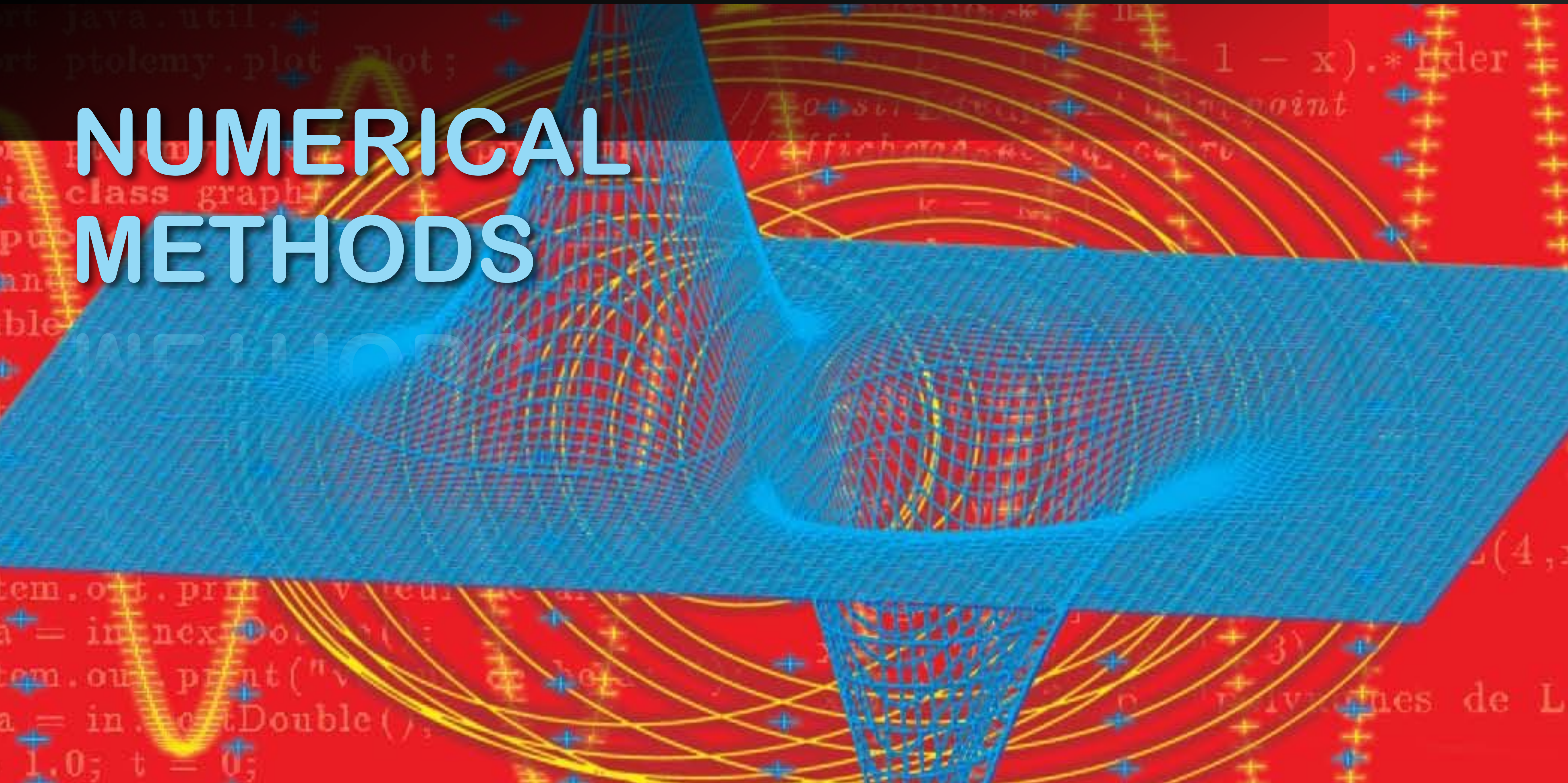
POLYTECH INFORMATIQUE

3ÈME ANNÉE

Alexandra Bac

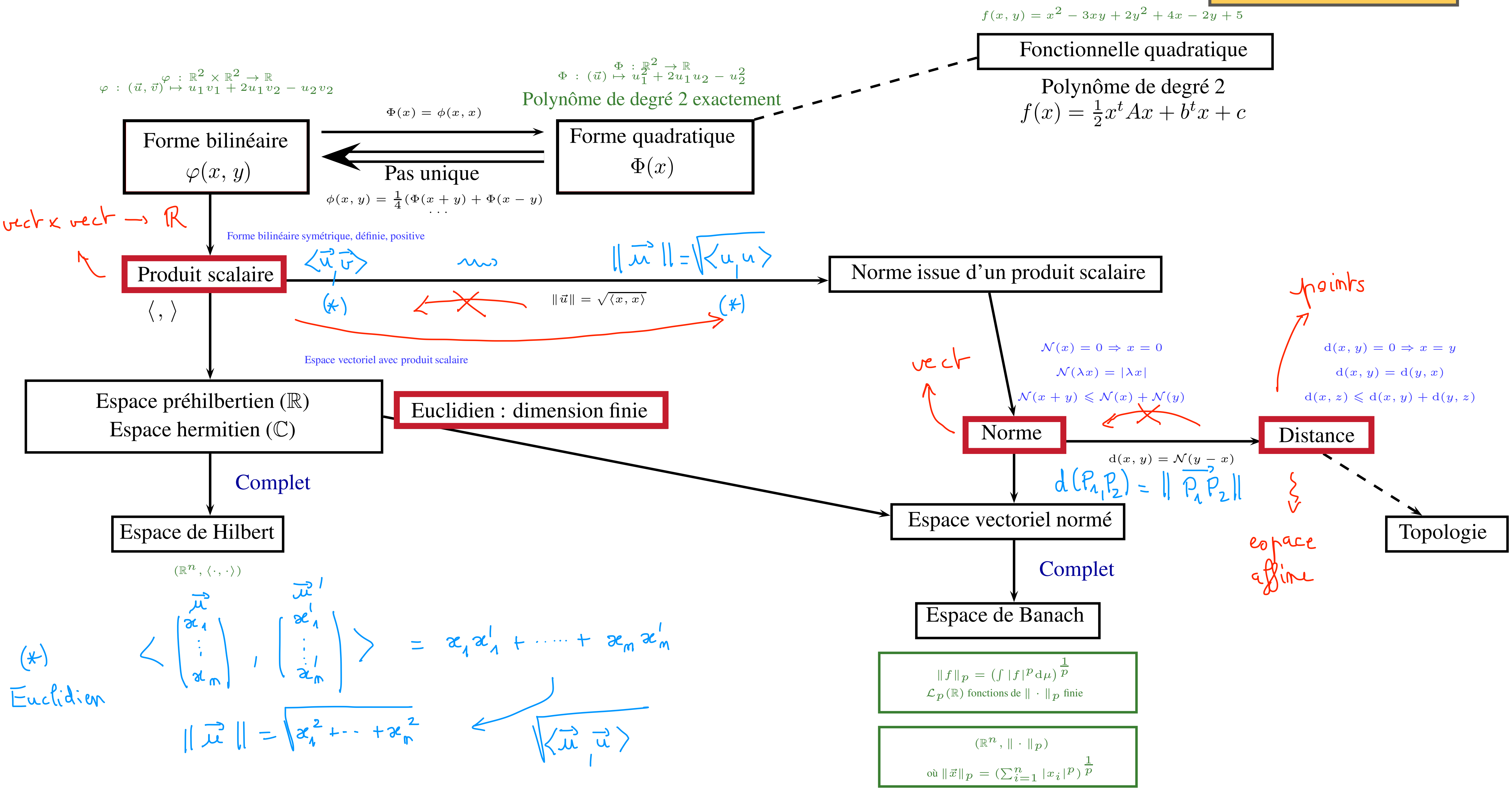
NUMERICAL METHODS



COURS 2
SYSTÈMES LINÉAIRES NUMÉRIQUES

QUELQUES RAPPELS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

Pré-requis :
- Espaces vectoriels
- Bases
- Applications linéaires
- Matrices

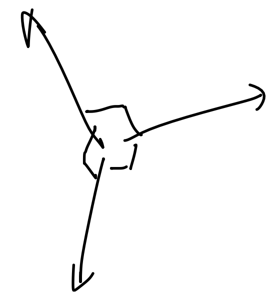


QUELQUES RAPPELS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

$\mathbb{R}^n$

E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel Euclidien

(dimension <u>finie</u> n, produit scalaire noté $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ ou $\vec{u} \cdot \vec{v}$)



↪ norme 1

Base orthonormée

$\mathscr{B} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ n vecteurs tels que $\forall i, j \in \{1 \ldots n\}$

$$\left[\begin{array}{l} \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j \\ \underset{\displaystyle \| \vec{e}_i \|^2}{\overset{\shortparallel}{\langle \vec{e}_i, \vec{e}_i \rangle}} = 1 \end{array}\right.$$

Soit U la matrice de changement de base vers $\mathscr{B}$

$$U = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{e}_1 & \cdots & \vec{e}_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

U est une matrice <u>orthogonale</u> (unitaire)

$$U^t\ U = \mathrm{I} \quad \Leftrightarrow U^{-1} = U^t$$

Matrice de changement de base

nouvelle

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \quad \mathcal{C} = \{v_1 \dots v_n\}, \quad \mathcal{B} = \{u_1 \cdots u_n\}$$

ancienne

$$= \begin{array}{c} \underbrace{\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}}_{\text{coords nouvelle base}} \end{array} \begin{array}{c} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{array} \leftarrow \text{dans l'ancienne}$$

$\{e_1 .. e_n\}$ base orthonormale

$$P_{\text{canonique}}^{\{e_1 .. e_n\}} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ e_1 & e_2 & \cdots & e_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = P$$

Important u, v vect. colonne

$$u^t \times v = \langle u, v \rangle$$

$$(- u^t -) \times \begin{pmatrix} | \\ v \\ | \end{pmatrix}$$

$$P^t \times P = \overbrace{\begin{pmatrix} - e_1^t - \\ \vdots \\ - e_n^t - \end{pmatrix}}^{P^t} \times \overbrace{\begin{pmatrix} | & & | \\ e_1 & \cdots & e_n \\ | & & | \end{pmatrix}}^{P} = \begin{array}{c} \\ i \end{array} \begin{pmatrix} & j & \\ & \vdots & \\ \cdots & \bullet & \end{pmatrix}$$

ligne i $\times$ col j

$$\underbrace{\underbrace{P^t}_{e_i^t} \times \underbrace{P}_{e_j}}_{\langle e_i, e_j \rangle} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$$P^t \times P = I \Longrightarrow \boxed{P^{-1} = P^t} \quad \boxed{P P^t = P^t P = I}$$

$P \times P^t = I$

matrices orthogonales

QUELQUES RAPPELS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel Euclidien

(dimension finie n, produit scalaire noté $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ ou $\vec{u} \cdot \vec{v}$)

vecteur propre :
↳ colinéaire à son image

$A \cdot u_i = \lambda_i \cdot u_i$ / $f(\vec{u_i}) = \lambda_i \cdot \vec{u_i}$

M diagonale ⟷ vects de la base : vecteurs propres

$A \times e_i = \lambda_i \times e_i$

MATRICES DIAGONALISABLES

~ 4 $\cancel{\Longrightarrow}$

~ 6 $\cancel{\Longleftarrow}$

det $\neq 0$

MATRICES INVERSIBLES

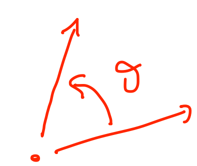
$R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$

$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ⟵ s'il y a des $\lambda_i = 0$ ⟹ non inversible

$A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

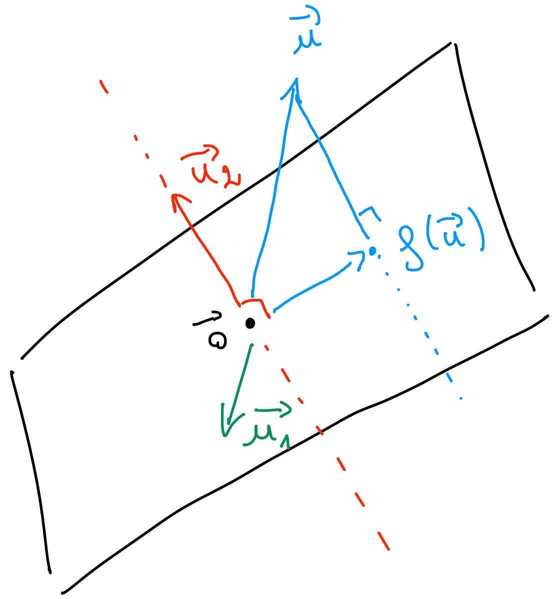
Rotation R_θ
↳ pas de vecteurs propres ⚠



Matrice de rotation

$A = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \ddots \; \lambda_k \end{pmatrix}$

f : projection $\perp$ sur $\mathcal{P}$



Vecteurs propres $\quad \vec{u} \,//\, f(\vec{u})$

$\rightsquigarrow$ vecteurs du plan

$$f(\vec{u_1}) = \underset{1\times}{\vec{u_1}} \qquad d_1 = 1$$

$\rightsquigarrow$ vecteurs $\perp$ plan

$$f(\vec{u_2}) = \vec{0} = 0 \cdot \vec{u_2} \qquad d_2 = 0$$

QUELQUES RAPPELS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel Euclidien

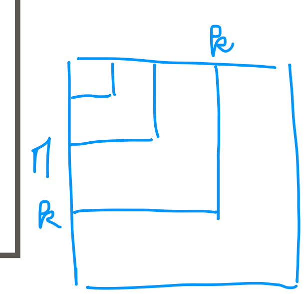
(dimension finie n, produit scalaire noté $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ ou $\vec{u} \cdot \vec{v}$)

M matrice symétrique ($M = M^t$)

Théorème
Dans un espace Euclidien, toute matrice symétrique est diagonalisable en base orthonormale.

M symétrique définie positive (lié aux formes quadratiques)

$$\forall X \in E \quad X^t M X > 0$$



Toutes ses valeurs propres sont strictement positives $\longleftrightarrow$ Déterminants de tous les mineurs d'ordre k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ strictement positifs

QUELQUES RAPPELS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

Quelques normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$

$u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|\vec{u}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2} = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = \sqrt{\vec{u}^t \times \vec{u}}$$

calcul + simple ...

$$\|\vec{u}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |u_i|$$

$$\|\vec{u}\|_\infty = \max_{i=1}^{n} |u_i|$$

$$\|\vec{u}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |u_i|^p}$$

Il existe d'autres normes de vecteurs que la norme 2.

Norme d'un vecteur $\longleftrightarrow$ « Longueur » du vecteur

Th : en dim. finie toutes les normes sont équivalentes $\| \ \|_a$ $\| \ \|_b$ 2 normes

$\exists \alpha, \beta > 0$ tq $\forall x$ $\alpha \|x\|_b \leq \|x\|_a \leq \beta \|x\|_b$

NORMES MATRICIELLES

A matrice

$\|A\|$?

Première tentative naïve :

vect taille 9

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{9 coefficients...}} \quad \|A\| = \underbrace{\left\| \begin{matrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{33} \end{matrix} \right\|_2}_{\text{norme d'un vect. de taille 9 ....}}$$

Pourquoi est-ce insuffisant ?

matrice $\longleftrightarrow$ application linéaire

NORMES MATRICIELLES

$\|A\|$

lien ....

$A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$

E : base $\mathscr{B}$

F : base $\mathscr{C}$

dim m

$f \, : \, E \to F$

dim n

linéaire

Considérer le vecteur des coefficients
ne suffit pas ...

E : base $\mathscr{B}'$

F : base $\mathscr{C}'$

coefs $\neq$ .....

$B \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$

$\|B\|$

NORMES MATRICIELLES (NORME D'ALGÈBRE)

$\|\cdot\|$ norme matricielle si :

$$\forall A, \quad \|A\| = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\forall A, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda \cdot A\| = |\lambda| \, \|A\|$$

$$\forall A, B, \quad \|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$$

norme "normale" (vecteurs)

$$\forall A, B, \quad \|A \times B\| \leqslant \|A\| \|B\|$$

⊕ pour les matrices (sous-multiplicativité)

Comment construire de telles normes?

Comment construire $||A||$ ayant un sens par rapport à l'application linéaire sous-jacente ?

$\|A\| \rightsquigarrow$ "$\|g\|$"

NORMES MATRICIELLES SUBORDONNÉES

Soit $\|\cdot\|$ une norme (vectorielle) sur E

$\|\cdot\|$: norme vectorielle

$f : E \to E$, $\dim n$

E : base $\mathscr{B}$

$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

norme matricielle subordonnée

$$|||A||| = \sup_{\vec{x}\in E, \vec{x}\neq \vec{0}} \frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} = \sup_{\vec{x}\in E, \|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\|$$

Norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|\cdot\|$

image de $\vec{x}$

$$|||A||| = \sup_{\vec{x}\neq\vec{0}} \frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}$$

⇝ "plus grande élongation produite par A"

$$= \sup_{\vec{x}\neq\vec{0}} \Big\| A \underbrace{\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}}_{\|\cdot\| = 1} \Big\|$$

$$= \sup_{\substack{\vec{x}\neq\vec{0} \\ \|\vec{x}\|=1}} \|A\vec{x}\|$$

NORMES MATRICIELLES SUBORDONNÉES

Soit $\|\cdot\|$ une norme (vectorielle) sur E

$$f : \underbrace{E \to E}_{\dim\, n} \xrightarrow{E\,:\,\text{base}\ \mathscr{B}} A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$$

$$\|A\| = \sup_{\vec{x}\in E, \vec{x}\neq\vec{0}} \frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} = \sup_{\vec{x}\in E, \|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\|$$

Norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|\cdot\|$

Intuitivement : mesure « l'étirement maximum » obtenu par application de f à un vecteur

NORMES MATRICIELLES SUBORDONNÉES

$$||A|| = \sup_{\vec{x} \in E, \vec{x} \neq \vec{0}} \frac{||A\vec{x}||}{||\vec{x}||} = \sup_{\vec{x} \in E, ||\vec{x}|| = 1} ||A\vec{x}||$$

Pb : calcul de cette norme …

Propriétés

Rayon spectral de A

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ les valeurs propres de A

$$\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$$

NORMES MATRICIELLES SUBORDONNÉES

$$|||A||| = \sup_{\vec{x}\in E, \vec{x}\neq\vec{0}} \frac{||A\vec{x}||}{||\vec{x}||} = \sup_{\vec{x}\in E, ||\vec{x}||=1} ||A\vec{x}||$$

$A^t A$ symétrique

$(A^t \times A)^t = A^t \times \underbrace{A^{t^t}}_{A} = A^t \times A$

Pour $||\cdot||_2$: très utilisée (*)

- $|||A|||_2 = \sqrt{\rho(A^t\, A)} = |||A^t|||_2$ → max (val. propres de $A^t A$)
- Si U est orthogonale, $|||U|||_2 = 1$
- $||\cdot||_2$ est <u>invariante par transformation orthogonale</u>, ie. si U est orthogonale

$$||AU||_2 = ||A||_2 = ||UA||_2 = ||U^t A U||_2$$

- Si A normale ($A\,A^t = A^t\,A$) :

$$||A||_2 = \rho(A)$$

(*)

Pour $||\cdot||_1$:

$$|||A|||_1 = \max_j \underbrace{\sum_i |a_{i,j}|}$$

$\max_j ||col_j||_1$

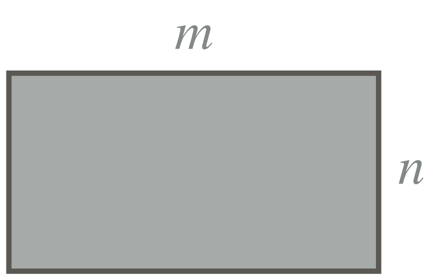
Pour $||\cdot||_\infty$:

$$|||A|||_\infty = \max_i \underbrace{\sum_j |a_{i,j}|}$$

$\max_i ||ligne_i||_1$

AUTRE NORME : NORME DE FROBENIUS

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ — Espace vectoriel de dimension $n \times m \quad \simeq \quad \mathbb{R}^{n \times m}$

$A =$ 

$$|||A|||_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{i,j}^2} = \sqrt{\mathrm{Tr}(A^t \ A)} = = \sqrt{\mathrm{Tr}(A \ A^t)}$$

- Norme matricielle (pas évident ...)
- Pas subordonnée

STABILITÉ DES SYSTÈMES LINÉAIRES

UN EXEMPLE …

On considère le système linéaire $Xw = y$ suivant :

```
X = [10, 7, 8, 7 ; 7, 5, 6, 5 ; 8, 6, 10, 9 ; 7, 5, 9, 10] ;
y = [32 ; 23 ; 33 ; 31 ] ;
w = X\y ;
```

Code Matlab

Puis on perturbe légèrement le second membre (ex : erreur de mesure)

```
yy = [32.1 ; 22.9 ; 33.1 ; 30.9 ] ;
ww = X\yy ;
```

Perturbation au plus de 0,4%

On s'attend à ce que l'impact sur le résultat soit faible …

UN EXEMPLE …

On considère le système linéaire $Xw = y$ suivant :

```
X = [10, 7, 8, 7 ; 7, 5, 6, 5 ; 8, 6, 10, 9 ; 7, 5, 9, 10] ;
y = [32 ; 23 ; 33 ; 31 ] ;
w = X\y ;
```

```
yy = [32.1 ; 22.9 ; 33.1 ; 30.9 ] ;
ww = X\yy ;
```

Peut-on prévoir cette instabilité ? L'anticiper ? La quantifier ?

Conditionnement d'un système linéaire

CONDITIONNEMENT …

A inversible

$AX = B$ ⇝ sol : X

perturbé (B)

$\delta B \ll B$

$AX' = B + \delta B$

$X' = X + \delta X$

$\delta X = X' - X$

δX — δB ?

quantifier l'erreur s/ sol ⇝ δX
par rapport à la perturbation
erreur s/ système ⇝ δB

Erreur : → absolue : $\delta X / \delta B$
↘ relative

$AX = B$ ⟶ syst. linéaire
⇕ mise à l'échelle de B (× λ)
$100 \cdot AX = 100 \cdot B$
$A(100 \cdot X) = 100 B$
⇓
idem pour X …

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \;/\; \frac{\|\delta B\|}{\|B\|} \; ?$$

$\leq$? $\geq$?

⇝ $AX = B$ et $A(X + \delta X) = B + \delta B$

⇓

$\cancel{AX} + A\delta X = \cancel{AX} + \delta B$

$\Longrightarrow \quad A \cdot \delta X = \delta B$ ⟵ A modifier …

$\Longrightarrow \quad \|A \cdot \delta X\| = \|\delta B\|$

$\|A . \delta X\| \leq |||A||| \cdot \|\delta X\|$

$\shortparallel$

$\|\delta B\|$

$$\|\partial B\| \leqslant |||A||| \cdot \|\partial X\| \quad (1)$$

$$\frac{\|\partial B\|}{\|B\|} \;/\; \frac{\|\partial X\|}{\|X\|}$$

$$AX = B \implies X = A^{-1} \times B$$

$$\|X\| = \|A^{-1} \cdot B\| \leqslant |||A^{-1}||| \cdot \|B\| \quad (2)$$

Choix : $/\|X\|$

(1) $\implies$ $\dfrac{\|\partial B\|}{\|X\|} \overset{(*)}{\leqslant} |||A||| \cdot \dfrac{\|\partial X\|}{\|X\|}$

$\leqslant$ $\|X\| \leqslant |||A^{-1}||| \cdot \|B\|$

$$\implies \frac{\|\partial B\|}{\|X\|} \geqslant \frac{\|\partial B\|}{|||A^{-1}||| \cdot \|B\|}$$

$$\implies \frac{\|\partial B\|}{|||A^{-1}||| \cdot \|B\|} \leqslant |||A||| \cdot \frac{\|\partial X\|}{\|X\|}$$

$$\implies \frac{\|\partial B\|}{\|B\|} \leqslant |||A||| \cdot |||A^{-1}||| \cdot \frac{\|\partial X\|}{\|X\|}$$

$$\frac{\|\partial X\|}{\|X\|} \quad \leqslant \quad \geqslant \quad \ldots\ldots$$

On repart de :

$$A \cdot \partial X = \partial B \iff \partial X = A^{-1} \cdot \partial B$$

$$\implies \|\partial X\| \leqslant |||A^{-1}||| \cdot \|\partial B\| \quad (1 \text{ bis})$$

$\downarrow\ /\|X\|$ $\quad\quad \dfrac{\|\partial X\|}{\|X\|} \;/\; \dfrac{\|\partial B\|}{\|B\|}$?

$$\Longrightarrow \underbrace{\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq |||A^{-1}||| \cdot \frac{\|\delta B\|}{\|X\|}}_{(2)} \leq \cdots\cdots \frac{\|\delta B\|}{\|B\|}$$

$$\rightsquigarrow \frac{\|\delta B\|}{\|B\|}$$

$$\|B\| \geq \cdots \|X\|$$

$$AX = B \longrightarrow ?$$

$$\Downarrow$$

$$\|B\| \leq |||A||| \cdot \|X\|$$

$$\Longrightarrow \|X\| \geq \frac{\|B\|}{|||A|||}$$

Donc (2) devient :

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq |||A^{-1}||| \cdot \frac{\|\delta B\|}{\frac{\|B\|}{|||A|||}}$$

$$\|X\| \geq \frac{\|B\|}{|||A|||}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq |||A||| \cdot |||A^{-1}||| \cdot \frac{\|\delta B\|}{\|B\|}}$$

erreur rel. s/ solution

si a nombre cond grand : $\boxed{\text{instabilité}}$

erreur rel. s/ système.

Idem si :

$$AX = B \longrightarrow A'X' = B$$

$$\Delta A = A - A'$$

$$\Delta X = X - X'$$

On obtient :

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leq |||A||| \cdot |||A^{-1}||| \cdot \frac{|||\Delta A|||}{|||A|||}$$

CONDITIONNEMENT D'UN SYSTÈME LINÉAIRE

$$|||A||| = \sup_{X \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$$

Souvent $\|\cdot\|_2$ car les propriétés du conditionnement sont alors plus intéressantes

Soit $|||\cdot|||$ une norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle $\|\cdot\|$

Le conditionnement du système linéaire $Xw = y$ (pour X inversible) est donné par :

$$\boxed{\mathrm{cond}(X) = |||X||| \cdot |||X^{-1}|||}$$

appelé conditionnement de la matrice X.

Mesure la sensibilité du système aux perturbations (de X et de y)

CONDITIONNEMENT D'UN SYSTÈME LINÉAIRE

<u>Conditionnement de $Xw = y$</u>

$$\mathrm{cond}(X) = \|X\| \, \|X^{-1}\|$$

- $\mathrm{cond}(X) \geqslant 1$
- $\mathrm{cond}(X) = \mathrm{cond}(X^{-1})$
- $\mathrm{cond}(\lambda X) = \mathrm{cond}(X)$ cf. après

En général on calcule cond pour $\| \cdot \|_2$.

(si X normale, ie $X\,X^t = X^t\,X$, $|\sigma_i| = |\lambda_i|$)

Pour $\| \cdot \|_2$:

- $\mathrm{cond}_2(X) = \dfrac{\sigma_n(X)}{\sigma_1(X)}$

  $\sigma_n(X)$: plus grande valeur singulière (cf. cours 2)

  $\sigma_1(X)$: plus petite valeur singulière (cf. cours 2)

- Si U est orthogonale, $\mathrm{cond}_2(U) = 1$
- cond_2 est <u>invariant par transformation orthogonale</u>, ie. si U est orthogonale

$$\mathrm{cond}_2(UX) = \mathrm{cond}_2(X) = \mathrm{cond}_2(XU) = \mathrm{cond}_2(U^t XU)$$

Un système est d'autant mieux conditionné que $\mathrm{cond}(X)$ est proche de 1.

1 stable ~100 1000 instable

cond

$A \cdot X = B$ / $\lambda A \cdot X = \lambda B$ $\lambda \sim 10^6$

$\text{cond}(A) = \text{cond}(\lambda \cdot A)$ 10^7

$\vdots$

même solution théorique

mais numériquement il n'y aura pas les mêmes erreurs

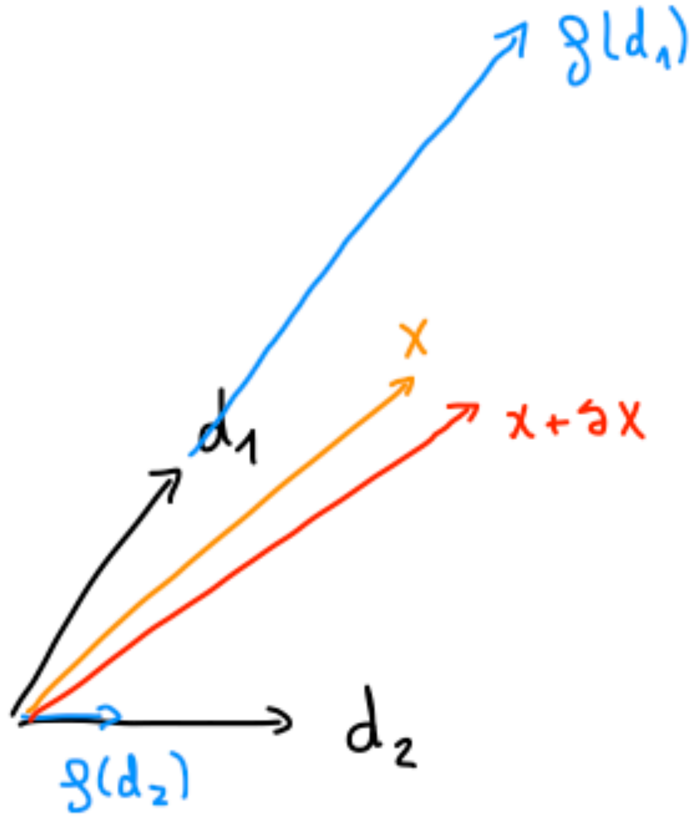
- précision sur les réels est différente → petits
→ grands) nombres

instabilité d'un syst : | intrinsèque
| théorique, ne dépend pas de l'erreur de calcul numérique

⚠ L'erreur de calcul num. se cumule.

CONDITIONNEMENT D'UN SYSTÈME LINÉAIRE

Si X matrice normale, $|\sigma_i| = |\lambda_i|$:



$$\underbrace{d_1 \gg d_2}$$

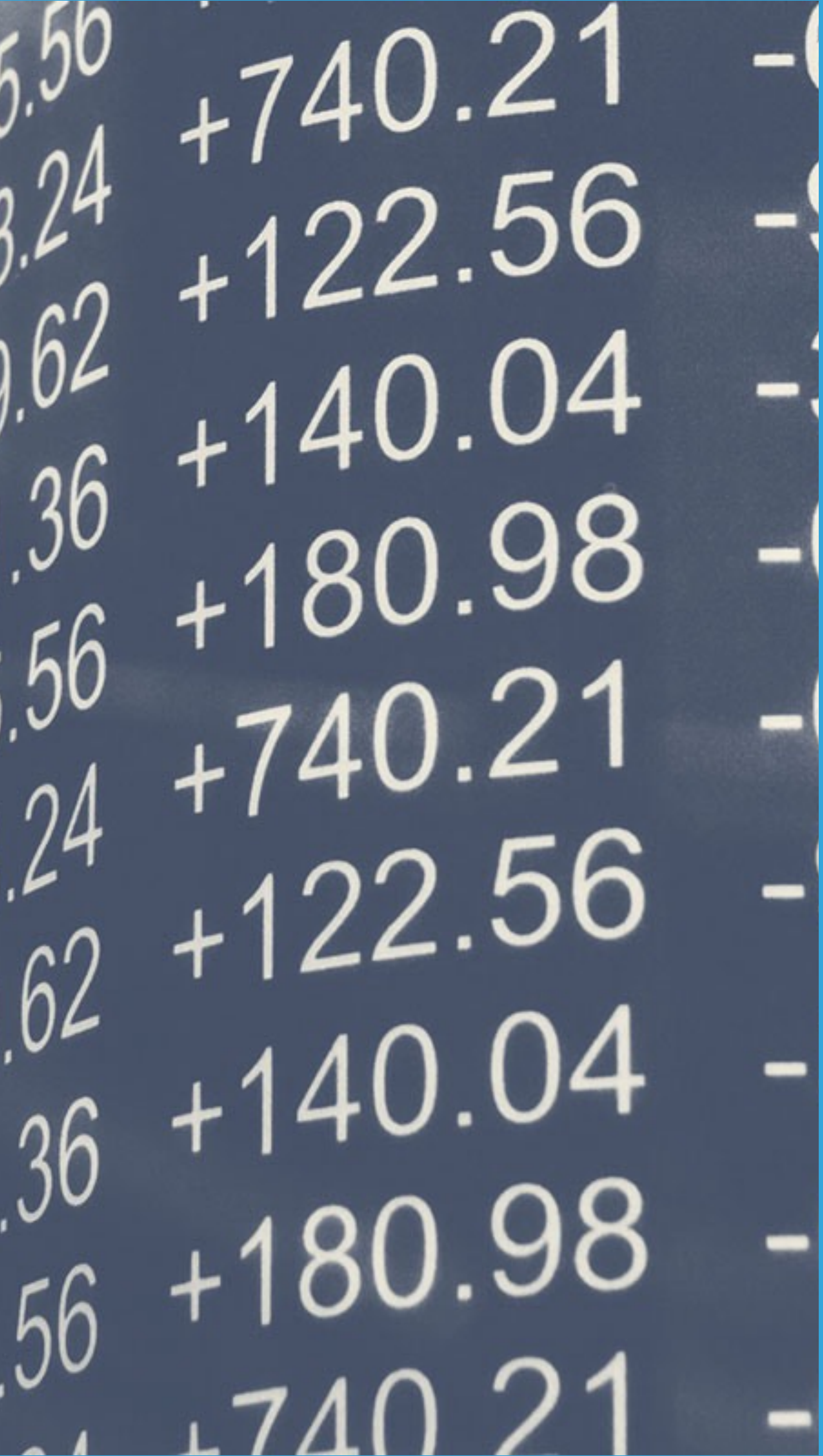
$$\text{cond}(A) = \frac{d_1}{d_2} \text{ grand}$$

ALGORITHMES DE RÉSOLUTION DE SYSTÈMES LINÉAIRES

A inversible

Algos de résolution

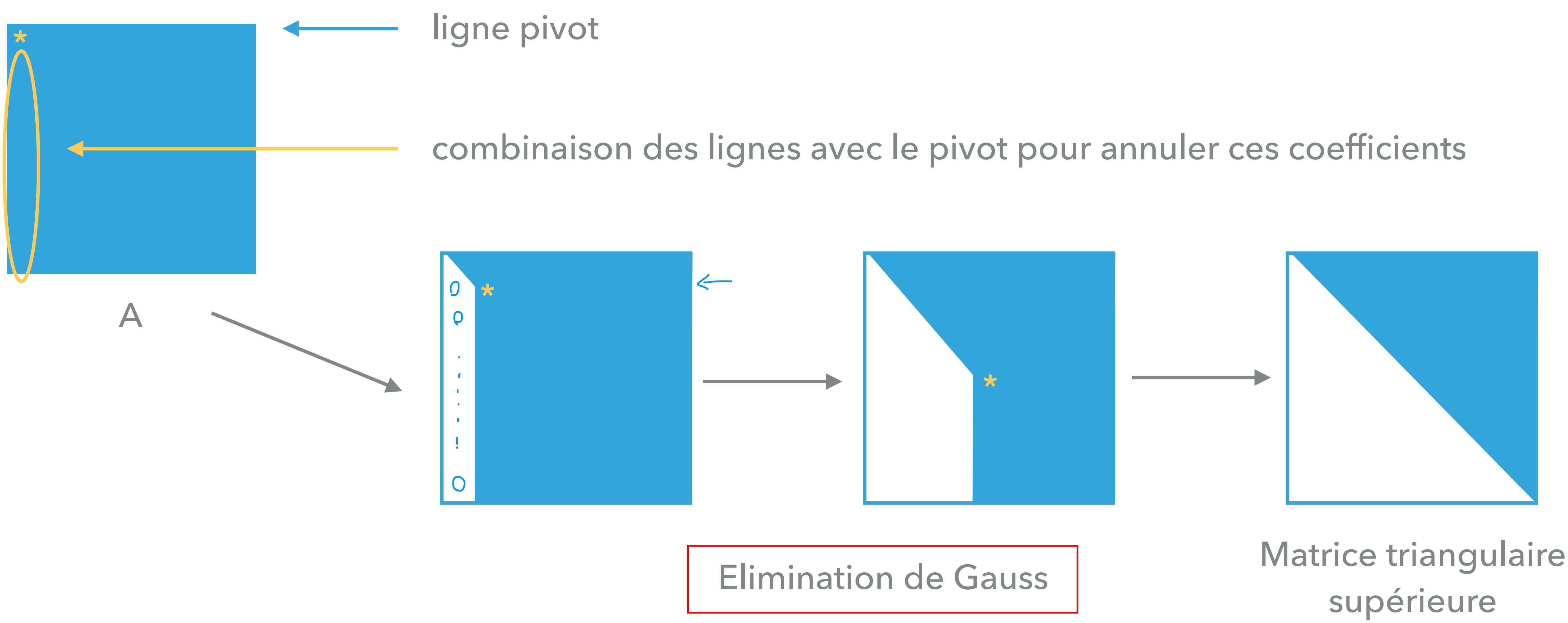
- méthodes directes / exactes
  - Gauss
    décomposition LU
  - Cholesky
    réservé aux matrices symétriques, définies positives
    décomposition RR^t
  - Householder
    décomposition QR
- méthodes indirectes / itératives
  convergent vers la solution
  $\lim_{it \to \infty}$ syst : sol. exacte
  on s'arrête à l'itération k
  approx. sol. à ε près
  - Jacobi
  - Gauss-Jacobi
  - ......



GAUSS / LU

SYSTÈMES LINÉAIRES - GAUSS

Vous connaissez tous un algorithme : <u>pivot de Gauss</u> … quelques remarques pour commencer :



SYSTÈMES LINÉAIRES - GAUSS

Vous connaissez tous un algorithme : pivot de Gauss … quelques remarques pour commencer :

AX=B

Elimination de Gauss ($\boxed{\mathcal{O}(\frac{n^3}{3})}$)

$\Updownarrow$

UX=B′ ⟶

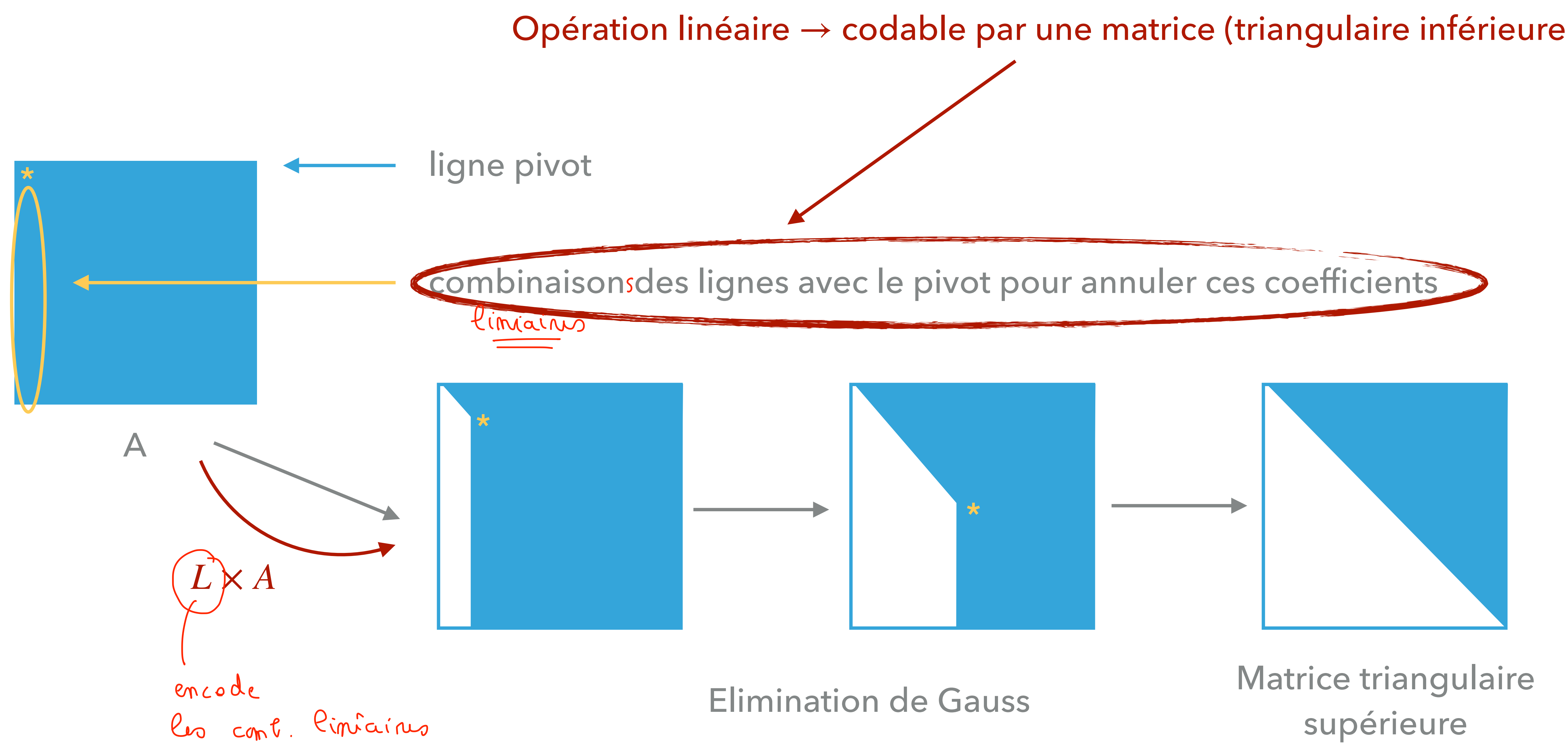
Résoudre un syst. où la matrice est triangulaire

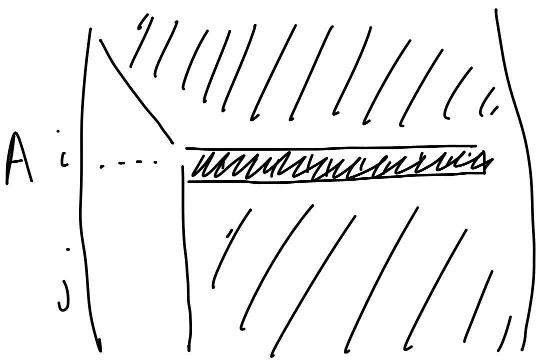
$|||$

Remontée de Gauss ($\boxed{\mathcal{O}(n^2)}$) :

solution X

SYSTÈMES LINÉAIRES – 1) ALGORITHME VS DÉCOMPOSITION





pivot $= \ell_i$

$\ell_j \leftarrow \ell_j + \alpha_j \cdot \ell_i$

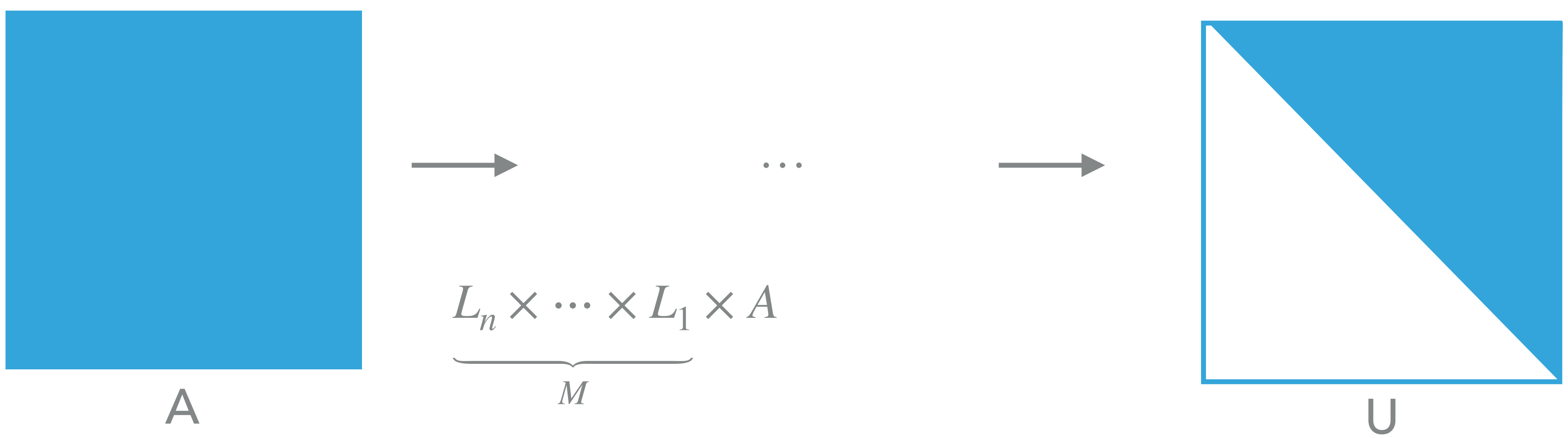
$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} \\
L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \alpha_{i+1} & \ddots & \\ & & \vdots & & \\ & & \alpha_n & & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Donc : triangulaire inférieure

$L \times A \equiv$ opération du pivot (c.l. des lignes avec la ligne pivot)

SYSTÈMES LINÉAIRES – 1) ALGORITHME VS DÉCOMPOSITION

Version sans choix du pivot : étape i : pivot $= e_i$



$$\underbrace{L_n \times \cdots \times L_1}_{M} \times A$$

upper

$$\overbrace{(L_m \times \cdots \times L_1)}^{\text{triang. inférieur}} A = U$$

$$\Downarrow$$

$$A = \underbrace{(L_m \times \cdots \times L_1)^{-1}}_{\substack{\text{triangulaire inf} \\ = \\ L}} \times U$$

M triangulaire inférieure (M^{-1} aussi)

En posant $L = M^{-1}$:

$MA = U \quad \Leftrightarrow \quad A = LU$

Décomposition LU

Vision algorithme vs décomposition

Si on connaît la décomp. LU de A

$\rightsquigarrow$ résolution d'un syst.

$$A = L \times U$$

triang. inf. (L)

triang. sup. (U)

$$AX = B \iff L\underbrace{UX}_{=Y} = B$$

$$\iff \begin{cases} LY = B & \longleftarrow \text{résolution en } O(n^2) \text{ car } L \text{ triang} \rightsquigarrow Y \\ UX = Y & \longleftarrow \text{résolution en } O(n^2) \text{ car } U \text{ triang} \rightsquigarrow \underline{\underline{X}} \end{cases}$$

SYSTÈMES LINÉAIRES – 2) PIVOT / DÉCOMPOSITION PLU

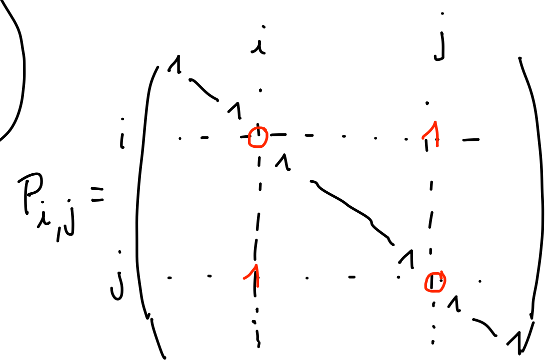
Choix de la ligne pivot
⟷ échanger des lignes
⇓
P : permut. lignes

Choix de la ligne pivot : → coef du pivot ≠ 0

- a_{ii} petit rend l'élimination instable
- $a_{ii} = 0$ …

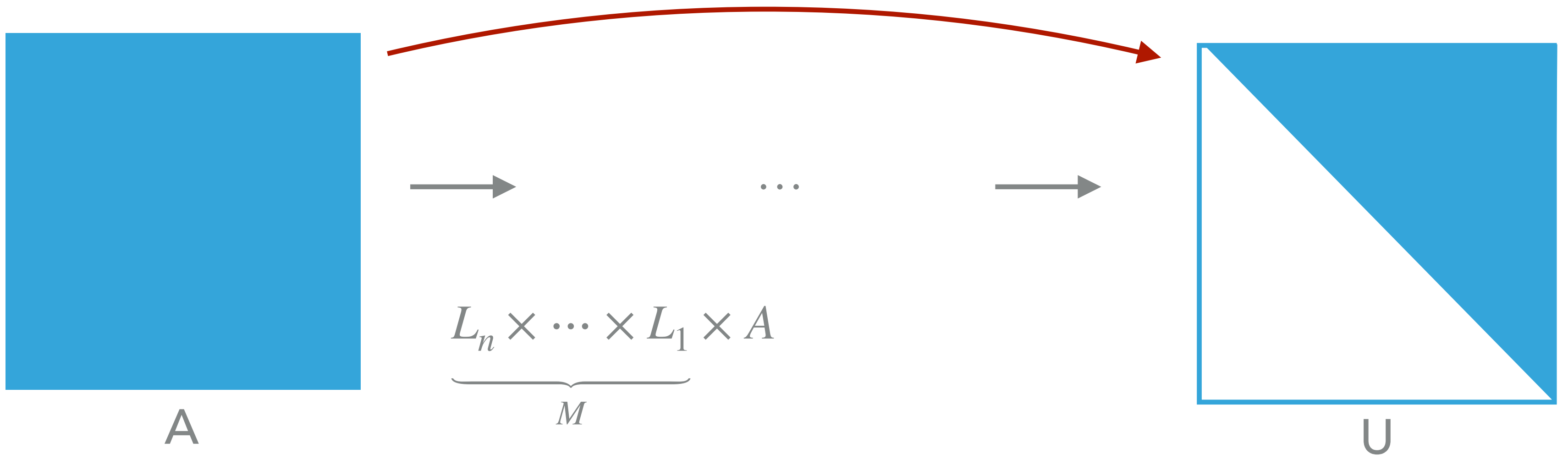
$P \times A$: $\ell_i \longleftrightarrow \ell_j$

$P_{i,j} =$



SYSTÈMES LINÉAIRES – 2) PIVOT / DÉCOMPOSITION PLU

Permutations de lignes P



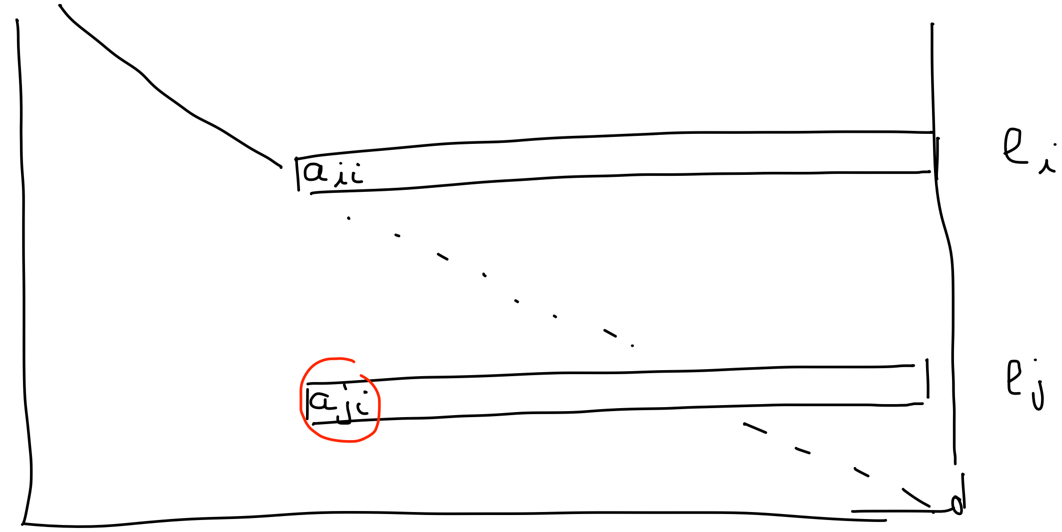
$$\underbrace{L_n \times \cdots \times L_1}_{M} \times A$$

En posant $L = M^{-1}$:

$$PA = LU$$

Décomposition PLU

$e_j \longleftarrow e_j + \alpha_j \cdot e_i$



$\alpha_j = -\dfrac{a_{ji}}{a_{ii}}$

coef de combinaison

$\Longrightarrow a_{ii} \neq 0$ ⚠

$\Longrightarrow$ éviter a_{ii} petit

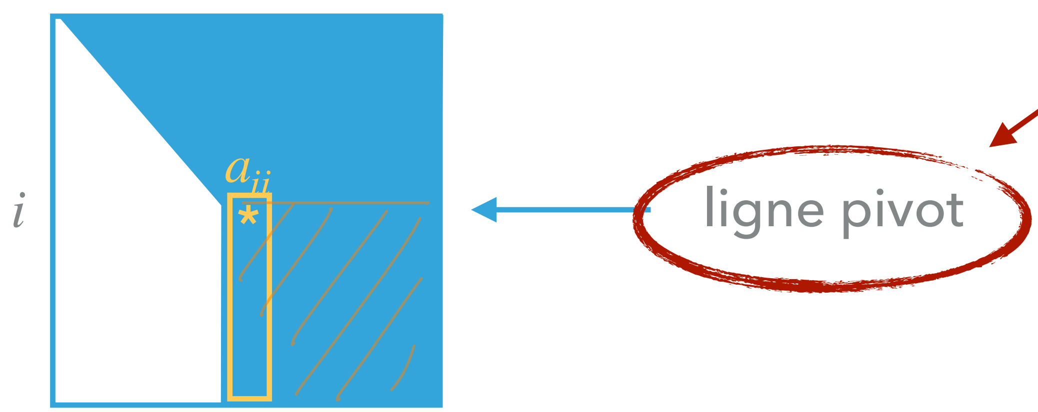
$\updownarrow$

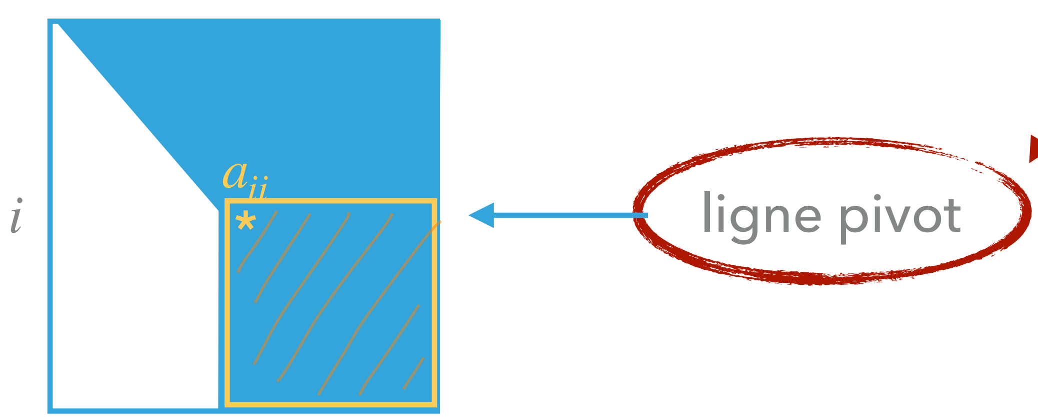
α_j grand

stabilité num ...

Stratégies du choix du pivot $\rightsquigarrow$ $\boxed{\text{maximiser } a_{ii}}$

SYSTÈMES LINÉAIRES – 2) PIVOT / DÉCOMPOSITION PLU





Stratégies :

- Pivot « partiel » : ligne j telle que

  $$a_{j,i} = \max_{k=i\ldots n} a_{k,i}$$

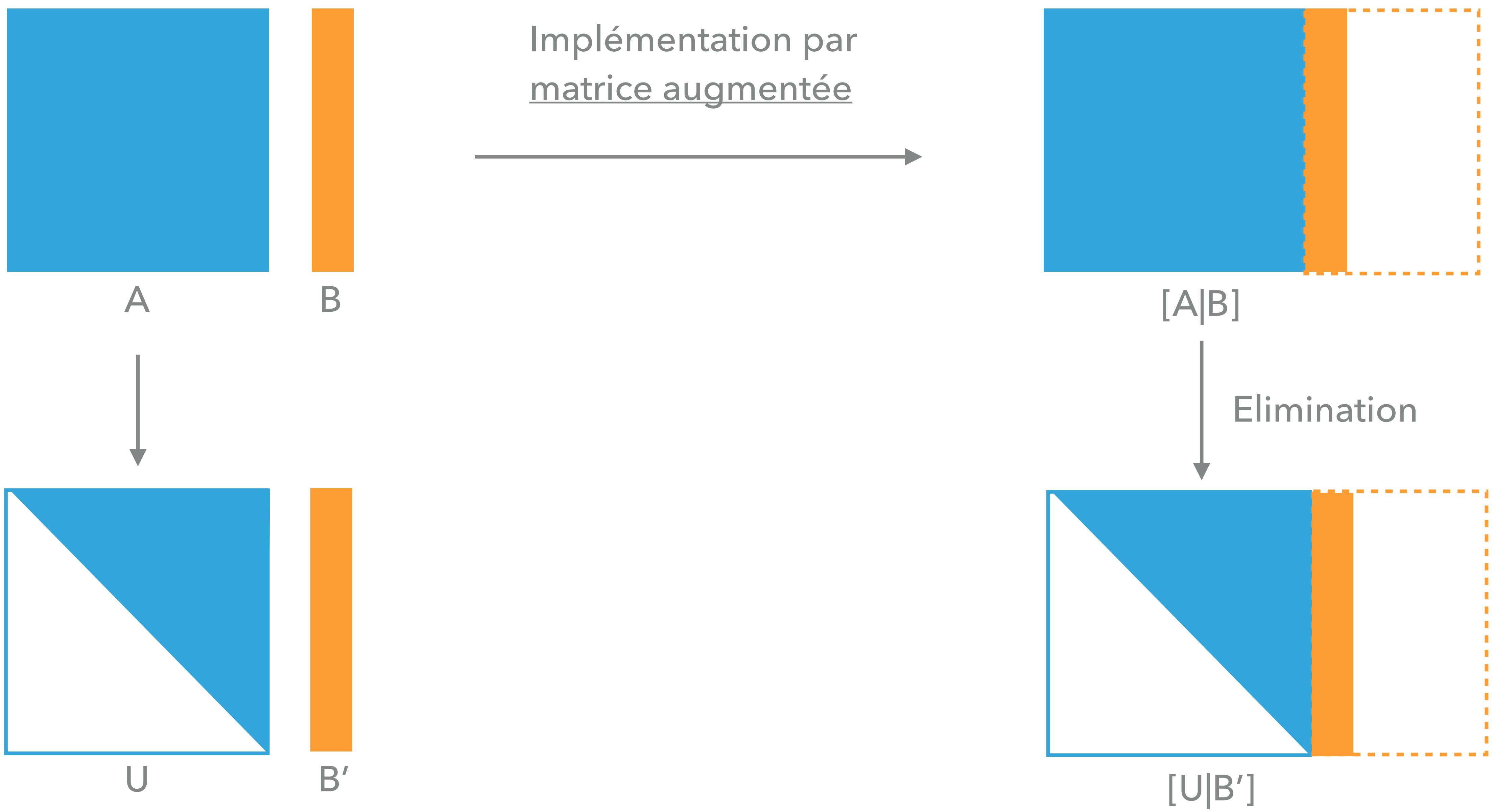
- Pivot « total » : ligne j telle que

  $$a_{j,i} = \max_{k,l=i\ldots n} a_{k,l}$$

  implique des échanges de colonnes

échanger l'ordre des coefs de la solution

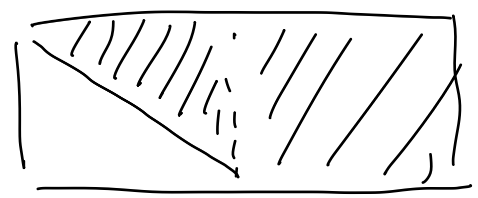
SYSTÈMES LINÉAIRES – 3) MATRICE AUGMENTÉE



A^{-1}

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right] \longleftrightarrow \overset{n \times n}{A} \cdot X = I$$

élimination Gauss



remontée

$$\left[\begin{array}{c|c} I & A^{-1} \end{array}\right]$$

$$X = A^{-1} \times I = A^{-1}$$

SYSTÈMES LINÉAIRES – 4) FAIBLESSES DU PIVOT DE GAUSS

Pivot de Gauss ⟷ P, L

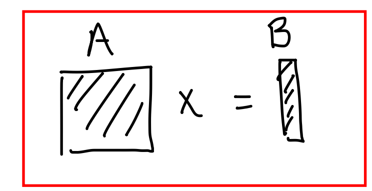
- Si A est symétrique (définie positive)
  - On peut faire plus rapide ← Cholesky
- L n'est pas orthogonale (conditionnement ...)

  peut être mauvais ...
  - Donc Gauss dégrade le conditionnement

Householder

stable

+ lent



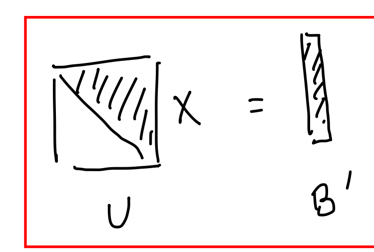
$AX = B$

Lx

↓ élimination

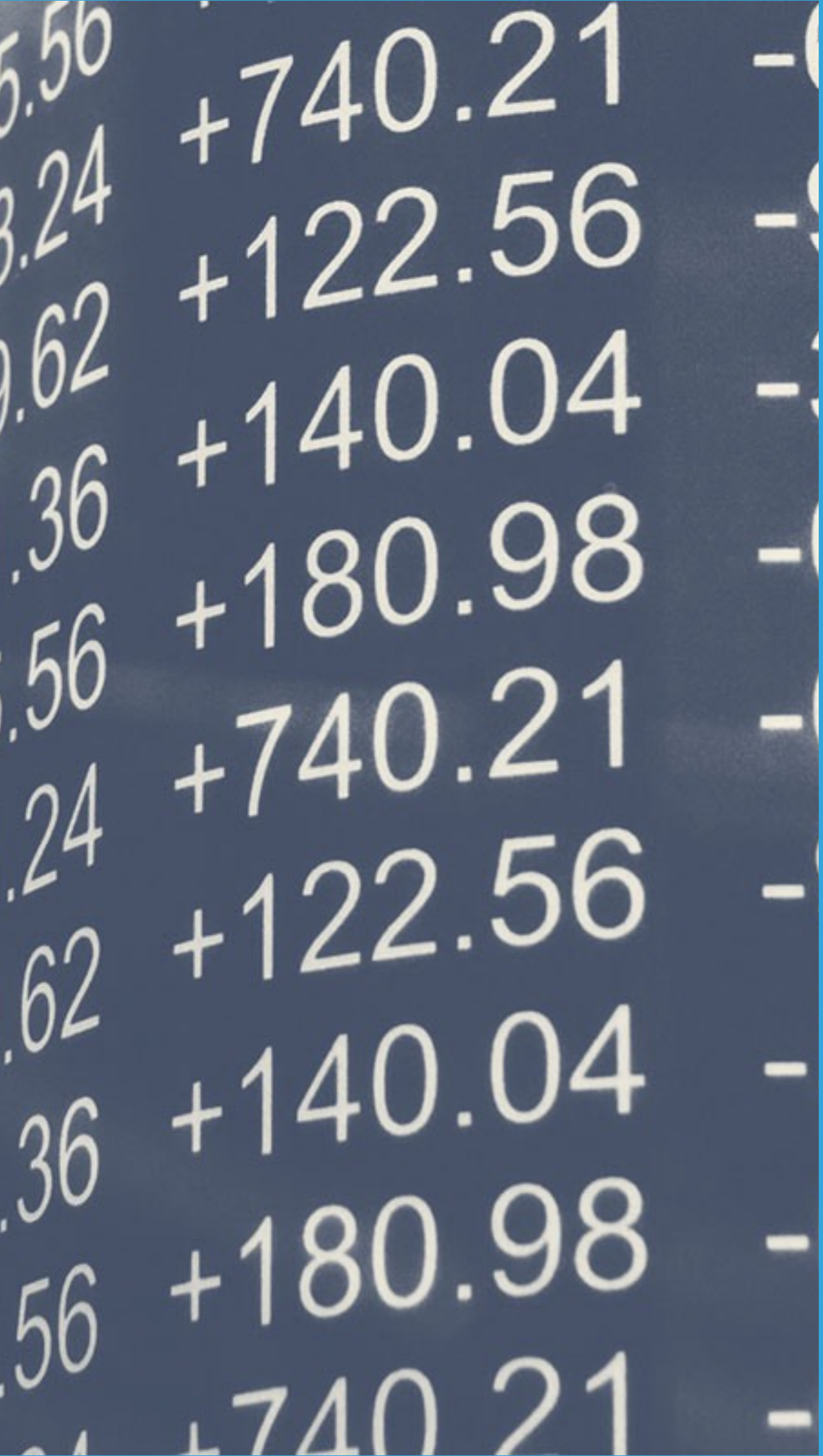
$UX = B'$

triang sup



cond(U) > cond(A)

car cond(L) mauvais ...



CHOLESKY

SYSTÈMES LINÉAIRES - CHOLESKY

Théorème

cf. début..

"root" ~ "$\sqrt{A}$"

Si A est symétrique définie positive, il existe R triangulaire inférieure

(calculable en $\mathcal{O}(\frac{n^3}{6})$) telle que :

lower upper

$$A = R\,R^t$$

$\frac{1}{2}$ par rapport à Gauss

$\frac{n^3}{3}$

Résolution d'un syst :

$$AX = C \quad \Leftrightarrow \quad R(\underbrace{R^tX}_{Y}) = C \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} RY = C \\ R^tX = Y \end{cases}$$

1) ~> Y

2)

Matrice triangulaires

$\mathcal{O}(n^2)$

R appelée racine de A

$\mathrm{cond}(R) \;/\; \mathrm{cond}(A)$?

$$A = R \cdot R^t$$

$$\begin{aligned}\mathrm{cond}(A) &= |||A||| \cdot |||A^{-1}||| \\ &= |||R \cdot R^t||| \cdot |||(R \cdot R^t)^{-1}||| \\ &\qquad\qquad\qquad\quad \text{where } |||(R \cdot R^t)^{-1}||| = |||R^{t\,-1} \cdot R^{-1}||| \\ &\leqslant |||R||| \cdot |||R^t||| \cdot |||R^{-1}||| \cdot |||R^{t\,-1}|||\end{aligned}$$

$\mathrm{cond}(R)$ $\qquad$ $\mathrm{cond}(R^t) = \mathrm{cond}(R)$

cf. chap. 3

$$\mathrm{cond}(A) \overset{=}{\leqslant} \mathrm{cond}(R)^2$$

$AX = B \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} RY = B \\ R^t X = Y \end{cases}$

cond : $\mathrm{cond}(A)$

10^4

mauvais

$$\underset{\geqslant 1}{\mathrm{cond}(R)} = \sqrt{\underset{\geqslant 1}{\mathrm{cond}(A)}}$$

bien meilleur que celui de A

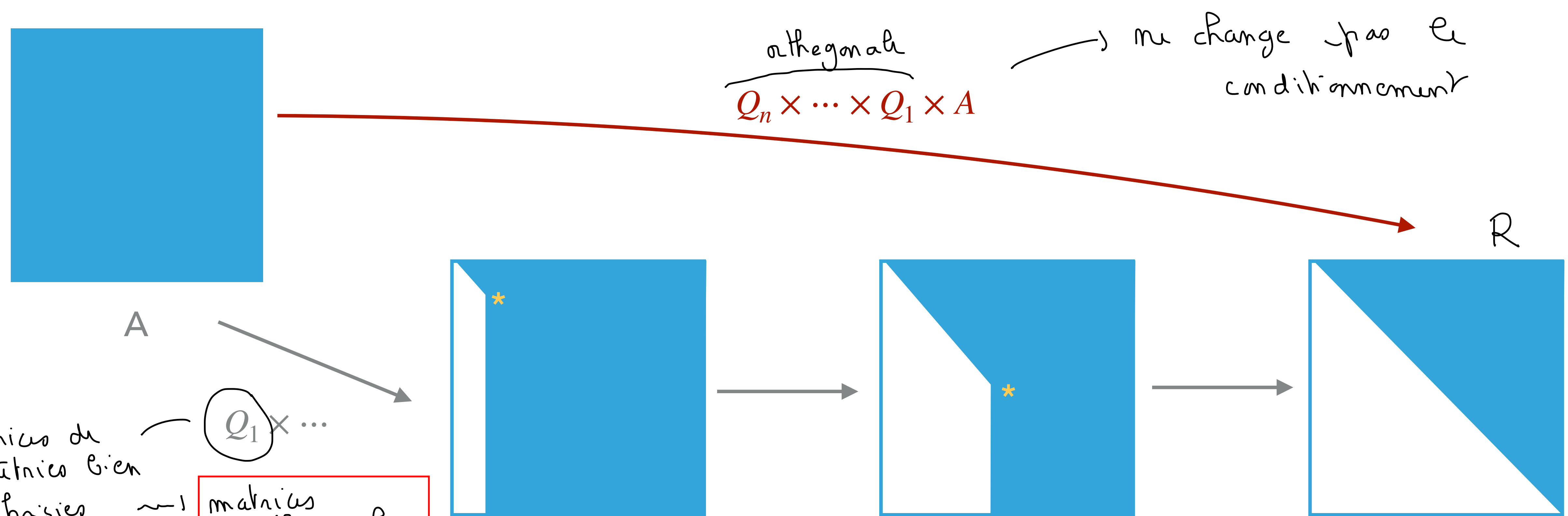
cond : $\mathrm{cond}(R)$

10^2 bon

HOUSEHOLDER / QR

SYSTÈMES LINÉAIRES - HOUSEHOLDER

On peut définir des matrices orthogonales (matrices de Householder) $\{Q_1, \ldots, Q_n\}$ telles que :



matrices de symétries bien choisies ⇝ matrices orthogonales

…

Matrice triangulaire supérieure

$$\boxed{A = QR}$$

triangulaire supérieure

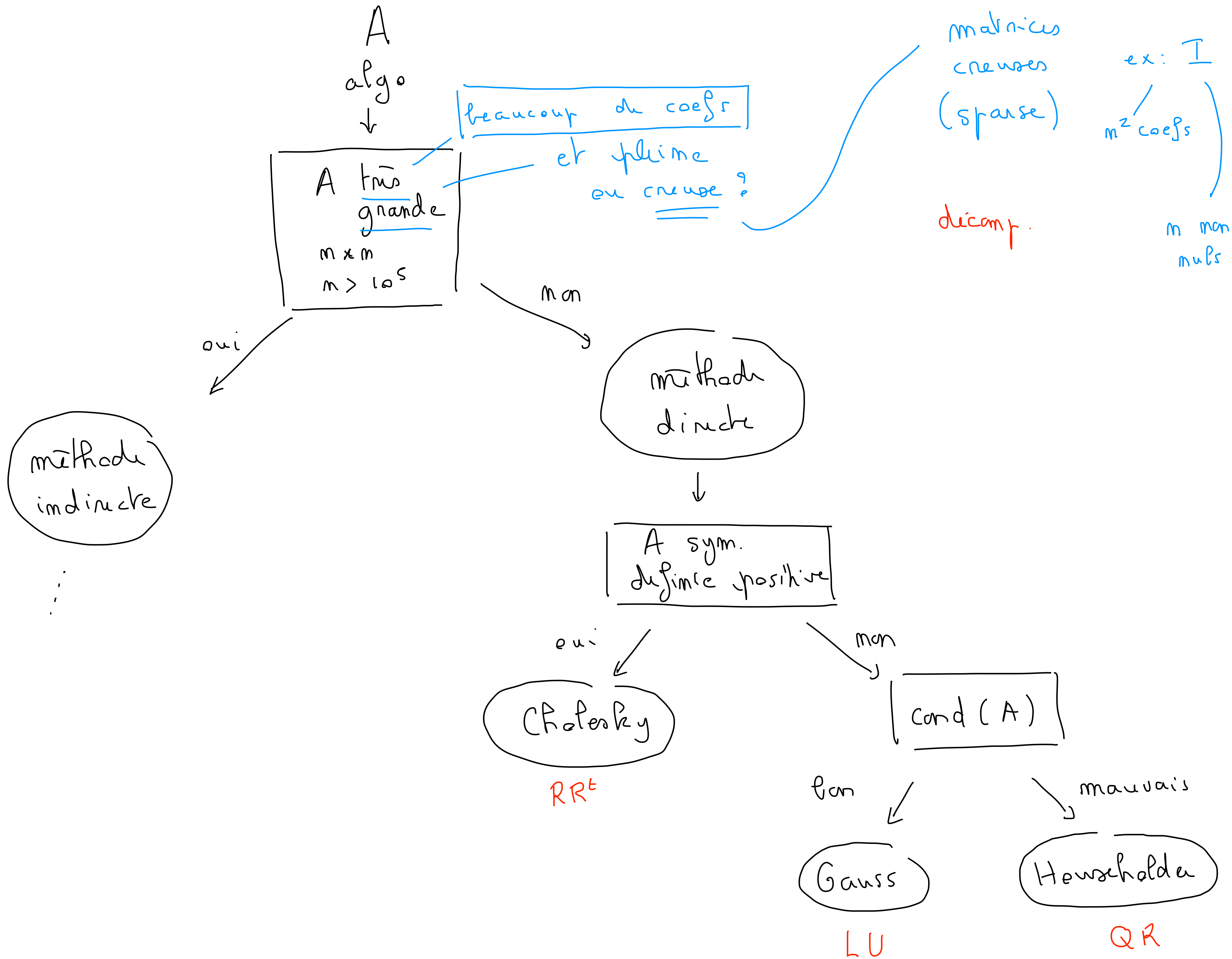
orthogonale

SYSTÈMES LINÉAIRES - HOUSEHOLDER

- Avantage :
  - Ne modifie pas le conditionnement (stabilité numérique)
- Inconvénient :
  - Complexité $\cancel{\mathcal{O}(n^3)}$ $\mathcal{O}\left(\frac{4n^3}{3}\right)$ $\xleftarrow{\times 4}$ Gauss $\mathcal{O}\left(\frac{n^3}{3}\right)$

SYNTHÈSE

	Complexité	Points forts	Points faibles	Conditions
Gauss / LU	$\mathcal{O}(\frac{n^3}{3})$	Rapidité par rapport à Householder	Manque de Stabilité	
Cholesky	$\mathcal{O}(\frac{n^3}{6})$	$\mathrm{cond}(R) = \sqrt{\mathrm{cond}(A)}$ Rapidité Stabilité		Symétrique (définie positive)
Householder / QR	$\mathcal{O}(\frac{4n^3}{3})$	Stabilité	Plus lent que Gauss x4	


A
algo
A très grande
n × n
n > 10^5
beaucoup de coefs
et pleine
ou creuse ?
matrices creuses (sparse)
ex : I
n^2 coefs
n non nuls
décomp.
oui
non
méthode indirecte
méthode directe
A sym. définie positive
oui
non
Cholesky
RR^t
cond (A)
bon
mauvais
Gauss
Householder
LU
QR