TD2 - Zéros de fonctions

Alexandra Bac

Méthodes numériques
Polytech Marseille - IRM 3A

Dans ce TP, on va mettre en oeuvre les algorithmes de calcul de zéros de fonctions vus en cours et les appliquer à quelques problèmes liés.

Exercice 1 (Dichotomie)**.**

1. A partir de l'algorithme de dichotomie vu en cours, écrivez une fonction :

   ```
   function [res, iter] = dichotomie (f, a, b, eps, N)
   ```

   calculant le zéro de `f` sur l'intervalle `[a,b]` à `eps` près (en bornant le nombre d'itération à `N`). Vous renverrez également le nombre d'itérations.

2. Testez votre fonction sur $f_1 : x \mapsto x^2 - 1$ en choisissant correctement l'intervalle (on peut facilement contrôler le résultat).

3. Puis testez la sur $f_2 : x \mapsto x^2 - 2$ sur $[1, 2]$.

4. Enfin, testez la sur $f_3 : x \mapsto x^2 - 100001\,x + 100000$ (dont les racines sont 1 et 100000). Cherchez ces deux racines à partir d'intervalles bien choisis.

Exercice 2 (Newton)**.**

1. A partir, cette fois, de l'algorithme de Newton vu en cours, écrivez une fonction :

   ```
   function [res, iter] = newton (f, fprime, x0, eps, N)
   ```

   calculant le zéro de `f` (de dérivée `fprime`) voisin de `x0` à `eps` près (en bornant le nombre d'itération à `N`). Vous renverrez également le nombre d'itérations.

2. Puis testez la sur $f_2 : x \mapsto x^2 - 2$ sur $[1, 2]$.

3. Tracez puis testez Newton sur les fonctions suivantes :

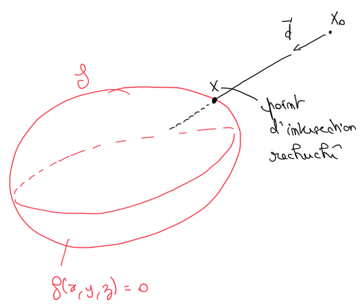
$$\begin{array}{rl} f_4 : x \mapsto 2x^3 - 7x^2 + 8x & x_0 = 1 \\ f_5 : x \mapsto x^{\frac{1}{3}} & x_0 \text{ quelconque} \\ f_6 : x \mapsto e^{-x}(x-1) + 1 & x_0 = 1 \text{ puis } 3 \end{array}$$

Exercice 3 (Calcul des racines $p$èmes d'un nombre)**.** L'une des applications numériques les plus connues des zéros de fonctions est le calcul des racines $p$èmes d'un nombre. Pourquoi ? Ecrire une fonction `pth_root` renvoyant la racine $p$ème d'un nombre passé en argument.

Exercice 4 (Lancer de rayon (ray-tracing) sur une surface implicite)**.** On souhaite faire du lancer de rayon sur une surface implicite. C'est un procédé classique de rendu consistant à lancer des rayons (lumineux) et calculer leur(s) rebond(s) sur une(des) surface(s).

Dans cet exercice, on considérera une surface $\mathcal{S}$ en représentation implicite, c'est-à-dire donnée par une équation $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et décrite par :

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, ; \, f(x, y, z) = 0\}$$



Vous connaissez parfaitement un exemple de telle modélisation :

$$f(x, y, z) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - r^2$$

qui est représente évidemment la sphère de rayon r et de centre (x_0, y_0, z_0).

Soit $\mathcal{R}_{X_0,\vec{d}}$ le rayon lumineux (ie. la droite) passant par X_0 et de direction $\vec{d}$.

1. Comment s'écrivent les points de $\mathcal{R}_{X_0,\vec{d}}$?
2. En déduire la fonction $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont les zéros correspondent aux intersections du rayon lumineux avec la surface.

   Point Maths : Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et que l'on a posé $J(\lambda) = f(X_0 + \lambda\vec{d})$ alors :
   $$J'(\lambda) = \langle \nabla f(X_0 + \lambda\vec{d}), \vec{d} \rangle$$
   Et on donne le gradient :
   $$g_1(X) = \|X - C\|^2 - r^2 \;\Rightarrow\; \nabla g_1(X) = 2(X - C)$$
3. Dans un premier temps, on considère la sphère précédente. Ecrire deux fonctions :

```
function [X] = ray_trace_newton (J, Jprime, X0, d, eps, N)
```

Renvoyant le zéro de J le plus proche de `X0`.

4. Représenter graphiquement en utilisant la fonction `PlotImplicit3D` fournie en matériel de TP.

5. On souhaite comparer ces résultats avec la dichotomie. Comment (partant d'un point X_0) trouver un intervalle approprié pour la dichotomie (on supposera que $\vec{d}$ indique bien la direction de la surface sur le rayon ? Programmer la fonction correspondante.

6. En déduire la fonction :

```
function [X] = ray_trace_dicho (J, X0, d, eps, N)
```

   Renvoyant le zéro de J le plus proche de `X0`.

7. Comparer les deux approches (résultat et nombre d'itérations).

8. Enfin vous pourrez récupérer le matériel de TP `bunny.zip` contenant une fonction `implicit_water` chargeant les données, définissant une fonction implicite codant un lapin rustique et l'affichant.

   (a) La fonction implicite est définie à partir de sommets échantillonnés sur un lapin numérique (notés $\{X_i\,;\, i = 1 \ldots N\}$ dans la suite et contenus dans une matrice `M` en ligne), et de leur distance moyenne aux sommets voisins (σ_i).

   Etant donnée $\varphi(r) = (1 - r^2)_+^2$, la fonction implicite est obtenue comme :

$$g_2(X) = \sum_{i=1}^{N} \varphi\left(\frac{\|X - X_i\|}{\sigma_i}\right)$$

   c'est l'approche des metaballs de Nishimura.

   Le gradient de cette fonction est donné par :

$$\nabla g_2(X) = \sum_i \varphi'\left(\frac{\|X - X_i\|}{\sigma_i}\right) \frac{2(X - X_i)}{\sigma_i}$$

   avec $\varphi'(r) = -4r(1 - r^2)_+$.

   (b) Réalisez le lancer d'un rayon (donc le calcul de l'intersection d'un rayon avec l'objet).