TD4

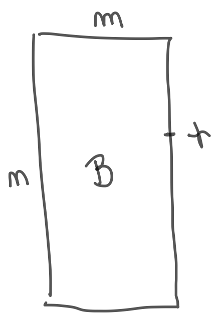
Algo puissances itérées (cf TD3)

donne (approx) → plus grand val. propre λ_1
→ $\vec{v}_1$ vect. propre associé.

Ex 1 fait → TD3

Ex 2 ⇝ calcul SVD

B : $n \times m$ $\qquad p = \min(n,m)$



i) $\boxed{\begin{array}{lll} \text{SVD } B & \text{———} & \text{val. propres de } B^t . B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sigma_i \,/\, u_i \,/\, v_i & \text{. . . . . — — . — .} & \lambda_i \,/\, v_i \\ & \lambda_i = \sigma_i^2 & \end{array}}$

$Av_i = \sigma_i u_i$

$\vec{u}_i = \frac{Av_i}{\sigma_i}$

ii)

iii) **Algo SVD1** → renvoie σ_1, u_1, v_1 (plus grande val. sing) du B

$[\lambda_1, v_1] \leftarrow$ puiss_itérées $(B^t \times B)$

// v_1 est le vecteur cherché

$\sigma_1 \leftarrow \sqrt{\lambda_1}$

$u_1 \leftarrow \frac{Bv_1}{\sigma_1}$

iv) $B = U \cdot \Sigma \cdot V^t$

$U = \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_m \\ | & & | \end{pmatrix}$ $\quad V^t = \begin{pmatrix} — v_1^t — \\ \vdots \\ — v_m^t — \end{pmatrix}$ $= \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^t$ prod par bloc / SVD

$$B = \overbrace{\sigma_1 u_1 v_1^t}^{\text{donné par SVD 1}} + \sum_{i=2}^{r} \sigma_i u_i v_i^t$$

Donc $B - \sigma_1 u_1 v_1^t = \underbrace{\sum_{i=2}^{r} \sigma_i u_i v_i^t}$ ← décomp. en val. singulières .....

SVD : $\sigma_2 \cdots \sigma_r$
$u_2 \cdots u_r$
$v_2 \cdots v_r$

=

SVD1 $(B - \sigma_1 u_1 v_1^t)$: σ_2, u_2, v_2

SVD1 $(B - \sigma_1 u_1 v_1^t - \sigma_2 u_2 v_2^t)$: σ_3, u_3, v_3

⋮

SVDk → calcule les k plus grands σ_i, u_i, v_i $\quad i \leq k$

pour i de 1 à k
$[\sigma, u, v] \leftarrow$ SVD1 (B)
$\sigma_i \leftarrow \sigma$
$u_i \leftarrow u$
$v_i \leftarrow v$
$B \leftarrow B - \sigma u v^t$
fpour

⚠ Codage Matlab : U, V matrices $\begin{pmatrix} | \\ u_i \\ | \end{pmatrix}$, Σ $\begin{pmatrix} \ddots \sigma_i \ddots \\ \end{pmatrix}$

vi) X_i pts → ACP ? renvoie V (dir. principales par col) orthogonale
v_i — 2 à 2 ⊥
— $\|\cdot\| = 1$
\+ Σ

$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i$

$$A = \begin{pmatrix} \vdots \\ -(x_i - \bar{x})^t - \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$[U, \Sigma, V] \leftarrow$ svd(A, 'econ')

renveya (V, Σ)