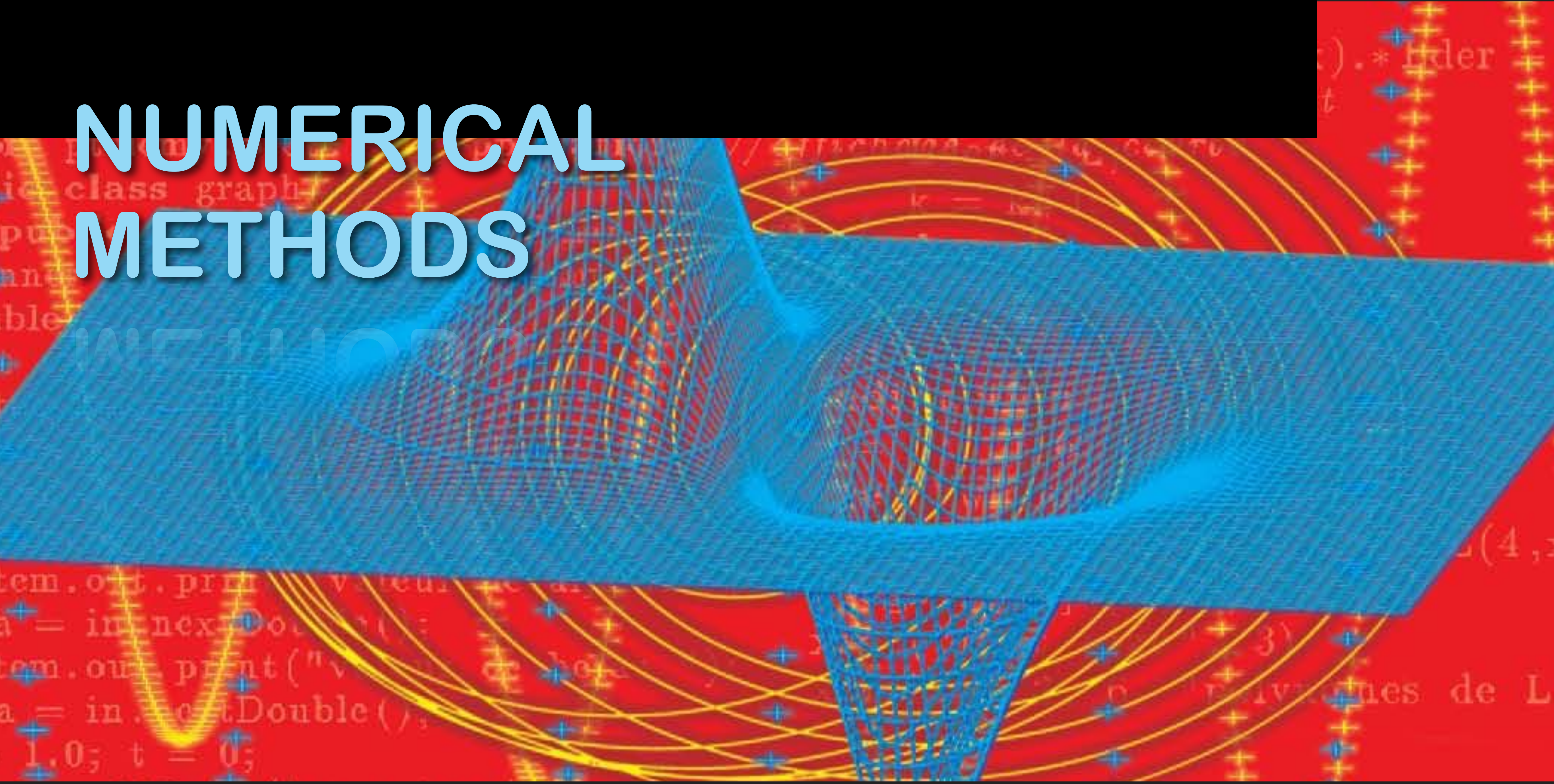
POLYTECH INFORMATIQUE

3ÈME ANNÉE

Alexandra Bac

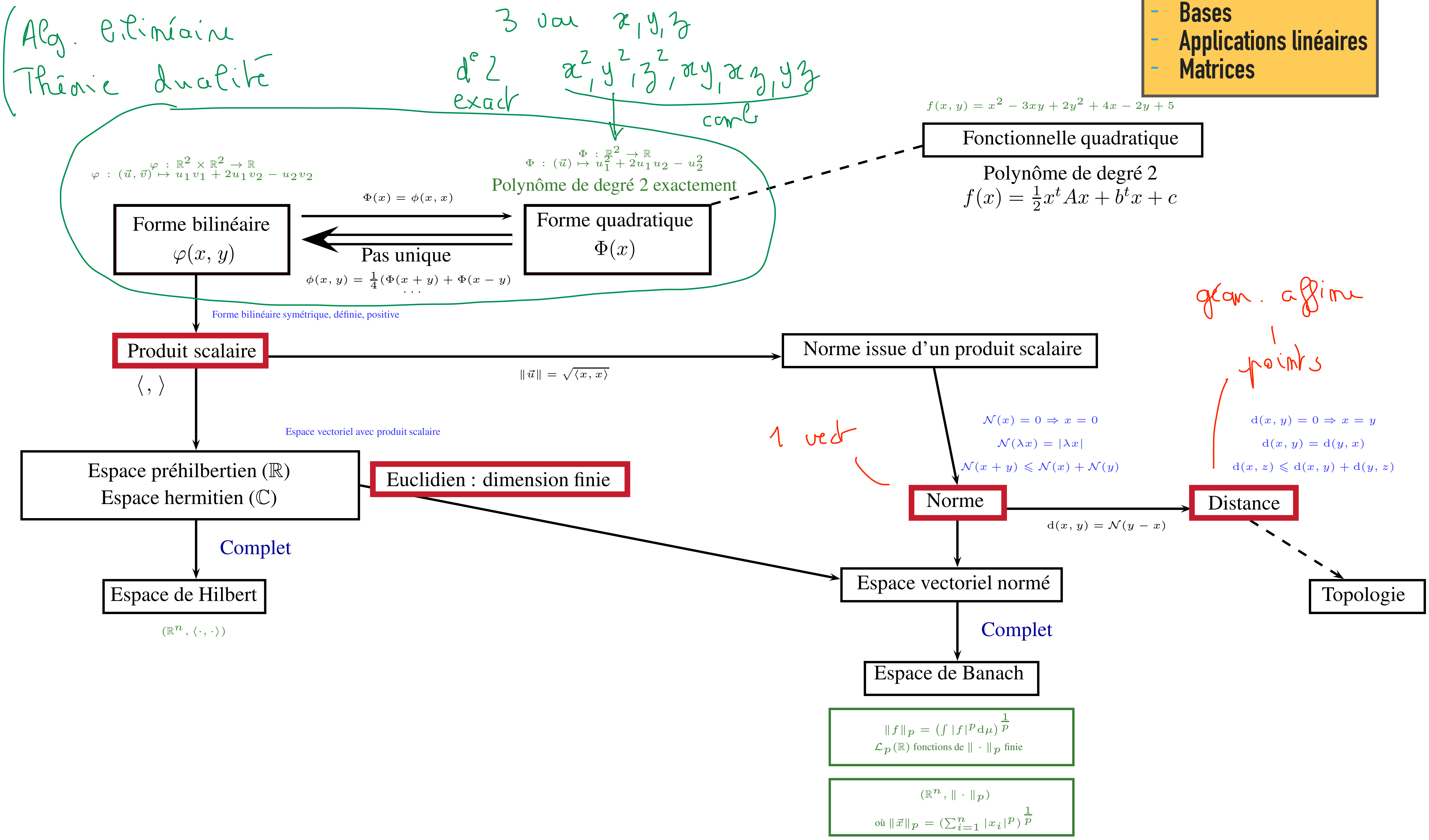
NUMERICAL METHODS



COURS 2
SYSTÈMES LINÉAIRES NUMÉRIQUES

QUELQUES RAPPELS D’ALGÈBRE LINÉAIRE

Pré-requis :
- Espaces vectoriels
- Bases
- Applications linéaires
- Matrices



Alg. bilinéaire
Théorie dualité

3 var x, y, z

d° 2 exact

$x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz$

carré

$\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$\varphi : (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto u_1 v_1 + 2u_1 v_2 - u_2 v_2$

$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$\Phi : (\vec{u}) \mapsto u_1^2 + 2u_1 u_2 - u_2^2$

Polynôme de degré 2 exactement

$f(x, y) = x^2 - 3xy + 2y^2 + 4x - 2y + 5$

Fonctionnelle quadratique

Polynôme de degré 2
$f(x) = \frac{1}{2} x^t A x + b^t x + c$

Forme bilinéaire
$\varphi(x, y)$

$\Phi(x) = \phi(x, x)$

Pas unique

$\phi(x, y) = \frac{1}{4}(\Phi(x + y) + \Phi(x - y)$
...

Forme quadratique
$\Phi(x)$

Forme bilinéaire symétrique, définie, positive

Produit scalaire

$\langle , \rangle$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Norme issue d’un produit scalaire

Espace vectoriel avec produit scalaire

Espace préhilbertien ($\mathbb{R}$)
Espace hermitien ($\mathbb{C}$)

Euclidien : dimension finie

Complet

Espace de Hilbert

$(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

1 vect

$\mathcal{N}(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
$\mathcal{N}(\lambda x) = |\lambda x|$
$\mathcal{N}(x + y) \leqslant \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$

Norme

$d(x, y) = \mathcal{N}(y - x)$

Distance

géom. affine
points

$d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$
$d(x, y) = d(y, x)$
$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$

Topologie

Espace vectoriel normé

Complet

Espace de Banach

$\|f\|_p = (\int |f|^p \mathrm{d}\mu)^{\frac{1}{p}}$
$\mathcal{L}_p(\mathbb{R})$ fonctions de $\| \cdot \|_p$ finie

$(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|_p)$
où $\|\vec{x}\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

$\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ (vect. col.)

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum u_i v_i$$

$$= \vec{u}^t \times \vec{v}$$

$$(u_1 \ldots\ldots u_n) \times \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Prod. scalaire

<u>Euclidien</u>

$$\|\vec{u}\|_2 = \sqrt{\sum u_i^2}$$

Norme

Euclidienne

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Dist.

Euclidienne

pas toujours

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$$

pas toujours

$$d(P_1, P_2) = \|\overrightarrow{P_1P_2}\|$$

QUELQUES RAPPELS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel Euclidien

(dimension finie n, produit scalaire noté $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ ou $\vec{u} \cdot \vec{v}$)

matrice de passage

$$P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \underbrace{\begin{pmatrix} | & & | \\ e_1 & \cdots & e_n \\ | & & | \end{pmatrix}}_{U}$$

base canonique

Base orthonormée

$\mathscr{B} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ n vecteurs tels que $\forall i, j \in \{1 \ldots n\}$

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j$$

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_i \rangle = 1$$

Soit U la matrice de changement de base vers $\mathscr{B}$

$$U = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{e}_1 & \cdots & \vec{e}_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

U est une matrice orthogonale (unitaire)

$$U^t \ U = \mathrm{I} \quad \Leftrightarrow U^{-1} = U^t$$

$$U^t \times U = \begin{pmatrix} — & e_1^t & — \\ & \vdots & \\ \cdots & e_i^t & \\ — & e_n^t & — \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} | & & | & & | \\ e_1 & & e_j & \cdots & e_n \\ | & & | & & | \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \bullet & - \\ & | & \end{pmatrix} \end{array} = I$$

$$e_i^t \times e_j$$
$$\shortparallel$$
$$\langle e_i , e_j \rangle$$

$\boxed{\text{Base orthonormée}}$

$$U^t \times U = I$$
$$\Downarrow$$
$$U^{-1} = U^t$$

— classe des

$\boxed{\underline{\text{matrices orthogonales}}}$

QUELQUES RAPPELS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel Euclidien

(dimension finie n, produit scalaire noté $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ ou $\vec{u} \cdot \vec{v}$)

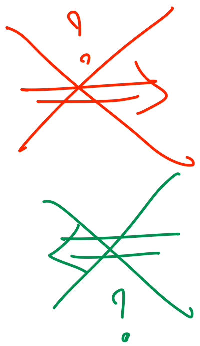
A inversible ssi A^{-1} existe

$\Updownarrow$

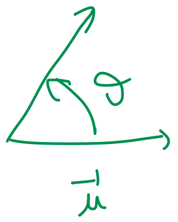
$\det(A) \neq 0$

$\updownarrow$

MATRICES DIAGONALISABLES



MATRICES INVERSIBLES



$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathbb{R}^2}$ — rotation d'angle $\vartheta \neq 0, \pi$

$\downarrow$

vect. propre ? $\longleftrightarrow$ vect // son image

AUCUN $\underline{\text{VECTEURS PROPRES}}$

$\Bigg($ R_ϑ non diagonalisable $\longleftarrow$

Matrice de rotation

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \ddots \lambda_k \end{pmatrix}$$

A diagonalisable $\iff$ $\exists$ base $\mathcal{B}$ où A devient diagonale

constituée de vect. propre

$\Updownarrow$

Il y a suffisamment de vect. propres pour former une base

QUELQUES RAPPELS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel Euclidien

(dimension finie n, produit scalaire noté $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ ou $\vec{u} \cdot \vec{v}$)

Théorème

Dans un espace Euclidien, toute matrice symétrique est diagonalisable en base orthonormale.

M matrice symétrique ($M = M^t$)

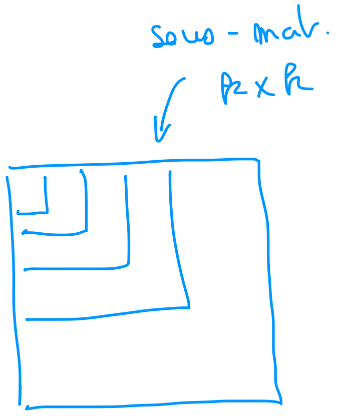
encode polynôme P d°2 exactement (forme quadratique)

$P(x) = {}^tX . M . X$

M symétrique définie positive (lié aux formes quadratiques)

$$\forall X \in E \quad X^t M X > 0$$

M :



Toutes ses valeurs propres sont strictement positives

Déterminants de tous les mineurs d'ordre k ($1 \leqslant k \leqslant n$) strictement positifs

QUELQUES RAPPELS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

Quelques normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$

$u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|\vec{u}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2} = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = \sqrt{\vec{u}^t \times \vec{u}}$$

$$\|\vec{u}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |u_i|$$

$$\|\vec{u}\|_\infty = \max_{i=1}^{n} |u_i|$$

$$\|\vec{u}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |u_i|^p}$$

Il existe d'autres normes de vecteurs que la norme 2.

Norme d'un vecteur ↔ « Longueur » du vecteur

NORMES MATRICIELLES

NORMES MATRICIELLES

$$\text{Matrice } A : \begin{array}{cc} n & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nm} \end{pmatrix} \\ & m \end{array}$$

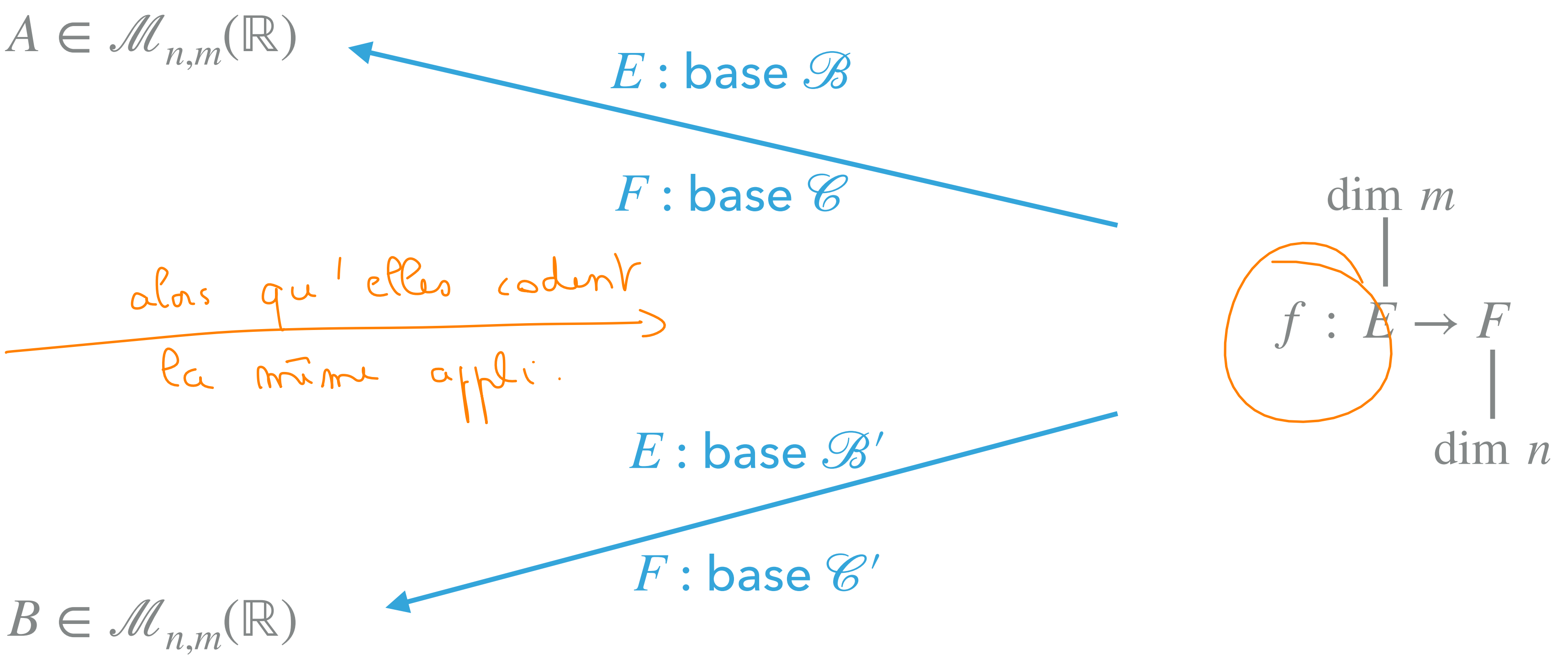
séquentialiser $\rightsquigarrow$

$$\left\| \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1m} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} \right\|$$

vect $n \times m$

$\Downarrow$ déf.

$|||A|||$



$|||A||| \leftarrow A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$

E : base $\mathscr{B}$

F : base $\mathscr{C}$

$\neq$

alors qu'elles codent la même appli.

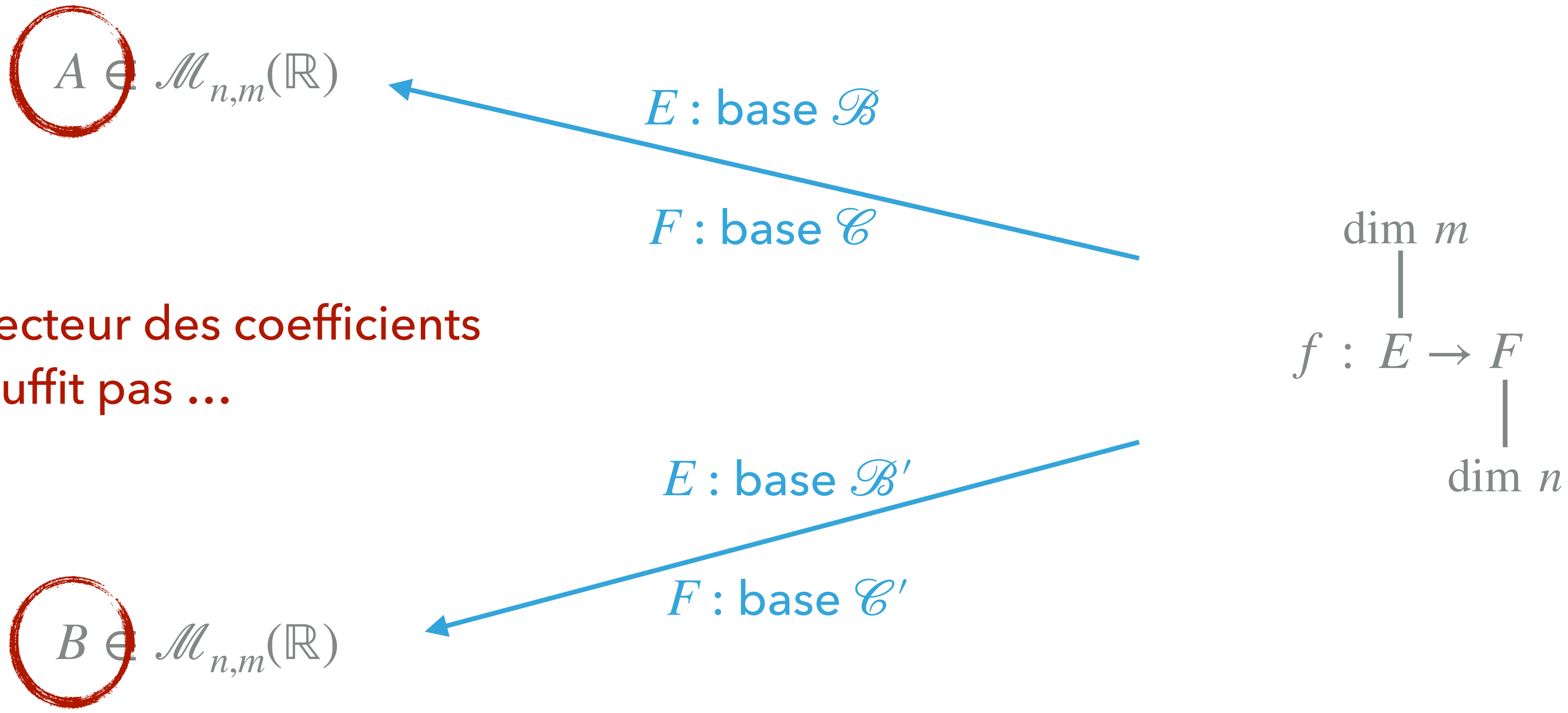
$$\begin{array}{c} \dim m \\ | \\ f : E \to F \\ \quad\quad | \\ \quad\quad \dim n \end{array}$$

E : base $\mathscr{B}'$

F : base $\mathscr{C}'$

$|||B|||$ $B \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$

NORMES MATRICIELLES



$A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$

E : base $\mathscr{B}$

F : base $\mathscr{C}$

dim m

$f \; : \; E \to F$

dim n

Considérer le vecteur des coefficients
ne suffit pas …

E : base $\mathscr{B}'$

F : base $\mathscr{C}'$

$B \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$

NORMES MATRICIELLES (NORME D'ALGÈBRE)

$\| \cdot \|$ norme matricielle si :

$$\left.\begin{array}{ll} \forall A, & \|A\| = 0 \ \Rightarrow A = 0 \\ \forall A, \forall \lambda \in \mathbb{R}, & \|\lambda \cdot A\| = |\lambda| \, \|A\| \\ \forall A, B, & \|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\| \end{array}\right) \text{ norme vectorielle} \qquad \|\vec{u}\|$$

$$\forall A, B, \quad \|A \times B\| \leqslant \|A\| \|B\|$$

NORMES MATRICIELLES (NORME D'ALGÈBRE)

$\| \cdot \|$ norme matricielle si :

$$\forall A, \quad \|A\| = 0 \;\Rightarrow A = 0$$

$$\forall A, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda \cdot A\| = |\lambda| \, \|A\|$$

$$\forall A, B, \quad \|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$$

$$\forall A, B, \quad \|A \times B\| \leqslant \|A\| \|B\|$$

Comment construire de telles normes?

NORMES MATRICIELLES (NORME D'ALGÈBRE)

$\| \cdot \|$ norme matricielle si :

$$\forall A, \quad \|A\| = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\forall A, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda \cdot A\| = |\lambda| \, \|A\|$$

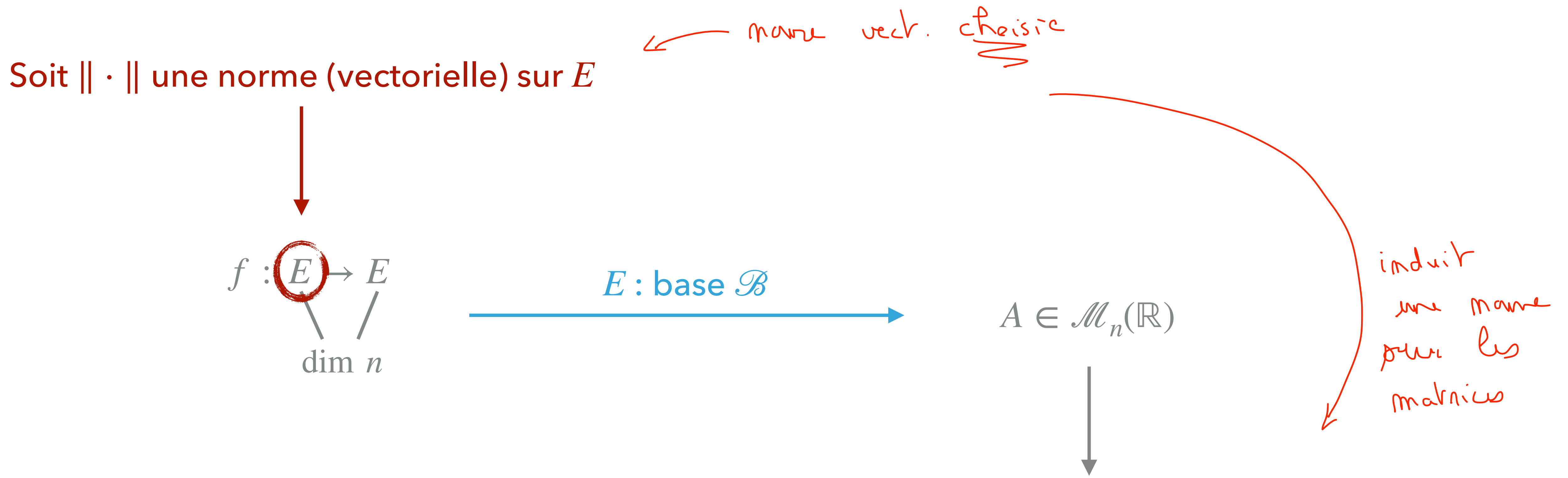
$$\forall A, B, \quad \|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$$

$$\forall A, B, \quad \|A \times B\| \leqslant \|A\| \|B\|$$

Comment construire de telles normes?

Comment construire $||A||$ ayant un sens
par rapport à l'application linéaire sous-jacente ?

NORMES MATRICIELLES SUBORDONNÉES



Soit $\|\cdot\|$ une norme (vectorielle) sur E

norme vect. choisie

$f : E \to E$

dim n

E : base $\mathscr{B}$

$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

induit une norme pour les matrices

$$|||A||| = \sup_{\vec{x}\in E, \vec{x}\neq\vec{0}} \frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} = \sup_{\vec{x}\in E, \|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\|$$

"étirement" max produit par f

long. $f(\vec{x})$

long $\vec{x}$

Norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|\cdot\|$

1) Sym ortho / plan $\mathcal{P}$

vecteurs propres

vecteurs propres

$\vec{u} \,//\, f(\vec{u})$

Sym

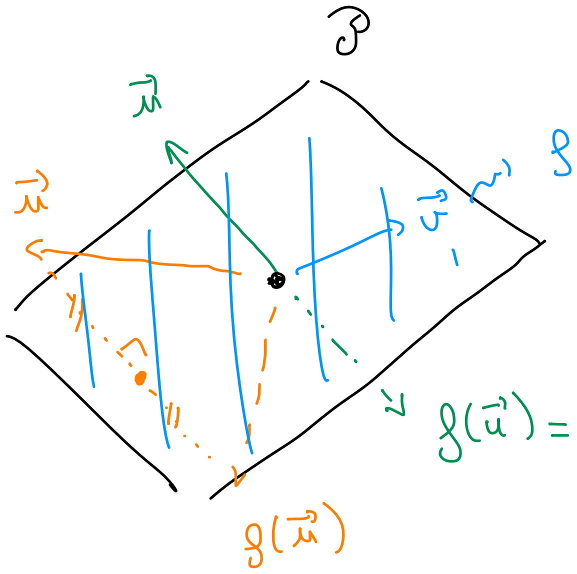
/

f

/

mat

A



$f(\vec{v}) = \vec{v} \leadsto \lambda = 1$

$f(\vec{u}) = -\vec{u} \leadsto \lambda = -1$

$\|-\vec{u}\| = \|\vec{u}\|$

$\|f(x)\| = \|AX\|$

$$\underbrace{|||\, A \,|||}_{} = \sup_{\substack{\boxed{\vec{x}} \in E \\ \vec{x} \neq \vec{0}}} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$$

vrai : $\forall x$

$\vec{u}$: $\dfrac{\|f(\vec{u})\|}{\|\vec{u}\|} = 1$

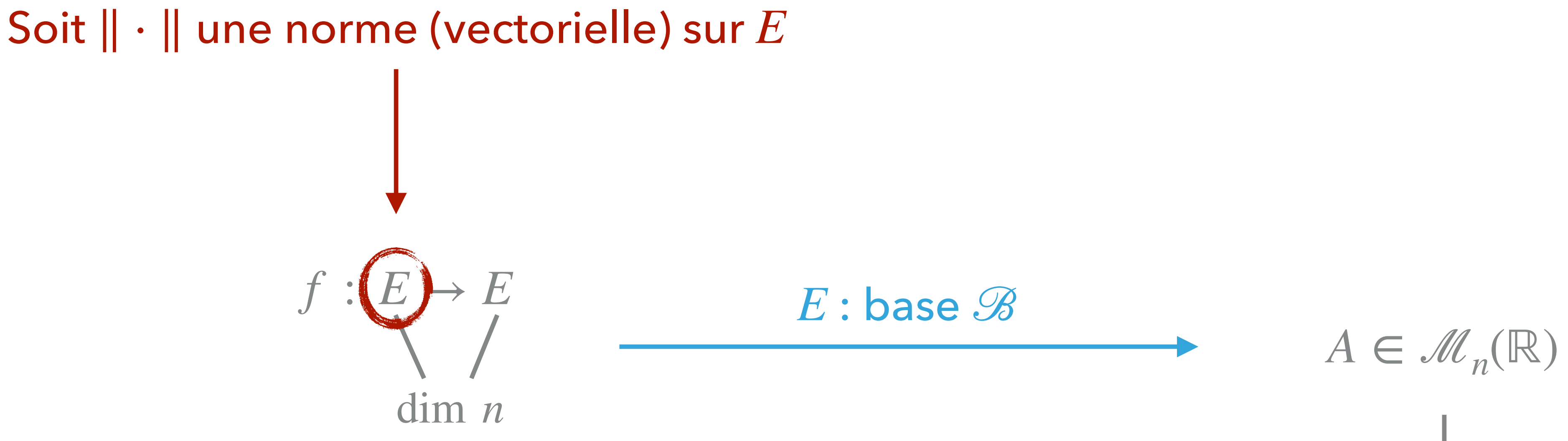
$\vec{v}$: $\dfrac{\|f(\vec{v})\|}{\|\vec{v}\|} = 1$

$|||A||| = 1$

2) Homothétie $\times \overset{\alpha}{\cancel{2}}$ $\leadsto$ $f(\vec{x}) = 2\vec{x}$

$$|||\, A \,||| = \sup_{\vec{x} \neq \vec{0}} \frac{\|f(\vec{x})\|}{\|\vec{x}\|} = \underset{\alpha}{\cancel{2}}$$

NORMES MATRICIELLES SUBORDONNÉES



Soit $\|\cdot\|$ une norme (vectorielle) sur E

$f : E \to E$

dim n

E : base $\mathscr{B}$

$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

$$\|A\| = \sup_{\vec{x}\in E, \vec{x}\neq\vec{0}} \frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} = \sup_{\vec{x}\in E, \|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\|$$

Norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|\cdot\|$

Intuitivement : mesure « l'étirement maximum » obtenu par application de f à un vecteur

NORMES MATRICIELLES SUBORDONNÉES

$$\boxed{||A|| = \sup_{\vec{x}\in E, \vec{x}\neq\vec{0}} \frac{||A\vec{x}||}{||\vec{x}||} = \sup_{\vec{x}\in E, ||\vec{x}||=1} ||A\vec{x}||}$$

Pb : calcul de cette norme …

Propriétés

NORMES MATRICIELLES SUBORDONNÉES

$$\|A\| = \sup_{\vec{x}\in E, \vec{x}\neq\vec{0}} \frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} = \sup_{\vec{x}\in E, \|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\|$$

Pb : calcul de cette norme …

Propriétés

Rayon spectral de A

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ les valeurs propres de A

$$\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$$

NORMES MATRICIELLES SUBORDONNÉES

$$\|A\| = \sup_{\vec{x}\in E, \vec{x}\neq\vec{0}} \frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} = \sup_{\vec{x}\in E, \|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\|$$

Pour $\|\cdot\|_2$:

plus grande val. singulière (± val. propres)

(§4)

- $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t\,A)} = \|A^t\|_2$
- Si U est orthogonale, $\|U\|_2 = 1$
- $\|\cdot\|_2$ est invariante par transformation orthogonale, ie. si U est orthogonale

$$\|AU\|_2 = \|A\|_2 = \|UA\|_2 = \|U^tAU\|_2$$

- Si A normale ($A\,A^t = A^t\,A$) :

$$\|A\|_2 = \rho(A)$$

Pour $\|\cdot\|_1$:

$$\|A\|_1 = \max_j \overbrace{\sum_i \overbrace{|a_{i,j}|}^{col_j}}^{\|col_j\|_1}$$

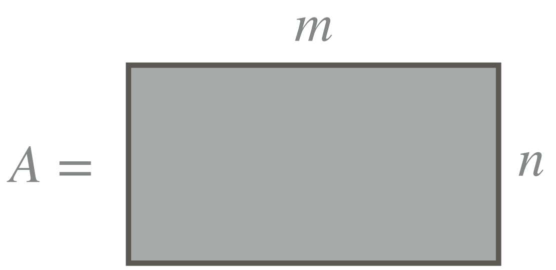
Pour $\|\cdot\|_\infty$:

$$\|A\|_\infty = \max_i \overbrace{\sum_j |a_{i,j}|}^{\|ligne_i\|_1}$$

AUTRE NORME : NORME DE FROBENIUS

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$

Espace vectoriel de dimension $n \times m \simeq \mathbb{R}^{n\times m}$



$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}^2} = \sqrt{\mathrm{Tr}(A^t\ A)} = = \sqrt{\mathrm{Tr}(A\ A^t)}$$

- Norme matricielle (pas évident …)
- Pas subordonnée

STABILITÉ DES SYSTÈMES LINÉAIRES

UN EXEMPLE …

On considère le système linéaire $Xw = y$ suivant :

```
X = [10, 7, 8, 7 ; 7, 5, 6, 5 ; 8, 6, 10, 9 ; 7, 5, 9, 10] ;
y = [32 ; 23 ; 33 ; 31 ] ;
w = X\y ;
```

Code
Matlab

Puis on perturbe légèrement le second membre (ex : erreur de mesure)

```
yy = [32.1 ; 22.9 ; 33.1 ; 30.9 ] ;
ww = X\yy ;
```

Perturbation au plus de 0,4%

UN EXEMPLE …

On considère le système linéaire $Xw = y$ suivant :

```
X = [10, 7, 8, 7 ; 7, 5, 6, 5 ; 8, 6, 10, 9 ; 7, 5, 9, 10] ;
y = [32 ; 23 ; 33 ; 31 ] ;
w = X\y ;
```

Code Matlab

Puis on perturbe légèrement le second membre (ex : erreur de mesure)

```
yy = [32.1 ; 22.9 ; 33.1 ; 30.9 ] ;
ww = X\yy ;
```

Perturbation au plus de 0,4%

On s’attend à ce que l’impact sur le résultat soit faible …

UN EXEMPLE …

On considère le système linéaire $Xw = y$ suivant :

```
X = [10, 7, 8, 7 ; 7, 5, 6, 5 ; 8, 6, 10, 9 ; 7, 5, 9, 10] ;
y = [32 ; 23 ; 33 ; 31 ] ;
w = X\y ;
```

```
yy = [32.1 ; 22.9 ; 33.1 ; 30.9 ] ;
ww = X\yy ;
```

Conditionnement d’un système linéaire

UN EXEMPLE …

On considère le système linéaire $Xw = y$ suivant :

```
X = [10, 7, 8, 7 ; 7, 5, 6, 5 ; 8, 6, 10, 9 ; 7, 5, 9, 10] ;
y = [32 ; 23 ; 33 ; 31 ] ;
w = X\y ;
```

```
yy = [32.1 ; 22.9 ; 33.1 ; 30.9 ] ;
ww = X\yy ;
```

Peut-on prévoir cette instabilité ? L'anticiper ? La quantifier ?

Conditionnement d'un système linéaire

CONDITIONNEMENT ...

$$Xw = y \rightsquigarrow w$$

$$\downarrow$$

$$y + \underline{\underline{\delta y}}$$

$$\downarrow$$

small

$$\boxed{Xw' = y + \delta y} \overset{\text{solution}}{\rightsquigarrow} w' = w + \delta w$$

?

$$\frac{\|\delta w\|}{\|w\|} \overset{?}{\sim} \frac{\|\delta y\|}{\|y\|}$$

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

We have:

$$\begin{cases} X(\underline{w} + \delta w) = y + \underline{\underline{\delta y}} \\ Xw = y \end{cases}$$

$$\cancel{Xw} + X \cdot \delta w = \cancel{Xw} + \delta y$$

$$\boxed{X \cdot \delta w = \delta y} \rightsquigarrow \boxed{\delta w = X^{-1} \cdot \delta y} \; (*)$$

$$\|\cdot\|$$

$$\underbrace{\|X \cdot \delta w\|}_{\leq \|X\| \cdot \|\delta w\|} = \|\delta y\| \rightsquigarrow \|\delta y\| \leq \|X\| \cdot \|\delta w\|$$

$$(*) \quad \underline{\|\delta w\| \leq \|X^{-1}\| \cdot \|\delta y\|} \quad (1)$$

$$\text{change / solution} \sim \delta w$$

$$\downarrow$$

$$\text{change / } y \sim \delta y$$

$$\frac{\|\widetilde{\delta w}\|}{\|w\|} \quad ? \ \ldots\ldots \quad \frac{\|\widetilde{\delta y}\|}{\|y\|}$$

$$(1) \qquad \frac{\|\delta w\|}{\|w\|} \leqslant \|X^{-1}\| \cdot \frac{\|\delta y\|}{\|w\|}$$

we have $Xw = y$

$$\Downarrow$$

$$\|y\| \leqslant \|X\| \cdot \|w\|$$

$$\Updownarrow$$

$$(**) \qquad \frac{1}{\|w\|} \leqslant \|X\| \frac{1}{\|y\|}$$

<u>ex</u>! 1000

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\|\delta w\|}{\|w\|} \leqslant \|X\| \cdot \|X^{-1}\| \cdot \frac{\|\delta y\|}{\|y\|}}$$

relative error over the solution

controls the stability

relative error over y

→ conditionning number

CONDITIONNEMENT D'UN SYSTÈME LINÉAIRE

Soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle $\|\cdot\|$

Le conditionnement du système linéaire $Xw = y$ (pour X inversible) est donné par :

$$\mathrm{cond}(X) = \|X\| \, \|X^{-1}\|$$

appelé conditionnement de la matrice X.

Mesure la sensibilité du système
aux perturbations (de X et de y)

CONDITIONNEMENT D'UN SYSTÈME LINÉAIRE

Souvent $\|\cdot\|_2$ car les propriétés du conditionnement sont alors plus intéressantes

Soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle $\|\cdot\|$

Le conditionnement du système linéaire $Xw = y$ (pour X inversible) est donné par :

$$\mathrm{cond}(X) = \|X\| \, \|X^{-1}\|$$

appelé conditionnement de la matrice X.

Mesure la sensibilité du système aux perturbations (de X et de y)

CONDITIONNEMENT D'UN SYSTÈME LINÉAIRE

Conditionnement de $Xw = y$

$$\mathrm{cond}(X) = \|X\| \, \|X^{-1}\|$$

- $\mathrm{cond}(X) \geqslant 1$
- $\mathrm{cond}(X) = \mathrm{cond}(X^{-1})$
- $\mathrm{cond}(\lambda X) = \mathrm{cond}(X)$

Pour $\| \cdot \|_2$:

(si X normale, ie $X\,X^t = X^t\,X$, $|\sigma_i| = |\lambda_i|$)

- $\mathrm{cond}_2(X) = \dfrac{\sigma_n(X)}{\sigma_1(X)}$

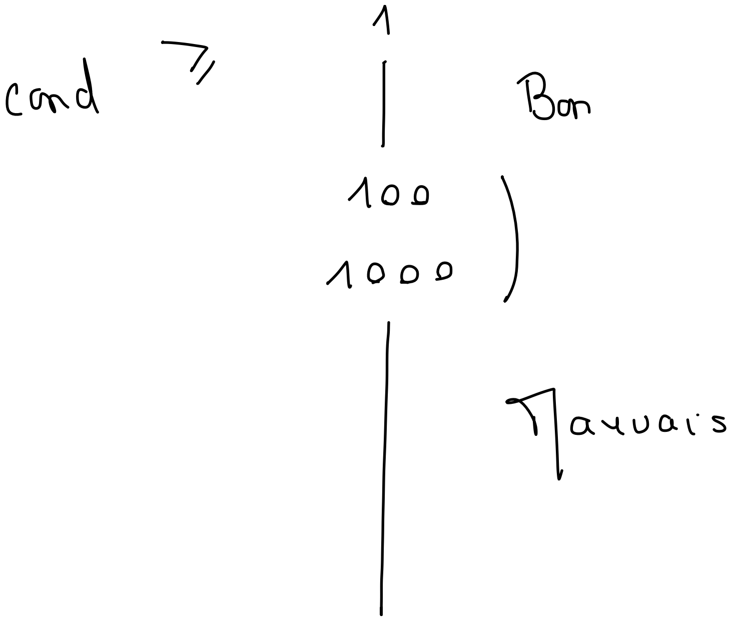
plus grande valeur singulière (cours 2)

plus petite valeur singulière (cours 2)

- Si U est orthogonale, $\mathrm{cond}_2(U) = 1$
- cond_2 est invariant par transformation orthogonale, ie. si U est orthogonale

$$\mathrm{cond}_2(UX) = \mathrm{cond}_2(X) = \mathrm{cond}_2(XU) = \mathrm{cond}_2(U^tXU)$$

Un système est d'autant mieux conditionné que $\mathrm{cond}(X)$ est proche de 1.

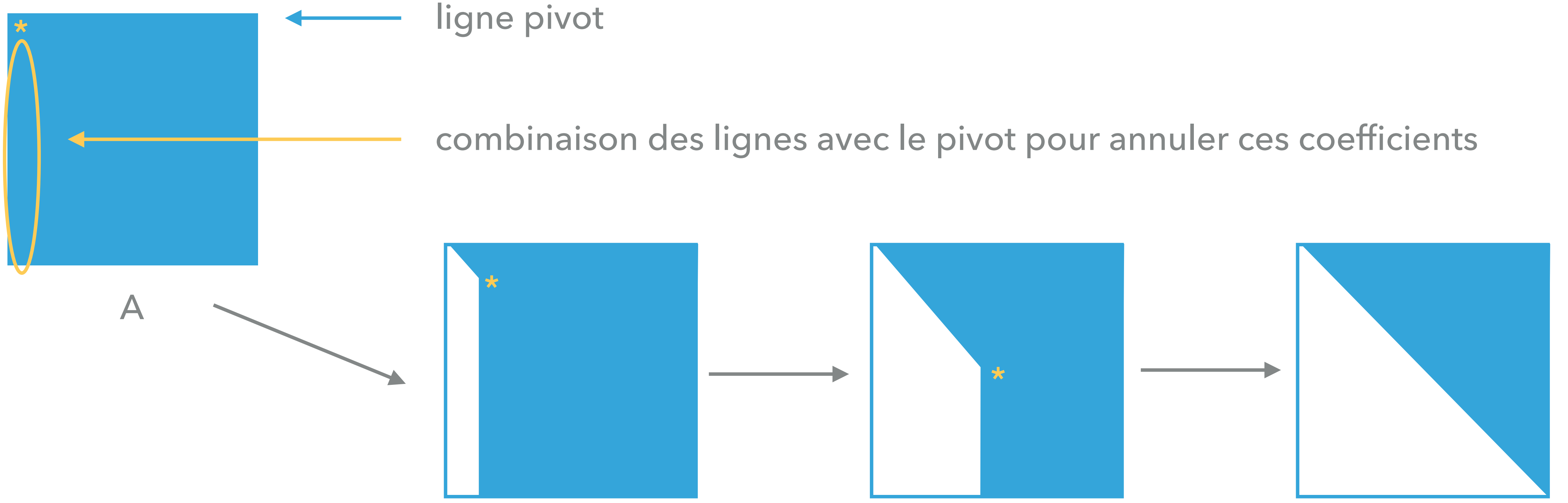

cond ⩾
1
Bon
100
1000
Mauvais

ALGORITHMES DE RÉSOLUTION DE SYSTÈMES LINÉAIRES

GAUSS / LU

SYSTÈMES LINÉAIRES - GAUSS

Vous connaissez tous un algorithme : pivot de Gauss … quelques remarques pour commencer :



ligne pivot

combinaison des lignes avec le pivot pour annuler ces coefficients

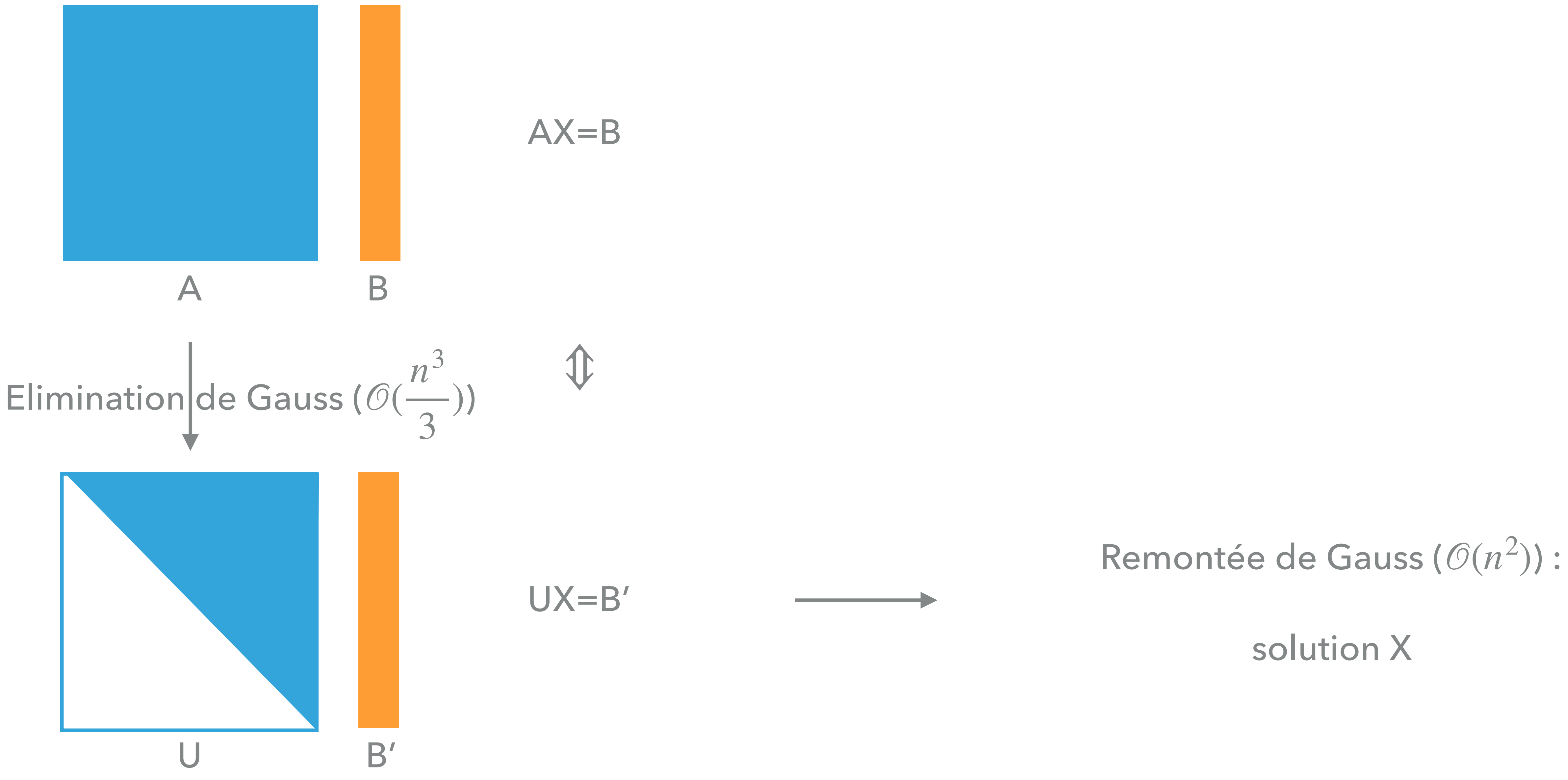
A

Elimination de Gauss

Matrice triangulaire
supérieure

SYSTÈMES LINÉAIRES - GAUSS

Vous connaissez tous un algorithme : pivot de Gauss … quelques remarques pour commencer :



AX=B

A

B

Elimination de Gauss ($\mathcal{O}(\frac{n^3}{3})$)

⇕

UX=B′

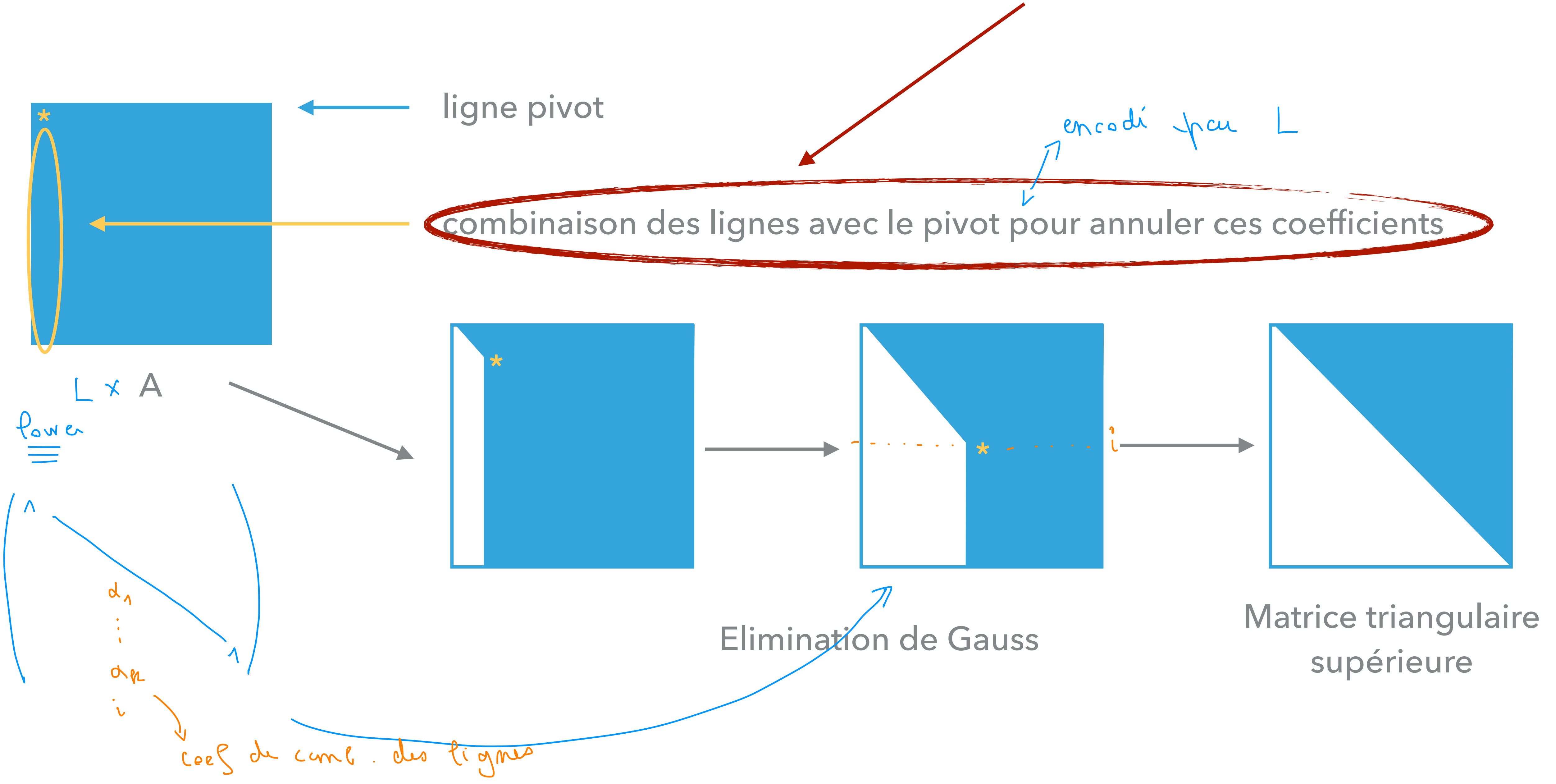
U

B′

Remontée de Gauss ($\mathcal{O}(n^2)$) :

solution X

SYSTÈMES LINÉAIRES – 1) ALGORITHME VS DÉCOMPOSITION



Opération linéaire → codable par une matrice (triangulaire inférieure)

ligne pivot

combinaison des lignes avec le pivot pour annuler ces coefficients

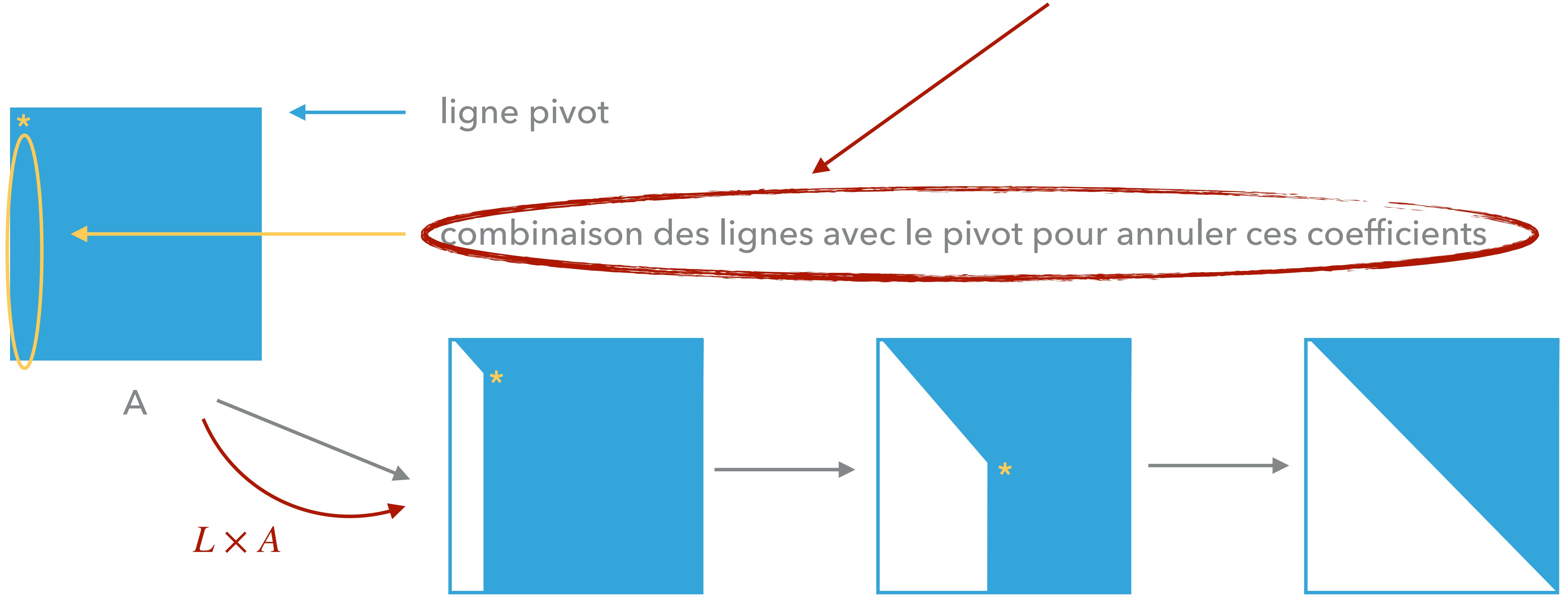
A

Elimination de Gauss

Matrice triangulaire supérieure

SYSTÈMES LINÉAIRES – 1) ALGORITHME VS DÉCOMPOSITION

Opération linéaire → codable par une matrice (triangulaire inférieure)



ligne pivot

combinaison des lignes avec le pivot pour annuler ces coefficients

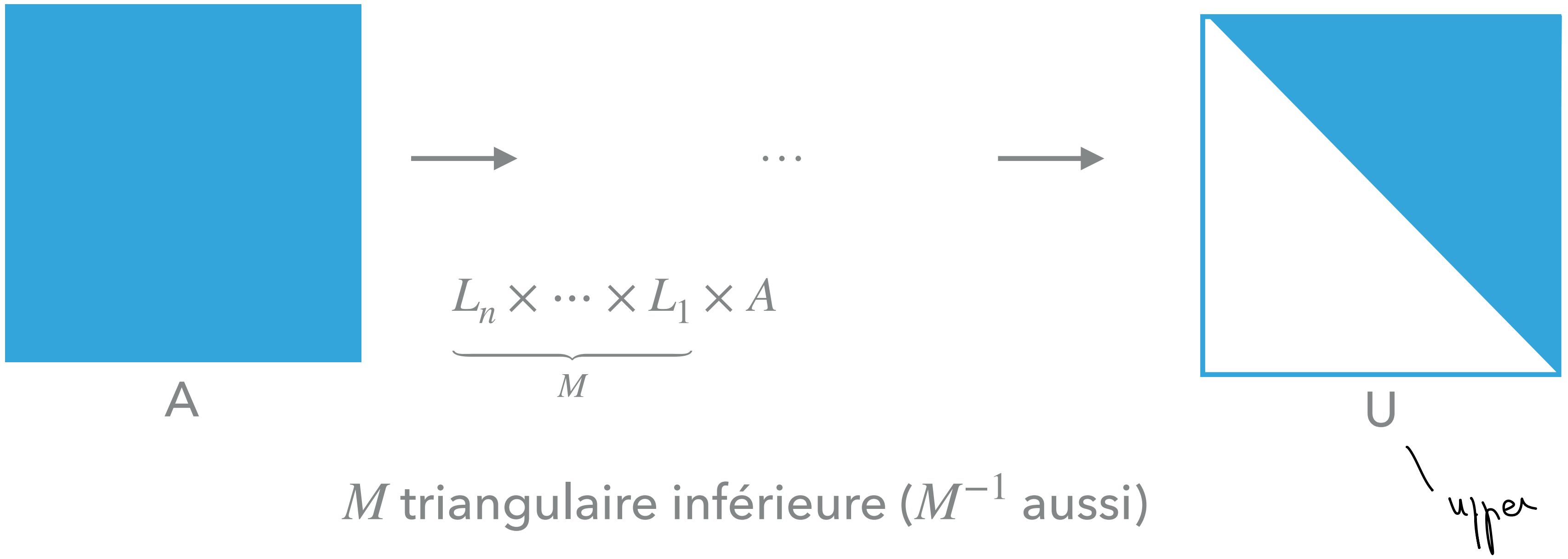
A

$L \times A$

Elimination de Gauss

Matrice triangulaire supérieure

SYSTÈMES LINÉAIRES – 1) ALGORITHME VS DÉCOMPOSITION



$$\underbrace{L_n \times \cdots \times L_1}_{M} \times A$$

M triangulaire inférieure (M^{-1} aussi)

En posant $L = M^{-1}$:

$$MA = U \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{A = LU}$$

Décomposition LU

lower — upper

↳ A = prod. de matrices plus simples

triang

Vision algorithme vs décomposition

Intérêt décomposition LU

principale.

↓

résoudre le syst

" facilement "

init:

$O(\frac{n^3}{3})$

(Gauss)

$AX = B$

⟺

$L(UX) = B$

$UX = Y$

on a calculé

décomp. LU ⟷ Gauss

$A = LU$

$O(\frac{n^3}{3})$

" pré-résoudre " le

syst....

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \boxed{U}X = Y & ② \\ \boxed{L}Y = \boxed{B} & ① \end{cases}$$

matrices

triang...

→ résolution :

$2 \times O(n^2)$

connu

A, U, L, B

cas où c'est utile :

si on doit résoudre

des suites de

syst

— A cst

— B change

B_1, B_2 ....

1) Une fois décomp. LU

→ $O(\frac{n^3}{3})$

2) Résoudre

$AX = B_i$ avec

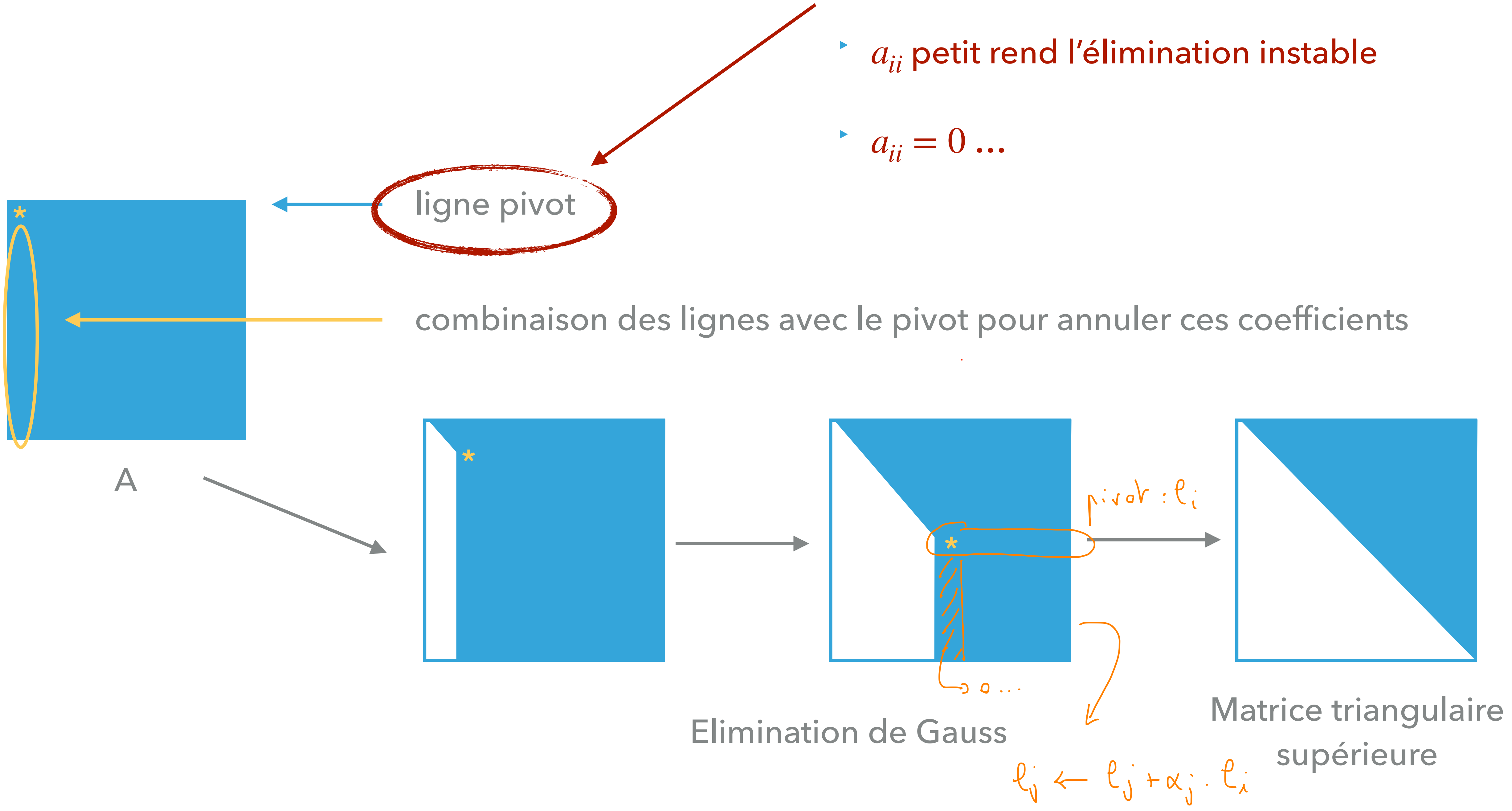
décomp.

→ $O(n^2)$

SYSTÈMES LINÉAIRES – 2) PIVOT / DÉCOMPOSITION PLU

Choix de la ligne pivot :

- a_{ii} petit rend l'élimination instable
- $a_{ii} = 0$ …



ligne pivot

combinaison des lignes avec le pivot pour annuler ces coefficients

A

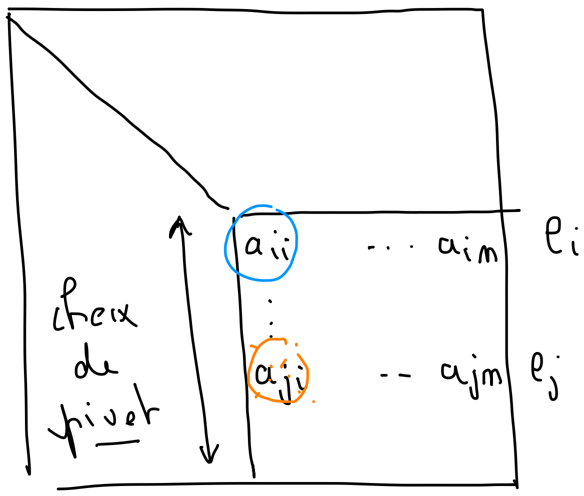
Elimination de Gauss

Matrice triangulaire supérieure

pivot : ℓ_i

$\to 0 \dots$

$\ell_j \leftarrow \ell_j + \alpha_j \cdot \ell_i$



e_i — choisie

$$e_j \leftarrow e_j - \underbrace{\frac{a_{ji}}{a_{ii}}}_{\alpha_j} e_i$$

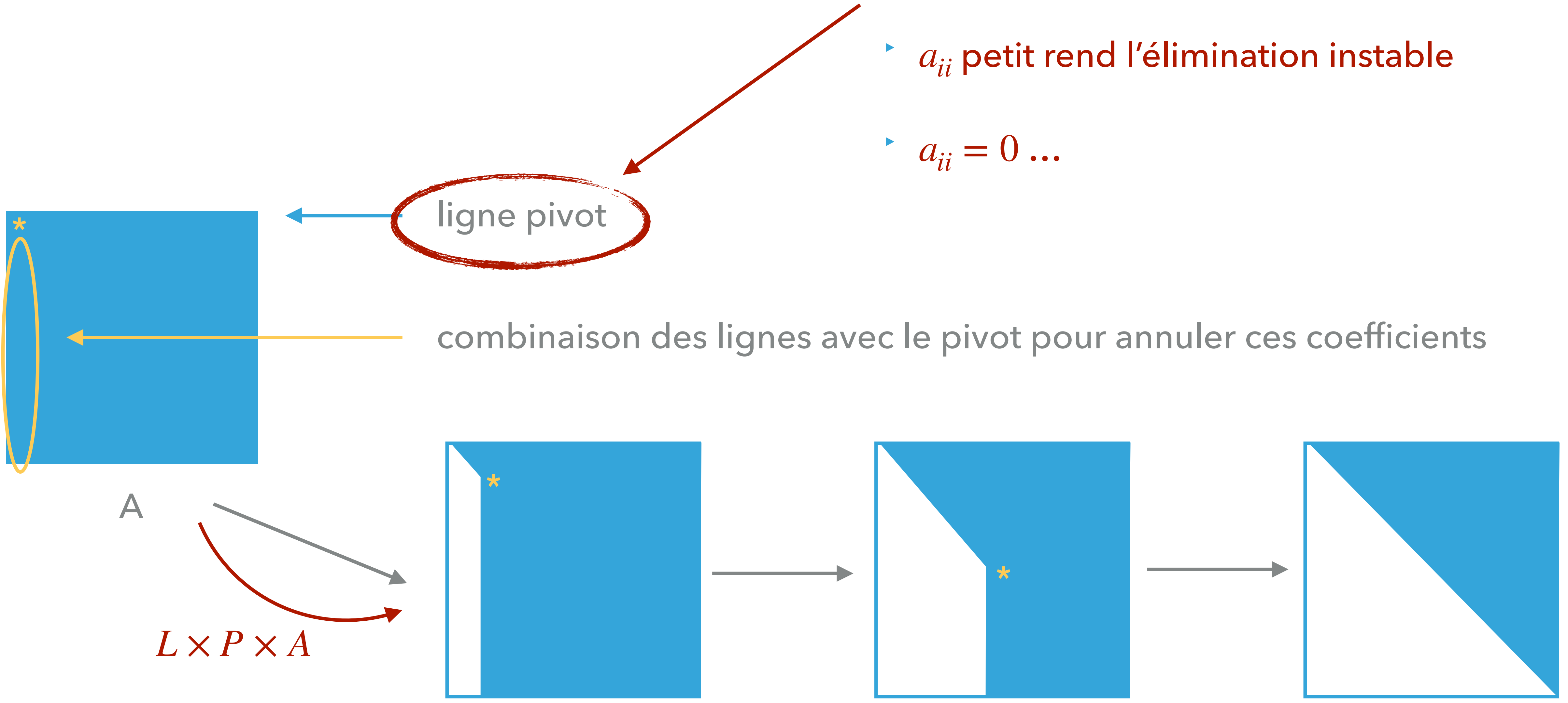
$$\alpha_j = -\frac{a_{ji}}{\boxed{a_{ii}}}$$

— ⚠ On évite toujours de diviser par de petits nombres !

SYSTÈMES LINÉAIRES - 2) PIVOT / DÉCOMPOSITION PLU

Choix de la ligne pivot :

- a_{ii} petit rend l'élimination instable
- $a_{ii} = 0$ …



ligne pivot

combinaison des lignes avec le pivot pour annuler ces coefficients

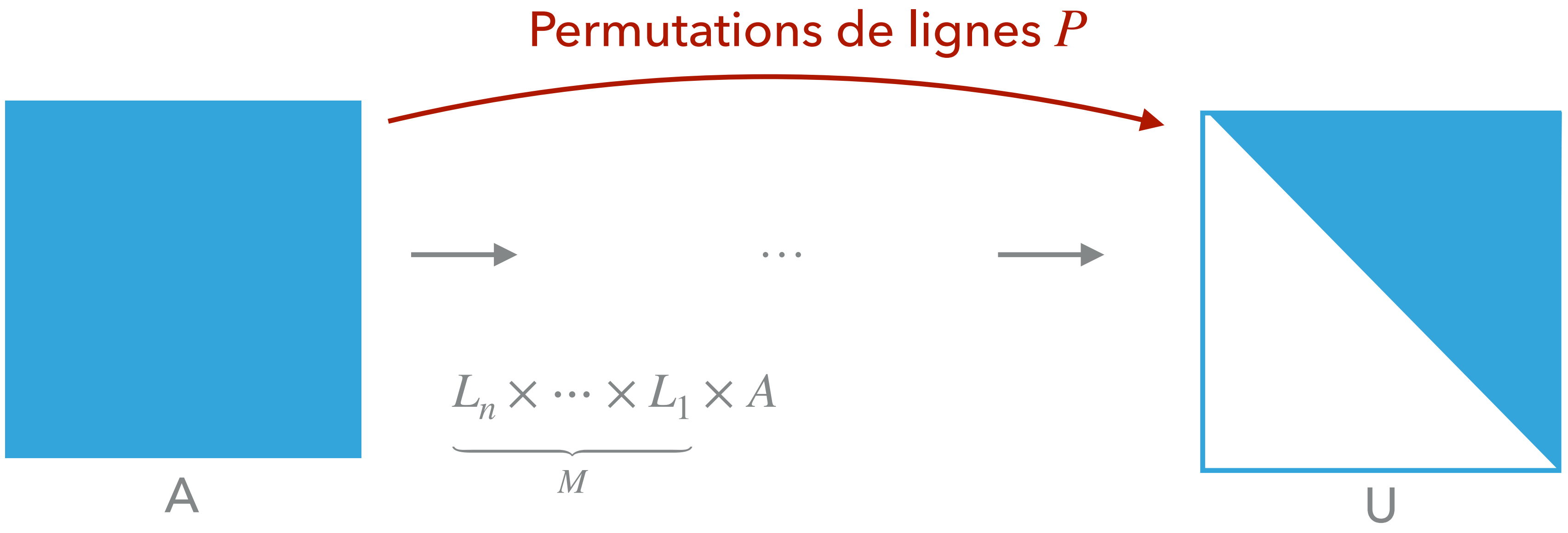
A

$L \times P \times A$

Elimination de Gauss

Matrice triangulaire supérieure

SYSTÈMES LINÉAIRES – 2) PIVOT / DÉCOMPOSITION PLU



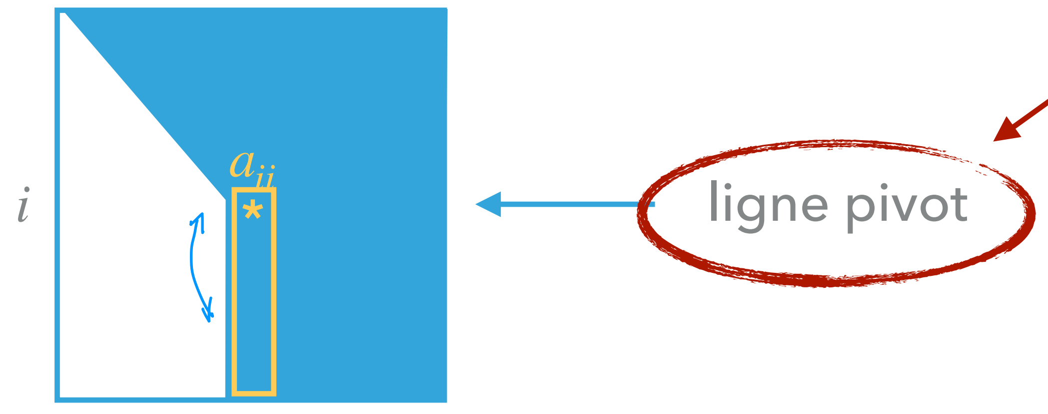
$\underbrace{L_n \times \cdots \times L_1}_{M} \times A$

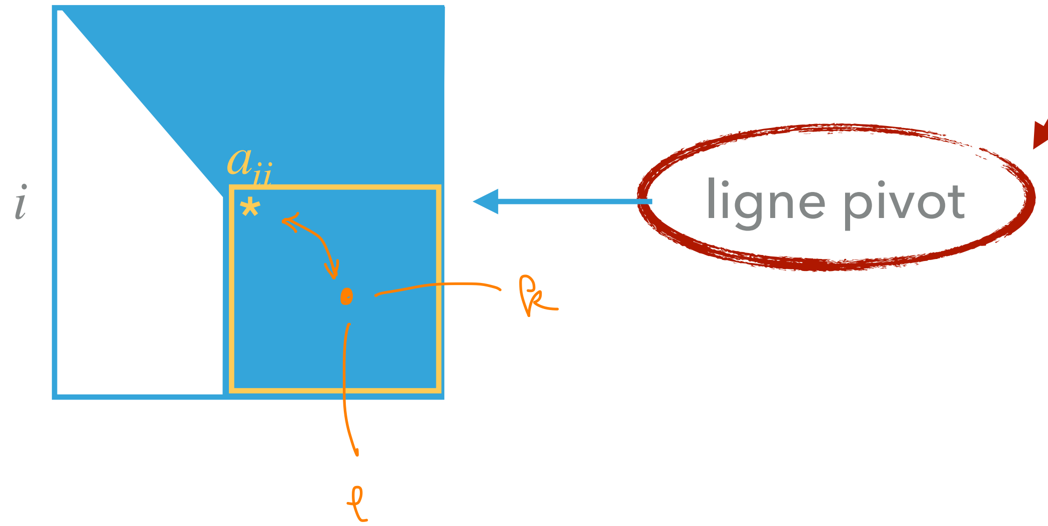
En posant $L = M^{-1}$:

$$\boxed{PA = LU}$$

Décomposition PLU

SYSTÈMES LINÉAIRES – 2) PIVOT / DÉCOMPOSITION PLU





Stratégies :

- Pivot « partiel » : ligne *j* telle que

$$a_{j,i} = \max_{k=i\ldots n} a_{k,i}$$

choix ligne ①
↳ échange de lignes

- Pivot « total » : ligne *j* telle que

$$a_{j,i} = \max_{k,l=i\ldots n} a_{k,l}$$

②

implique des échanges de colonnes

$AX = B$

① échanger 2 lignes de A
⟺
échanger 2 coefs de B

② ⤳ échanger ligne i ⟷ ligne k
⤳ échanger col i ⟷ col l (*)

(*)

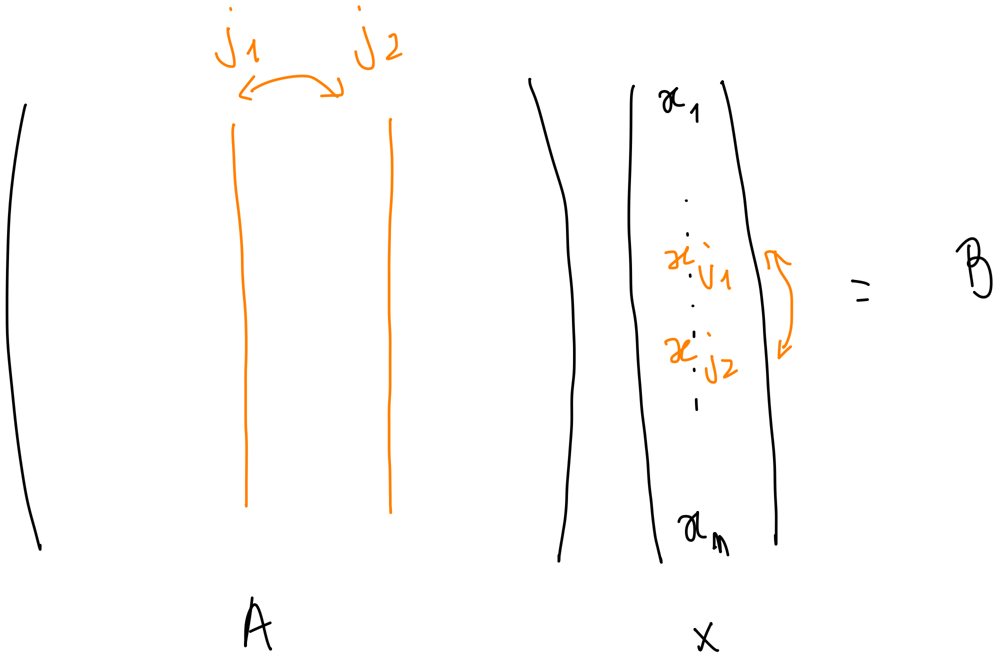
$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 5x - y = 3 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

échange des col

change l'ordre des inconnues

$3y + 2x$

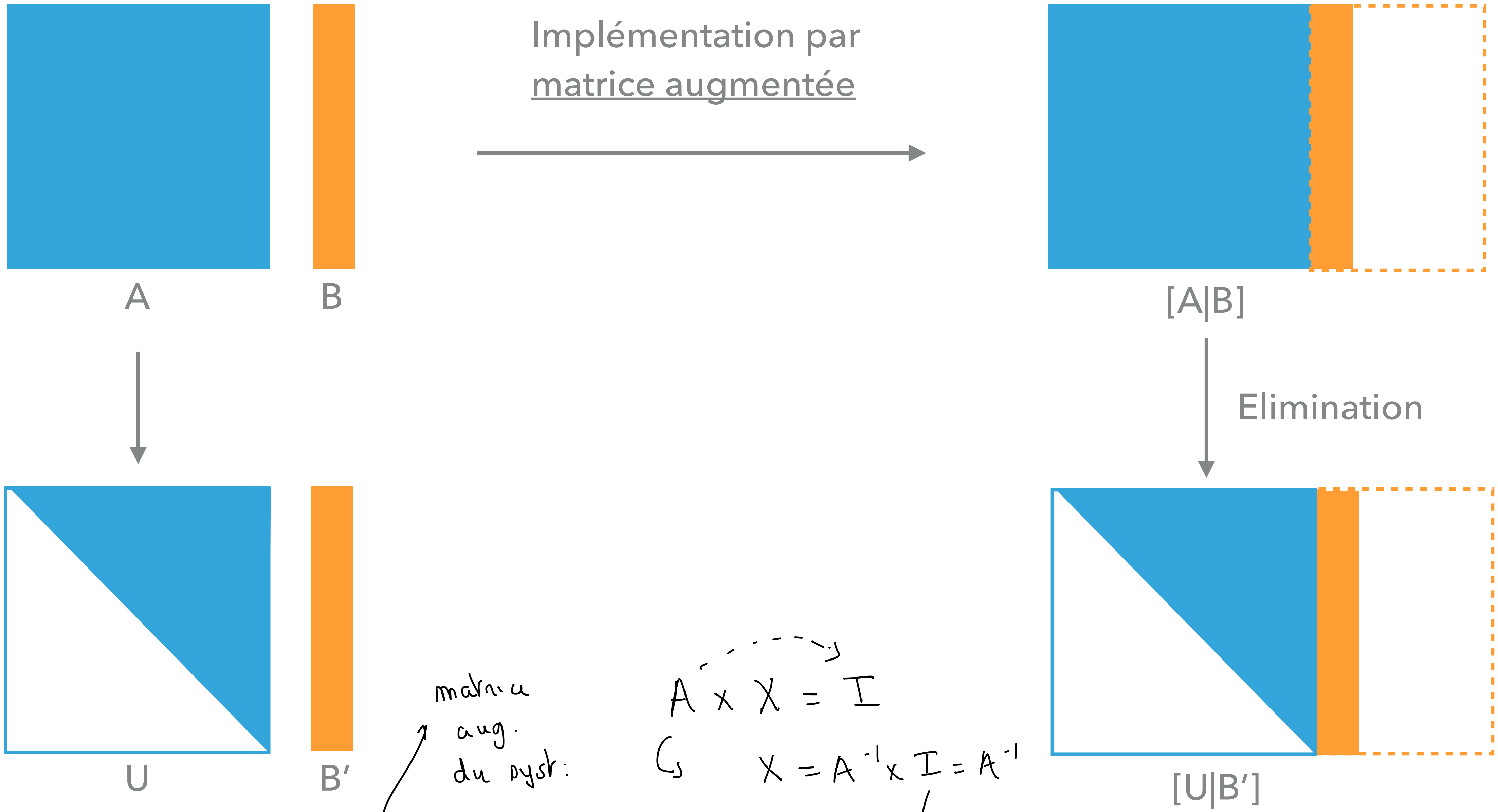
$-y + 5x$



→ pour le code : stocke la permutation des inconnues

SYSTÈMES LINÉAIRES – 3) MATRICE AUGMENTÉE

$AX = B$



matrice aug. du syst:

$A \times X = I$

$\hookrightarrow \quad X = A^{-1} \times I = A^{-1}$

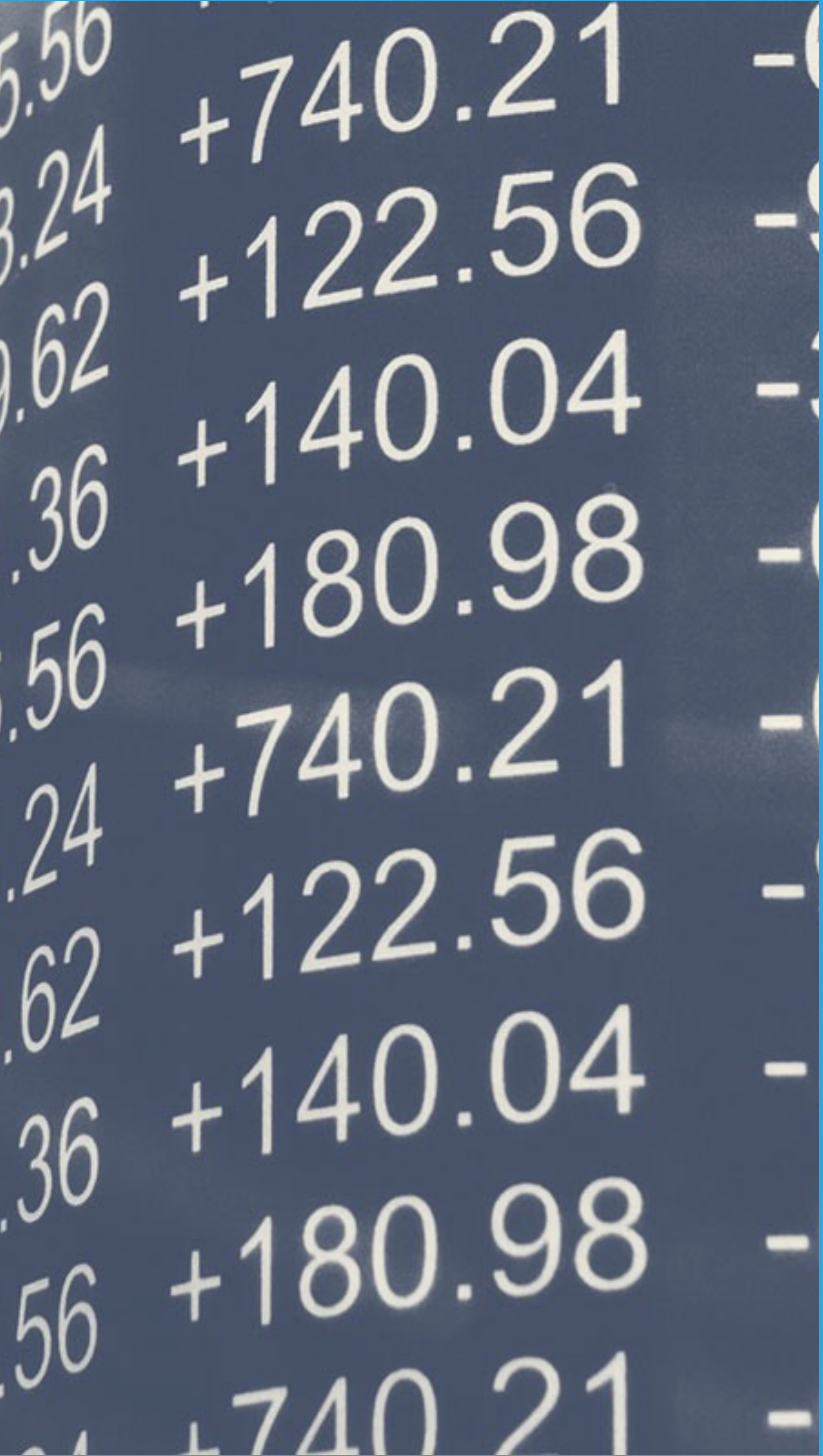
ex : A^{-1}

$\boxed{A \mid I} \xrightarrow{\text{Gauss}} \boxed{I \mid \quad} \rightarrow A^{-1}$

SYSTÈMES LINÉAIRES – 4) FAIBLESSES DU PIVOT DE GAUSS

- Si A est symétrique (définie positive)
  - On peut faire plus rapide ← Cholesky
- L n'est pas orthogonale (conditionnement …)
  - Donc Gauss dégrade le conditionnement

Householder



CHOLESKY

SYSTÈMES LINÉAIRES - CHOLESKY

poly d°2 → $^tX.A.X > 0$

Théorème

Si A est symétrique définie positive, il existe R triangulaire inférieure

" racine carrée " de A

(calculable en $\mathcal{O}(\frac{n^3}{6})$) telle que :

$\frac{1}{2}$ par rapport à Gauss

triang. sup

$$A = R\,R^t$$

$(\sim R^2)$

triang. inf

Gauss : $\mathcal{O}(\frac{n^3}{3})$ → $1/2$

$$AX = C \quad \Leftrightarrow \quad R(\underbrace{R^tX}_{Y}) = C \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} RY = C \\ R^tX = Y \end{cases}$$

Matrice triangulaires

décomp

⟹ résolution des syst en $2 \times \mathcal{O}(n^2)$

R appelée racine de A

$A = \underline{R . R}^t$ $\quad$ $\text{cond}(A)$? — $\text{cond}(R)$?

$$\text{cond}(A) = |||A||| \cdot |||A^{-1}|||$$

$$= |||R R^t||| \cdot |||R^{t^{-1}} \times R^{-1}|||$$

$$\le \underbrace{|||R||| \cdot \underbrace{|||R^t||| \cdot |||R^{t^{-1}}|||}_{\text{cond}(R^t) = \text{cond}(R)} \cdot |||R^{-1}|||}_{\text{cond}(R)}$$

$$(RR^t)^{-1} = R^{t^{-1}} \cdot R^{-1}$$

§3

$$\text{cond}(A) \underset{=}{\cancel{\le}} \text{cond}(R)^2$$

$\rightsquigarrow$ $\underset{\substack{10^2 \\ \text{très bon}}}{\text{cond}(R)} = \sqrt{\underset{\substack{10^4 \\ (\text{mauvais})}}{\text{cond}(A)}}$

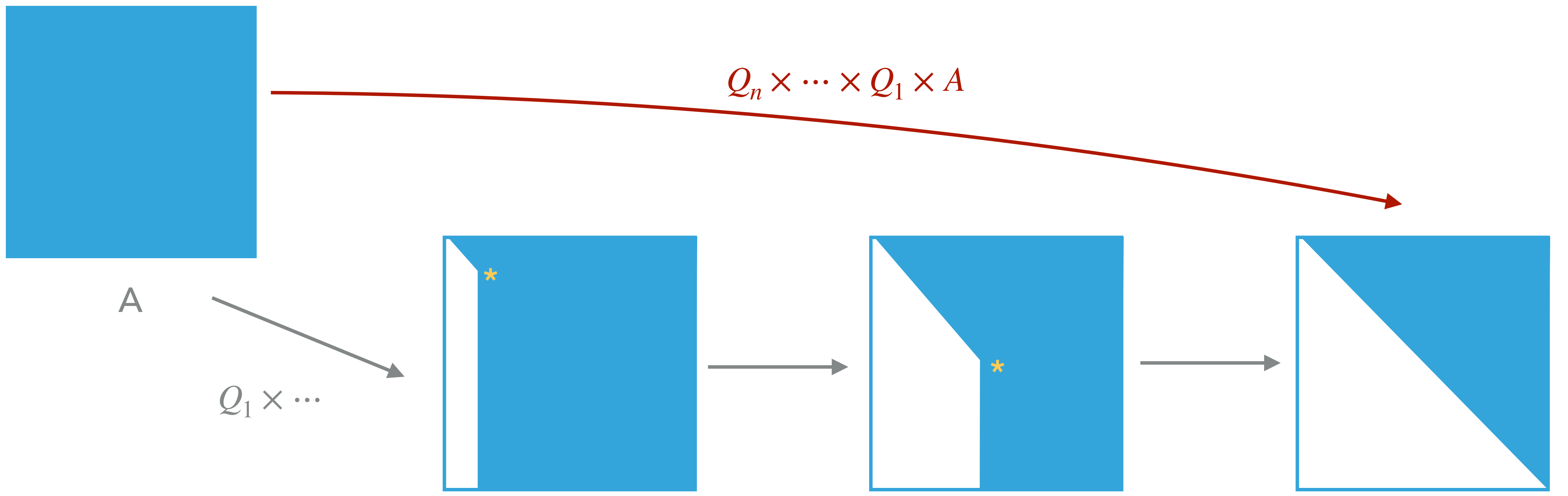
<u>Cholesky</u>

HOUSEHOLDER / QR

SYSTÈMES LINÉAIRES - HOUSEHOLDER

matrice de symétrie / plan

On peut définir des matrices orthogonales (matrices de Householder) $\{Q_1, \ldots, Q_n\}$ telles que :



$Q_n \times \cdots \times Q_1 \times A$

A

$Q_1 \times \cdots$

…

Matrice triangulaire supérieure

$$\boxed{A = QR}$$

triangulaire supérieure

orthogonale $\rightsquigarrow Q^{-1} = Q^t$

SYSTÈMES LINÉAIRES - HOUSEHOLDER

- Avantage :
  - Ne modifie pas le conditionnement (stabilité numérique)
- Inconvénient :
  - Complexité $\mathcal{O}(n^3)$

SYNTHÈSE

	Complexité	Points forts	Points faibles	Conditions
Gauss / LU	$\mathcal{O}(\frac{n^3}{3})$	Rapidité par rapport à Householder	Stabilité ⊖	
Cholesky	$\mathcal{O}(\frac{n^3}{6})$	Rapidité Stabilité		Symétrique (définie positive)
Householder / QR	$\mathcal{O}(\frac{\textcircled{4}n^3}{3})$	Stabilité	Plus lent que Gauss	

1/2

x4