POLYTECH INFORMATIQUE
3ÈME ANNÉE

Alexandra Bac

NUMERICAL METHODS

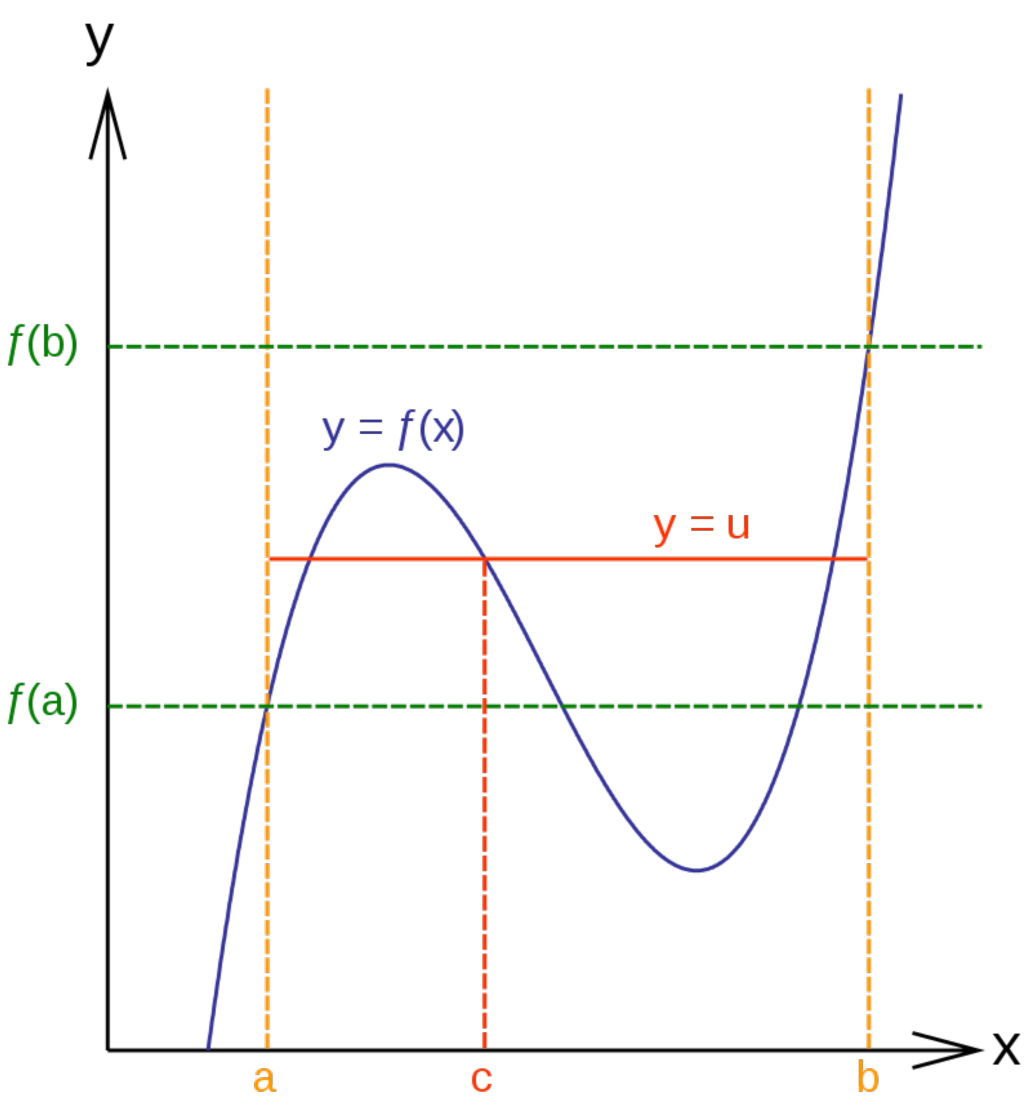
COURS 1 (SUITE)
CALCUL DE ZÉROS DE FONCTIONS

POSITION DU PROBLÈME / RAPPELS

On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et on cherche à trouver les (des) solutions de :

$$f(x) = 0$$

On les appelle des zéros ou racines de f



Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, alors :

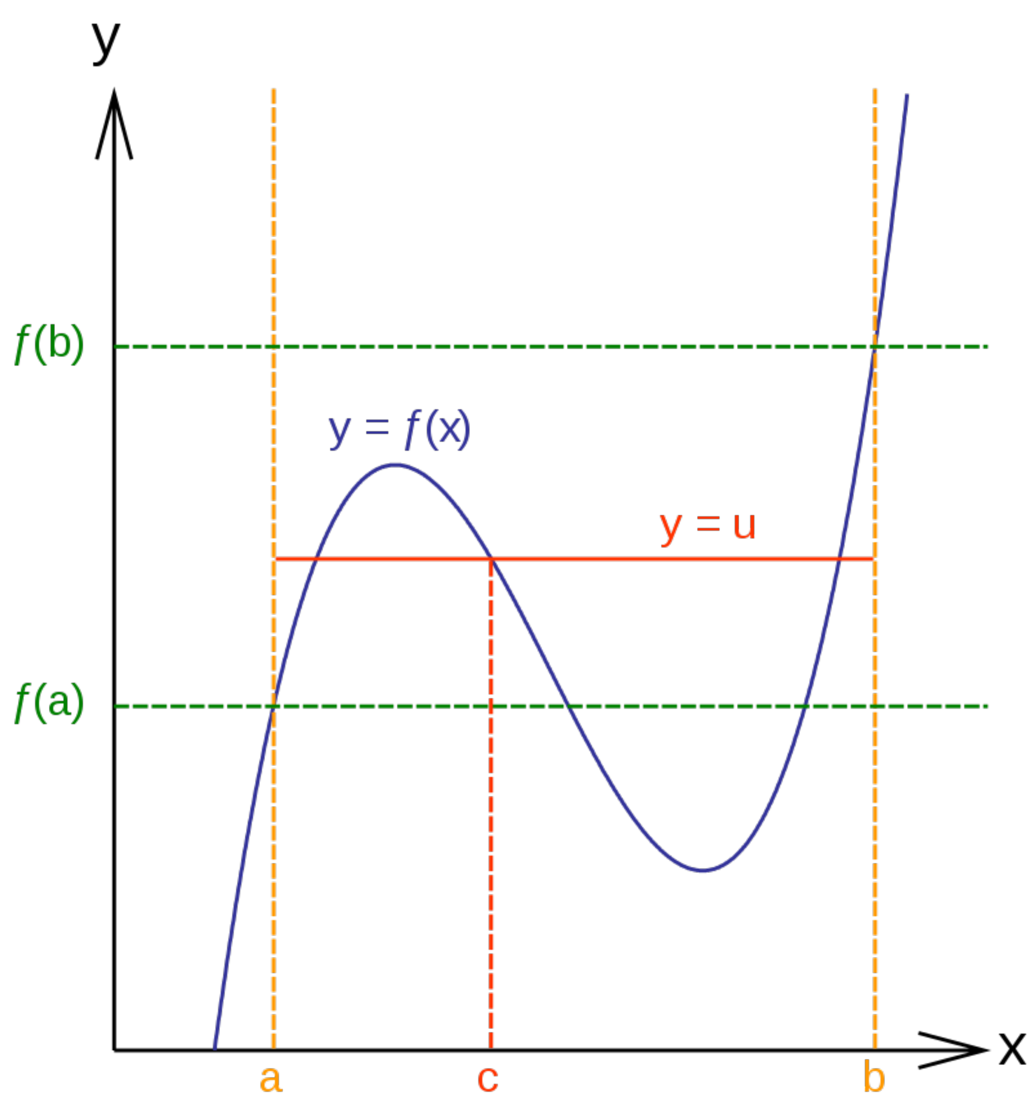
$$\forall y \in]f(a), f(b)[, \ \exists c \in]a, b[\quad f(c) = y$$

POSITION DU PROBLÈME / RAPPELS

On considère $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et on cherche à trouver les (des) solutions de :

$$f(x) = 0$$

On les appelle des <u>zéros</u> ou <u>racines</u> de f



<u>Théorème des valeurs intermédiaires</u>

Soit $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, alors :

$$\forall y \in \,]f(a), f(b)[,\ \exists c \in \,]a, b[\qquad f(c) = y$$

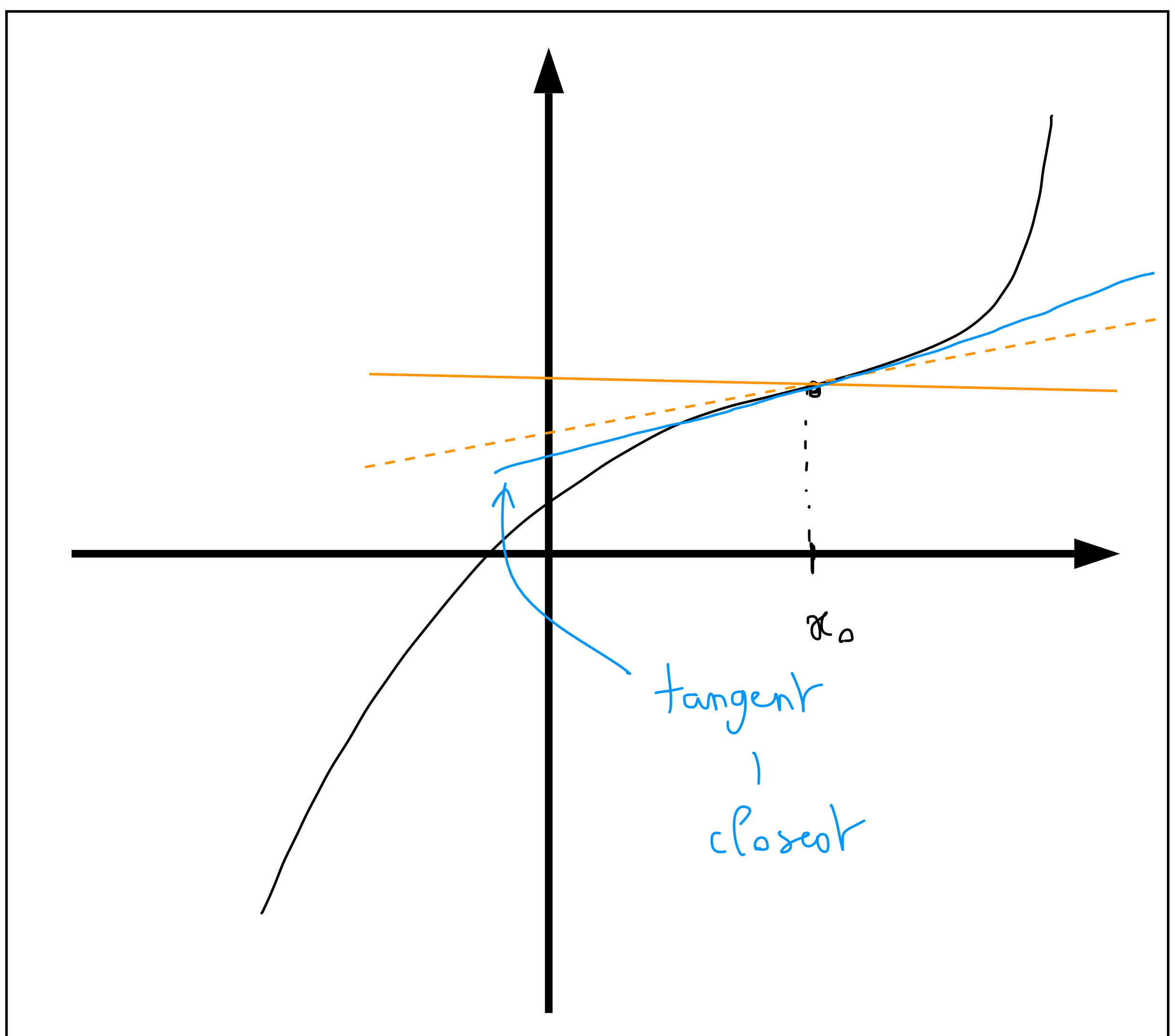
$y = 0$

POSITION DU PROBLÈME / RAPPELS

On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et on cherche à trouver les (des) solutions de :

$$f(x) = 0$$

On les appelle des <u>zéros</u> ou <u>racines</u> de f



ordre n

$$f(x_0+h) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \times h^n + o(h^n)$$

h small

n = 1

<u>Formule de Taylor (ordre 1)</u>

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathscr{C}^2$ au voisinage de x_0

$$f(x_0+h) = \boxed{f(x_0) + f'(x_0) \cdot h} + o(h)$$

Equation de la tangente en x_0

line closest to the curve

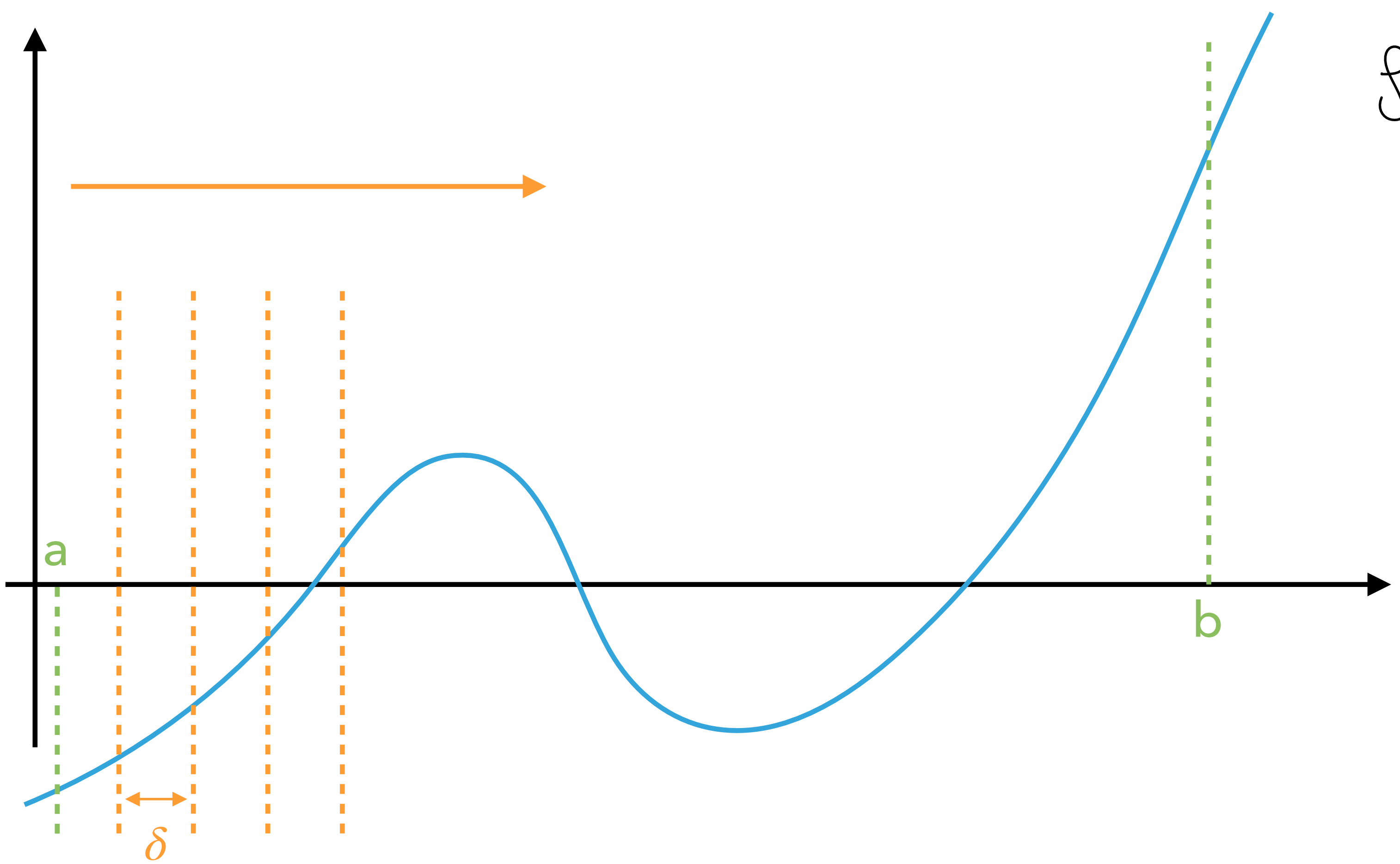
MÉTHODES N'UTILISANT PAS LES DÉRIVÉES

MÉTHODES PAR BALAYAGE — sweeping

↝ first step to find the roots
↓
locate the roots
↓
find [a, b] containing a root.

- Basées sur le théorème des valeurs intermédiaires :

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \;\Rightarrow\; \exists c \in \,]a, b[\; f(c) = 0$$

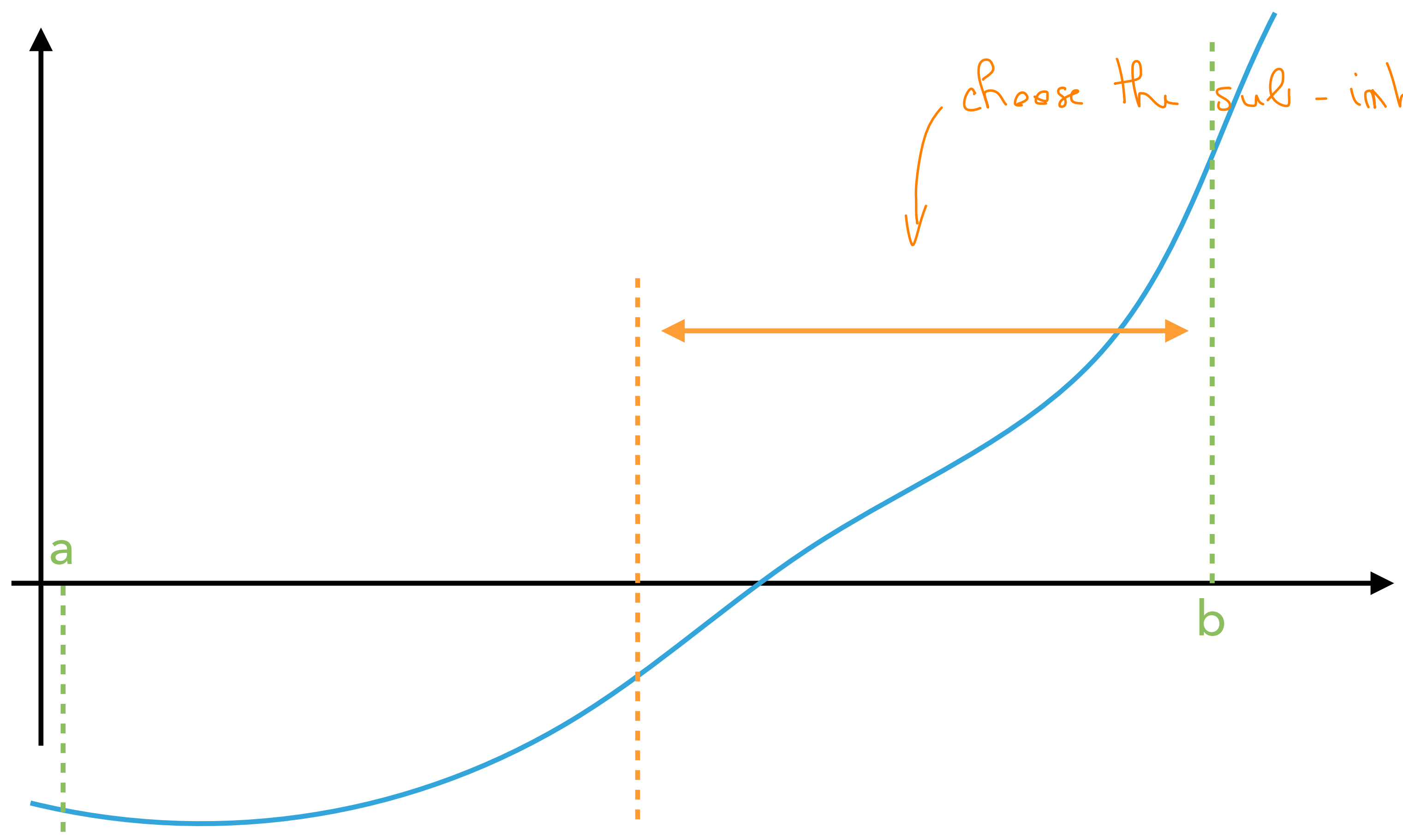


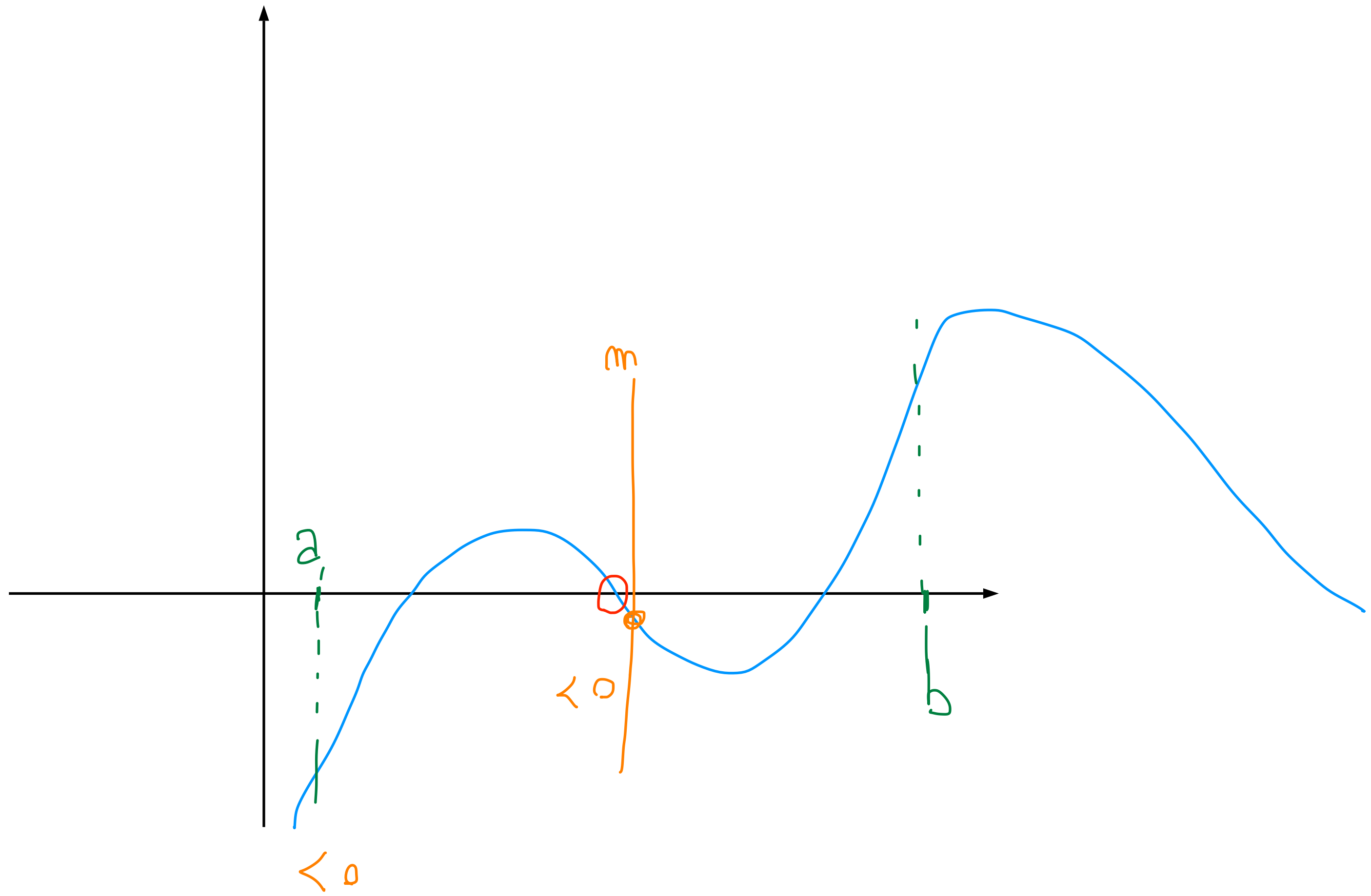
Inconvénient : précision donnée par δ

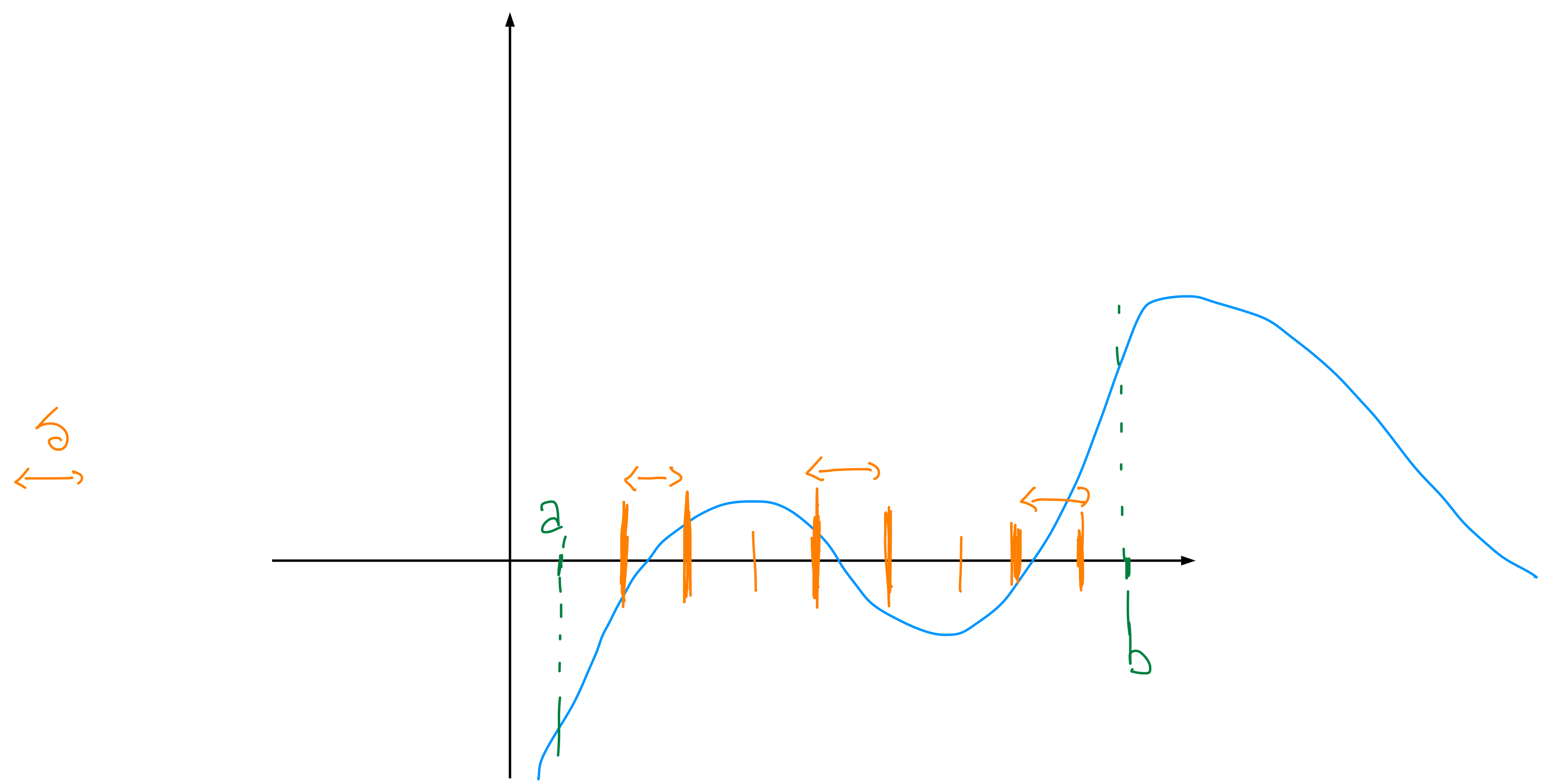
MÉTHODE PAR DICHOTOMIE

- Information supplémentaire :
  f monotone sur $[a, b]$ — ⚠ → $x^* \in [a, b]$
- Diviser pour régner : diviser itérativement l'intervalle en deux

choose the sub-interval when the sign changes.




a
m
<0
b
<0

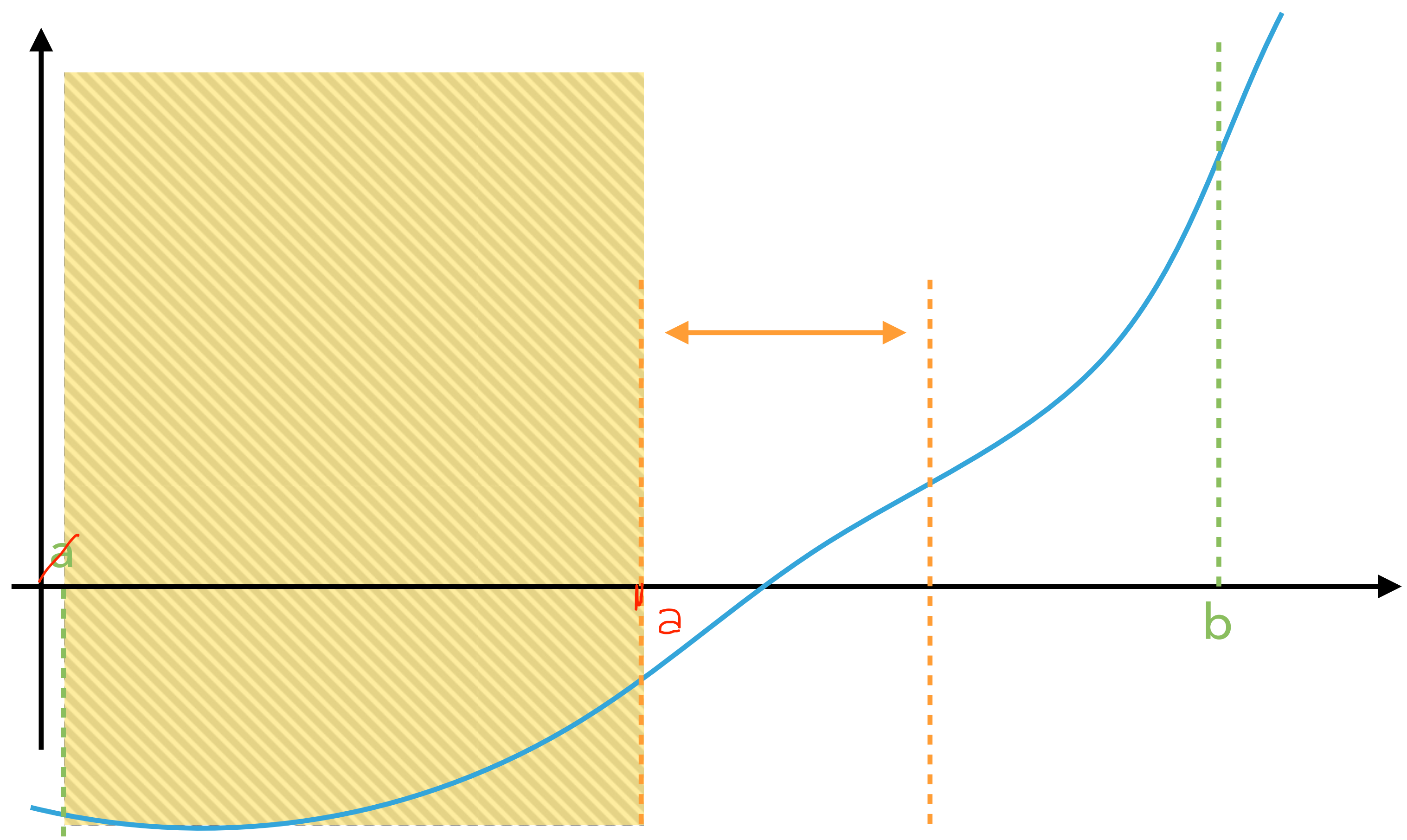

δ
a
b

MÉTHODE PAR DICHOTOMIE

- Information supplémentaire :

  f monotone sur $[a, b]$

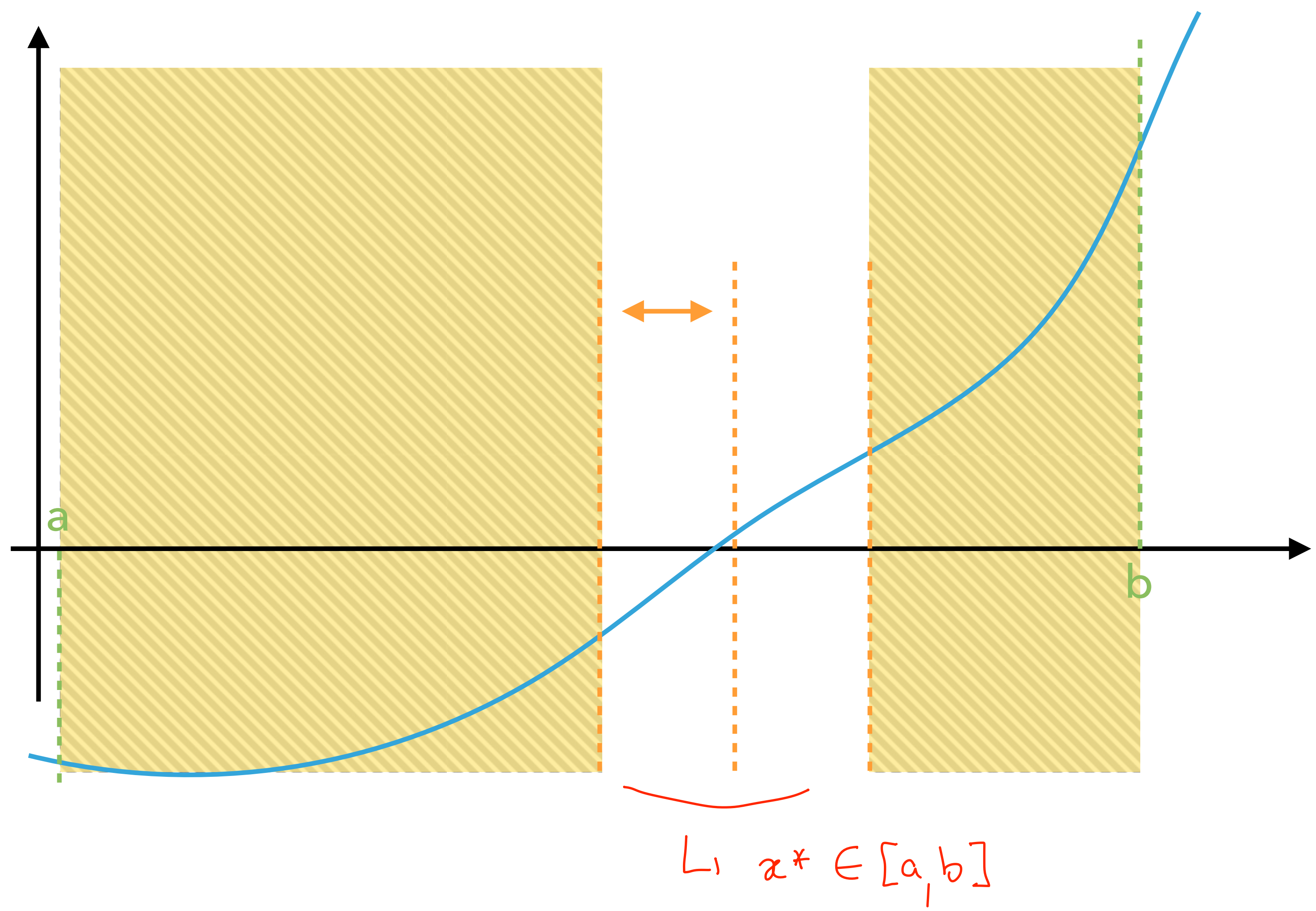
- Diviser pour régner : diviser itérativement l'intervalle en deux



$x^* \in [a, b]$

MÉTHODE PAR DICHOTOMIE

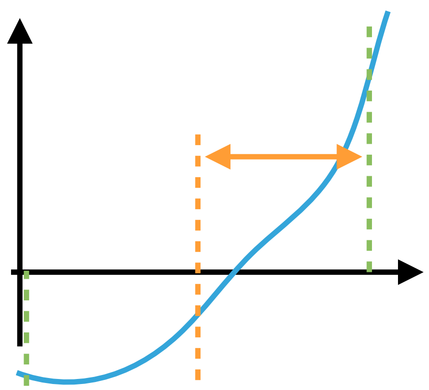
- Information supplémentaire :
  f monotone sur $[a, b]$
- Diviser pour régner : diviser itérativement l'intervalle en deux



MÉTHODE PAR DICHOTOMIE

compute the root ∈ [a,b]

up to ε



Entrée :
- segment [a,b]
- fonction f monotone sur [a,b] avec f(a)f(b)<0
- précision ϵ

Sortie :
- valeur z du zéro de f sur [a,b]

length < ε

a $x^*-\varepsilon$ $x^*+\varepsilon$ b

x^* root

x : result

absolute error

→ ok for "small" results (cf. TP1)

tantque (b-a)>ϵ
    m ← (a+b)/2
    si (f(m) = 0)
        a ← m
        b ← m
    sinon si (f(a)f(m)<0)
        b ← m
    sinon
        a ← m
    finsi
fintantque
z ← (a+b)/2 — any pt in [a,b]

sol ∈ [a,b]

Solution reached up to ε

↓

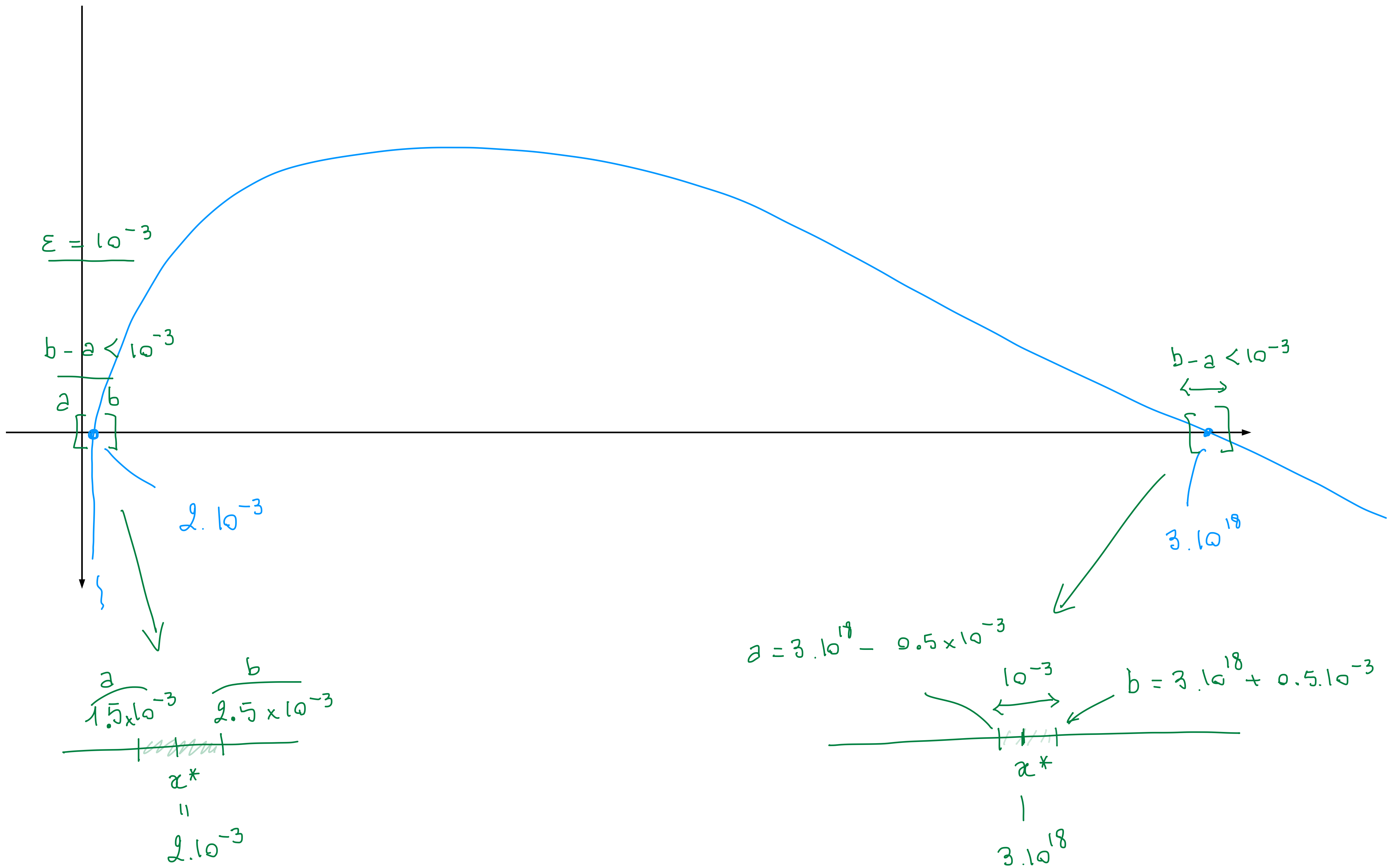
solution: any x ∈ [a,b]

For large numbers:

relative error

$\frac{b-a}{a} > \varepsilon$

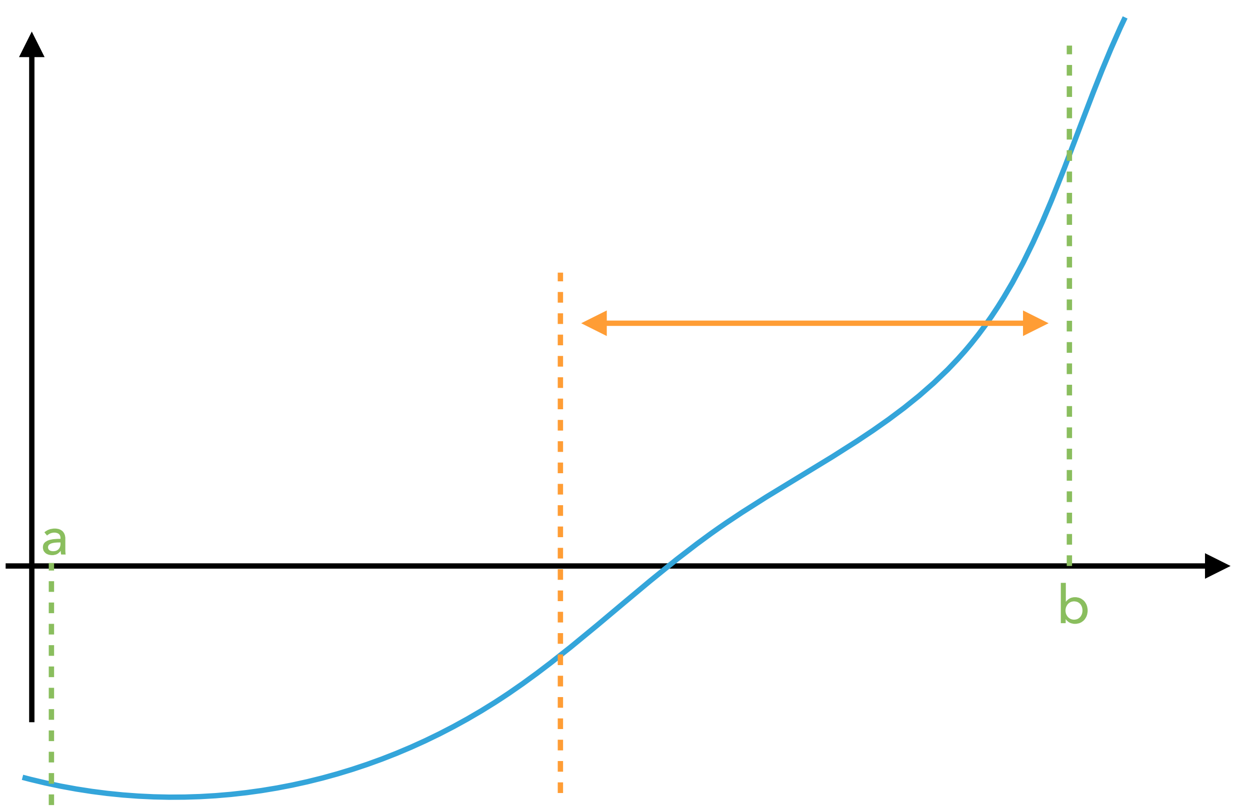
Nombre d'itérations :



$\varepsilon = 10^{-3}$
$b - a < 10^{-3}$
a
b
2.10^{-3}
$b - a < 10^{-3}$
3.10^{18}
a
b
1.5×10^{-3}
2.5×10^{-3}
x^*
$\shortparallel$
2.10^{-3}
$a = 3.10^{18} - 0.5 \times 10^{-3}$
10^{-3}
$b = 3.10^{18} + 0.5.10^{-3}$
x^*
$|$
3.10^{18}

A RETENIR …

→ Dichotomie



- Nécessite une hypothèse sur f :

  f monotone

- Convergence

$$|b_{n+1} - a_{n+1}| = \frac{|b_n - a_n|}{2}$$

↳ linear speed

MÉTHODE UTILISANT LES DÉRIVÉES : NEWTON

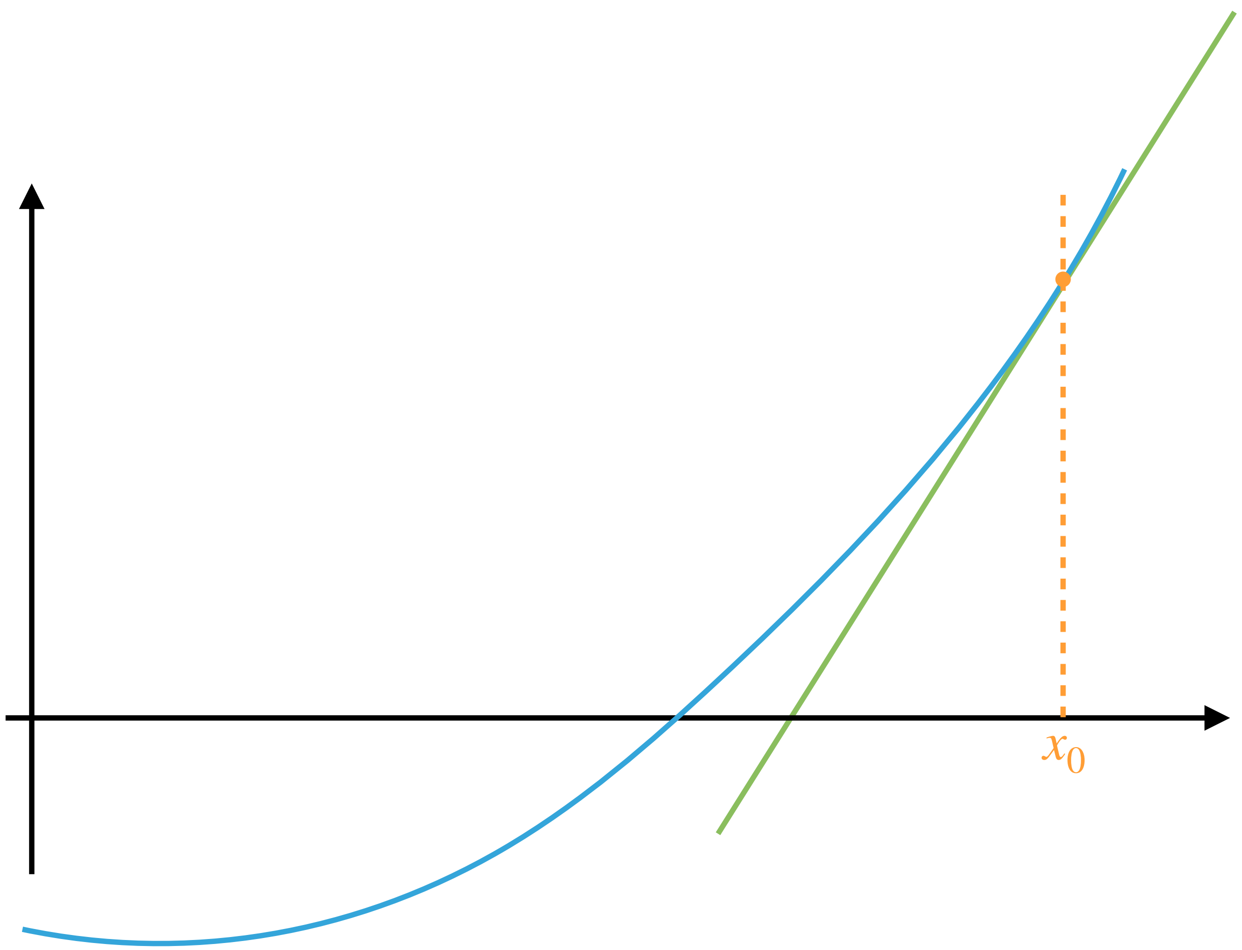
INTUITION SUR LA MÉTHODE DE NEWTON

Formule de Taylor (ordre 1)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathscr{C}^2$ au voisinage de x_0

$$f(x_0 + h) = \boxed{f(x_0) + f'(x_0) \cdot h} + o(h)$$

Equation de la tangente en x_0



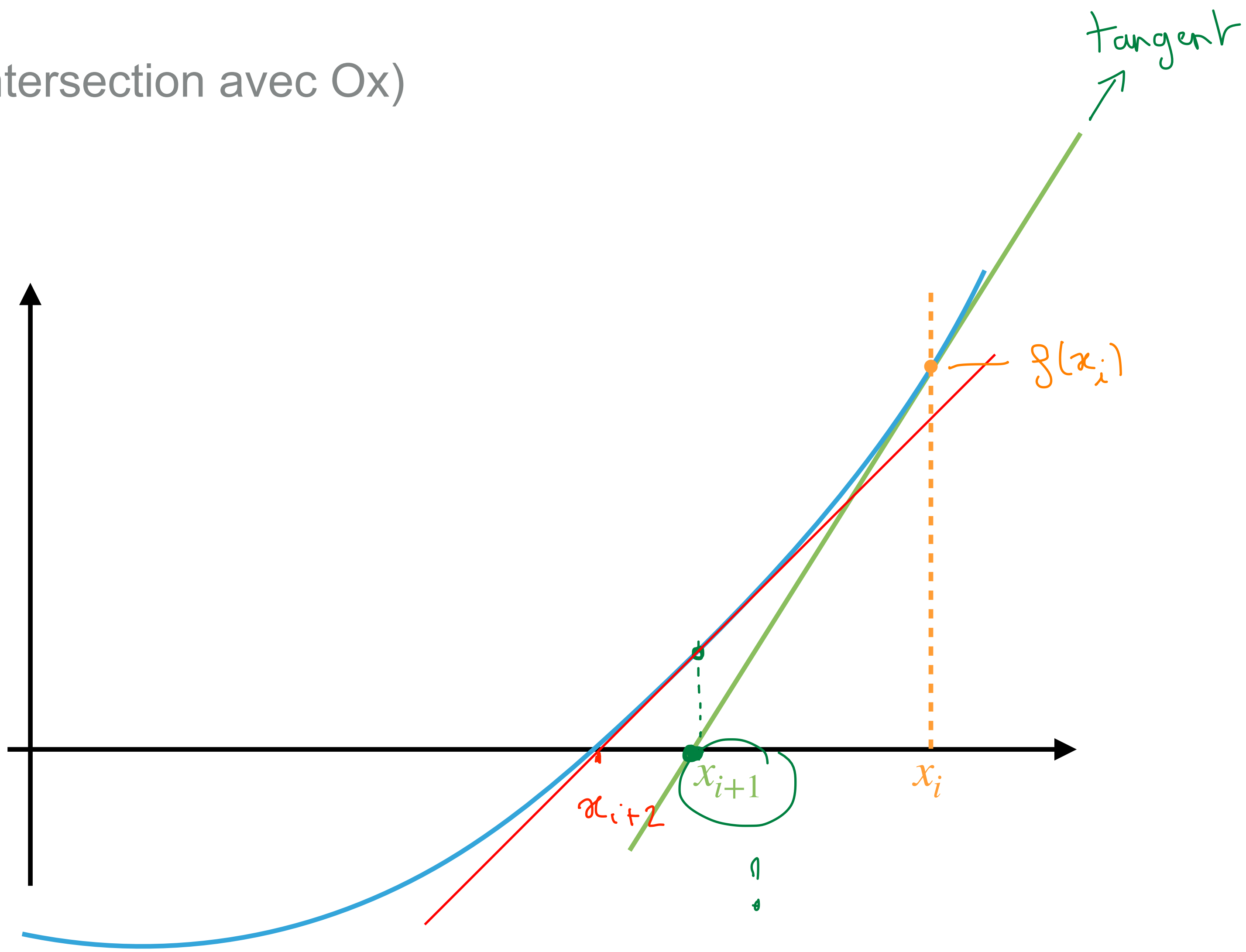
INTUITION SUR LA MÉTHODE DE NEWTON

- En un point x_0
- Approximer la courbe par sa tangente
- Calculer le zéro de cette tangente (intersection avec Ox)

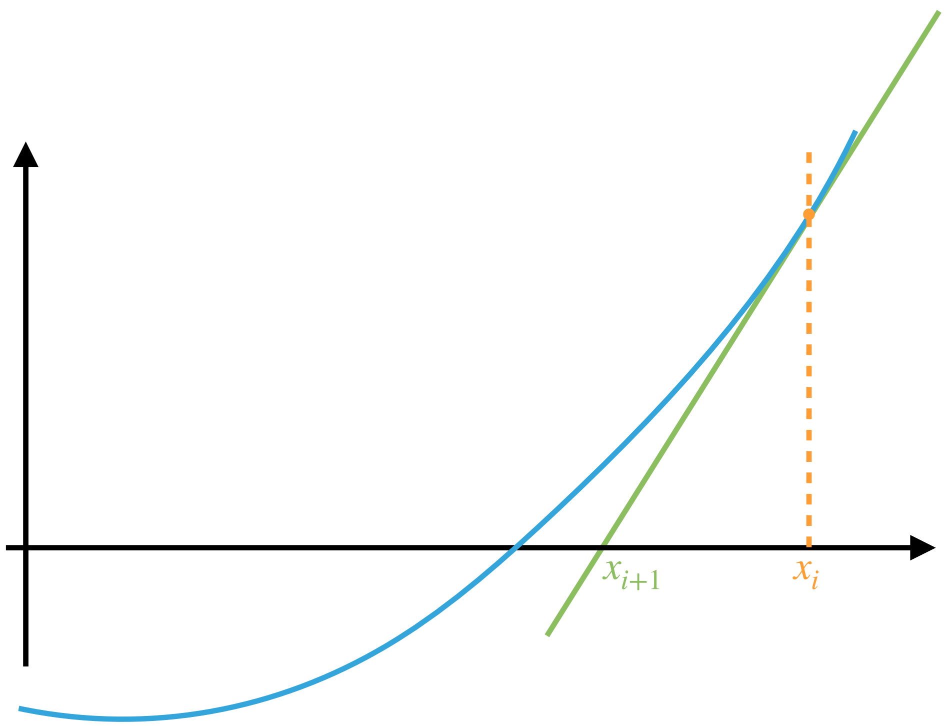
Pente de la tangente :

$$f'(x_i) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}}$$



MÉTHODE DE NEWTON



Entrée :

- point x_0 proche du minimum
- fonction f
- précision ϵ

Sortie :

- valeur z du zéro de f voisin de x_0

absolute err | relative err

tantque ($|x_i - x_{i-1}| > \epsilon$) | $\underbrace{\frac{|x_i - x_{i-1}|}{|x_i|} > \varepsilon}$

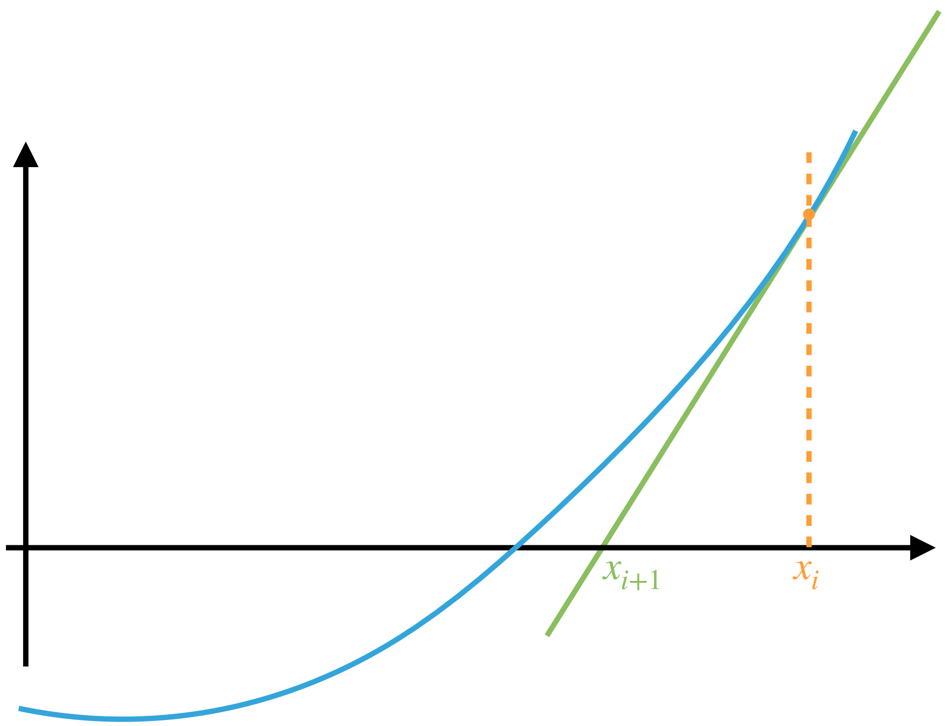
$$x_{i+1} \leftarrow x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

when the sol. computed is large

fintantque

z $\leftarrow x_i$

MÉTHODE DE NEWTON



Entrée :
- point x_0 proche du minimum
- fonction f
- précision ϵ

Sortie :
- valeur z du zéro de f voisin de x_0

tantque ($|x_i - x_{i-1}| > \epsilon$)

$$x_{i+1} \leftarrow x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

fintantque

z $\leftarrow x_i$

Si f est $\mathscr{C}^2$ sur un intervalle fermé I et x^* racine simple de f avec $f'(x^*) \neq 0$

$\exists \epsilon, K > 0\,;\ \forall x_0 \in \mathscr{B}(x^*, \epsilon_0) \quad |x_{i+1} - x^*| < K|x_i - x^*|^2$ ← conv. speed

Convergence quadratique

Polynomial P $\longrightarrow$ root x^* simple / multiple ?

$X^2 \longrightarrow$ root 0 is multiple

ex :

$P = (X-1) \times Q$

1 is a root — simple

$Q(1) \neq 0$

$P = (X-1)^2 \times Q$

1 is "twice" a root

$P' = 2(X-1)Q + (X-1)^2 Q'$
$= (X-1)(2Q + (X-1)Q')$

root α has multiplicity m

$P = (X-\alpha)^m \times Q$

α not root

$\iff$

$\forall k \longrightarrow k < m$

$P^{(k)}(\alpha) = 0$

simple / multiple roots for functions ...

f — α is a root of multiplicity m if

$f^{(k)}(\alpha) = 0 \quad \forall k < m$

Convergence

Dichotomy

Init

a ⊢———⊣ b

$\longleftrightarrow$ 0.1

$/2$

Step 1 $\quad b - a = \frac{0.1}{2} = 5 \cdot 10^{-2}$

2 $\quad 2.5 \cdot 10^{-2}$

3 $\quad 1.25 \cdot 10^{-2}$

$$\cancel{0.1} \times 2^{-k} = 10^{-\cancel{8}\,7}$$

$$k = \frac{7 \cdot \ln 10}{\ln 2} \gg 3$$

Newton

$x_0 \xrightarrow[0.1]{dist} x^*$

$\wedge 2$

Step 1 $\quad dist < 10^{-2}$

$dist < 10^{-4}$

$< 10^{-8}$

$$2^{-k} = 10^{-7}$$

ln

$$\cancel{-}k \cdot \ln 2 = \cancel{-}7 \cdot \ln 10$$

APRÈS NEWTON …

- Méthode de la sécante
  - Approximation de la tangente par la corde
- Méthode de Bairstow
  - Proche de Newton mais plus efficace sur les polynômes à coefficients réels

SYNTHÈSE

	Complexité / convergence	Points forts	Points faibles	Conditions
Balayage	Lent …	Pas de conditions ni dérivées	Lent	
Dichotomie	Géométrique $\lvert b_{n+1} - a_{n+1} \rvert = \frac{\lvert b_n - a_n \rvert}{2}$	Rapidité (/ balayage)	Lent (/Newton) Monotonie	Monotone
Newton	Quadratique $\lvert x_{i+1} - x^* \rvert < K \lvert x_i - x^* \rvert^2$	Rapidité	Dérivées et fonction $\mathscr{C}^2$	