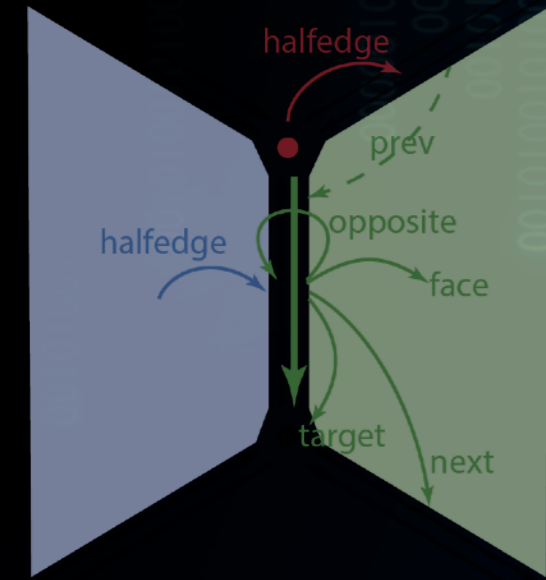


MODELISATION GEOMETRIQUE



Alexandra Bac

POLYTECH 4A INFORMATIQUE **REVA**

2 - MAILLAGES

apt-get install libcgal-dev

*→ Mac
brew install cgal*

Certaines illustrations sont issues du livre « polygon mesh processing »

Chapitre 2

MAILLAGES

Chapitre 4

GÉOMÉTRIE DES
SURFACES

Chapitre 1

MODÉLISATION DES
SURFACES

Chapitre 3 (+ 5A)

SURFACES
PARAMÉTRIQUES

Chapitre 5

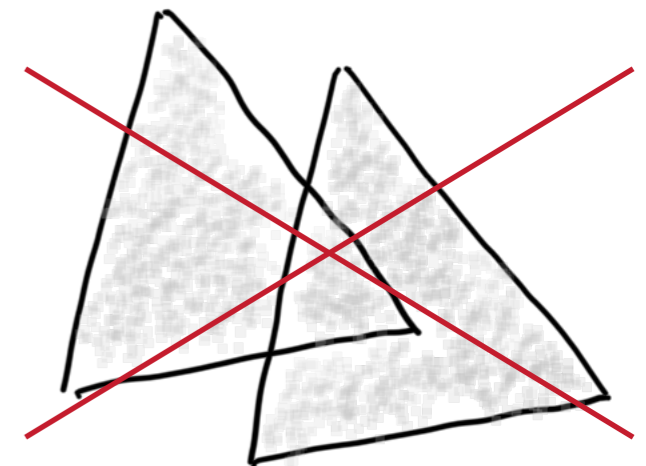
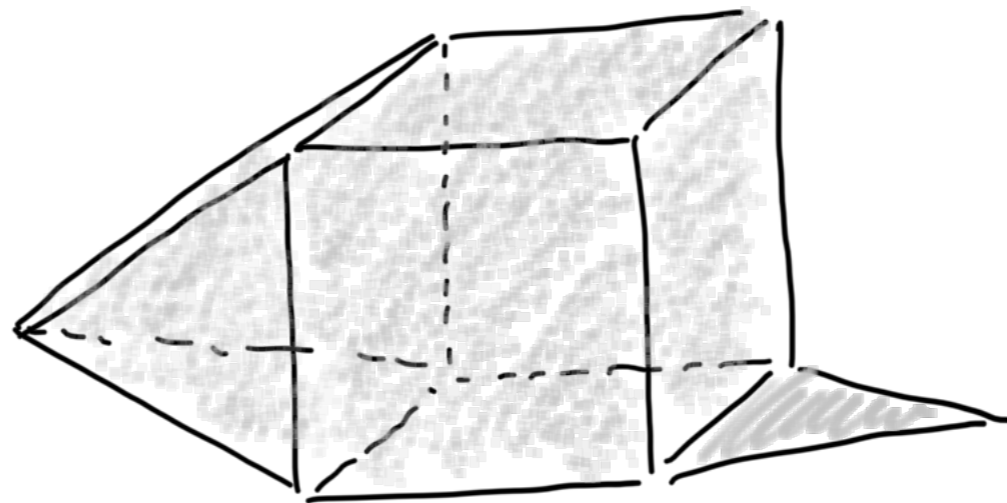
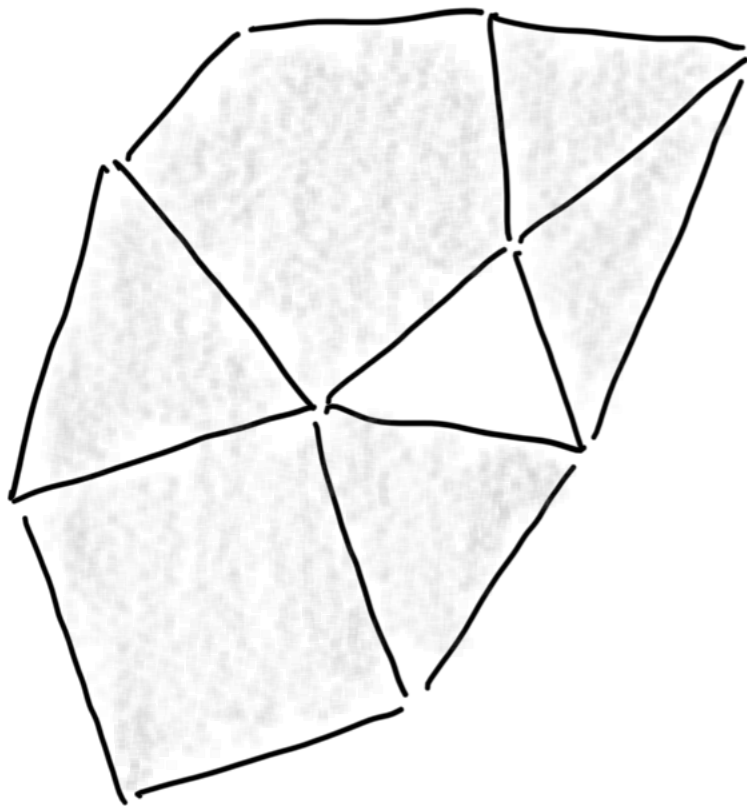
SURFACES
IMPLICITES

DÉFINITIONS, EXEMPLES

« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - MAILLAGES

Maillage nD :

- ▶ Sous ensemble de \mathbb{R}^n composé de cellules élémentaires de dimension inférieure ou égale à n telles :
 - ▶ Toute face d'une cellule appartient également au maillage
 - ▶ Deux cellules s'intersectent selon une de leurs faces



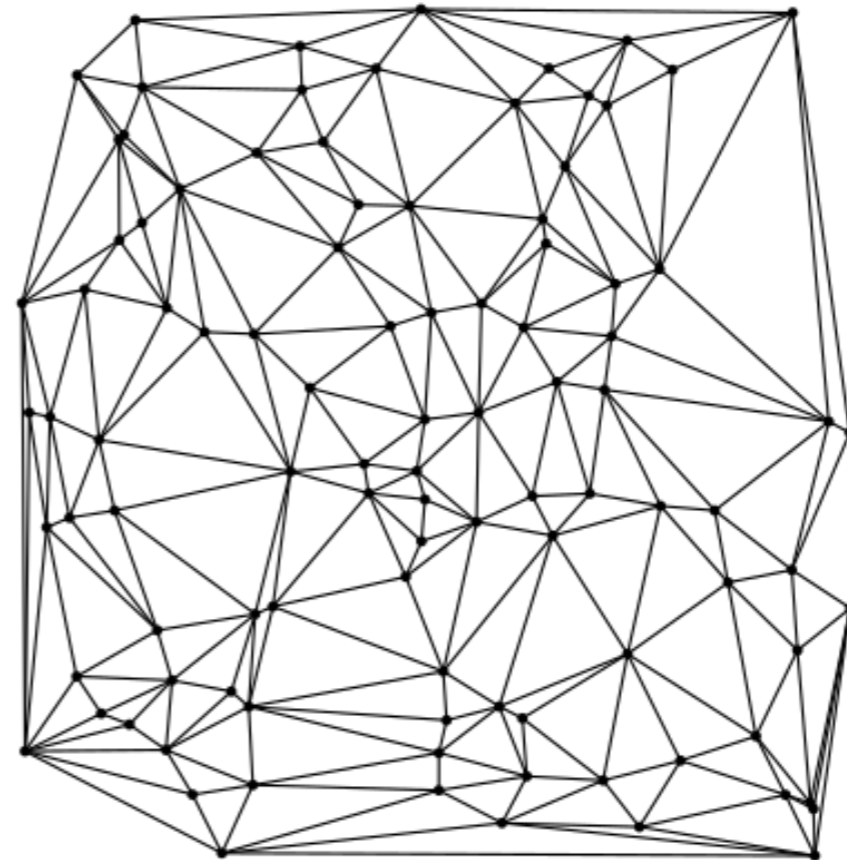
« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - MAILLAGES

Maillage 2D :

- ▶ Sous ensemble de \mathbb{R}^2 composé de **cellules élémentaires** de dimension inférieure ou égale à n telles :
 - ▶ Toute face d'une cellule appartient également au maillage
 - ▶ Deux cellules s'intersectent selon une de leurs faces

Maillage triangulaire ou triangulation (triangular mesh)

- 0-cellules : sommets (de \mathbb{R}^2)
vertices
- 1-cellules : arêtes
edges
- 2-cellules : triangles
triangles



« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - MAILLAGES

Maillage 2D :

- ▶ Sous ensemble de \mathbb{R}^2 composé de cellules élémentaires de dimension inférieure ou égale à n telles :
 - ▶ Toute face d'une cellule appartient également au maillage
 - ▶ Deux cellules s'intersectent selon une de leurs faces

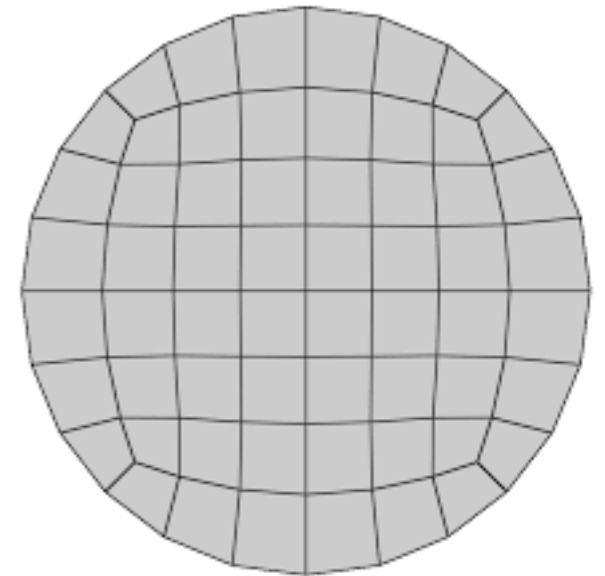
Maillage triangulaire ou triangulation (triangular mesh)

- 0-cellules : sommets (de \mathbb{R}^2)
- 1-cellules : arêtes
- 2-cellules : triangles

Maillage quadrangulaires ou cartésien (quad mesh)

- 0-cellules : sommets (de \mathbb{R}^2)
- 1-cellules : arêtes
- 2-cellules : carrés

Squars



« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - MAILLAGES

Maillage 2D :

- ▶ Sous ensemble de \mathbb{R}^2 composé de **cellules élémentaires** de dimension inférieure ou égale à n telles :
 - ▶ Toute face d'une cellule appartient également au maillage
 - ▶ Deux cellules s'intersectent selon une de leurs faces

Maillage triangulaire ou triangulation (triangular mesh)

- 0-cellules : sommets (de \mathbb{R}^2)
- 1-cellules : arêtes
- 2-cellules : triangles

75%

Maillage quadrangulaires ou cartésien (quad mesh)

- 0-cellules : sommets (de \mathbb{R}^2)
- 1-cellules : arêtes
- 2-cellules : carrés

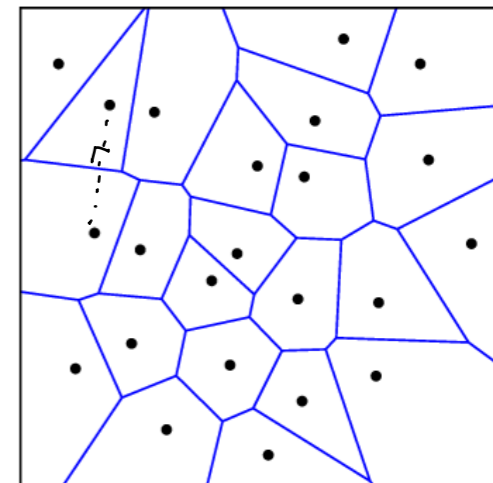
10%

Maillage polyédriques

- 0-cellules : sommets (de \mathbb{R}^2)
- 1-cellules : arêtes
- 2-cellules : polygones

5%

chemical
physical
simulation

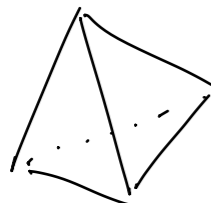


Maillage 3D :

- ▶ Sous ensemble de \mathbb{R}^3 composé de **cellules élémentaires** de dimension inférieure ou égale à n telles :
 - ▶ Toute face d'une cellule appartient également au maillage
 - ▶ Deux cellules s'intersectent selon une de leurs faces

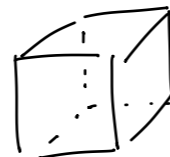
Maillage tétraédrique

- 0-cellules : sommets (de \mathbb{R}^3)
- 1-cellules : arêtes
- 2-cellules : triangles
- **3-cellules : tétraèdres**



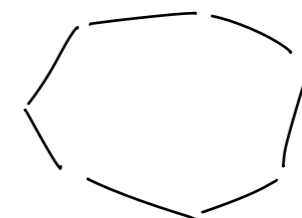
Maillage hexaédrique ou cartésien (hex mesh)

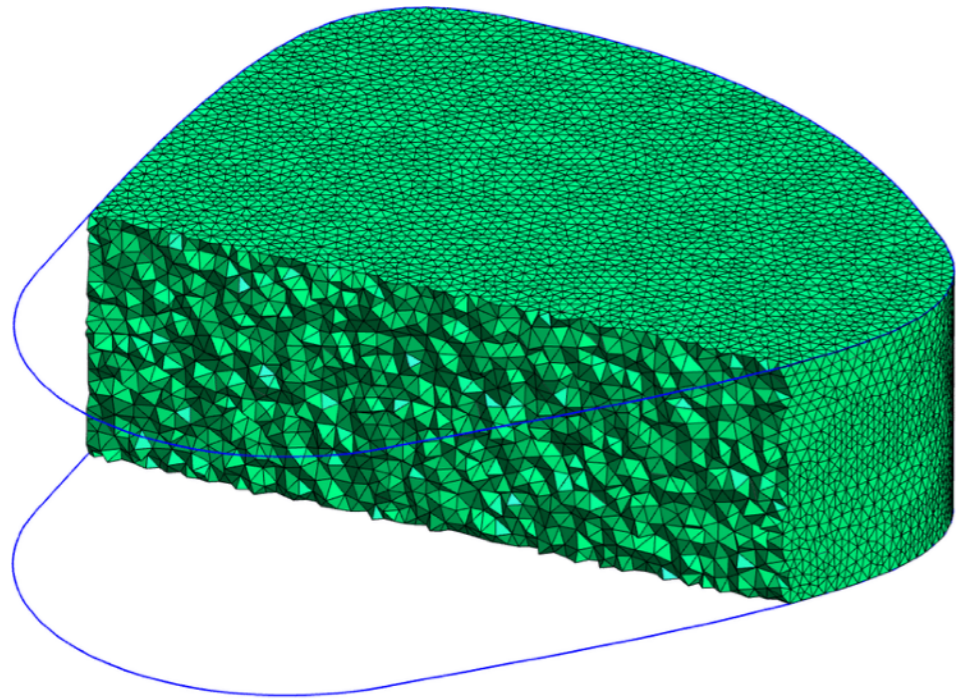
- 0-cellules : sommets (de \mathbb{R}^3)
- 1-cellules : arêtes
- 2-cellules : carrés
- **3-cellules : cubes**
(hexaèdres)



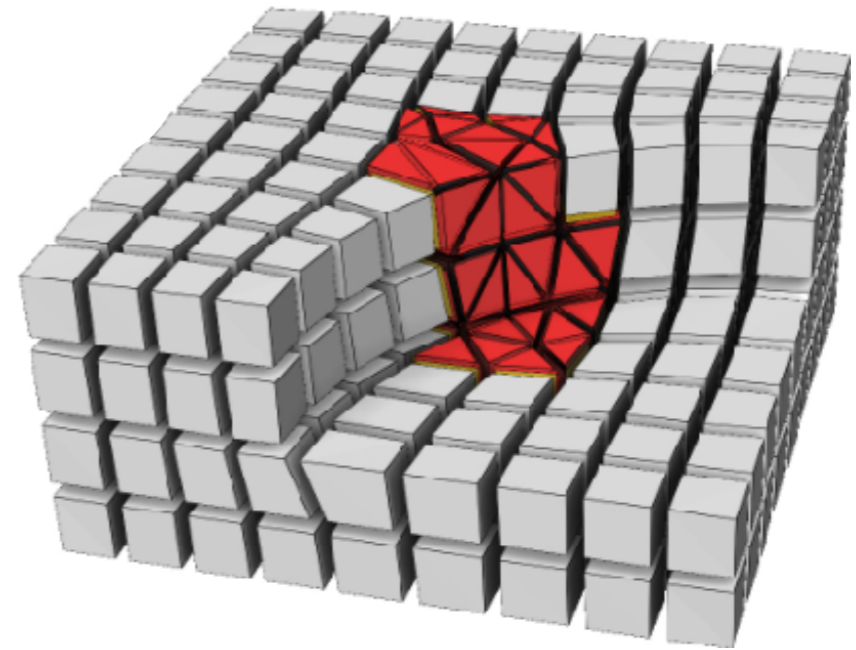
Maillage polyédriques

- 0-cellules : sommets (de \mathbb{R}^3)
- 1-cellules : arêtes
- 2-cellules : polygone
- **3-cellules : polyèdres**





- Maillage tétraédrique -



- Maillage hex dominant -

Maillage tétraédrique

- 0-cellules : sommets (de \mathbb{R}^3)
- 1-cellules : arêtes
- 2-cellules : triangles
- **3-cellules : tétraèdres**

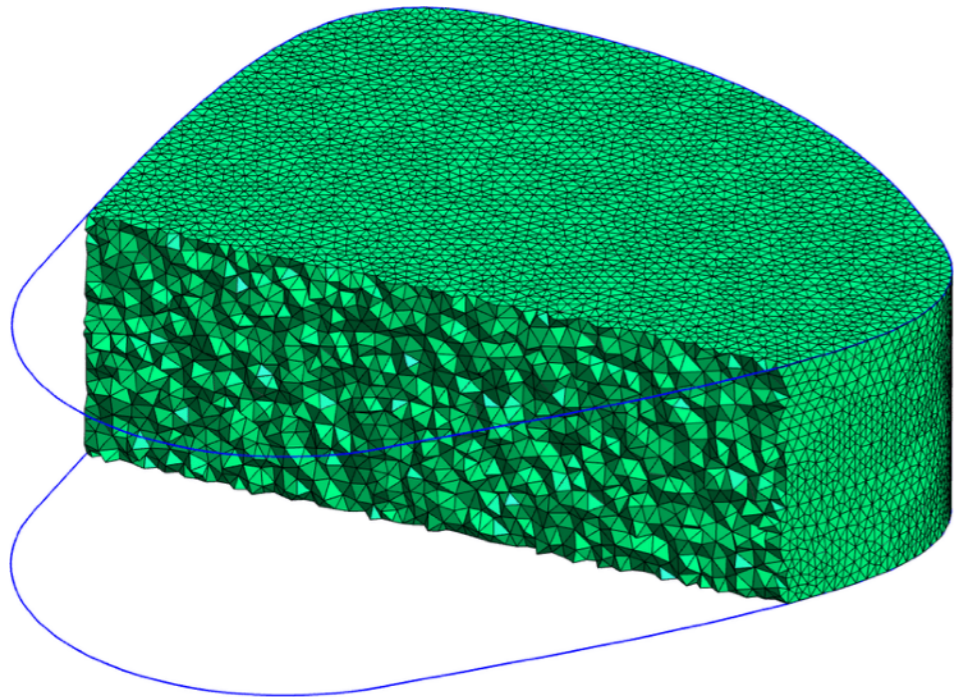
Maillage hexaédrique ou cartésien (hex mesh)

- 0-cellules : sommets (de \mathbb{R}^3)
- 1-cellules : arêtes
- 2-cellules : carrés
- **3-cellules : cubes
(hexaèdres)**

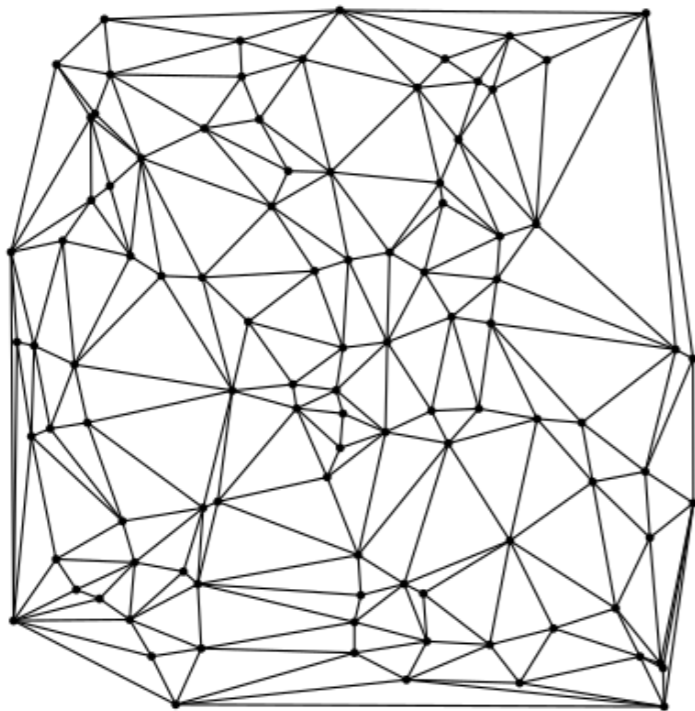
Maillage polyédriques

- 0-cellules : sommets (de \mathbb{R}^3)
- 1-cellules : arêtes
- 2-cellules : polygone
- **3-cellules : polyèdres**

« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - MAILLAGES



- Maillage tétraédrique 3D -



- Maillage triangulaire 2D -

Existence :

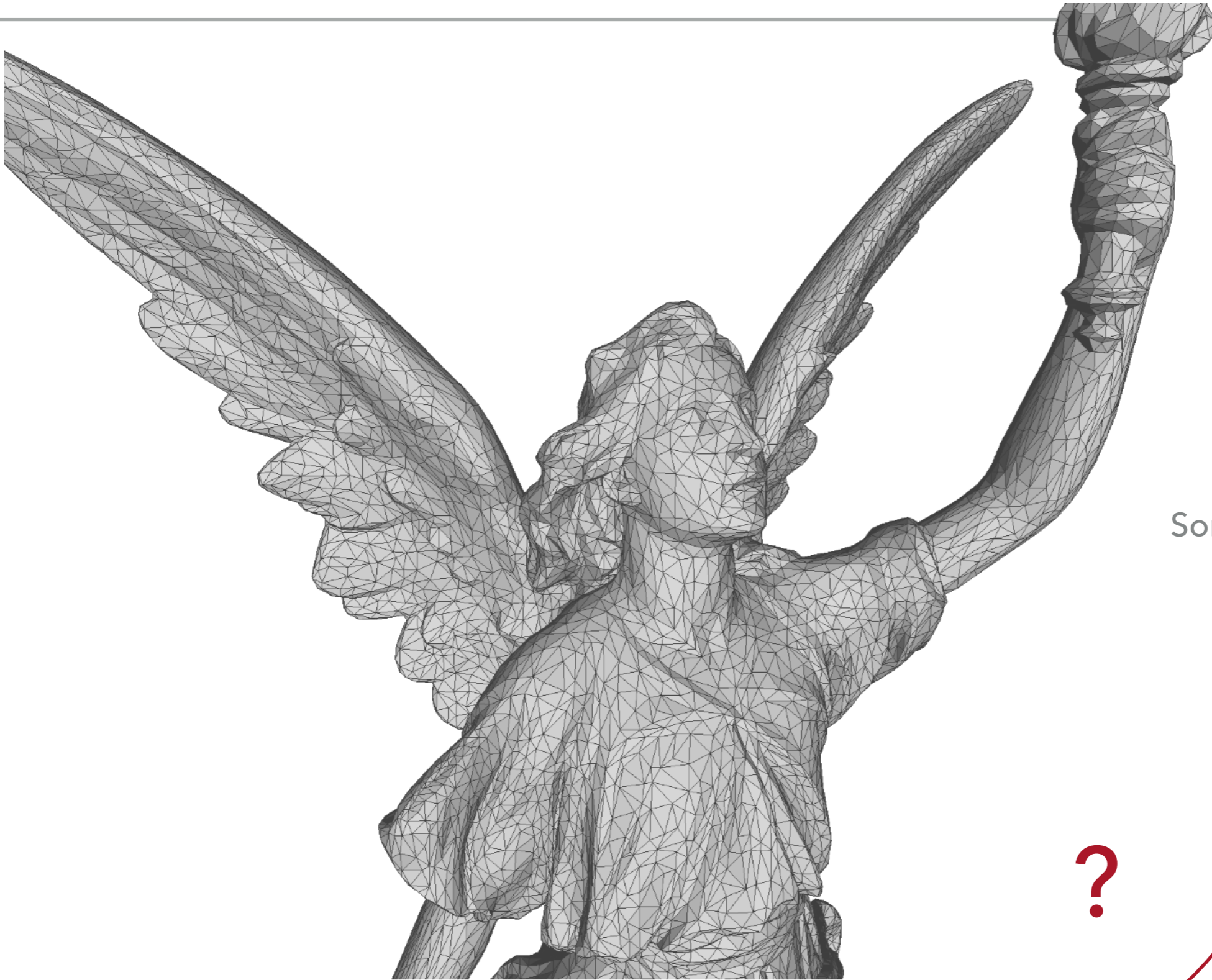
Tout domaine est maillable par un complexe simplicial (maillage triangulaire en 2D, tétraédrique en 3D, etc. ...)



**Maillages 2D triangulaires / 3D tétraédriques
très utilisés**

(cf. cours suivant)

« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - MAILLAGES



Sommets : points 3D

?

Maillage : triangle 2D

« MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE » - MAILLAGES



Sommets : points 3D

Maillage 2,5 D

Maillage : triangle 2D

- ▶ Très utilisés
- ▶ Moins de propriétés

GÉOMÉTRIE / TOPOLOGIE



Géométrie

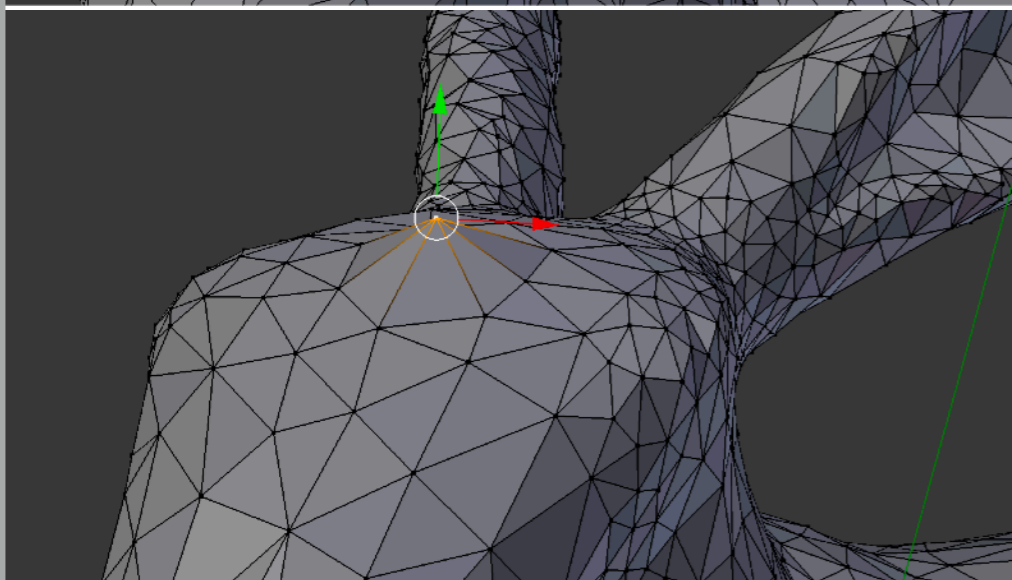
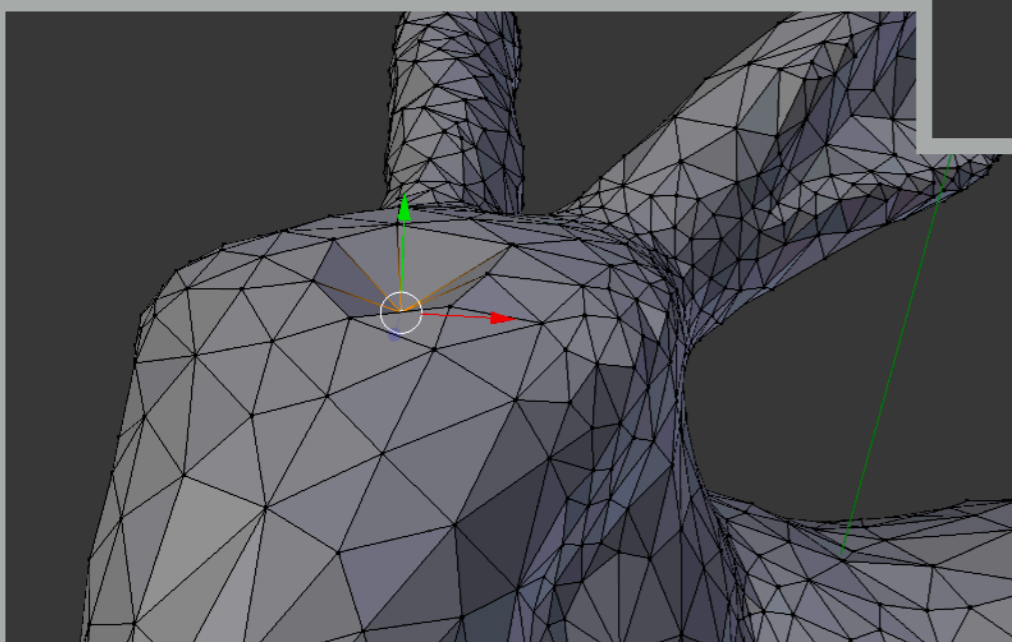
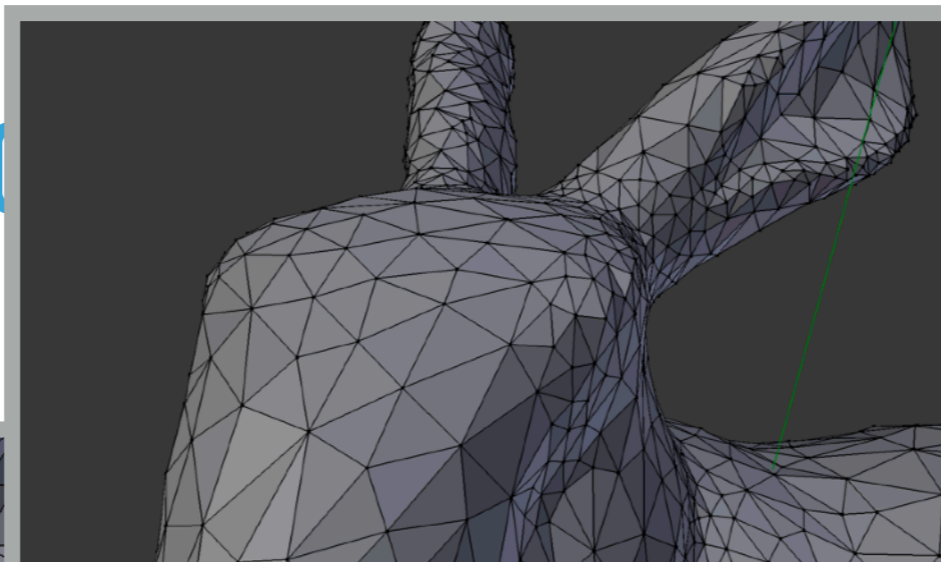
Coordonnées des points



Topologie

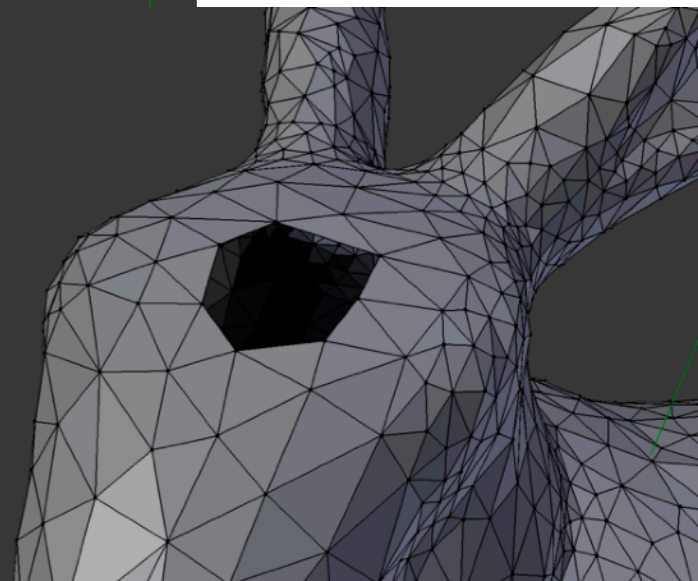
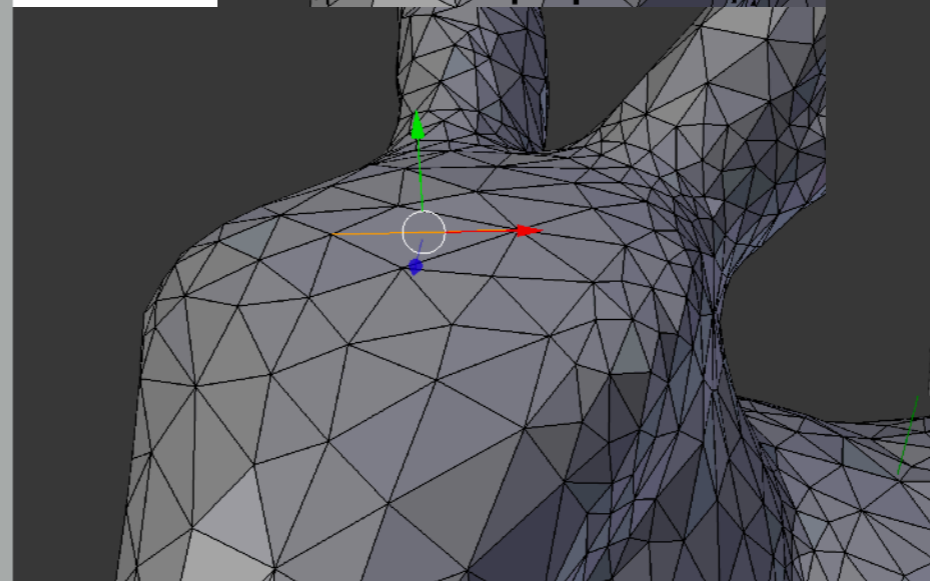
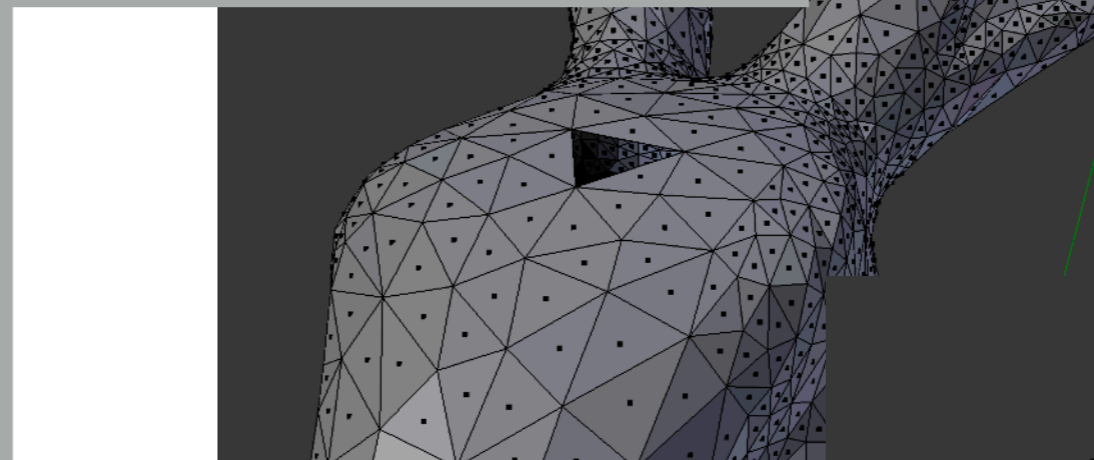
Adjacence, connectivité
des cellules

GÉOMÉTRIE / TOPOLOGIE



Géométrie

Coordonnées des points



Topologie

Adjacence, connectivité
des cellules

GÉOMÉTRIE / TOPOLOGIE



Géométrie
Coordonnées des points

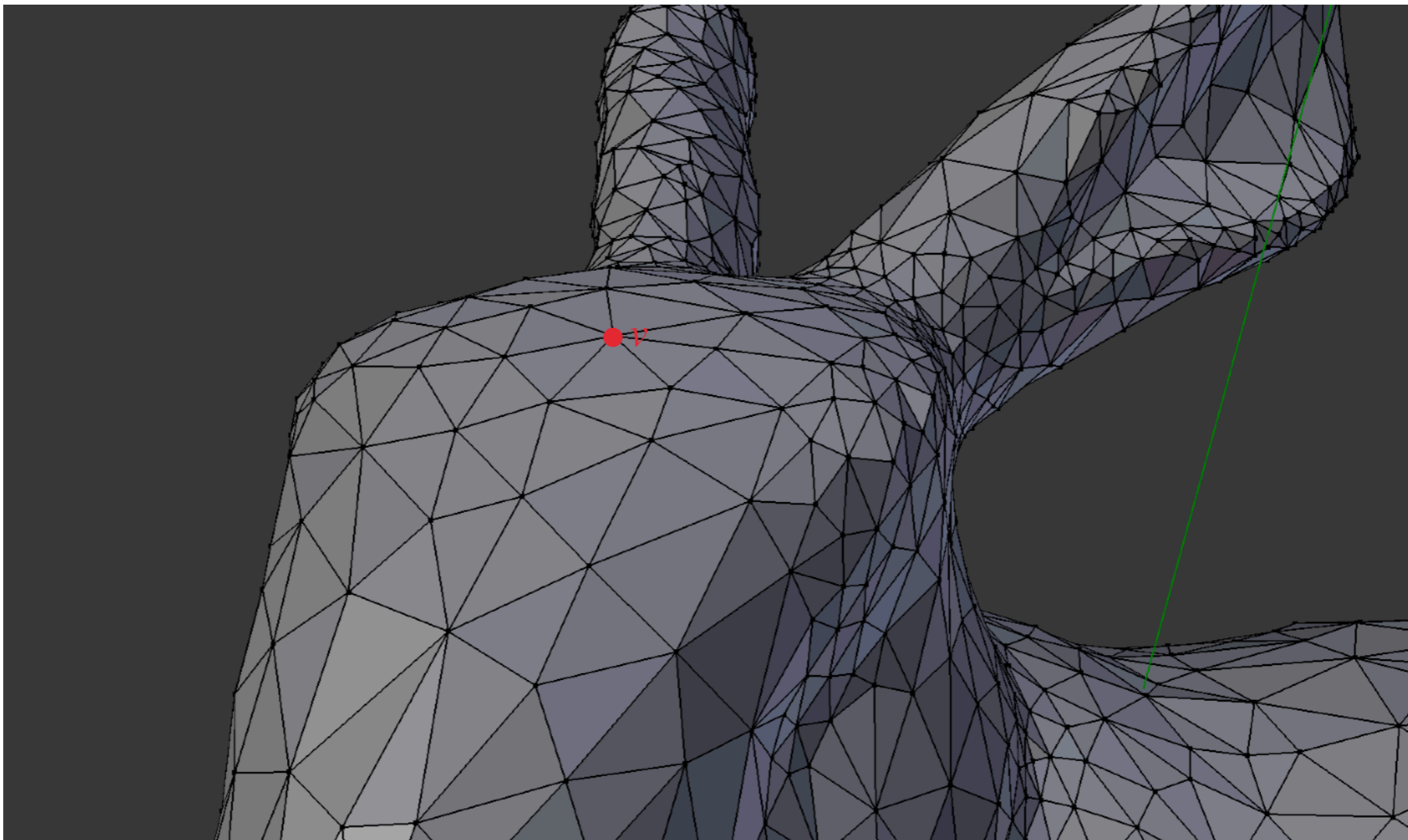


Topologie
Adjacence, connectivité
des cellules

CODAGE DES MAILLAGES

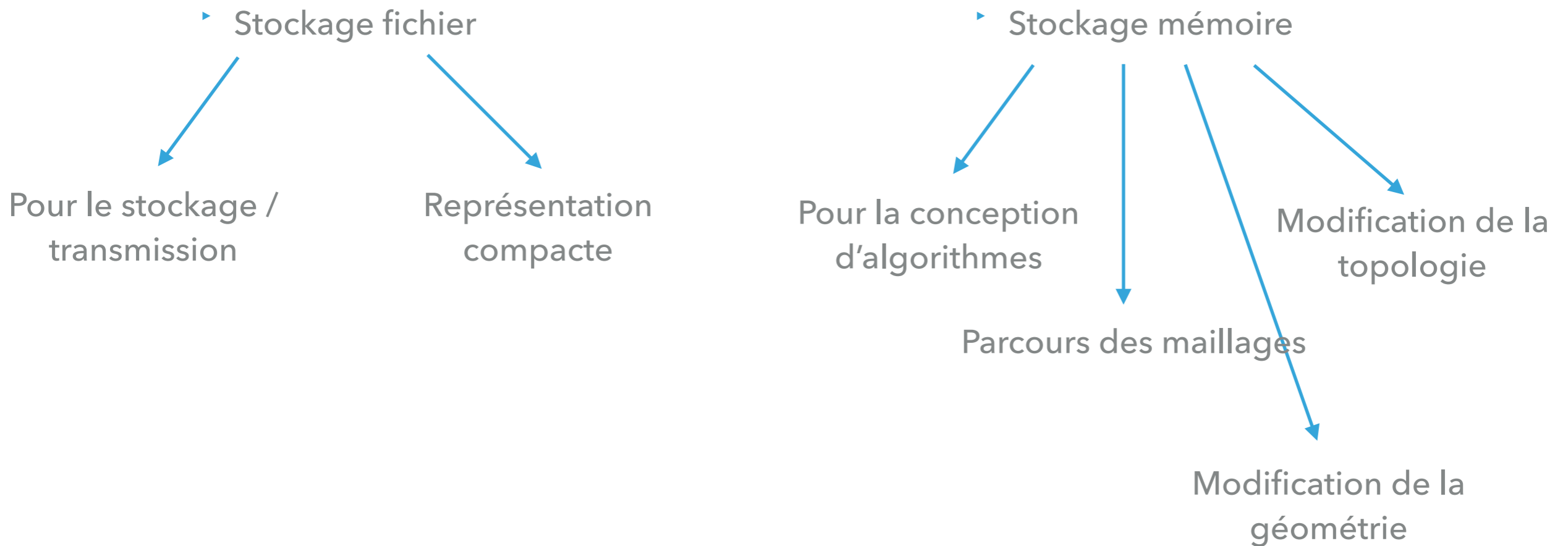
QUELLE REPRÉSENTATION DES MAILLAGES ?

Parcourir les sommets voisins de v ?



→ Accès efficace à la topologie ...

QUELLE REPRÉSENTATION DES MAILLAGES ?



A close-up photograph of a document, possibly a ledger or a list of data points. The document features a repeating pattern of numbers and symbols. The numbers are arranged in two columns: the left column contains values like 5.56, 3.24, 9.62, 36, 56, 24, 62, 36, 56, and 24; the right column contains values like +740.21, +122.56, +140.04, +180.98, +740.21, +122.56, +140.04, +180.98, and +740.21. To the right of these numbers are vertical lines and dashes, suggesting a structured table or list.

5.56	+740.21	-
3.24	+122.56	-
9.62	+140.04	-
36	+180.98	-
56	+740.21	-
24	+122.56	-
62	+140.04	-
36	+180.98	-
56	+740.21	-
24	+122.56	-

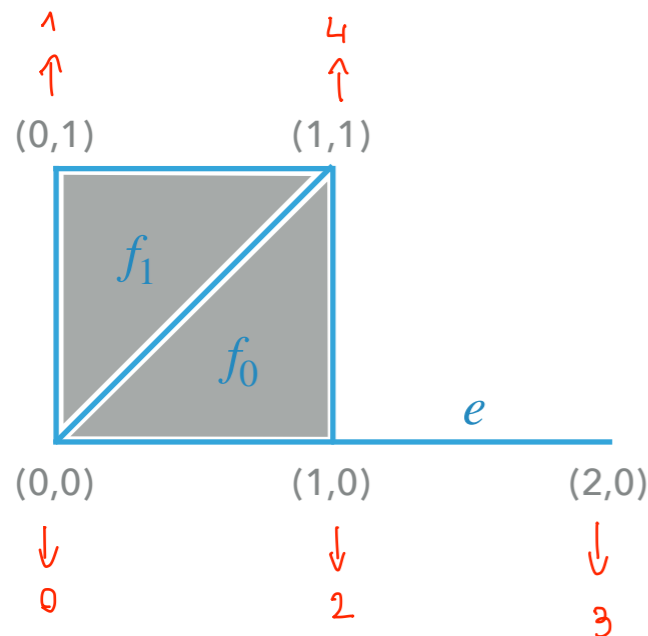
CODAGE FICHIERS

REPRÉSENTATION DES MAILLAGES : FICHIERS

Stockage compact des informations :

- **Liste des sommets**
 - [opt] Liste d'**arêtes** : couple d'indices de sommets
 - Liste des **faces** : triplets d'indices de sommets
- Plus ... couleurs, normales, textures ...

indices

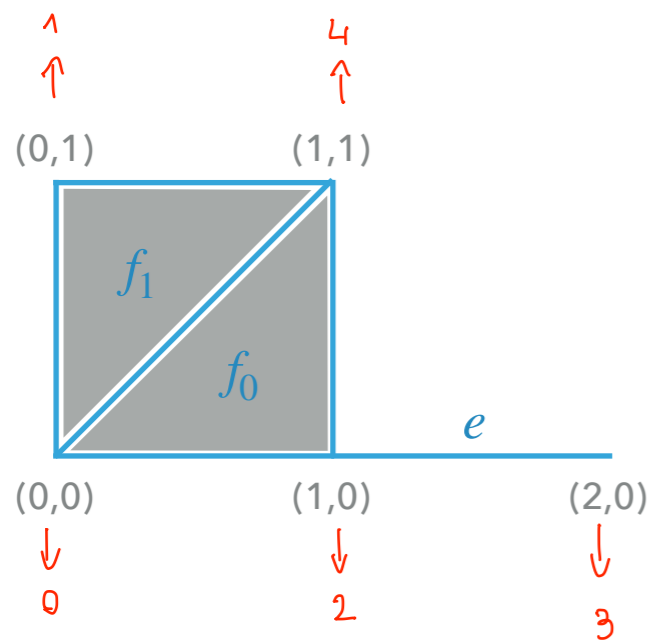


- $v_0 \leftarrow 0\ 0$
- $v_1 \leftarrow 0\ 1$
- $v_2 \leftarrow 1\ 0$
- $v_3 \leftarrow 2\ 0$
- $v_4 \leftarrow 1\ 1$
- $e \leftarrow$
- $f_0 \leftarrow$
- $f_1 \leftarrow$

REPRÉSENTATION DES MAILLAGES : FICHIERS

Stockage compact des informations :

- **Liste des sommets**
 - [opt] Liste d'**arêtes** : couple d'indices de sommets
 - Liste des **faces** : triplets d'indices de sommets
- Plus ... couleurs, normales, textures ...



- v_0 ← 0 0
- v_1 ← 0 1
- v_2 ← 1 0
- v_3 ← 2 0
- v_4 ← 1 1
- e ← 2 3
- f_0 ← 0 2 4
- f_1 ← 0 4 1

Nombreux formats
de fichiers, mais globalement
tous codent la même information

REPRÉSENTATION DES MAILLAGES

Format .obj (et .mtl)

Sommet

v 1.0 0.0 0.0

Texture

vt 1.0 0.0

Normale

vn 0.0 1.0 0.0

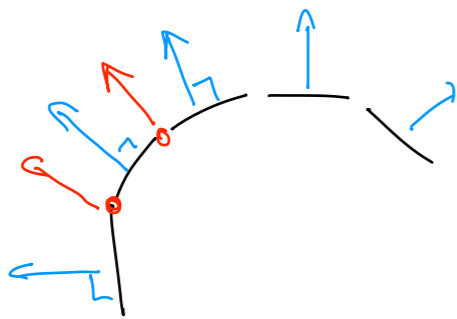
Face

f v1/vt1/vn1 v2/vt2/vn2 v3/vt3/vn3

Désignation objets

o [nom objet]

Format .ply (Stanford)



normals on faces

estimate normals on vertices

~ average of norm. on neigh. faces

```
# cube.obj
#
o cube
usemtl cube.mtl

v 0.0 0.0 0.0
v 0.0 0.0 1.0
v 0.0 1.0 0.0
v 0.0 1.0 1.0
v 1.0 0.0 0.0
v 1.0 0.0 1.0
v 1.0 1.0 0.0
v 1.0 1.0 1.0

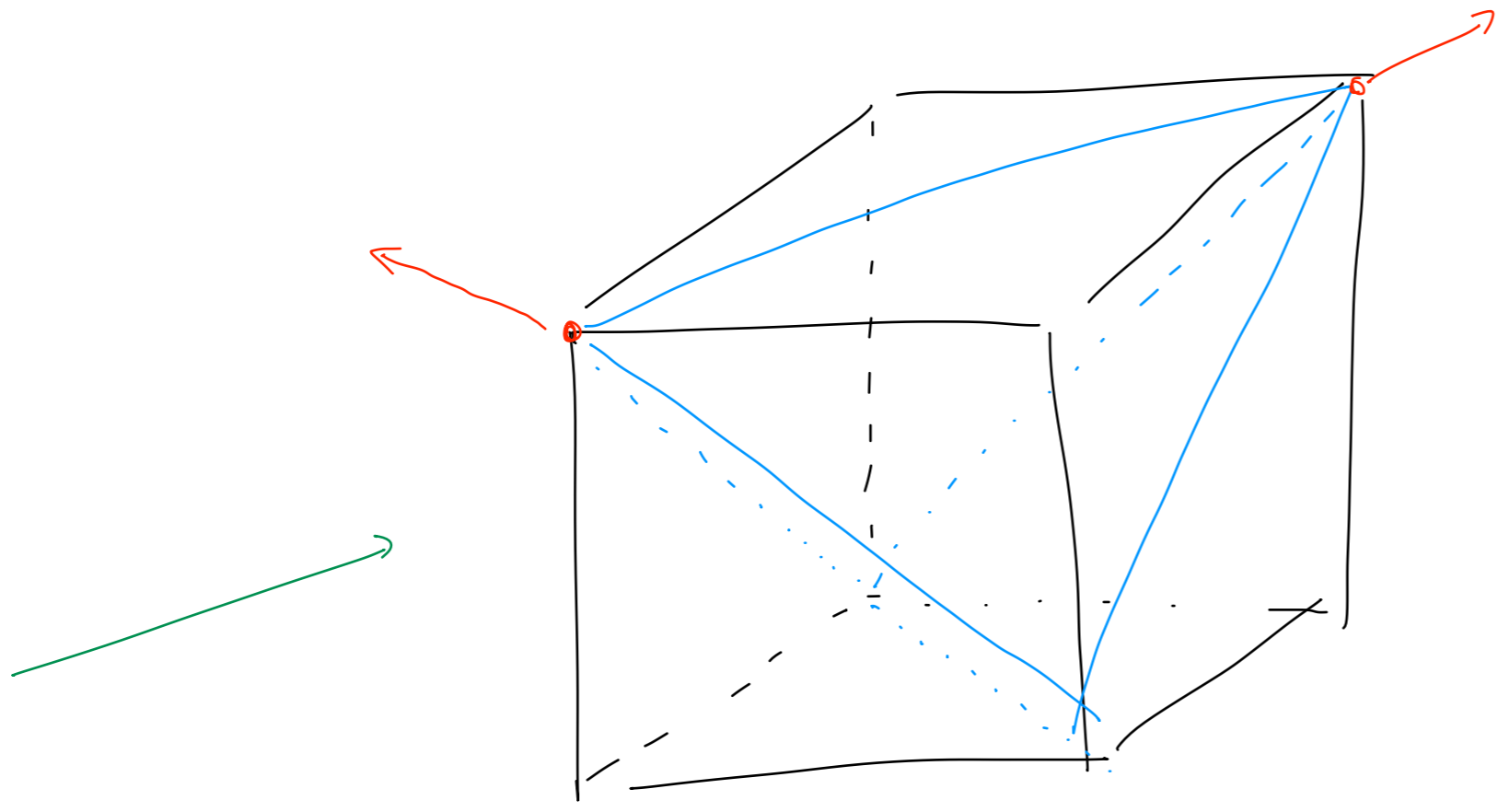
vt 0.25 0.0
vt 0.5 0.0
vt 0 0.25
vt 0.25 0.25
vt 0.5 0.25
vt 0.75 0.25
vt 0.0 0.5
vt 0.25 0.5
vt 0.5 0.5
vt 0.75 0.5
vt 0.25 0.75
vt 0.5 0.75
vt 0.25 1.0
vt 0.5 1.0

vn 0.0 0.0 1.0
vn 0.0 0.0 -1.0
vn 0.0 1.0 0.0
vn 0.0 -1.0 0.0
vn 1.0 0.0 0.0
vn -1.0 0.0 0.0

f 1/11/2 7/14/2 5/12/2
f 1/11/2 3/13/2 7/14/2
f 1/7/6 4/4/6 3/3/6
f 1/7/6 2/8/6 4/4/6
f 3/1/3 8/5/3 7/2/3
f 3/1/3 4/4/3 8/5/3
f 5/10/5 7/6/5 8/5/5
f 5/10/5 8/5/5 6/9/5
f 1/11/4 5/12/4 6/9/4
f 1/11/4 6/9/4 2/8/4
f 2/8/1 6/9/1 8/5/1
f 2/8/1 8/5/1 4/4/1
```

opt. information → texture
↓ normal

g 1 7 5



REPRÉSENTATION DES MAILLAGES : FICHIERS

Format **.obj** (et **.mtl**)

Sommet

v 1.0 0.0 0.0

Texture

vt 1.0 0.0

Normale

vn 0.0 1.0 0.0

Face

f v1/vt1/vn1 v2/vt2/vn2 v3/vt3/vn3

Désignation objets

o [nom objet]

Format **.off**

Format **.ply** (Stanford)

Polygon file format

- Enrichit le format obj
- Propriétés facilement définissables
- Création simple de groupes d'objets

Format **.stl**

REPRÉSENTATION DES MAILLAGES : FICHIERS

```
OFF
# cube.off
# A cube

8 6 12
 1.0  0.0  1.4142
 0.0  1.0  1.4142
-1.0  0.0  1.4142
 0.0 -1.0  1.4142
 1.0  0.0  0.0
 0.0  1.0  0.0
-1.0  0.0  0.0
 0.0 -1.0  0.0
4  0 1 2 3  255 0 0 #red
4  7 4 0 3  0 255 0 #green
4  4 5 1 0  0 0 255 #blue
4  5 6 2 1  0 255 0
4  3 2 6 7  0 0 255
4  6 5 4 7  255 0 0
```

Format **.off**

Format de fichiers très simple de codage de maillages :

- header
- nbr_sommets nbr_arêtes nbr_faces
- liste des coordonnées des sommets
- liste des faces :
 nbr_sommets indices sommets couleur

Format **.stl**

- ▶ Enrichit le format obj
- ▶ Propriétés facilement définissables
- ▶ Création simple de groupes d'objets

REPRÉSENTATION DES MAILLAGES : FICHIERS

Format **.obj** (et **.mtl**)

```
Sommet
  v 1.0 0.0 0.0
Texture
  vt 1.0 0.0
Normale
  vn 0.0 1.0 0.0
Face
  f v1/vt1/vn1 v2/vt2/vn2 v3/vt3/vn3
Désignation objets
  o [nom objet]
```

Format **.stl**

```
solid name
  facet normal  $n_i$   $n_j$   $n_k$ 
    outer loop
      vertex  $v1_x$   $v1_y$   $v1_z$ 
      vertex  $v2_x$   $v2_y$   $v2_z$ 
      vertex  $v3_x$   $v3_y$   $v3_z$ 
    endloop
  endfacet
```

Format **.off**

Format de fichiers très simple de codage de maillages :

- header
- nbr_sommets nbr_arêtes nbr_faces
- liste des coordonnées des sommets
- liste des faces :
 nbr_sommets indices sommets couleur

~~Format **.stl**~~

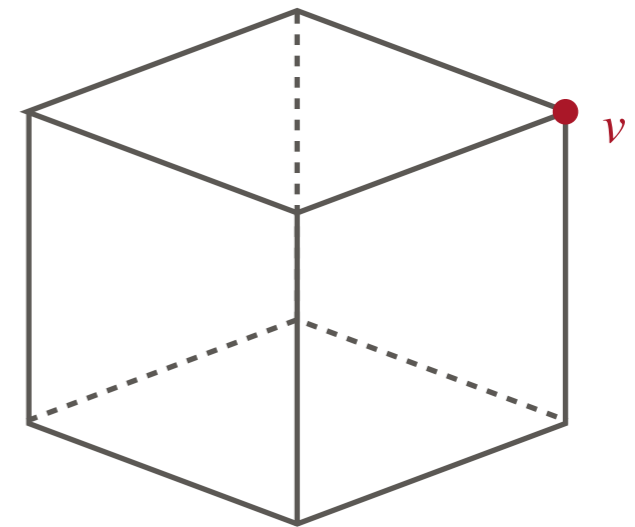
Format de codage d'une soupe de polygones

- Utile en acquisition 3D (laser, caméras 3D ...) / impression 3D
- A éviter sinon !

REPRÉSENTATION DES MAILLAGES : FICHIERS

```
OFF
# cube.off
# A cube

8 6 12
1.0 0.0 1.4142
0.0 1.0 1.4142 ← v
-1.0 0.0 1.4142
0.0 -1.0 1.4142
1.0 0.0 0.0
0.0 1.0 0.0
-1.0 0.0 0.0
0.0 -1.0 0.0
4 0 1 2 3 255 0 0 #red
4 7 4 0 3 0 255 0 #green
4 4 5 1 0 0 0 255 #blue
4 5 6 2 1 0 255 0
4 3 2 6 7 0 0 255
4 6 5 4 7 255 0 0
```



Parcourir le voisinage de *v* ...

5.56
3.24
9.62
36
56
24
62
36
56
24
62
36
56
24

+740.21
+122.56
+140.04
+180.98
+740.21
+122.56
+140.04
+180.98
+740.21

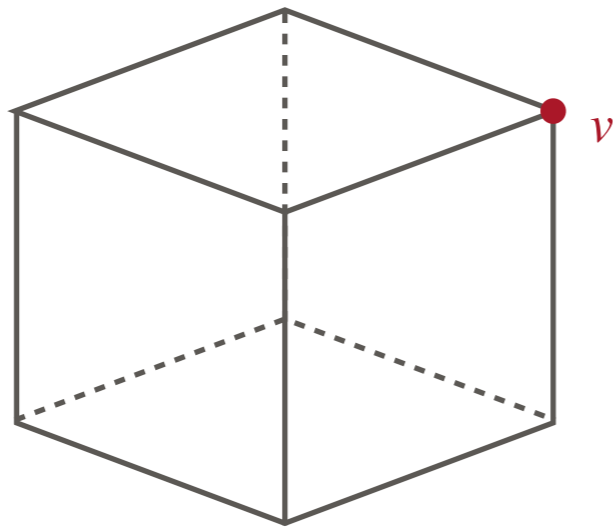
-
-
-
-
-
-
-
-
-

CODAGE MÉMOIRE (STRUCTURES DE DONNÉES)

REPRÉSENTATION DES MAILLAGES : STRUCTURE MÉMOIRE

Stockage compact des informations :

- ▶ Stocker suffisamment de pointeurs pour pouvoir parcourir les voisinages
- ▶ Pas trop pour préserver la mémoire ...

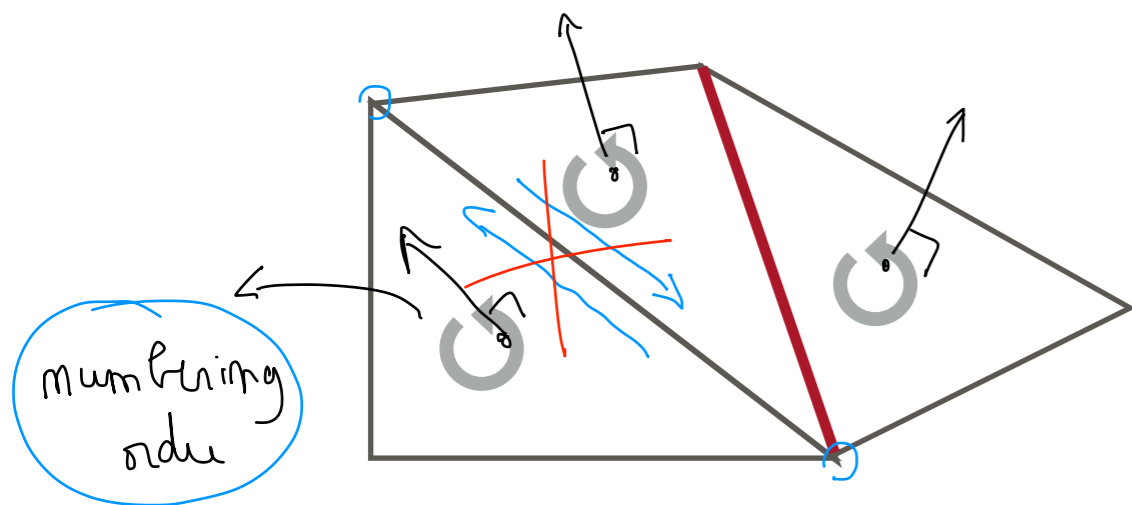


Parcourir le voisinage de v ...

REPRÉSENTATION DES MAILLAGES : STRUCTURE MÉMOIRE

Stockage compact des informations :

- Stocker suffisamment de pointeurs pour pouvoir parcourir les voisinages
- Pas trop pour préserver la mémoire ...



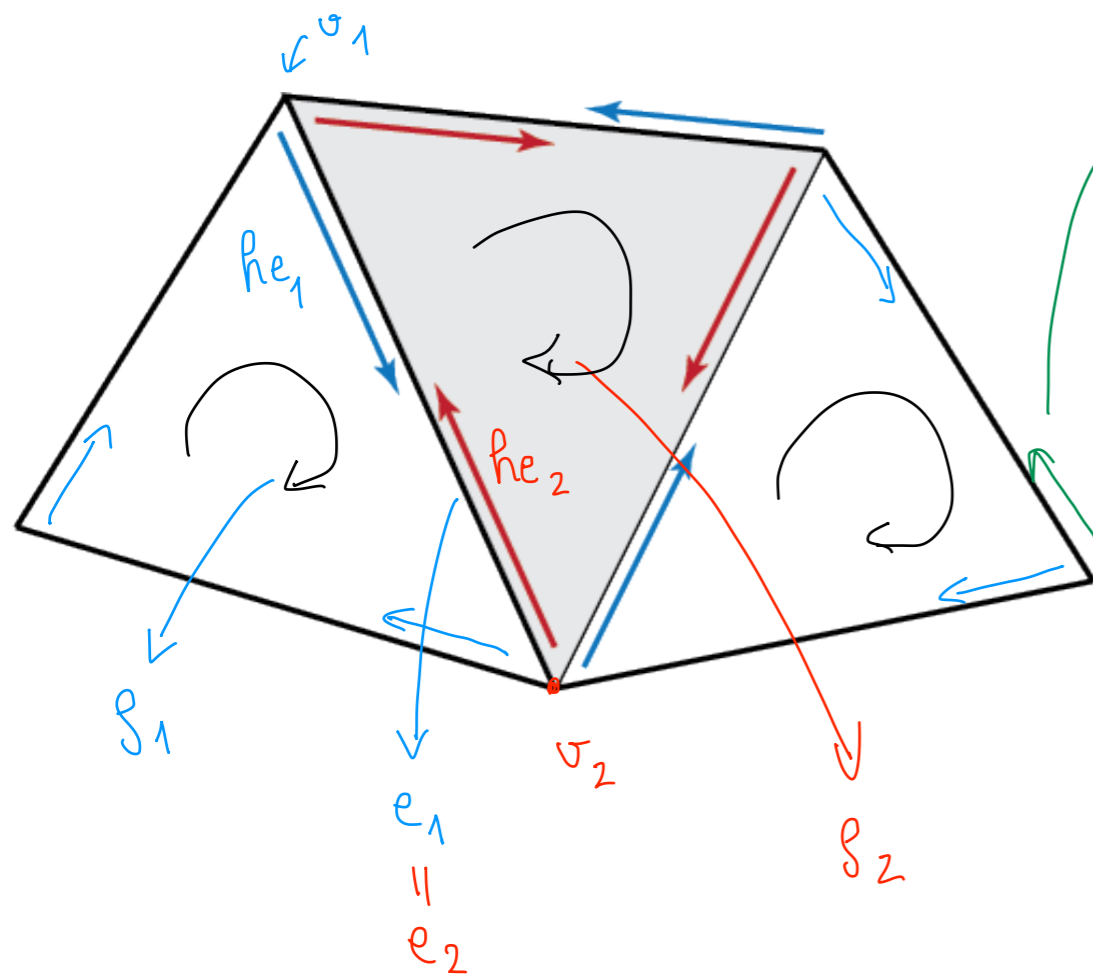
Autre problème :
orientation des faces / arêtes

Intérieur-extérieur
surface

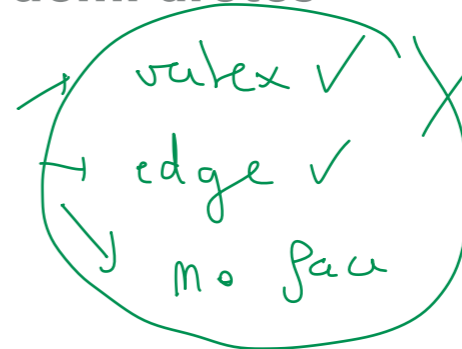
Parcours des
voisinages

REPRÉSENTATION DES MAILLAGES : DEMI-ARÊTES

Une structure a mis tout le monde d'accord : **représentation en demi-arêtes**



connected to



Boundary edges

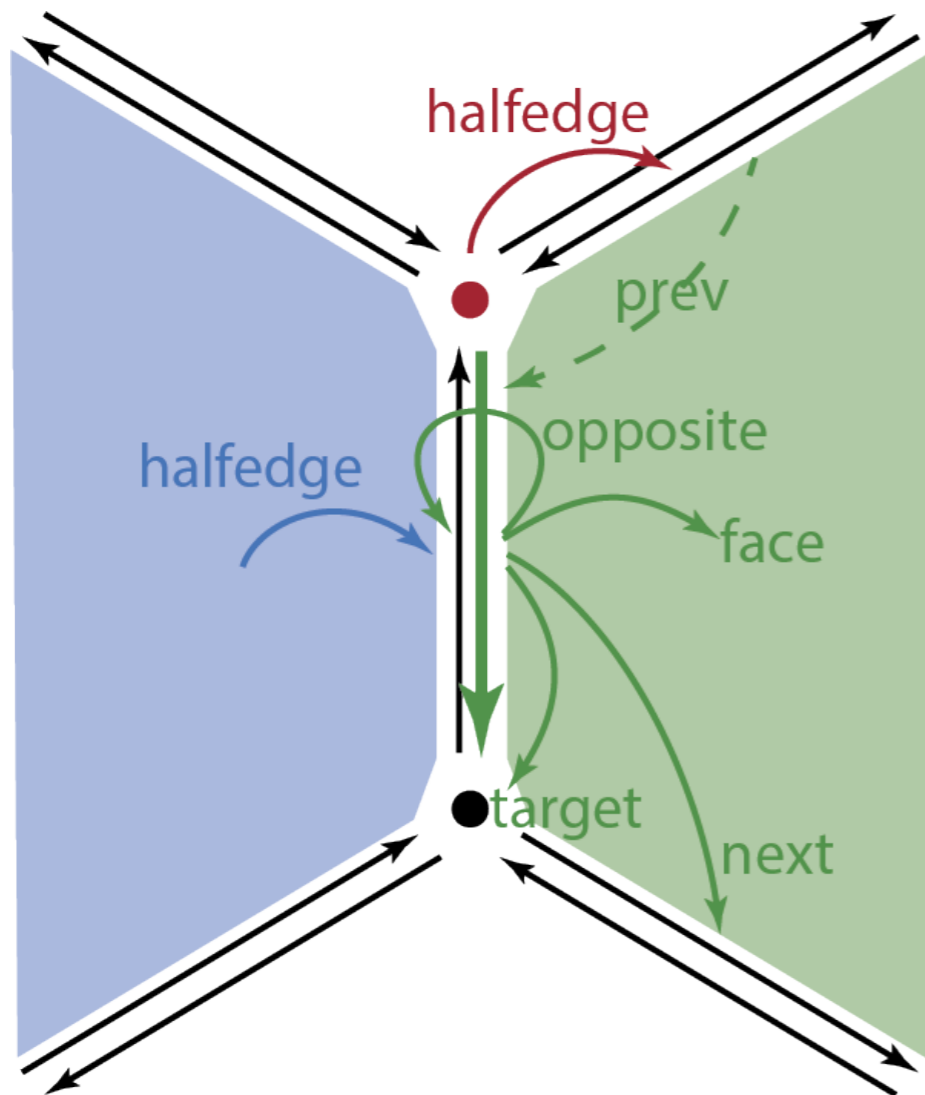
- ▶ Arête :
 - ▶ 2 demi-arêtes
- ▶ Chaque demi-arête est donc associée à un unique triplet :
 - ▶ Sommet
 - ▶ Arête
 - ▶ Face

→ unique
- ▶ Demi-arêtes d'une face orientées sens direct



REPRÉSENTATION DES MAILLAGES : DEMI-ARÊTES

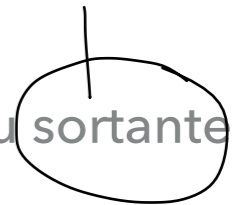
Une structure a mis tout le monde d'accord : **représentation en demi-arêtes**



Information à stocker :

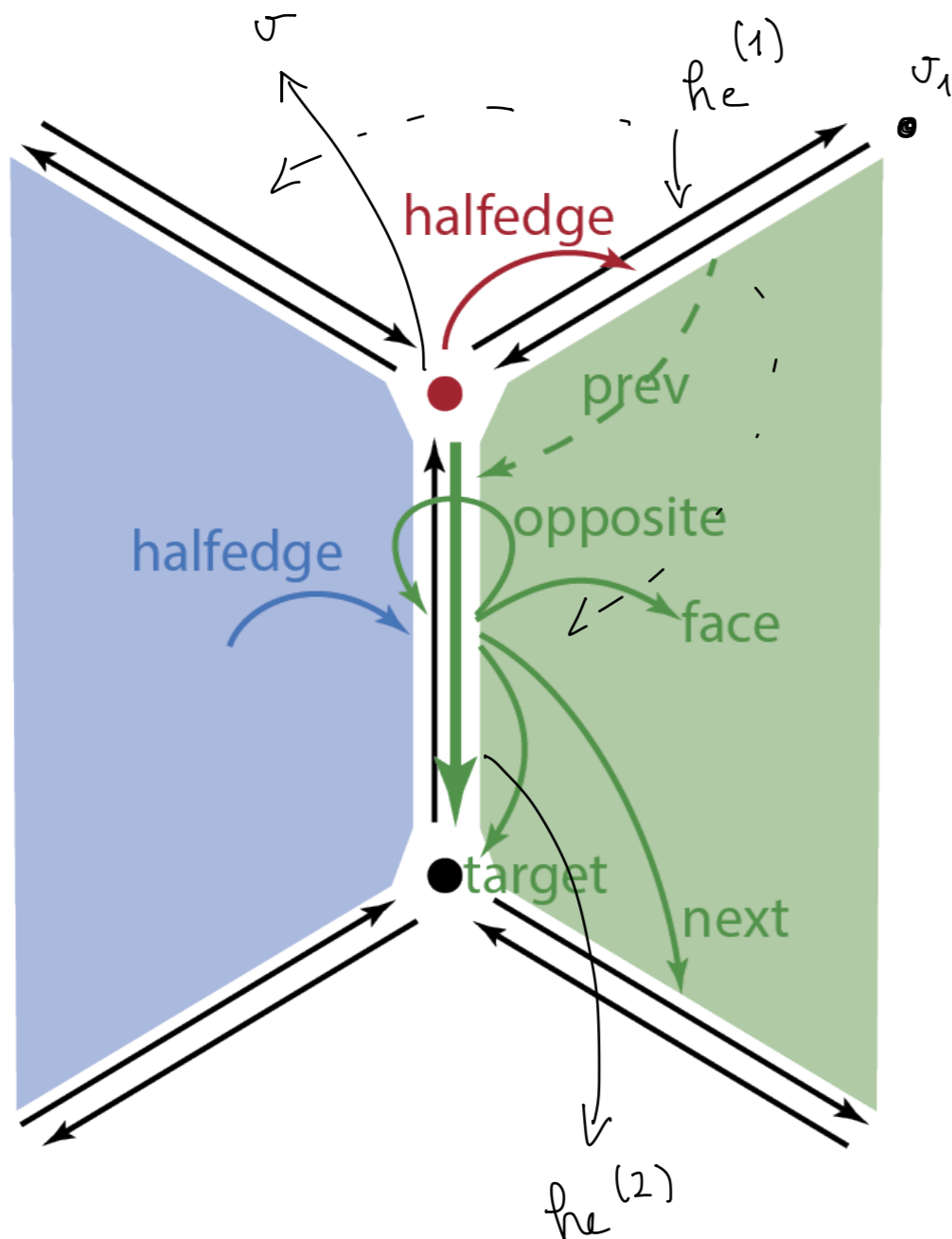
- ▶ **Sommet :**
 - ▶ 1 demi-arête voisine (entrante ou sortante selon bibliothèque)
- ▶ **Face :**
 - ▶ 1 demi-arête de bord
- ▶ **Demi-arête :**
 - ▶ demi-arête suivante (sens direct) ✓
 - ▶ [opt] demi-arête précédente (sens direct)
 - ▶ demi-arête opposée ✓
 - ▶ face associée ✓
 - ▶ sommet destination ✓

CGAL:
outgoing face



↳ CGAL

REPRÉSENTATION DES MAILLAGES : DEMI-ARÊTES



Parcourir les sommets voisins de v ?

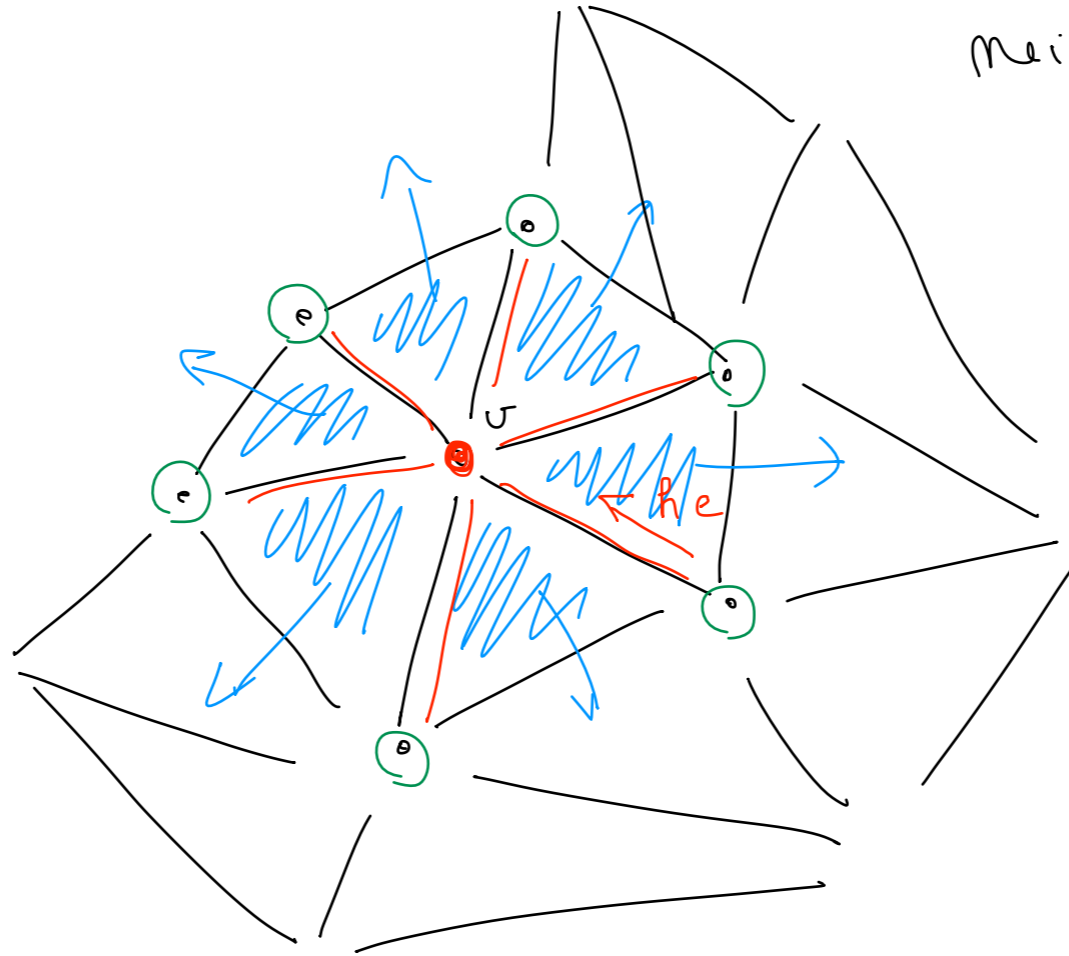
$he = \text{half_edge}(v)$ (1)
 $v_1 \rightsquigarrow \text{target}(he)$ // first neighbor
 $he_init = he$
do
| $he \leftarrow \text{next}(\text{opposite}(he))$ (2)
| $\rightsquigarrow \text{next_neigh} : \text{target}(he)$
while $(he \neq he_init)$

Complexity: $\mathcal{O}(d^0(v))$

1-neigh-faces of v

neigh edges of v

neigh vertices of v

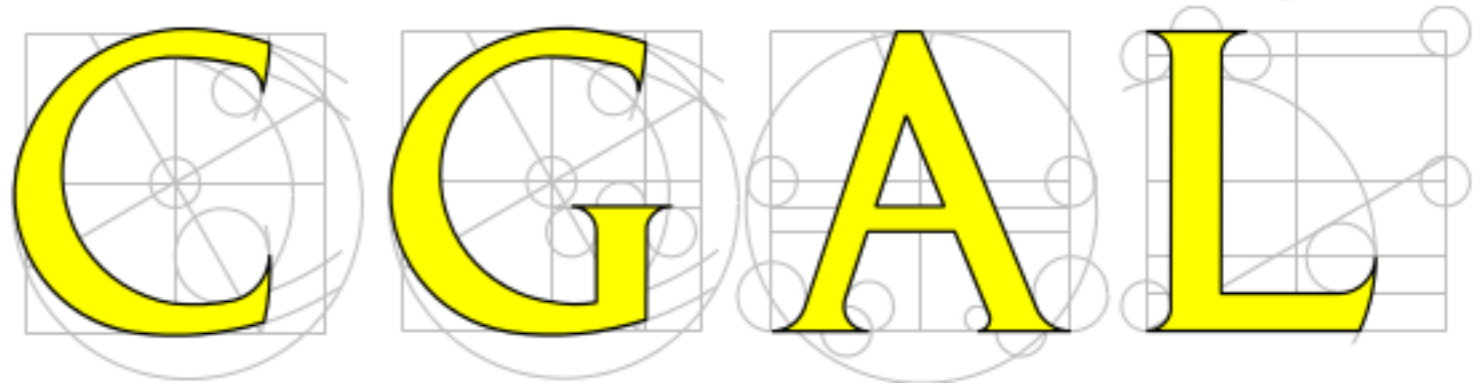


v : target (p_e)

2-neigh

CADRE DES TP

Bibliothèque C++



Computational Geometry Algorithms Library

CGAL is developed via a collaborative effort from a community of developers working at research institutes, universities and companies. See the web page on partners and funding sources for further details. This community includes the CGAL Editorial Board, which is responsible for guiding the development of the library, developers, and the user community. To become part of our community, please check how to get involved.

CGAL Editorial Board

- Pierre Alliez (INRIA Sophia Antipolis - Méditerranée)
- Guillaume Damiand (Review Manager) (CNRS - LIRIS)
- Andreas Fabri (GeometryFactory)
- Efi Fogel (Tel-Aviv University)
- Michael Hoffmann (ETH Zürich)
- Sébastien Lorient (GeometryFactory)
- Marc Pouget (INRIA Nancy - Grand Est)
- Laurent Rineau (Release Manager) (GeometryFactory)
- Monique Teillaud (INRIA Nancy - Grand Est)

<https://www.cgal.org>

Un grand merci à **Guillaume Damiand** pour son aide dans l'élaboration des TP de ce cours !