/vn3
Désignation objets
o [nom objet]

Format .off

Format de fichiers très simple de codage de maillages :

- header
- nbr_sommets nbr_arêtes nbr_faces
- liste des coordonnées des sommets
- liste des faces :
  nbr_sommets indices sommets couleur

Format .stl

```
solid name

facet normal ni nj nk
    outer loop
        vertex v1x v1y v1z
        vertex v2x v2y v2z
        vertex v3x v3y v3z
    endloop
endfacet
```

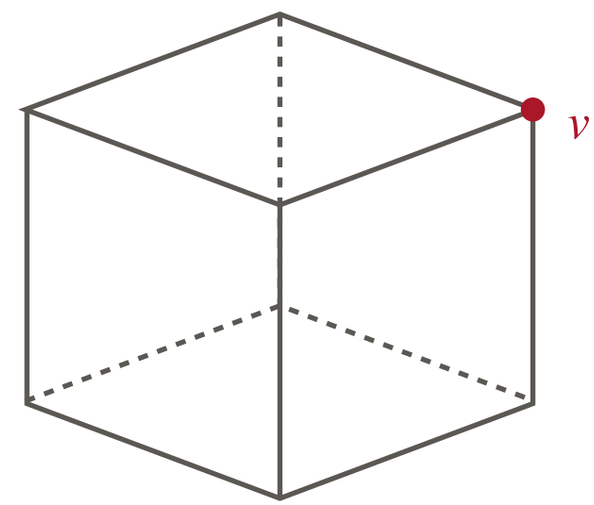
Format de codage d'une soupe de polygones

- Utile en acquisition 3D (laser, caméras 3D …) / impression 3D
- A éviter sinon !

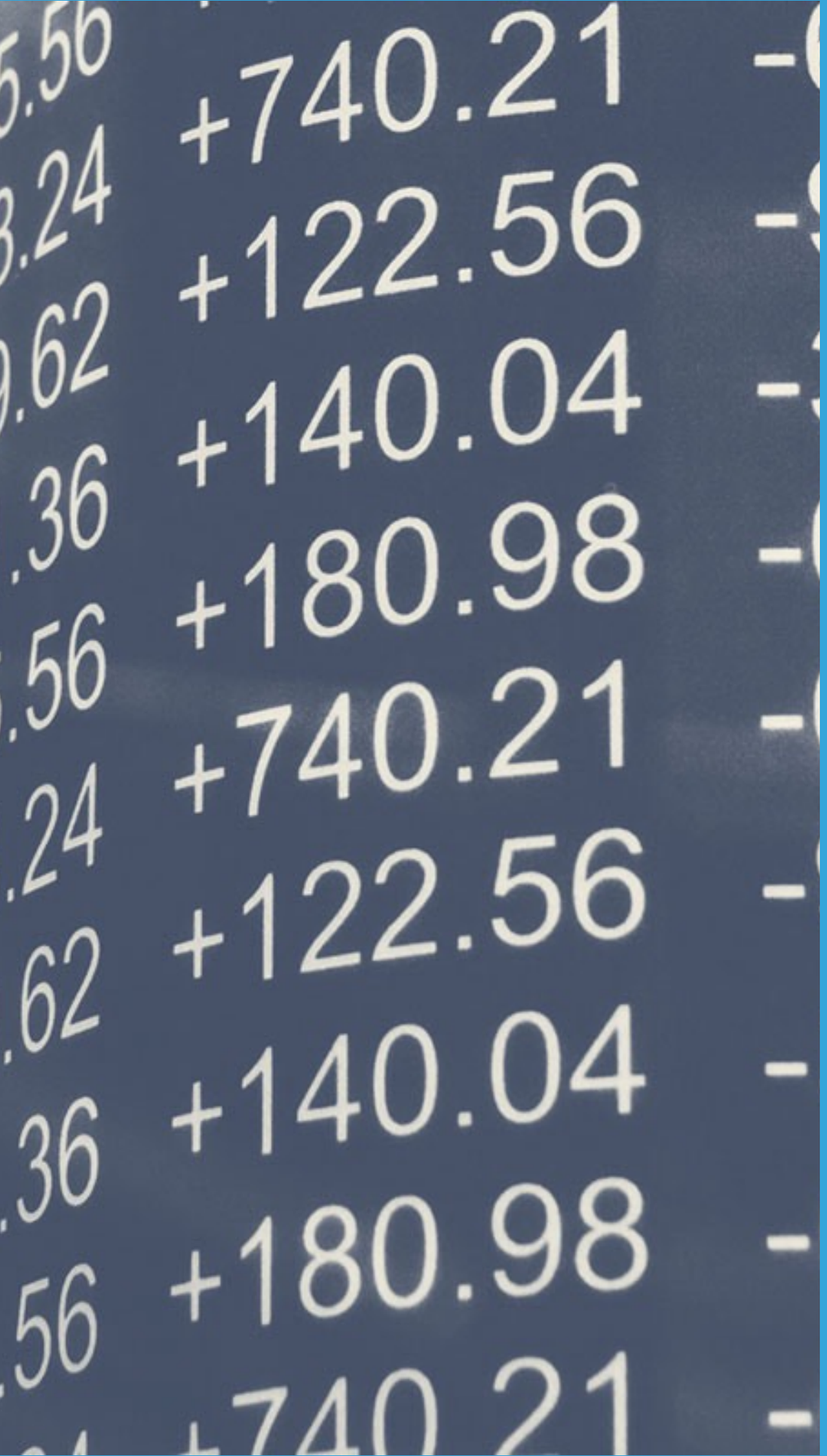
REPRÉSENTATION DES MAILLAGES : FICHIERS

```
OFF
# cube.off
# A cube

8 6 12
 1.0  0.0 1.4142
 0.0  1.0 1.4142
-1.0  0.0 1.4142
 0.0 -1.0 1.4142
 1.0  0.0 0.0
 0.0  1.0 0.0
-1.0  0.0 0.0
 0.0 -1.0 0.0
4  0 1 2 3  255 0 0 #red
4  7 4 0 3  0 255 0 #green
4  4 5 1 0  0 0 255 #blue
4  5 6 2 1  0 255 0
4  3 2 6 7  0 0 255
4  6 5 4 7  255 0 0
```

v



Parcourir le voisinage de v ...

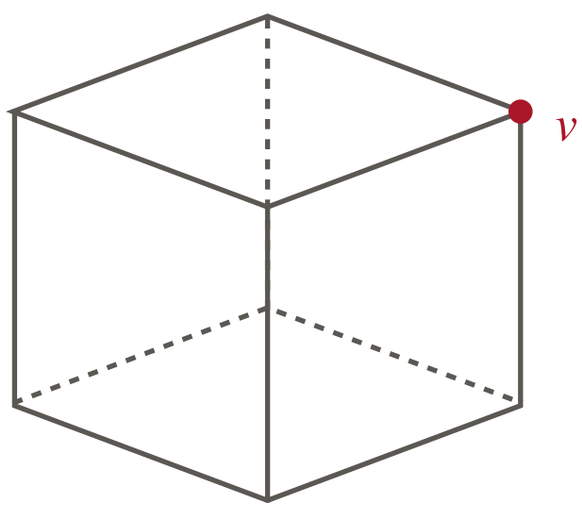


CODAGE MÉMOIRE (STRUCTURES DE DONNÉES)

REPRÉSENTATION DES MAILLAGES : STRUCTURE MÉMOIRE

Stockage compact des informations :

- Stocker suffisamment de pointeurs pour pouvoir parcourir les voisinages
- Pas trop pour préserver la mémoire …

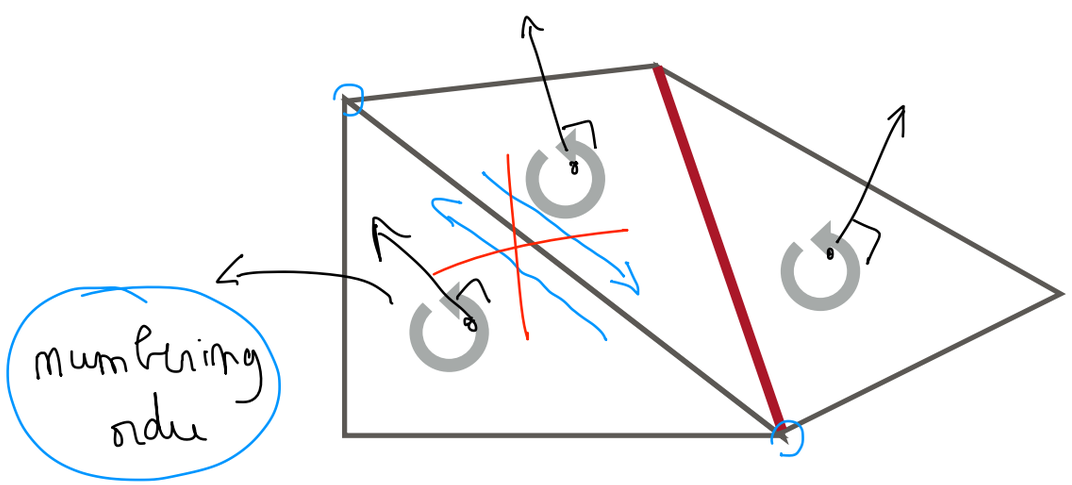


Parcourir le voisinage de v …

REPRÉSENTATION DES MAILLAGES : STRUCTURE MÉMOIRE

Stockage compact des informations :

- Stocker suffisamment de pointeurs pour pouvoir parcourir les voisinages
- Pas trop pour préserver la mémoire …



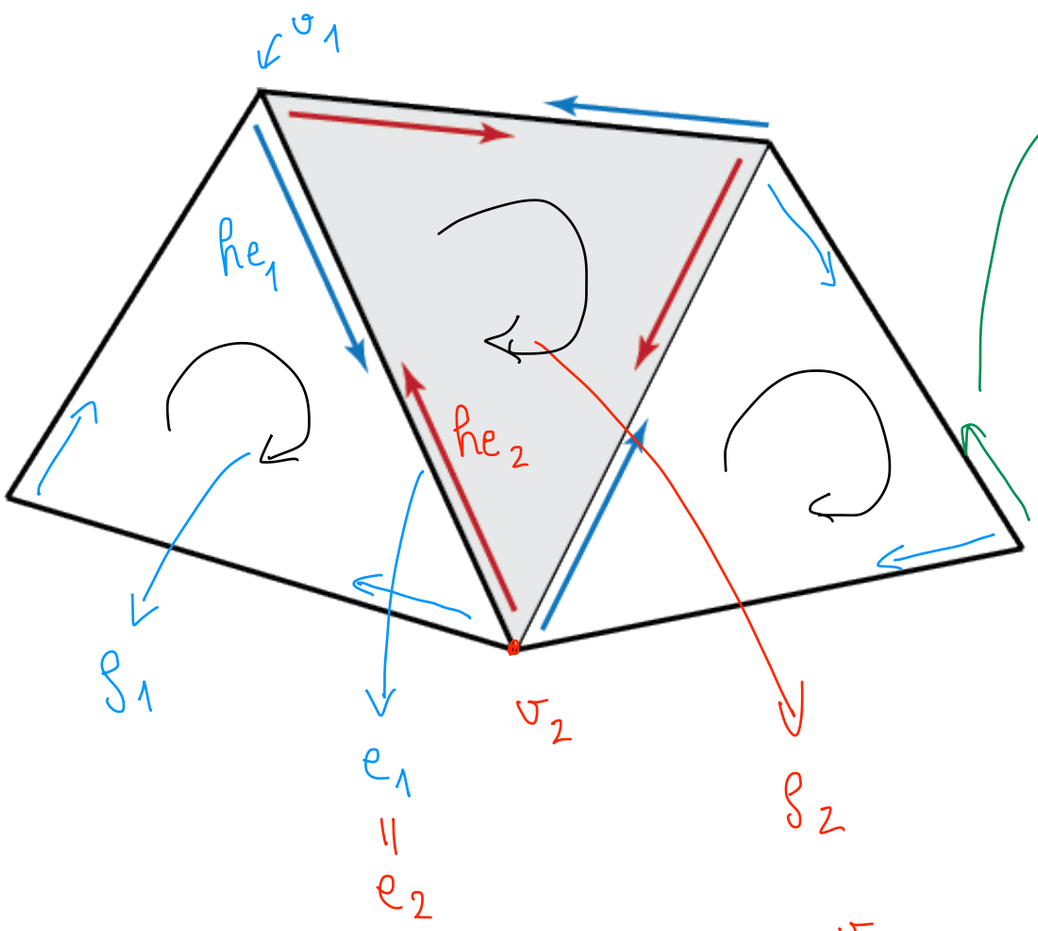
Autre problème :
orientation des faces / arêtes

Intérieur-extérieur surface

Parcours des voisinages

REPRÉSENTATION DES MAILLAGES : DEMI-ARÊTES

Une structure a mis tout le monde d'accord : **représentation en demi-arêtes**



connected to

vertex ✓

edge ✓

no face

boundary edges

- Arête :
  - 2 demi-arêtes
- Chaque demi-arête est donc associée à un unique triplet :
  - Sommet
  - Arête
  - Face

  → unique
- Demi-arêtes d'une face orientées <u>sens direct</u>

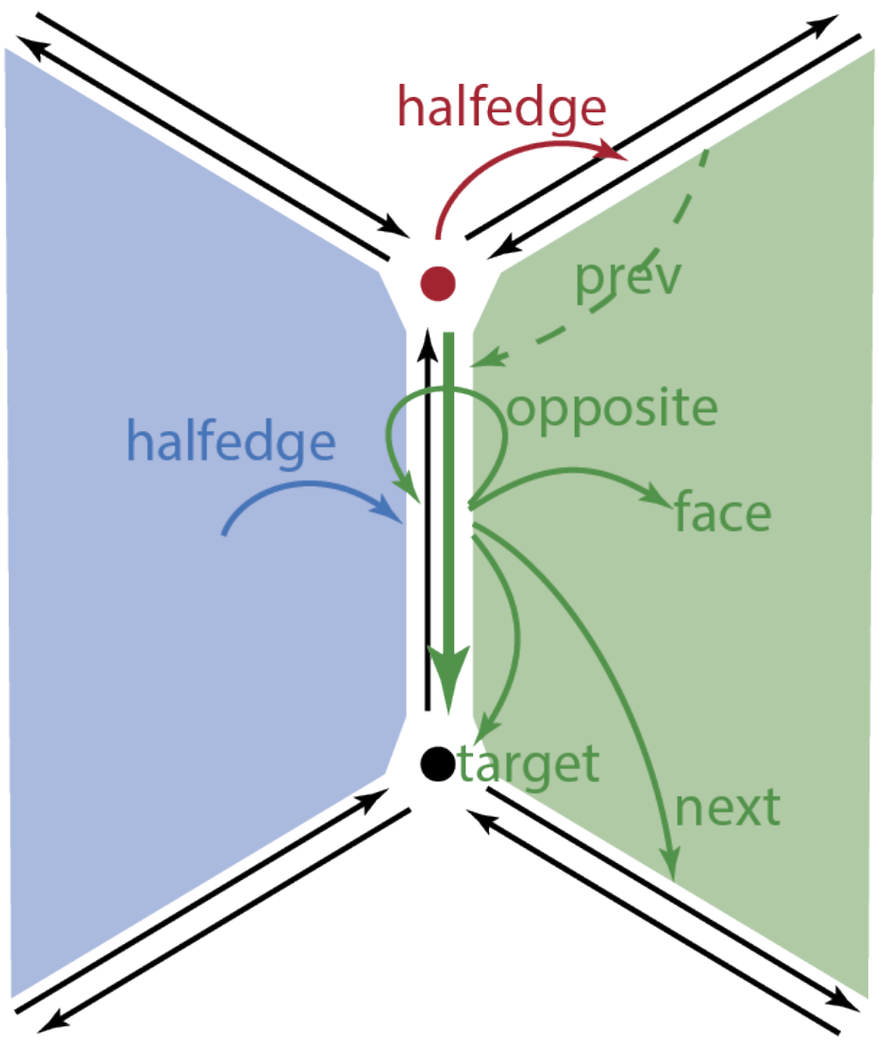
he_1 — v_1, e_1, f_1

he_2 — v_2, e_2, f_2

=

REPRÉSENTATION DES MAILLAGES : DEMI-ARÊTES

Une structure a mis tout le monde d'accord : **représentation en demi-arêtes**



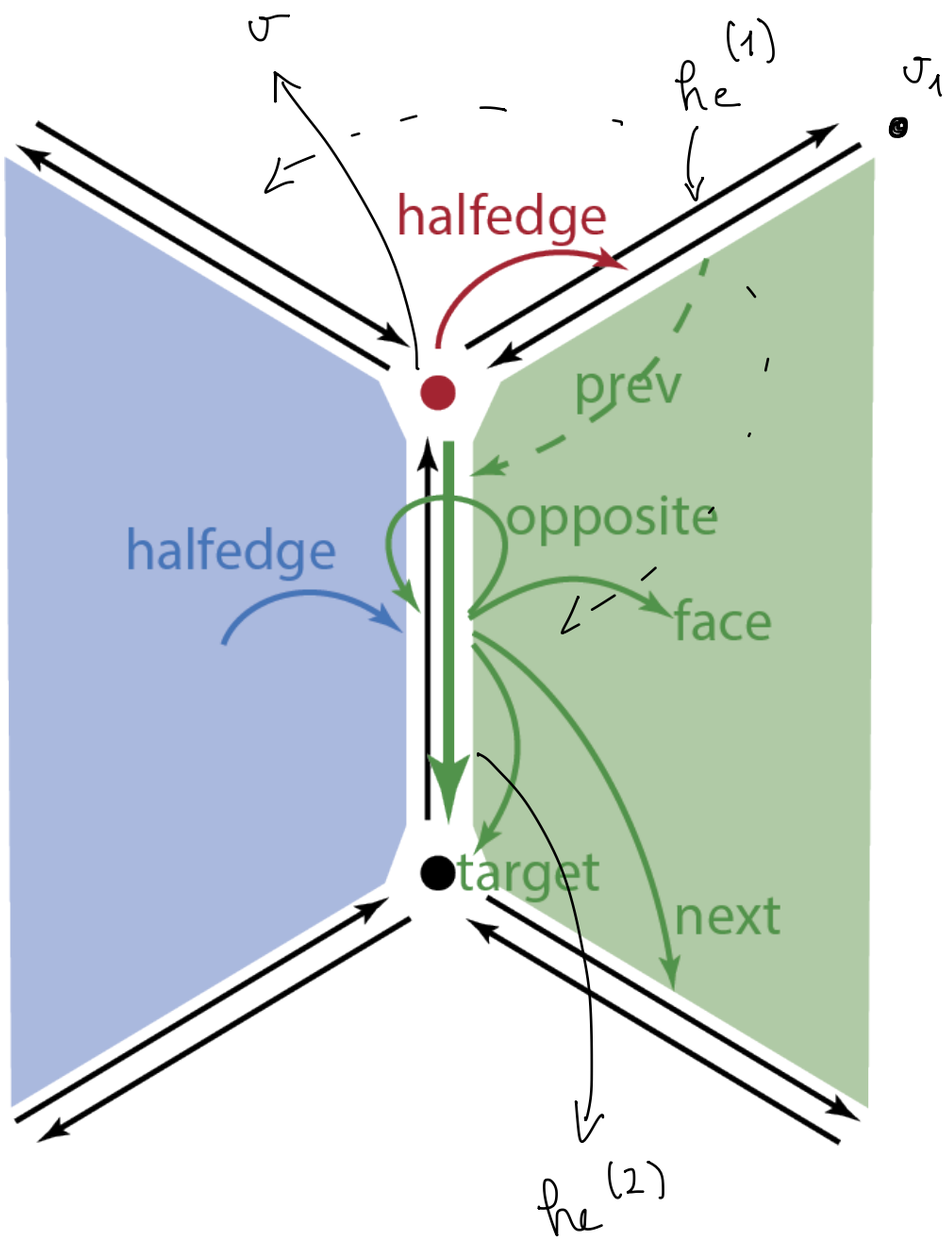
Information à stocker :

CGAL : incoming

- Sommet :
  - 1 demi-arête voisine (entrante ou sortante selon bibliothèque)
- Face :
  - 1 demi-arête de bord
- Demi-arête :
  - demi-arête suivante (sens direct)
  - [opt] demi-arête précédente (sens direct)
  - demi-arête opposée
  - face associée
  - sommet destination

↳ CGAL

REPRÉSENTATION DES MAILLAGES : DEMI-ARÊTES



Parcourir les sommets voisins de v ?

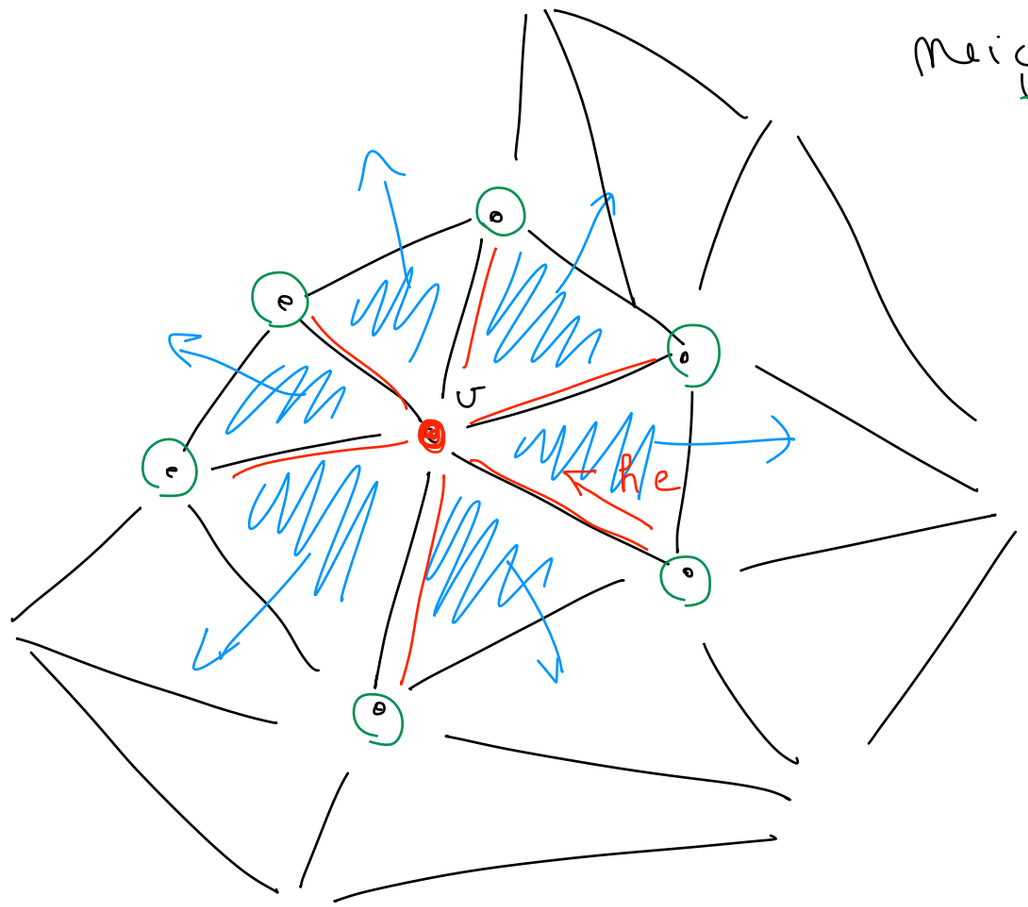
```
                 outgoing          incoming
he = opposite(halfedge(v))                    (1)
v1 ~> target(he)        // first neighbor
he_init = he
do
    he ← next(opposite(he))                   (2)
    ~> next_neigh : target(he)
while (he ≠ he_init)
```

Complexity: $\mathcal{O}(d^0(v))$

1-neigh-faces of v

neigh edges of v

neigh vertices of v



v : target (he)

2-neig

CADRE DES TP

Bibliothèque C++

Computational Geometry Algorithms Library

CGAL is developed via a collaborative effort from a community of developers working at research institutes, universities and companies. See the web page on partners and funding sources for further details. This community includes the CGAL Editorial Board, which is responsible for guiding the development of the library, developers, and the user community. To become part of our community, please check how to get involved.

CGAL Editorial Board
- Pierre Alliez (INRIA Sophia Antipolis - Méditerranée)
- Guillaume Damiand (Review Manager) (CNRS - LIRIS)
- Andreas Fabri (GeometryFactory)
- Efi Fogel (Tel-Aviv University)
- Michael Hoffmann (ETH Zürich)
- Sébastien Loriot (GeometryFactory)
- Marc Pouget (INRIA Nancy - Grand Est)
- Laurent Rineau (Release Manager) (GeometryFactory)
- Monique Teillaud (INRIA Nancy - Grand Est)

https://www.cgal.org

Un grand merci à **Guillaume Damiand** pour son aide dans l'élaboration des TP de ce cours !