Alexandra Bac

NUMERICAL METHODS

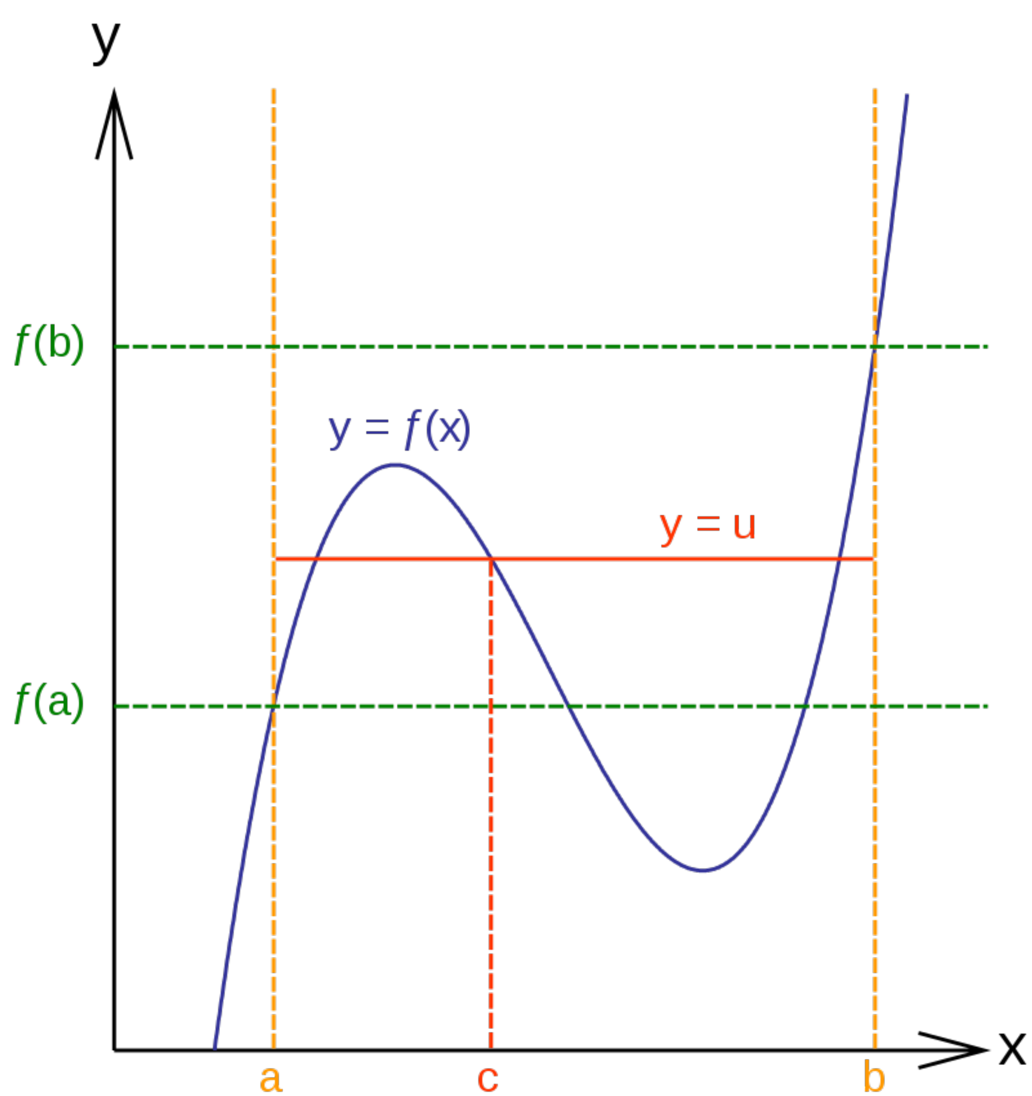
COURS 1 (SUITE)
CALCUL DE ZÉROS DE FONCTIONS

POSITION DU PROBLÈME / RAPPELS

On considère $f\,:\,\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et on cherche à trouver les (des) solutions de :

$$f(x) = 0$$

On les appelle des zéros ou racines de f



Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f\,:\,\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$, alors :

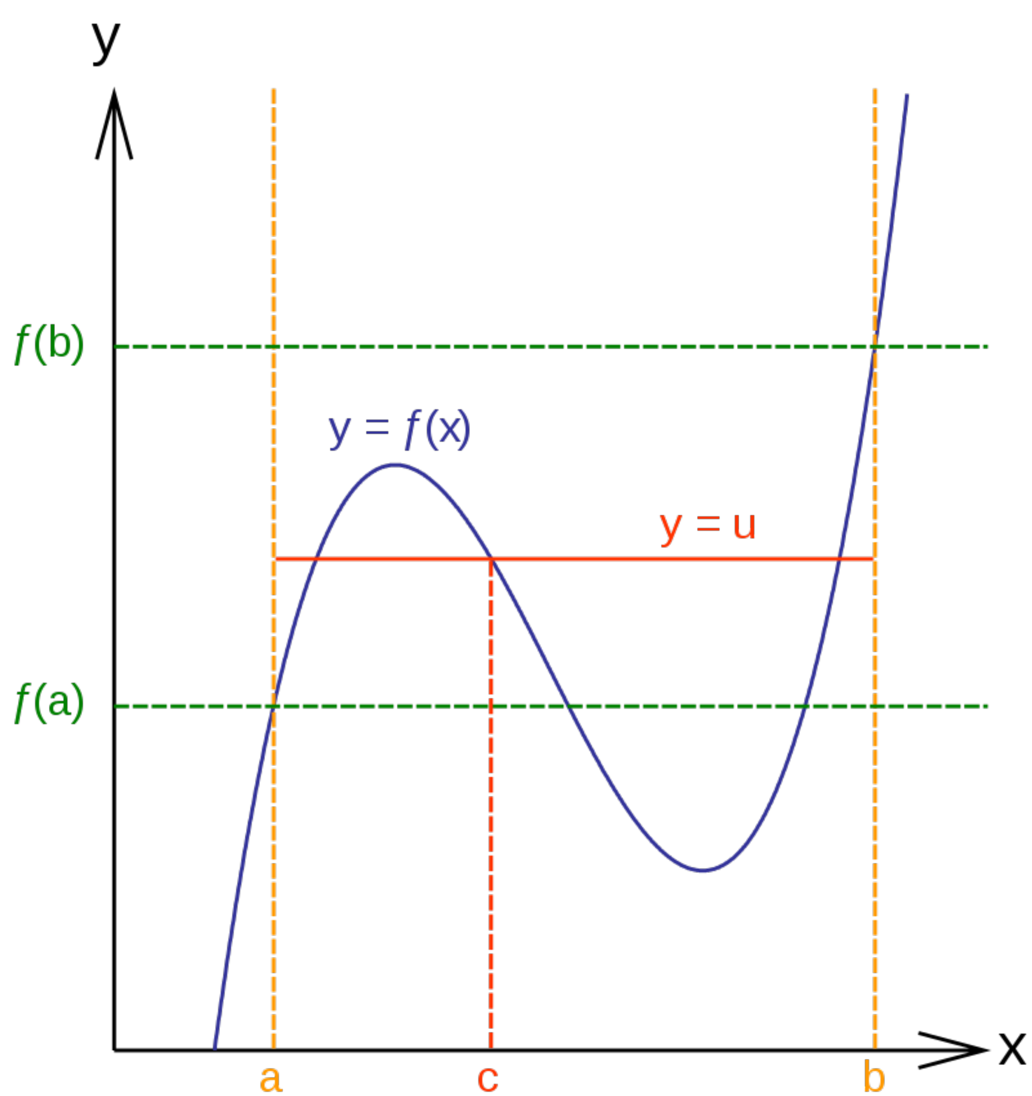
$$\forall y \in \left]f(a), f(b)\right[,\ \exists c \in \left]a, b\right[\quad f(c) = y$$

POSITION DU PROBLÈME / RAPPELS

On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et on cherche à trouver les (des) solutions de :

$$f(x) = 0$$

On les appelle des zéros ou racines de f



Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, alors :

$$\forall y \in \,]f(a), f(b)[, \ \exists c \in \,]a, b[\quad f(c) = y$$

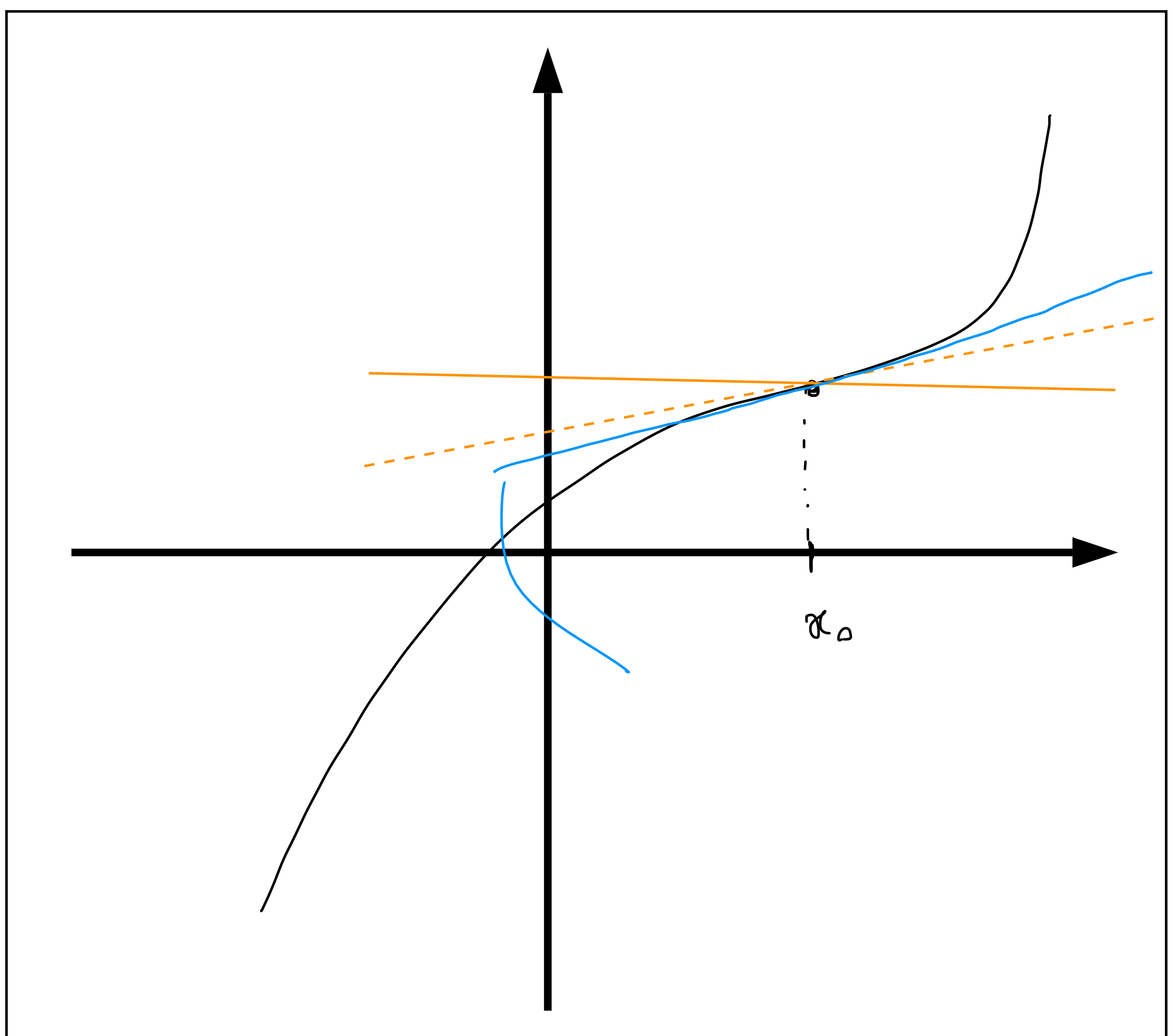
$y = 0$

POSITION DU PROBLÈME / RAPPELS

On considère $f\;:\;\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et on cherche à trouver les (des) solutions de :

$$f(x) = 0$$

On les appelle des zéros ou racines de f



ordre n

$$f(x_0+h) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \times h^n + o(h^n)$$

h small

$n = 1$

Formule de Taylor (ordre 1)

Soit $f\;:\;\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\mathscr{C}^2$ au voisinage de x_0

$$f(x_0+h) = \boxed{f(x_0) + f'(x_0)\cdot h} + o(h)$$

Equation de la tangente en x_0

line closest to the curve

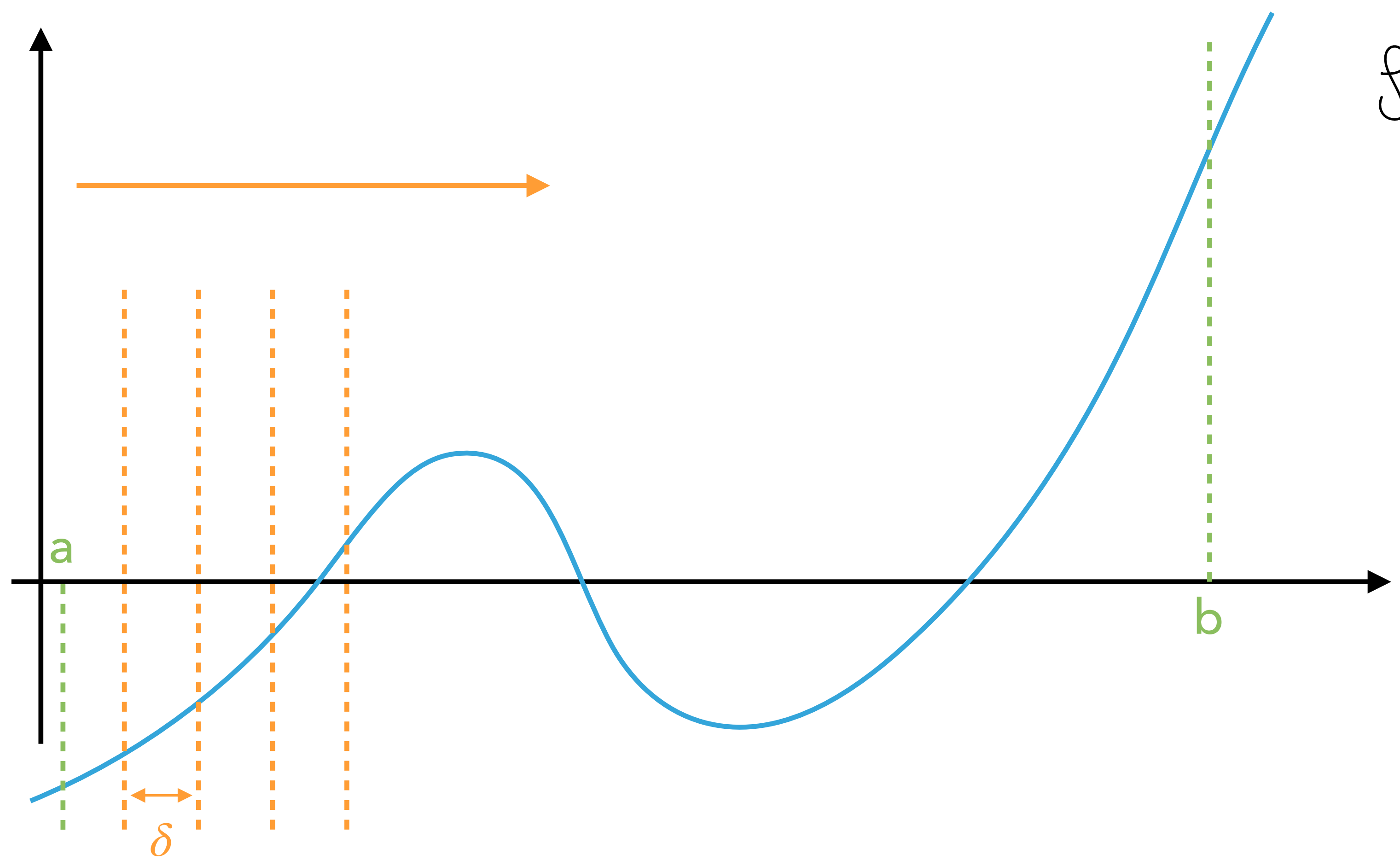
MÉTHODES N'UTILISANT PAS LES DÉRIVÉES

MÉTHODES PAR BALAYAGE — sweeping

⤳ first step to find the roots
↓
locate the roots
↓
find [a, b] containing a root.

- Basées sur le théorème des valeurs intermédiaires :

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \;\Rightarrow\; \exists c \in \,]a,b[\;\; f(c) = 0$$

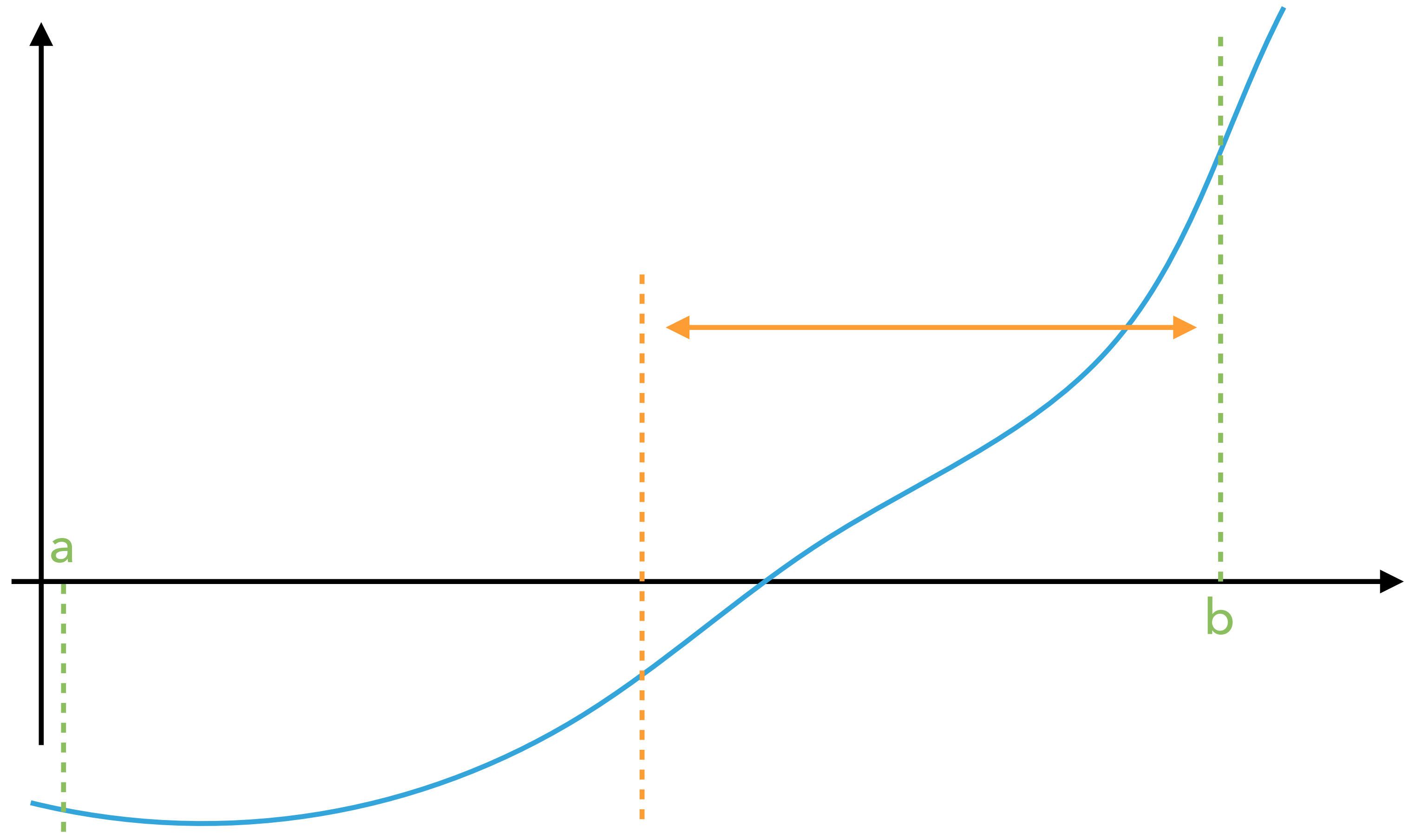


Inconvénient : précision donnée par δ

MÉTHODE PAR DICHOTOMIE

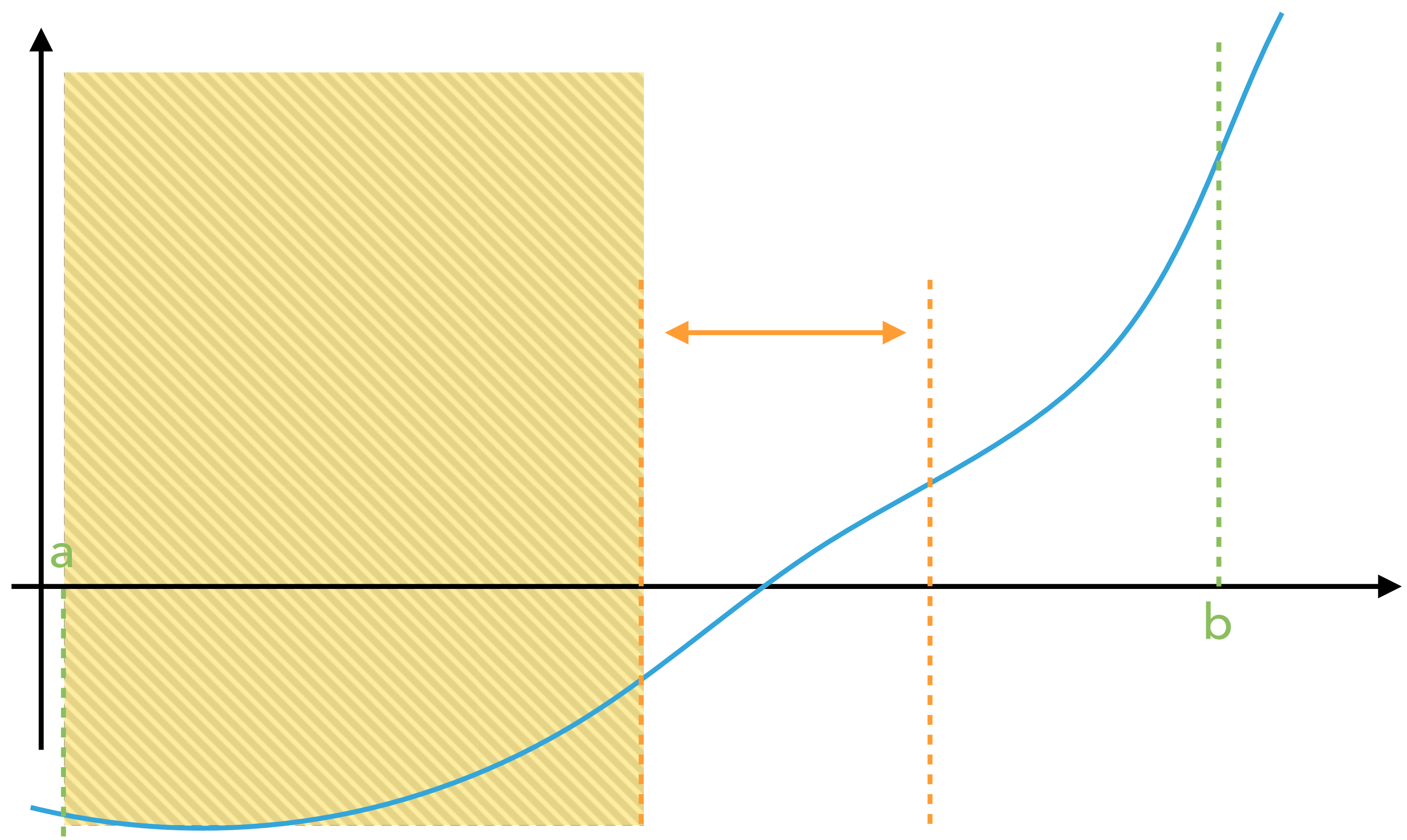
- Information supplémentaire :
  f monotone sur $[a, b]$

- Diviser pour régner : diviser itérativement l'intervalle en deux



MÉTHODE PAR DICHOTOMIE

- Information supplémentaire :
  f monotone sur $[a, b]$
- Diviser pour régner : diviser itérativement l'intervalle en deux

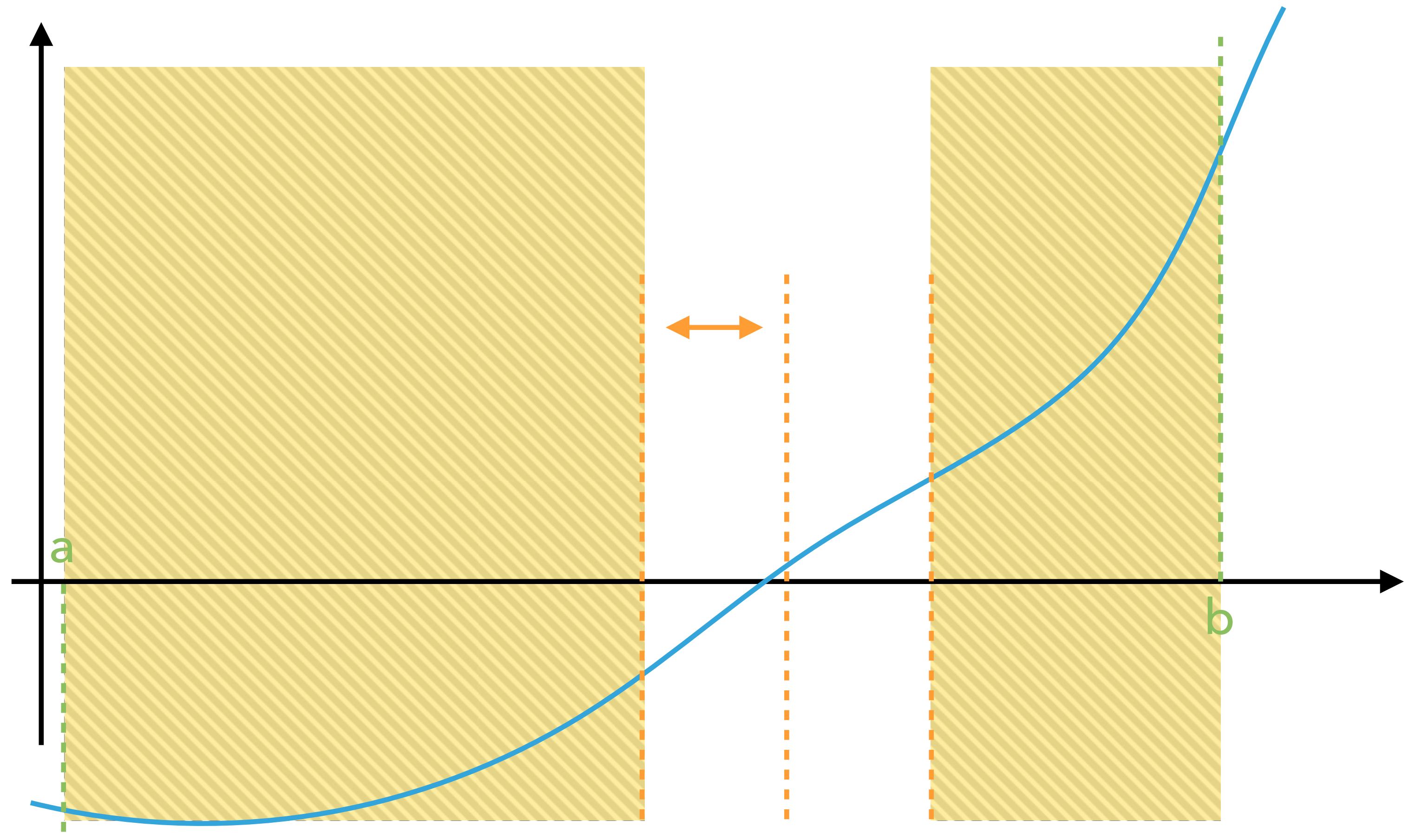


MÉTHODE PAR DICHOTOMIE

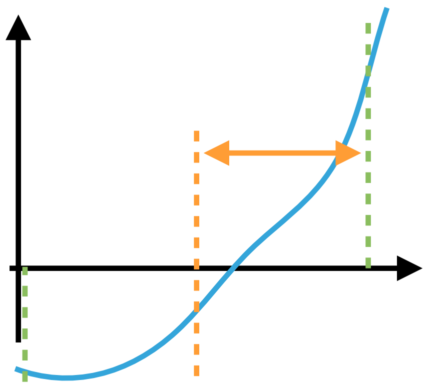
- Information supplémentaire :

  f monotone sur $[a, b]$

- Diviser pour régner : diviser itérativement l'intervalle en deux



MÉTHODE PAR DICHOTOMIE



Entrée :
- segment [a,b]
- fonction f monotone sur [a,b] avec f(a)f(b)<0
- précision ϵ

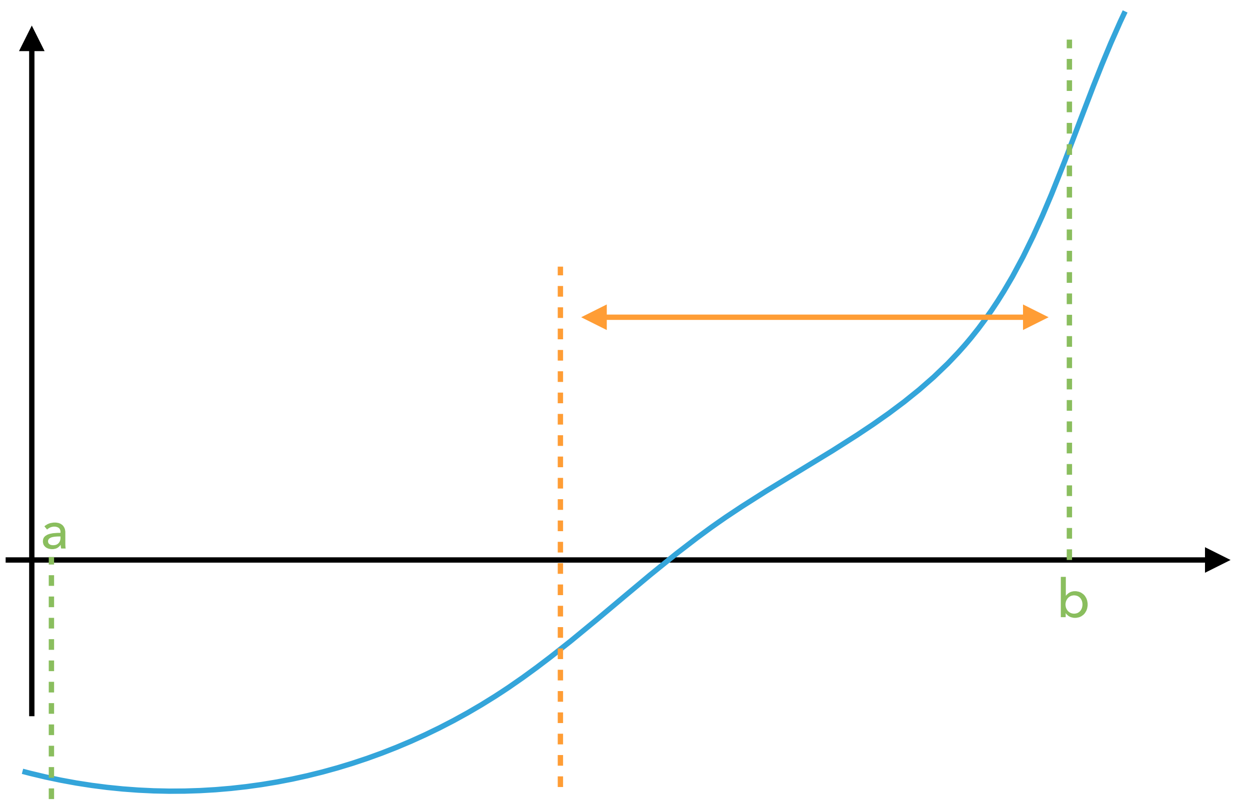
Sortie :
- valeur z du zéro de f sur [a,b]

```
tantque (b-a)>ϵ
    m ← (a+b)/2
    si (f(m) = 0)
        a ← m
        b ← m
    sinon si (f(a)f(m)<0)
        b ← m
    sinon
        a ← m
    finsi
fintantque
z ← (a+b)/2
```

Nombre d'itérations :

A RETENIR …

→ Dichotomie



- Nécessite une hypothèse sur f :

f monotone

- Convergence

$$|b_{n+1} - a_{n+1}| = \frac{|b_n - a_n|}{2}$$

MÉTHODE UTILISANT LES DÉRIVÉES : NEWTON

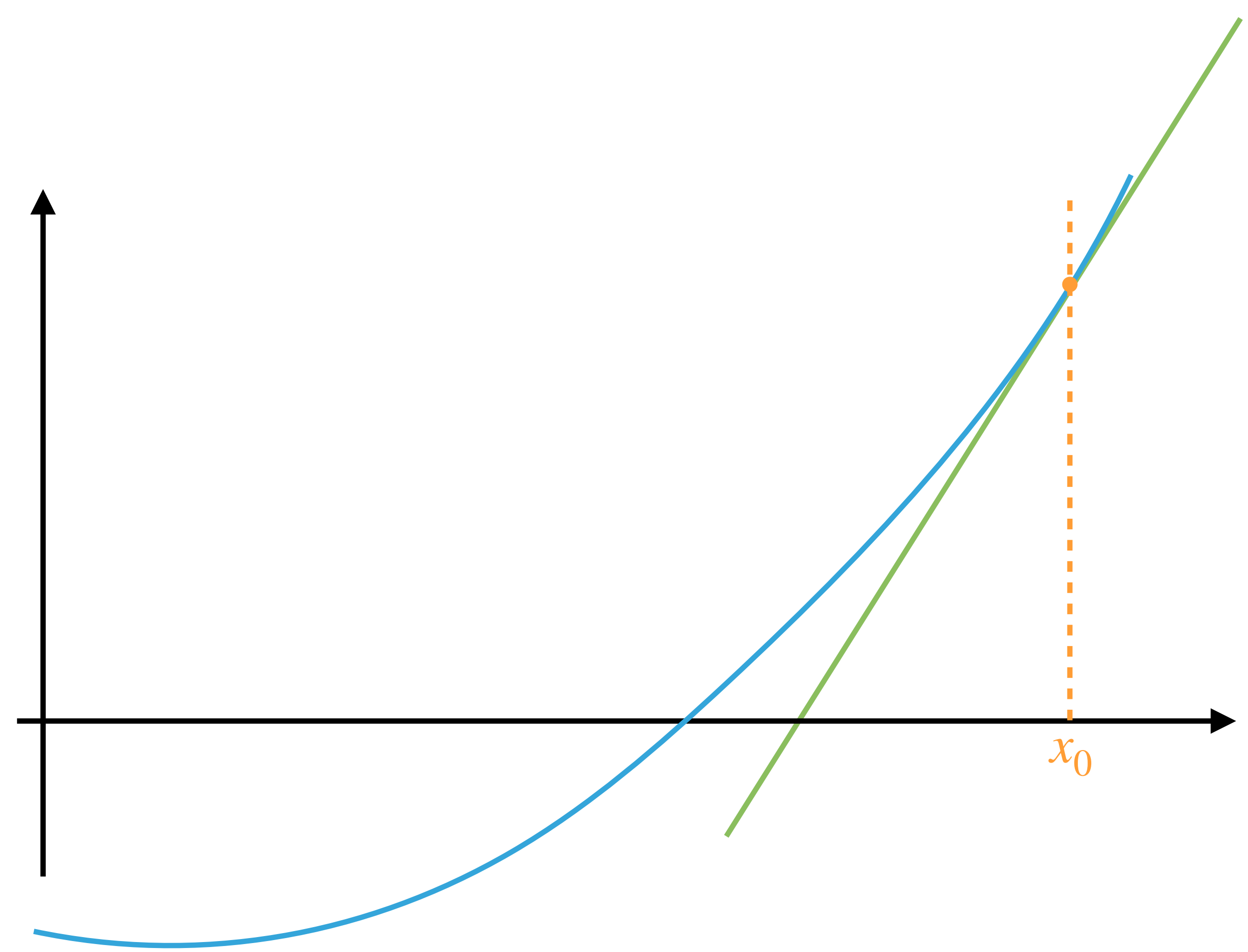
INTUITION SUR LA MÉTHODE DE NEWTON

Formule de Taylor (ordre 1)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathscr{C}^2$ au voisinage de x_0

$$f(x_0 + h) = \boxed{f(x_0) + f'(x_0) \cdot h} + o(h)$$

Equation de la tangente en x_0

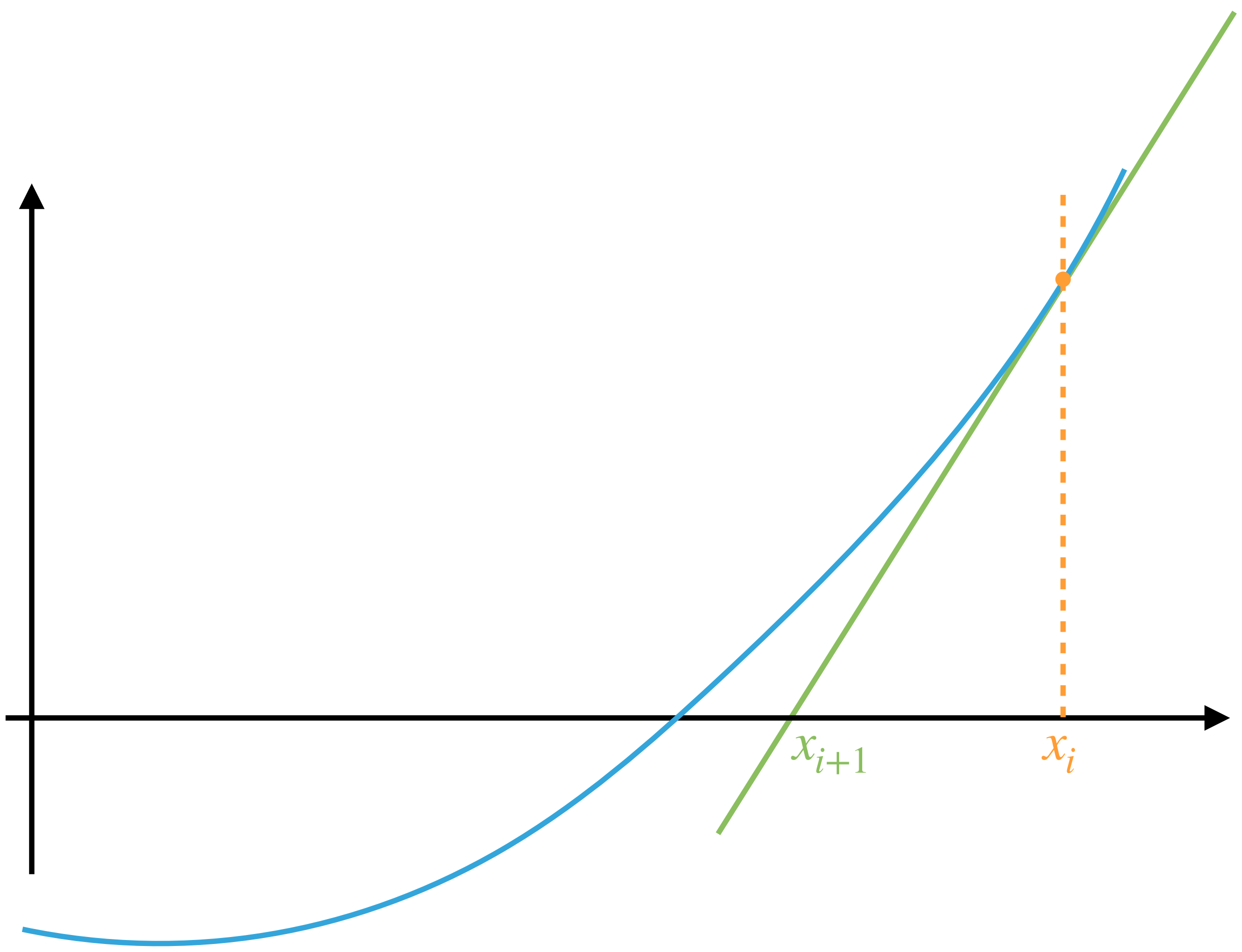


INTUITION SUR LA MÉTHODE DE NEWTON

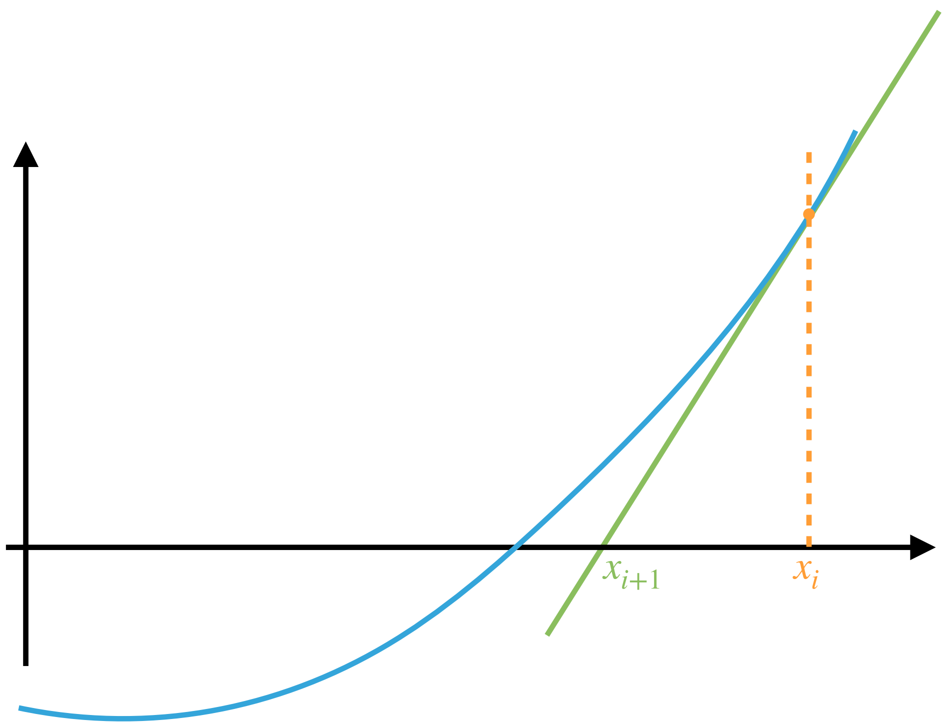
- En un point x_0
- Approximer la courbe par sa tangente
- Calculer le zéro de cette tangente (intersection avec Ox)

Pente de la tangente :

$=$



MÉTHODE DE NEWTON



Entrée :

- point x_0 proche du minimum
- fonction f
- précision ϵ

Sortie :

- valeur z du zéro de f voisin de x_0

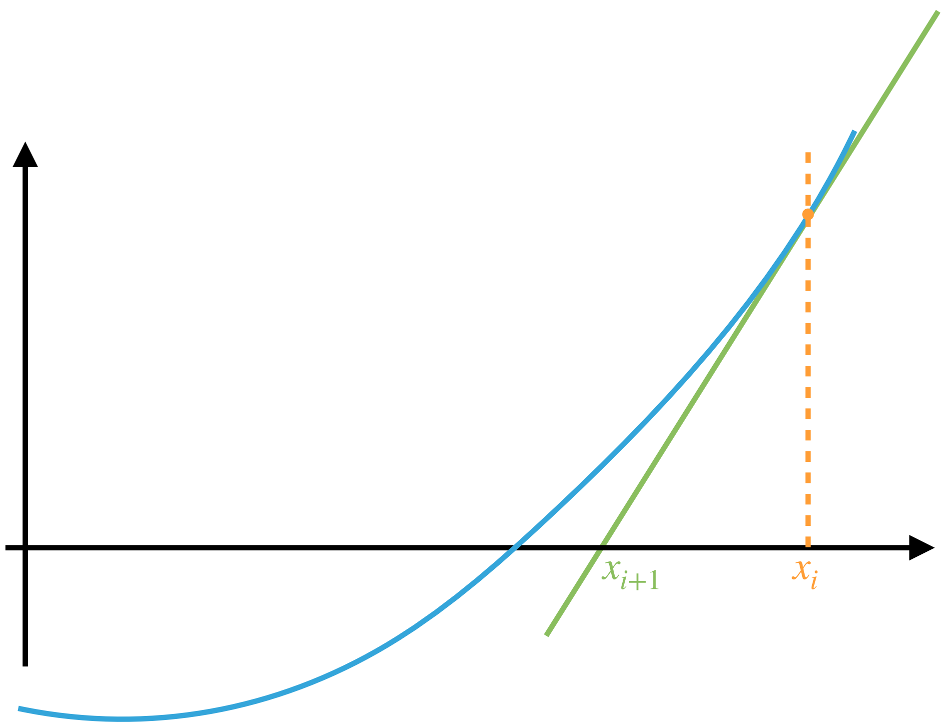
tantque ($|x_i - x_{i-1}| > \epsilon$)

$$x_{i+1} \leftarrow x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

fintantque

z $\leftarrow x_i$

MÉTHODE DE NEWTON



Entrée :

- point x_0 proche du minimum
- fonction f
- précision ϵ

Sortie :

- valeur z du zéro de f voisin de x_0

tantque ($|x_i - x_{i-1}| > \epsilon$)

$$x_{i+1} \leftarrow x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

fintantque

z $\leftarrow x_i$

Si f est $\mathscr{C}^2$ sur un intervalle fermé I et x^* racine simple de f avec $f'(x^*) \neq 0$

$$\exists \epsilon, K > 0\,;\ \forall x_0 \in \mathscr{B}(x^*, \epsilon_0) \qquad |x_{i+1} - x^*| < K|x_i - x^*|^2$$

Convergence quadratique

APRÈS NEWTON …

- Méthode de la sécante
  - Approximation de la tangente par la corde
- Méthode de Bairstow
  - Proche de Newton mais plus efficace sur les polynômes à coefficients réels

SYNTHÈSE

	Complexité / convergence	Points forts	Points faibles	Conditions
Balayage	Lent …	Pas de conditions ni dérivées	Lent	
Dichotomie	Géométrique $\lvert b_{n+1} - a_{n+1} \rvert = \frac{\lvert b_n - a_n \rvert}{2}$	Rapidité (/ balayage)	Lent (/Newton) Monotonie	Monotone
Newton	Quadratique $\lvert x_{i+1} - x^* \rvert < K \lvert x_i - x^* \rvert^2$	Rapidité	Dérivées et fonction $\mathscr{C}^2$	