POLYTECH INFORMATIQUE

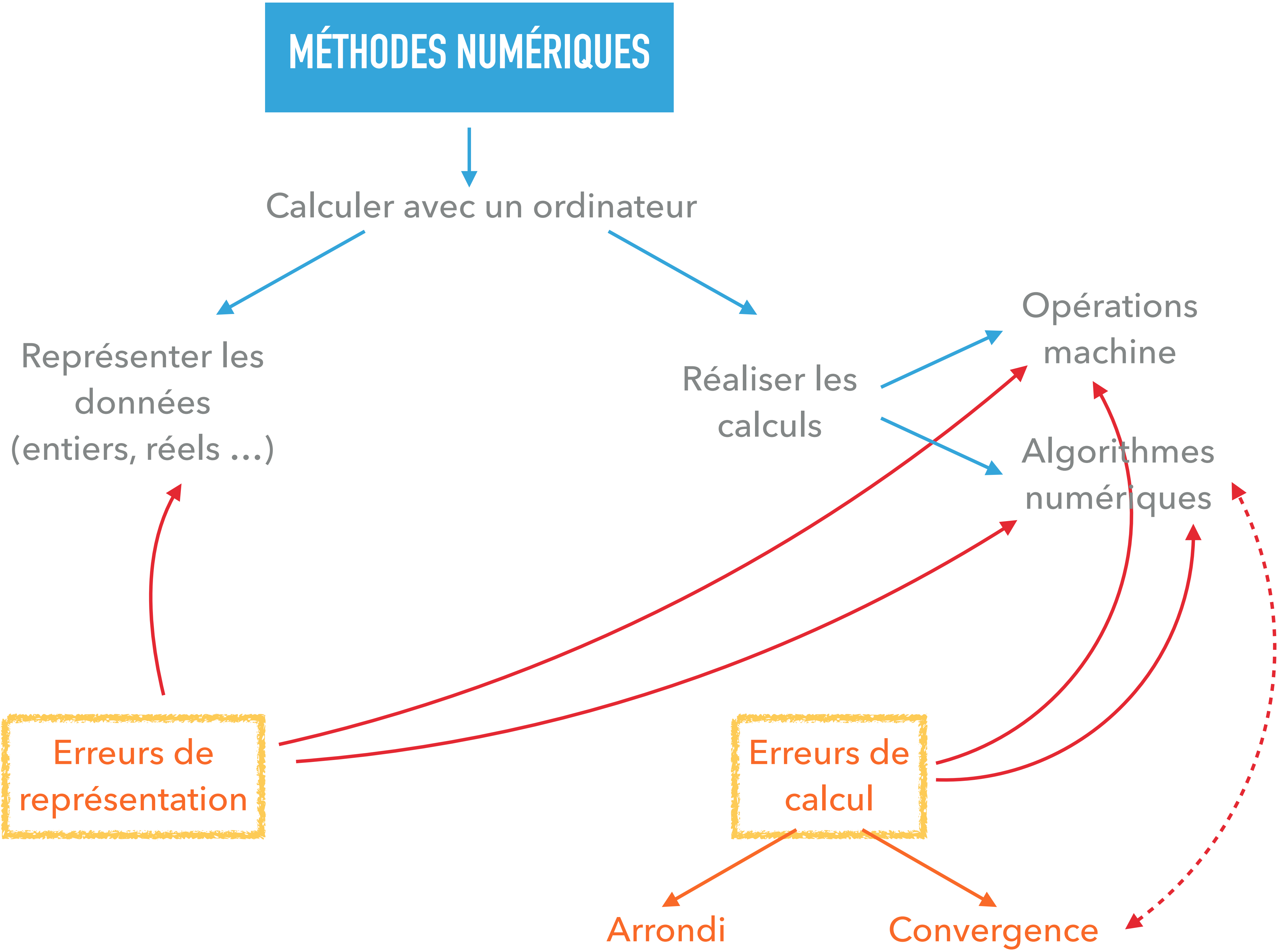
3ÈME ANNÉE

Alexandra Bac

NUMERICAL METHODS

COURS 1

INTRODUCTION, NOMBRES ET MACHINES



MÉTHODES NUMÉRIQUES

Calculer avec un ordinateur

Représenter les données (entiers, réels …)

Réaliser les calculs

Opérations machine

Algorithmes numériques

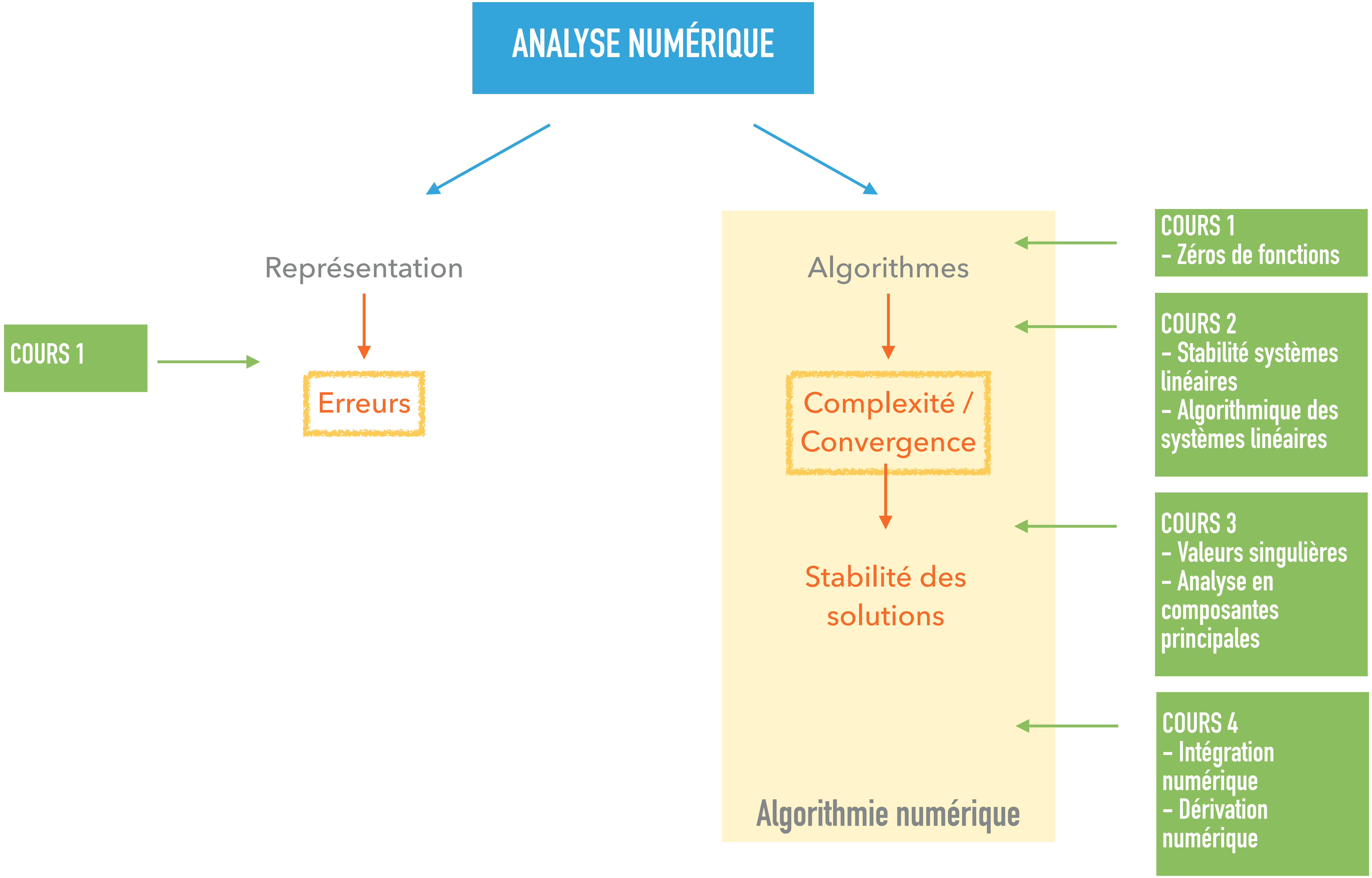
Erreurs de représentation

Erreurs de calcul

Arrondi

Convergence

« MÉTHODES NUMÉRIQUES » - COURS 1



ANALYSE NUMÉRIQUE

Représentation

Erreurs

COURS 1

Algorithmes

Complexité / Convergence

Stabilité des solutions

Algorithmie numérique

COURS 1
- Zéros de fonctions

COURS 2
- Stabilité systèmes linéaires
- Algorithmique des systèmes linéaires

COURS 3
- Valeurs singulières
- Analyse en composantes principales

COURS 4
- Intégration numérique
- Dérivation numérique

REPRÉSENTATION DES ENTIERS

PROBLÈME DE LA REPRÉSENTATION

Représentation en base b $\quad (b \in \mathbb{N}, b > 0)$

$$n = \sum_{i=1}^{N} c_i \cdot b^i \quad \text{avec } c_i < b$$

Représenté par

$$(c_0, \ldots, c_N)$$

$b = 2$

$$n = \sum_{i=1}^{N} c_i \cdot b^i \quad \text{avec } c_i \in \{0,1\}$$

bits

Représenté par

$$(c_0, \ldots, c_N)$$

N bits

Ordinateur → objets finis

Entiers négatifs ?

PROBLÈME DE LA REPRÉSENTATION

$$n = \sum_{i=1}^{N} c_i \cdot b^i \quad \text{avec } c_i \in \{0,1\}$$

ENTIERS POSITIFS

$$N \leftrightarrow 0 \leqslant n \leqslant 2^N - 1$$

- N=8 (unsigned char)
  $2^n - 1 = 255$
- N=16 (unsigned short)
  $2^n - 1 = 65535$
- N=32 (unsigned int)
  $2^n - 1 = 4.294.967.295$
- N=64 (unsigned long int)
  $2^n - 1 = 1{,}844 \cdot 10^{19}$

ENTIERS RELATIFS

1 bit utilisé pour coder le signe

$$N \leftrightarrow -2^{N-1} \leqslant n \leqslant 2^{N-1} - 1$$

- N=8 (char)
  $-128 \leqslant n \leqslant 127$
- N=16 (short)
  $-32768 \leqslant n \leqslant 32767$
- N=32 (int)
  $-2.147.483.648 \leqslant n \leqslant 2.147.483.647$
- N=64 (long int)
  $-9{,}2 \cdot 10^{18} \leqslant n \leqslant 9{,}2 \cdot 10^{18}$

PROBLÈME DE LA REPRÉSENTATION DES ENTIERS RELATIFS

$$n = \sum_{i=1}^{N} c_i \cdot b^i \quad \text{avec } c_i \in \{0,1\}$$

Codage du signe

CODAGE NAÏF PAR UN BIT

$$\boxed{c_{N-1}} c_{N-2} \ldots c_1 c_0 \;\rightarrow\; n = (-1)^{c_{N-1}} \left(\sum_{i=0}^{n-2} c_i \cdot 2^i \right)$$

Bit de signe

-11 sur 8 bits :

1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1

COMPLEMENT A UN

Le plus utilisé actuellement

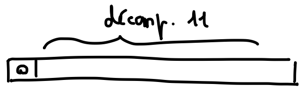
$$c_{N-1} c_{N-2} \ldots c_1 c_0 \;\rightarrow\; n = -\, c_{N-1} \cdot 2^{N-1} + \sum_{i=0}^{n-2} c_i \cdot 2^i$$

-11 sur 8 bits :

$$-11 = \boxed{-128} + \boxed{117}$$

1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1

+11 = 0 . 128 + 11



PROBLÈME DE LA REPRÉSENTATION DES ENTIERS RELATIFS

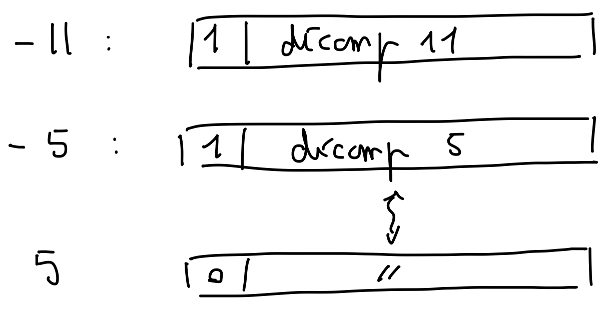
$$n = \sum_{i=1}^{N} c_i \cdot b^i \quad \text{avec } c_i \in \{0,1\}$$

Codage du signe

CODAGE NAÏF PAR UN BIT

- 0 a deux représentations
  00000000 / 10000000
- Addition → cas à traiter
  -11 + (-5)
  -11 + 5

Représentation naïve



COMPLEMENT A UN

Le plus utilisé actuellement

- 0 a une seule représentation
  00000000
- L'addition reste valable

$$\begin{array}{rr} -11 : & 11110101 \\ -5 : & 11111011 \\ \hline + & (1)\ 1\boxed{1110000} \end{array} \longrightarrow 112 \text{ (déc)}$$

$$-128 + \begin{array}{r} 16 \\ 32 \\ 64 \\ \hline 112 \end{array}$$

Résultat : -128 + 112 = -16 (déc)

PROBLÈME DE LA REPRÉSENTATION DES ENTIERS RELATIFS

$$n = \sum_{i=1}^{N} c_i \cdot b^i \quad \text{avec } c_i \in \{0,1\}$$

Codage du signe

CODAGE NAÏF PAR UN BIT

- 0 a deux représentations
  00000000 / 10000000
- Addition → cas à traiter
  -11 + (-5)
  -11 + 5

COMPLEMENT A UN

Le plus utilisé actuellement

- 0 a une seule représentation
  00000000
- L'addition reste valable

$$\begin{array}{rr} & -11 : 11110101 \\ + & 5 : 00000101 \\ \hline & 1\boxed{1111010} \end{array} \longrightarrow 122 \text{ (déc)}$$

↓

Résultat : -128 + 122 = -6 (déc)

REPRÉSENTATION DES FLOTTANTS …

Mériterait un cours entier … cf TD …

UN MOT SUR LES ERREURS

EVALUATION DE L'ERREUR COMMISE

Erreur commise entre x et x' ?

$x = 1{,}2957$
$x' = 1{,}2956$
$|x - x'| = 10^{-4}$

$7 \cdot 10^{-3}\,\%$

$$\frac{|x - x'|}{|x|}$$

$x = 0{,}0017$
$x' = 0{,}0016$
$|x - x'| = 10^{-4}$

Même erreur ?

$5{,}9\,\%$

$x = 0{,}0007$
$x' = 0{,}0006$
$|x - x'| = 10^{-4}$

$14{,}3\,\%$

EVALUATION DE L'ERREUR COMMISE

Erreur commise entre x et x' ?

ERREUR ABSOLUE

⚠

$$\boxed{|x - x'|}$$

ne pas utiliser sur des grands nombres

- Naturel sur les petits nombres
  $|x| < 1$
- Peut être inatteignable sur de grands nombres

ERREUR RELATIVE

⚠

$$\boxed{\frac{|x - x'|}{|x|}}$$

à éviter sur les très petits nombres

- Naturel sur les grands nombres
  $|x| \gg 1$
- L'erreur dépend de l'ordre de grandeur de x