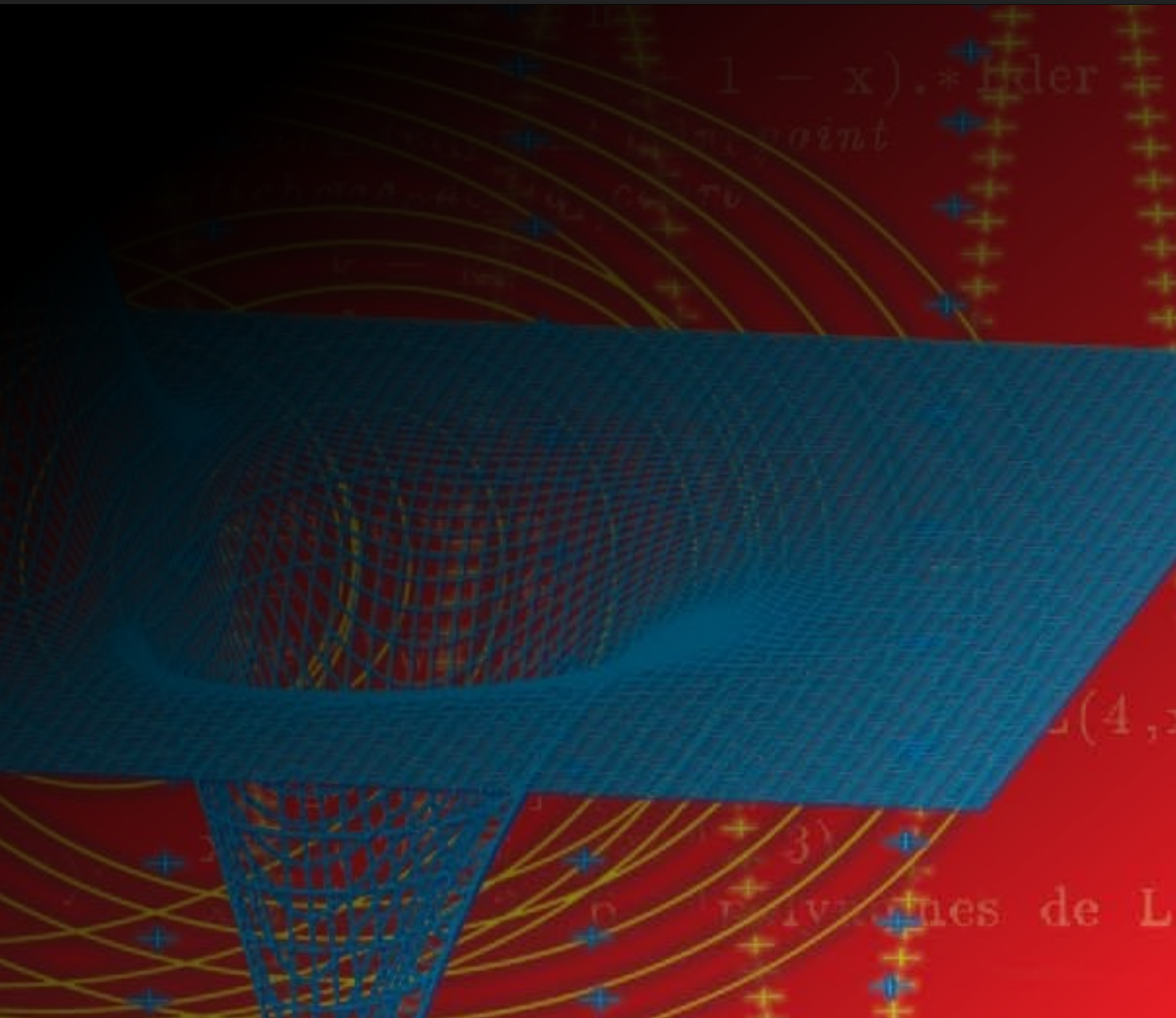
POLYTECH INFORMATIQUE

3ÈME ANNÉE

Alexandra Bac

NUMERICAL METHODS



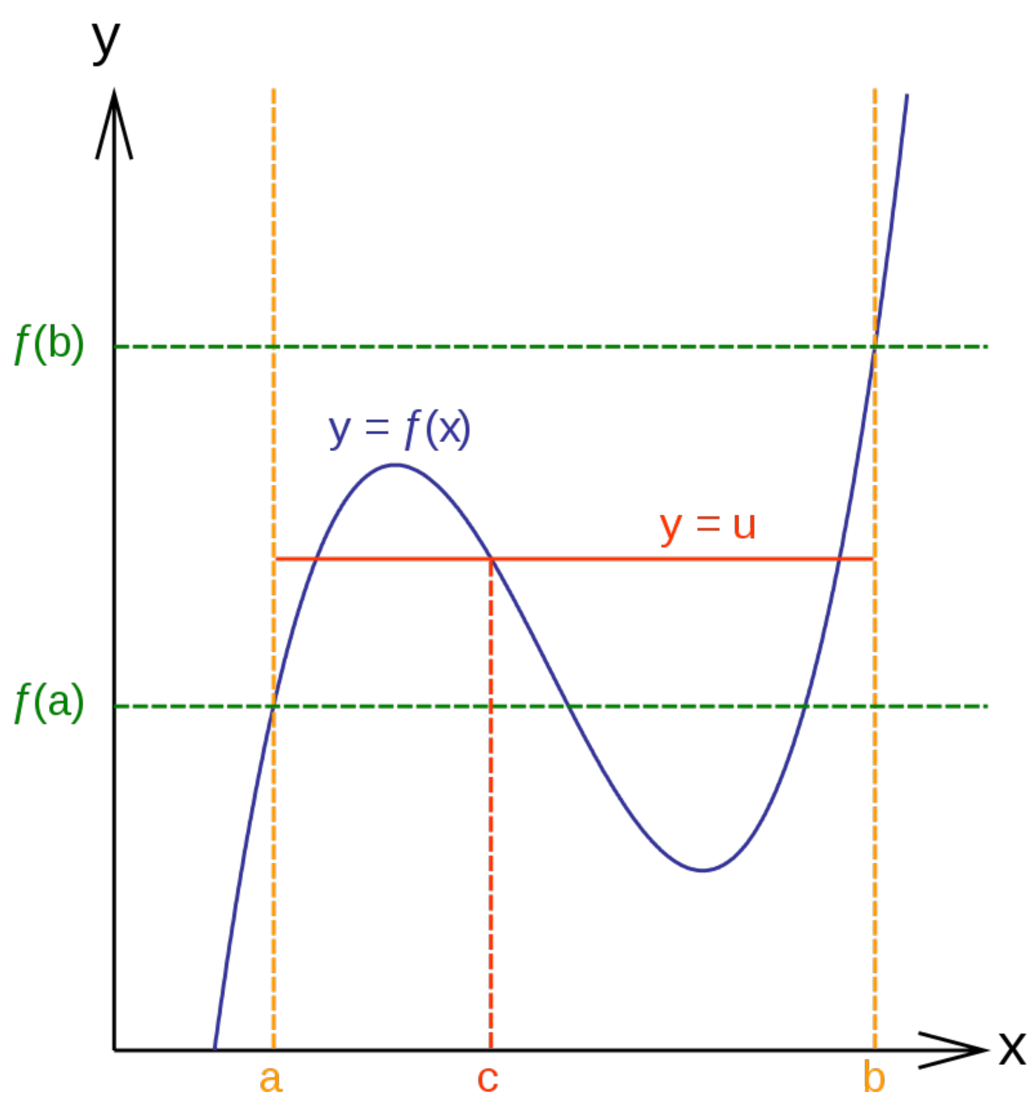
COURS 1 (SUITE)
CALCUL DE ZÉROS DE FONCTIONS

POSITION DU PROBLÈME / RAPPELS

On considère $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et on cherche à trouver les (des) solutions de :

$$f(x) = 0$$

On les appelle des <u>zéros</u> ou <u>racines</u> de f



<u>Théorème des valeurs intermédiaires</u>

Soit $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, alors :

$$\forall y \in \,]f(a), f(b)[, \ \exists c \in \,]a, b[\qquad f(c) = y$$

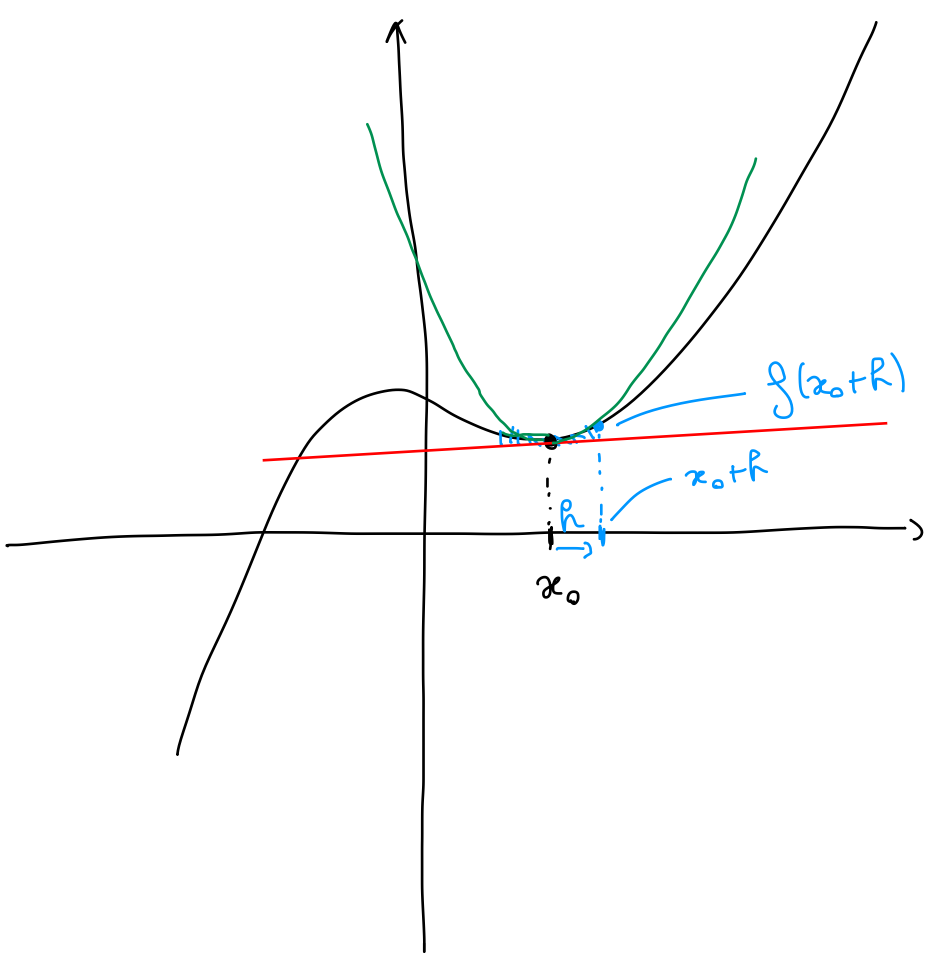
$y = 0$

POSITION DU PROBLÈME / RAPPELS

On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et on cherche à trouver les (des) solutions de :

$$f(x) = 0$$

On les appelle des zéros ou racines de f



Ordre k :

continuité

tangente

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot h^2 + \dots + \frac{f^k(x_0)}{k!}h^k + o(h^k)$$

h petit

poly d° 2 approx

Formule de Taylor (ordre 1)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathscr{C}^2$ au voisinage de x_0

$$f(x_0 + h) = \boxed{f(x_0) + f'(x_0) \cdot h} + o(h)$$

Equation de la tangente en x_0

Méthodes de résolution

$\boxed{f(x) = 0}$ — f dérivable ?

ou juste continue ..

Méthodes n'utilisant pas la dérivée

f monotone sur intervalle

f peut-être dérivable

f' calculable ?

Méthode(s) utilisant la dérivée

C/C++

Biblio. numérique opensource :

GSL

GNU Scientific Library

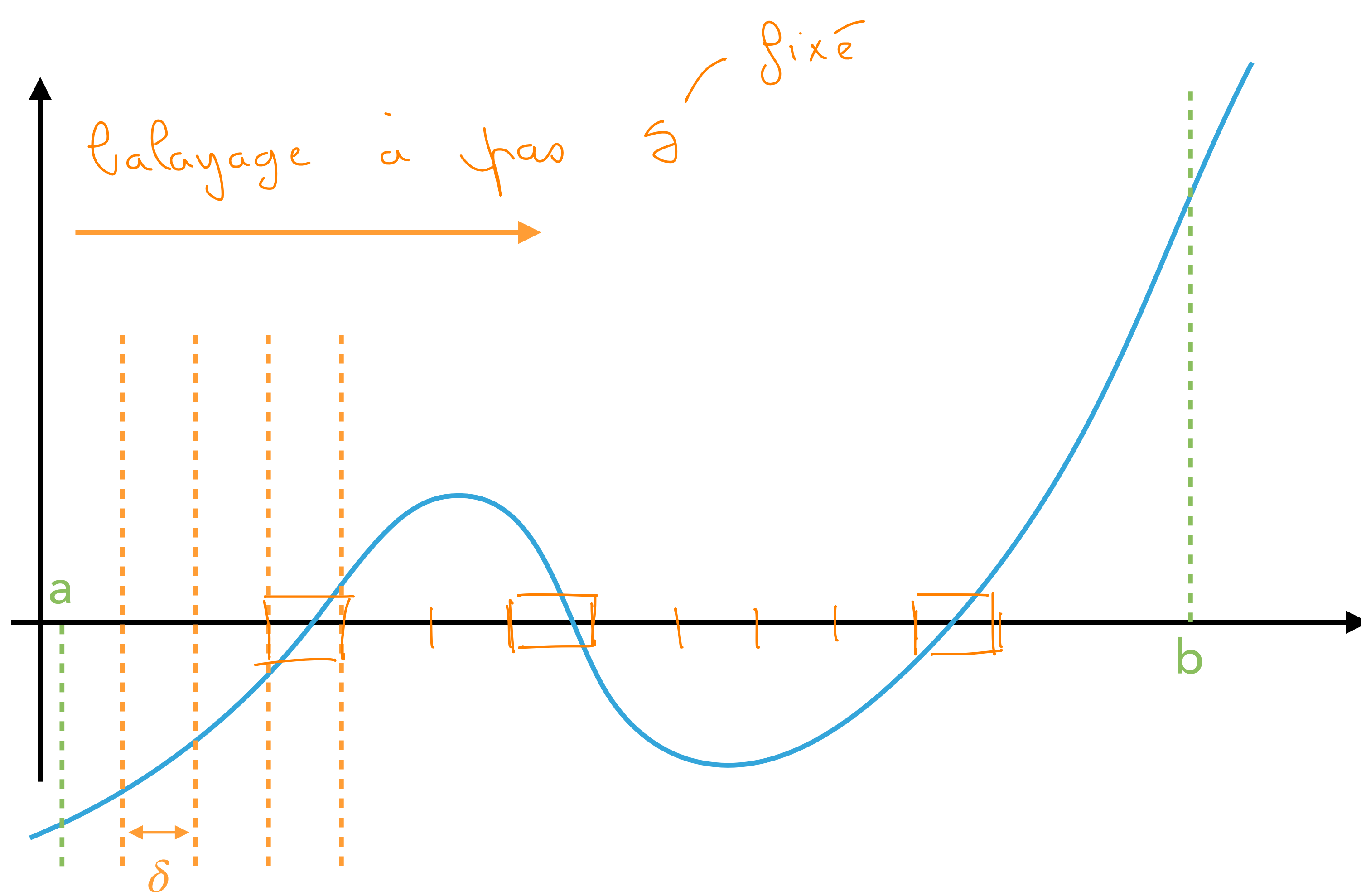
MÉTHODES N'UTILISANT PAS LES DÉRIVÉES

MÉTHODES PAR BALAYAGE

f continue

- Basées sur le théorème des valeurs intermédiaires :

$$\boxed{f(a)\cdot f(b) < 0} \Rightarrow \ \exists c \in \,]a,b[\ \ f(c) = 0$$



Méthode de pré-localisation des zéros
→ en amont des autres

− Inconvénient : précision donnée par δ

+ → f pas nécessairement monotone
→ on peut localiser plusieurs zéros

MÉTHODE PAR DICHOTOMIE

- Information supplémentaire : f monotone sur $[a, b]$ ⚠

f continue non monotone sur $[a,b]$ → balayage → $[a_1,b_1]$ ⋮ $[a_k,b_k]$ → f monotone sur ces sous-segments … → ∃ petit

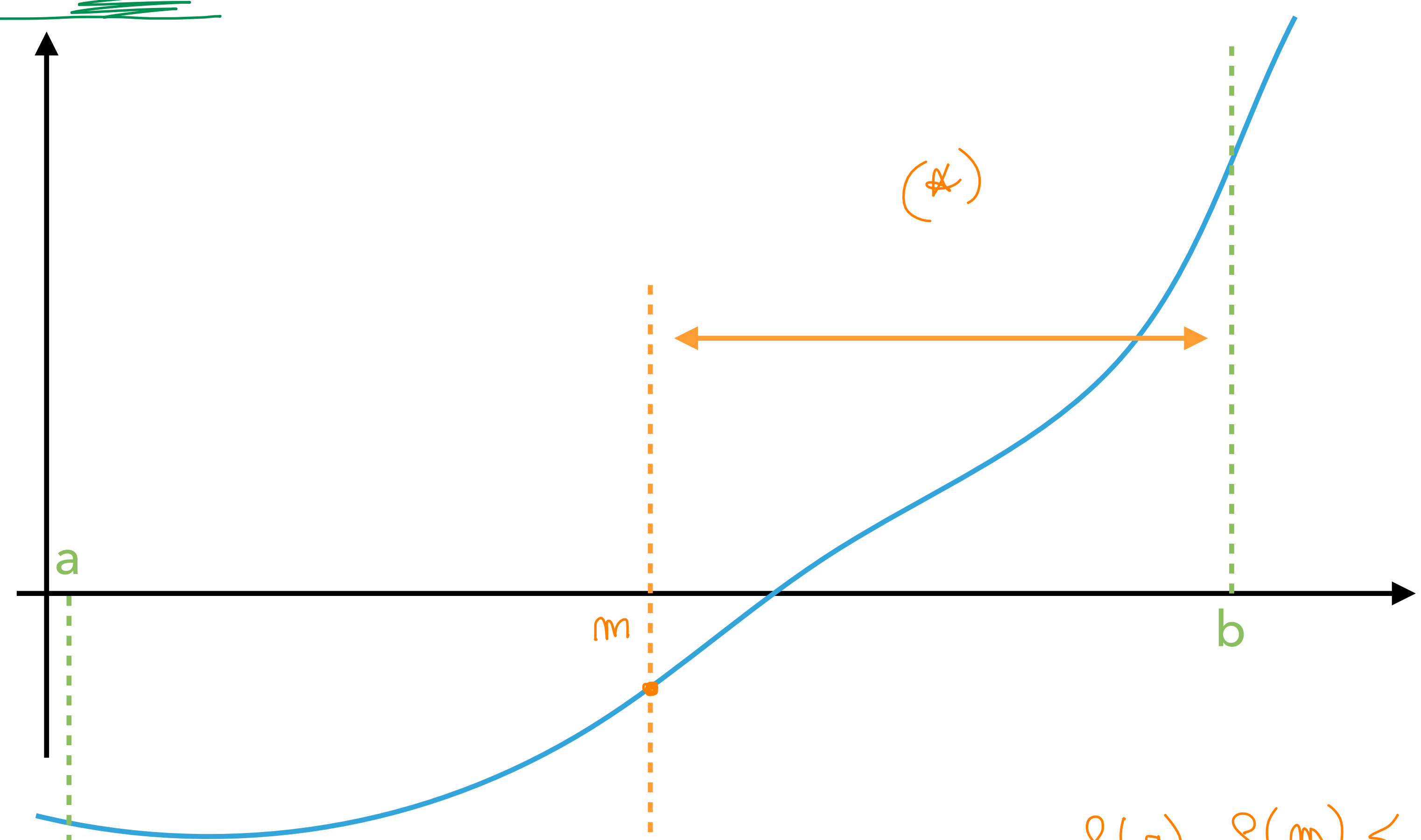
- Diviser pour régner : diviser itérativement l'intervalle en deux

$\boxed{f \text{ continue}} + \boxed{\text{et monotone}}$

$\boxed{f(a) \cdot f(b) < 0}$

$\Downarrow$

$\exists !\ c \in \,]a,b[\,$ tq $f(c) = 0$

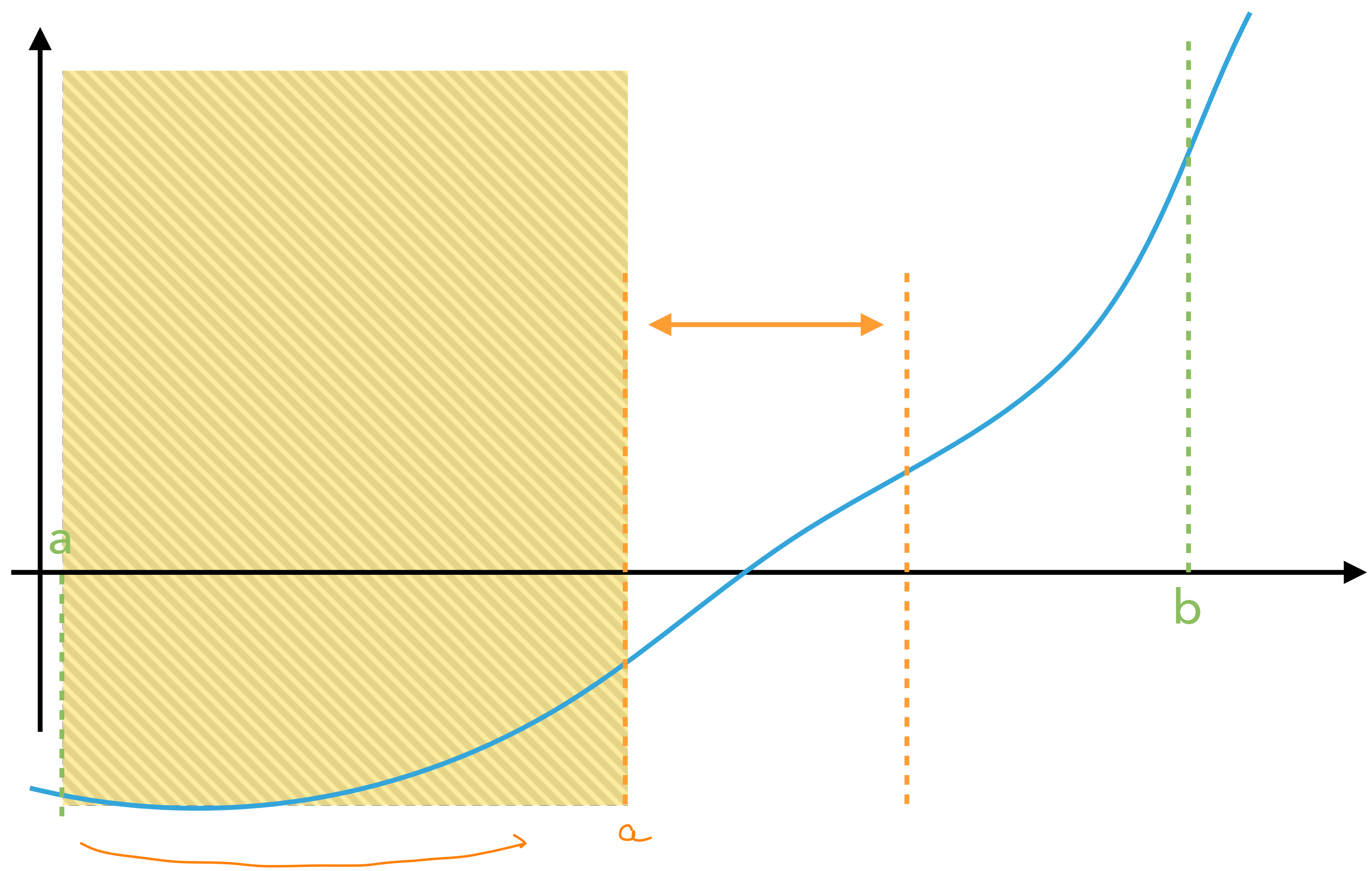


$f(a) \cdot f(m) < 0$ ⇝ on restreint l'intervalle $b \leftarrow m$

sinon ⇝ restriction : $a \leftarrow m$ (*)

MÉTHODE PAR DICHOTOMIE

- Information supplémentaire :
  f monotone sur $[a, b]$
- Diviser pour régner : diviser itérativement l'intervalle en deux

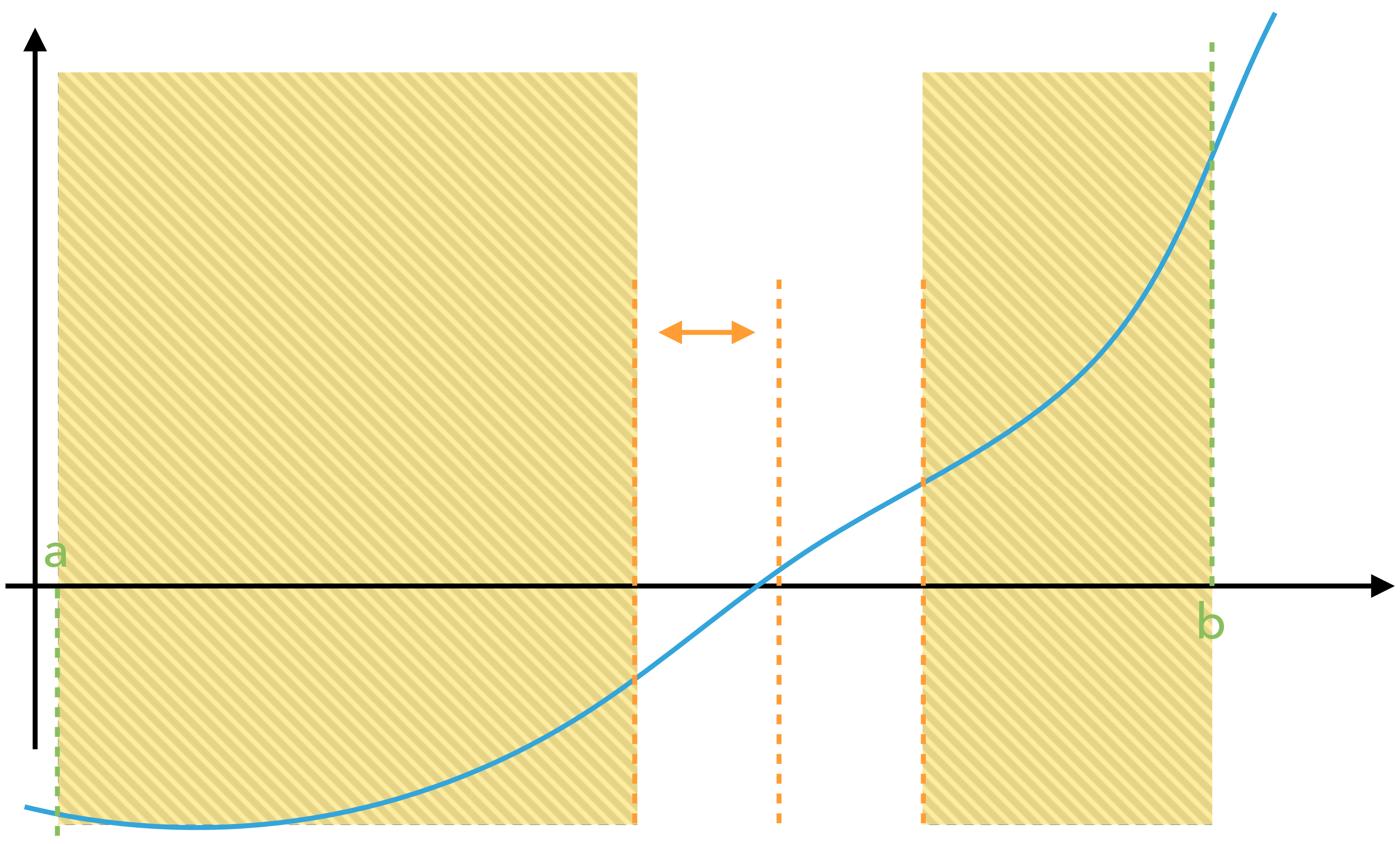


MÉTHODE PAR DICHOTOMIE

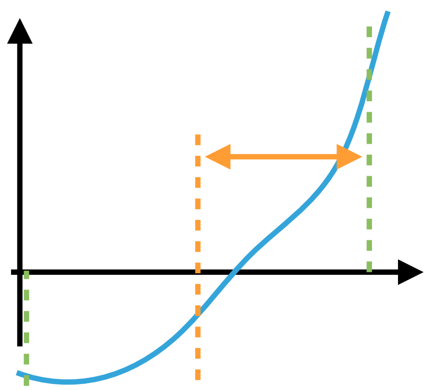
- Information supplémentaire :

  f monotone sur $[a, b]$

- Diviser pour régner : diviser itérativement l'intervalle en deux



MÉTHODE PAR DICHOTOMIE



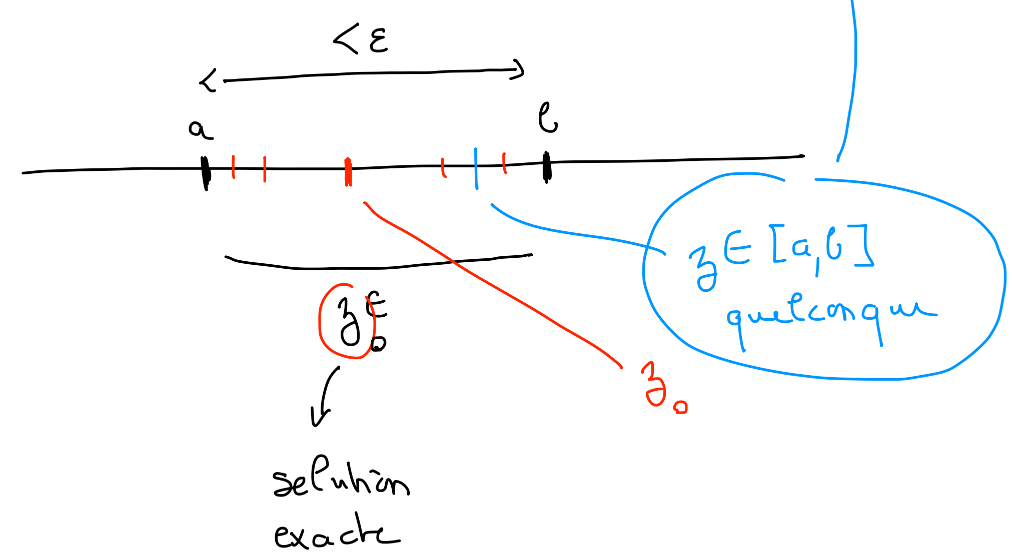
Entrée :
- segment [a,b]
- fonction f monotone sur [a,b] avec f(a)f(b)<0
- précision ϵ

Sortie :
- valeur z du zéro de f sur [a,b]

```
tantque (b-a)>ε
    m ← (a+b)/2
    si (f(m) = 0)
        a ← m
        b ← m
    sinon si (f(a)f(m)<0)
        b ← m
    sinon
        a ← m
    finsi
fintantque
z ← (a+b)/2
```

Invariant : zéro ∈]a,b[

n'importe quel pt de [a,b] est une estimation de la solution à ε près.

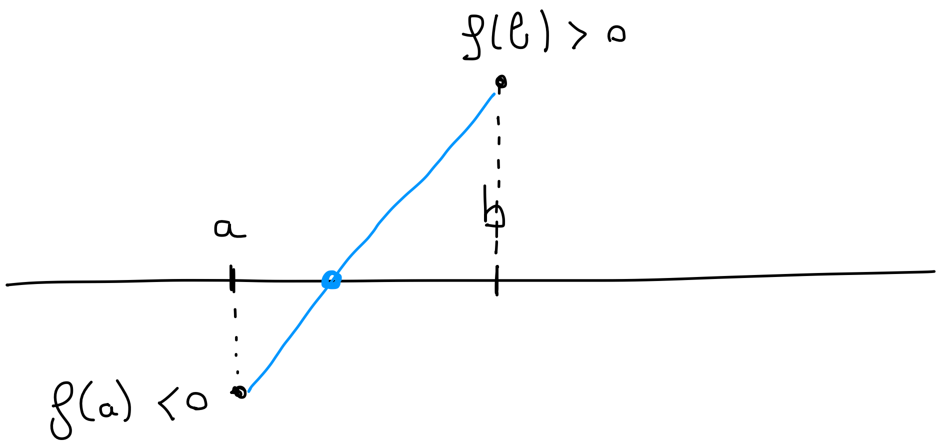


$|z - z_0| < \varepsilon$

erreur ...

Nombre d'itérations :

meilleure approx : interpolation linéaire (cf. TP)



Etape	seg du long :
0	$b - a$
1	$\frac{b-a}{2}$
2	$\frac{b-a}{4}$
⋮	
k	$\frac{b-a}{2^k}$

arrêt

$$\frac{b-a}{2^k} \underset{\sim}{<} \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{b-a}{\varepsilon} \sim 2^k$$

$$k \sim \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}$$

$$\log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)$$

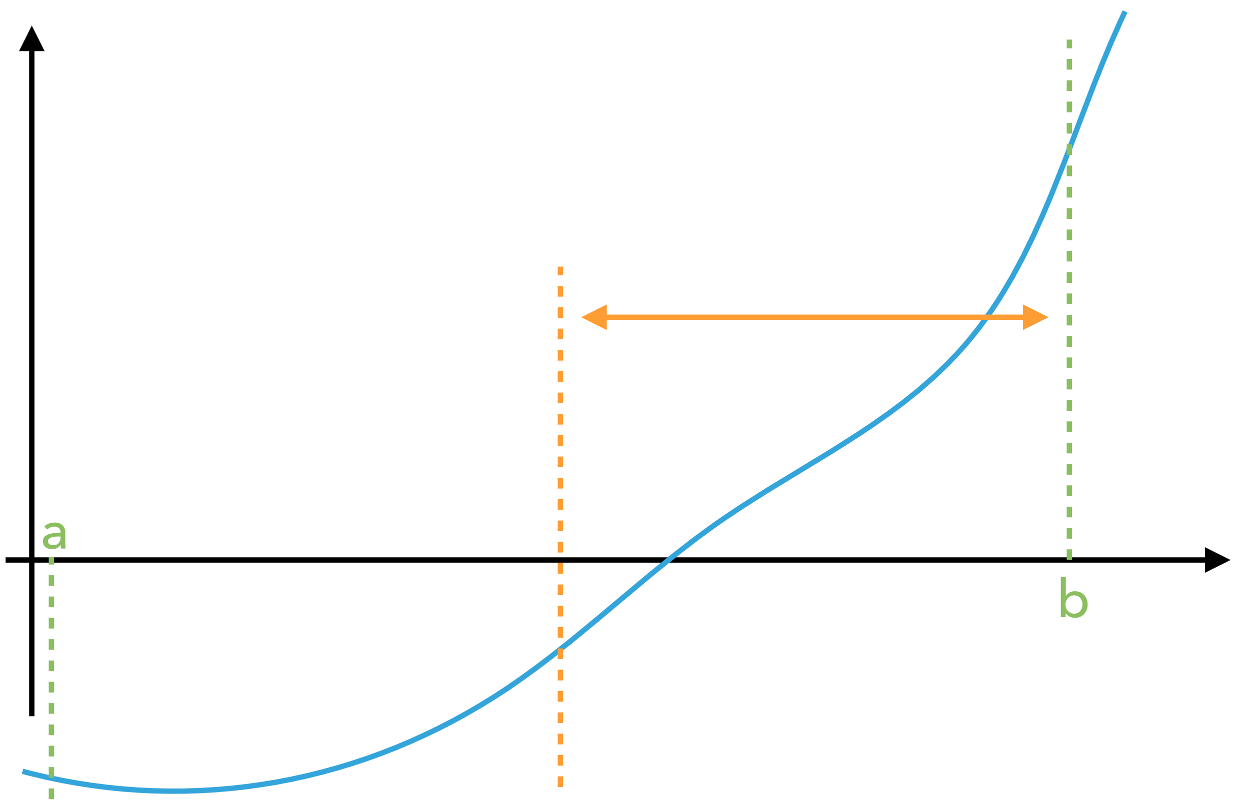
$$\varepsilon = 10^{-6}$$

$$\frac{b-a}{\varepsilon} = 10^{6} \cdot (b-a)$$

$$k \sim 6 + \dots$$

A RETENIR ...

→ Dichotomie



- Nécessite une hypothèse sur f :

  f monotone

- Convergence

$$|b_{n+1} - a_{n+1}| = \frac{|b_n - a_n|}{2}$$

MÉTHODE UTILISANT LES DÉRIVÉES : NEWTON

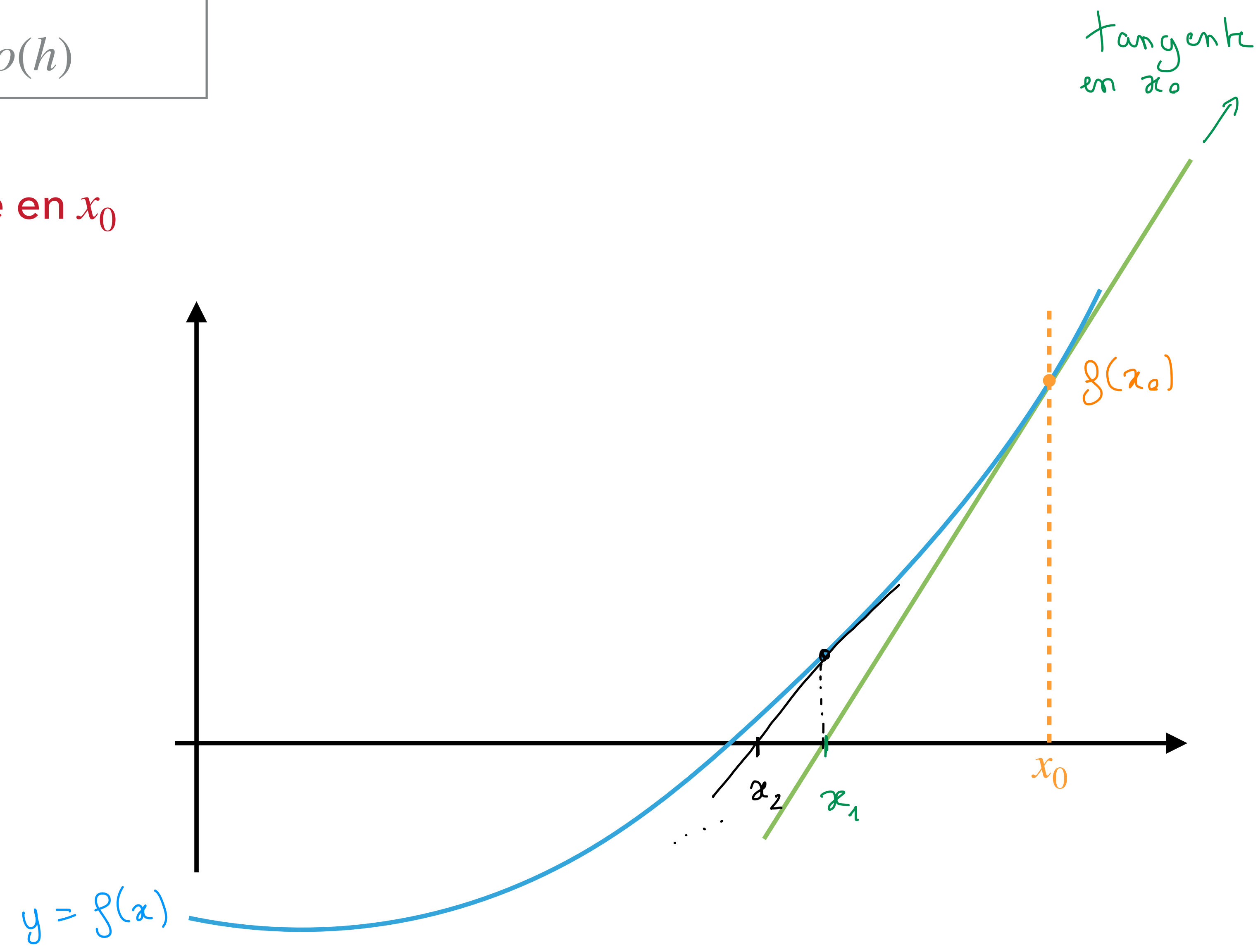
INTUITION SUR LA MÉTHODE DE NEWTON

Formule de Taylor (ordre 1)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathscr{C}^2$ au voisinage de x_0

$$f(x_0 + h) = \boxed{f(x_0) + f'(x_0) \cdot h} + o(h)$$

Equation de la tangente en x_0



INTUITION SUR LA MÉTHODE DE NEWTON

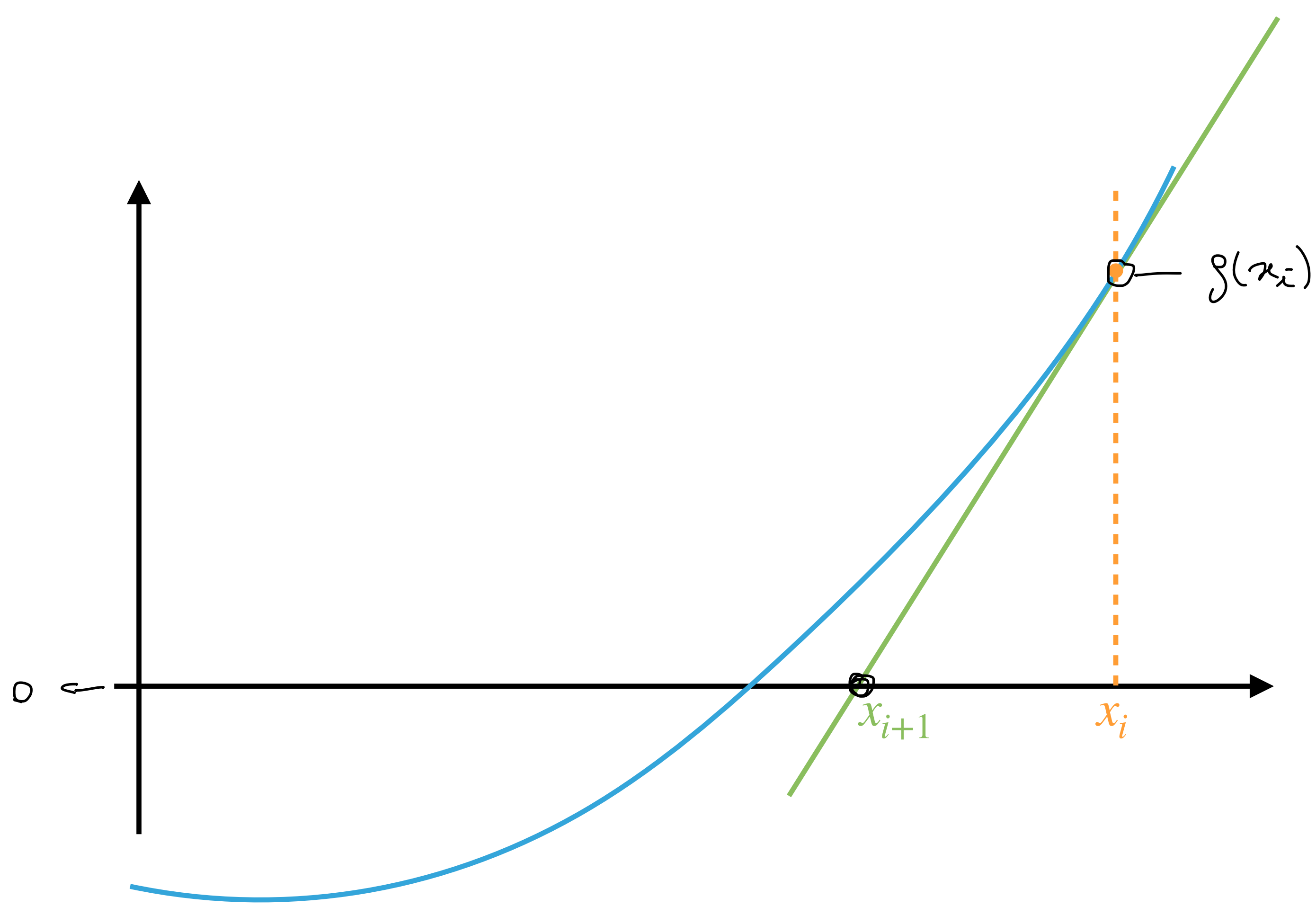
- En un point x_0
- Approximer la courbe par sa tangente
- Calculer le zéro de cette tangente (intersection avec Ox)

Pente de la tangente :

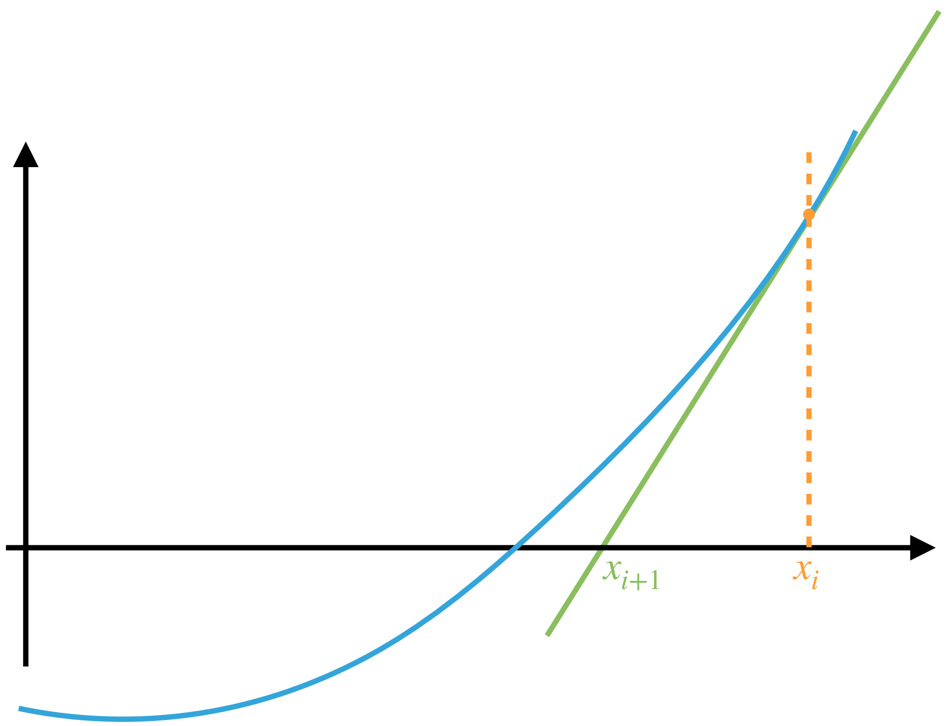
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}} = f'(x_i)$$

$$\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - x_{i+1}$$

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}}$$



MÉTHODE DE NEWTON



balayage ....

Entrée :

- point x_0 proche du zéro cherché
- fonction f
- précision ϵ

Sortie :

- valeur z du zéro de f voisin de x_0

tantque ($|x_i - x_{i-1}| > \epsilon$)

$$x_{i+1} \leftarrow x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

fintantque

z $\leftarrow x_i$

$\varepsilon = 10^{-6}$

$|x_0 - x^*| < 10^{-1}$

$|x_1 - x^*| < 10^{-2}$

$|x_2 - x^*| < 10^{-4}$

$|x_3 - x^*| < 10^{-8}$

3

Si f est $\mathscr{C}^2$ sur un intervalle fermé I et x^* racine simple de f avec $f'(x^*) \neq 0$

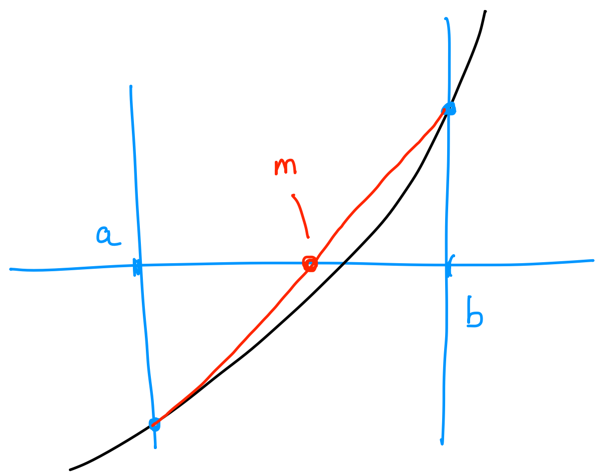
$$\exists \epsilon, K > 0\,;\ \forall x_0 \in \mathscr{B}(x^*, \epsilon_0) \qquad |x_{i+1} - x^*| < K|x_i - x^*|^2$$

Convergence **quadratique**

Dichotomie

$$b_{i+1} - a_{i+1} < \frac{b_i - a_i}{2}$$

APRÈS NEWTON …



- Méthode de la sécante
  - Approximation de la tangente par la corde
- Méthode de Bairstow
  - Proche de Newton mais plus efficace sur les polynômes à coefficients réels

SYNTHÈSE

	Complexité / convergence	Points forts	Points faibles	Conditions
Balayage	Lent …	Pas de conditions ni dérivées	Lent	
Dichotomie	Géométrique $\lvert b_{n+1} - a_{n+1} \rvert = \frac{\lvert b_n - a_n \rvert}{2}$	Rapidité (/ balayage)	Lent (/Newton) Monotonie	Monotone
Newton	Quadratique $\lvert x_{i+1} - x^* \rvert < K \lvert x_i - x^* \rvert^2$	Rapidité	Dérivées et fonction $\mathscr{C}^2$	

Dérivation numérique $\neq$ symbolique — Maple

approx. numérique

$$f(x) = x^2 + \cos(x)$$

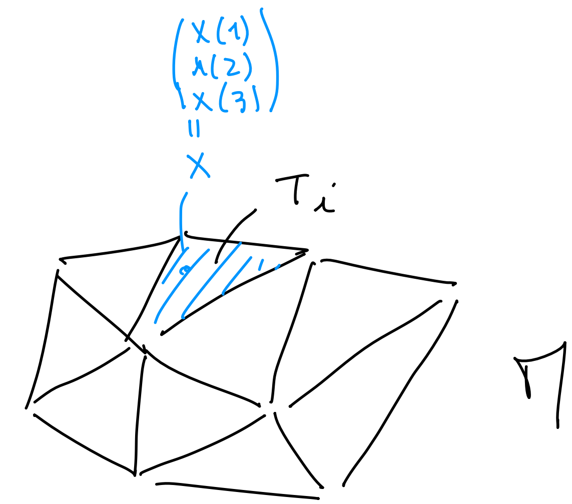
$\downarrow$ symbolique

$$f'(x) = 2x - \sin(x)$$

maillage $\mathcal{T}$

C — fonction

```
double f(double x)
{
    double y = 0;
    int i;
    for(i=0; i < T.size(); ++i)
    {
        y += integrale(x∈T_i , x.X(3));
    }
    return y;
}
```



$$f(x) = \sum_i \int_{u \in T_i} x \cdot u_3 \, d\Omega$$

f' ? — ~~symbolique~~

Dérivation num

approx $f'(x_0)$?

instable !

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) \xrightarrow{h \to 0} 0}{h \xrightarrow{h \to 0} 0}$$

Instabilité numérique !

algo approx

h petit > 0

tantque $|\delta - \delta'| \geq \varepsilon$

$\delta' = \delta$

$$\delta = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$h \leftarrow h/2$

ftq