Checklist avant de commencer

Avant de démarrer le cours, quelques mots sur les pré-requis nécessaires. Si vous ne connaissez pas, essayez de mettre le WE à profit pour vous remettre tout ça en tête...

Univers à connaître :

Espaces vectoriels

Applications linéaires

Matrices

Déterminant
Réduction de matrices

Ceci n'est pas un cours mais a pour but de balayer les notions que vous devez connaître. Vous trouverez sur Ametice des notes de cours manuscrites si vous en avez besoin. Quoi qu'il en soit, regardez l'exercice 5 + son corrigé : si vous ne savez pas faire, c'est que vous devez travailler tout cela ...

I. Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, notions associées.

$\boxed{\text{Espace vectoriel}}$ — $\mathbb{K}$ espace vectoriel

↓

ensemble E (dont les élts sont appelés vecteurs)

muni de 2 opérations :

→ une addition entre vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$

→ une multiplication vecteur / "nombre" $\lambda \cdot \vec{u}$

vérifiant des

on peut donc fabriquer des combinaisons linéaires de vecteurs.

propriétés de
commutation

ces nombres
ou scalaires
sont pris ds
un corps $(\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \dots)$ } noté $\mathbb{K}$

vecteurs
$\alpha_1 \cdot \vec{u}_1 + \dots + \alpha_k \cdot \vec{u}_k$
$\in \mathbb{K}$ - scalaires

ex :

- $(\mathbb{R}^n, +, \cdot) \to \mathbb{R}$ espace vect.
  ↳ vecteurs à n coords → $\vec{u} + \vec{v}$
  → $\alpha \cdot \vec{u}$
- {polynômes à coef. ds $\mathbb{R}$} → $\mathbb{R}$ esp. vect
  → $P+Q$ } opérations s/ polynômes
  → $\alpha \cdot P$
- {fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$} → $\mathbb{R}$ esp. vect
  → $f+g$
  → $\alpha \cdot f$

... / ...

$\boxed{\text{Sous - espace vectoriel}}$ — notion fondamentale

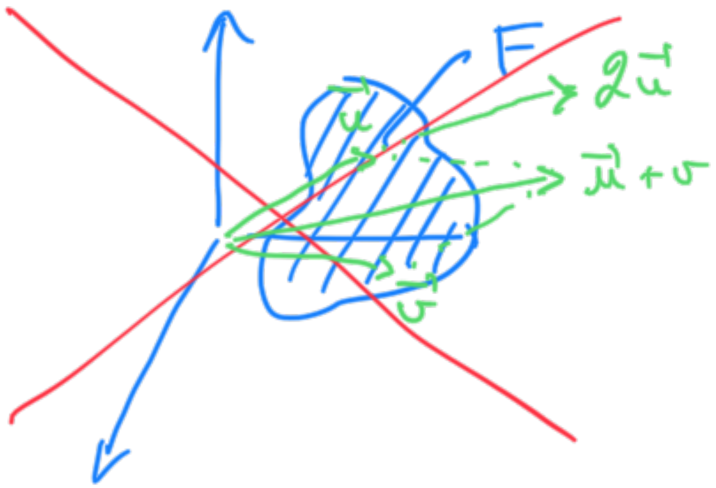
↓

$F \subseteq E$

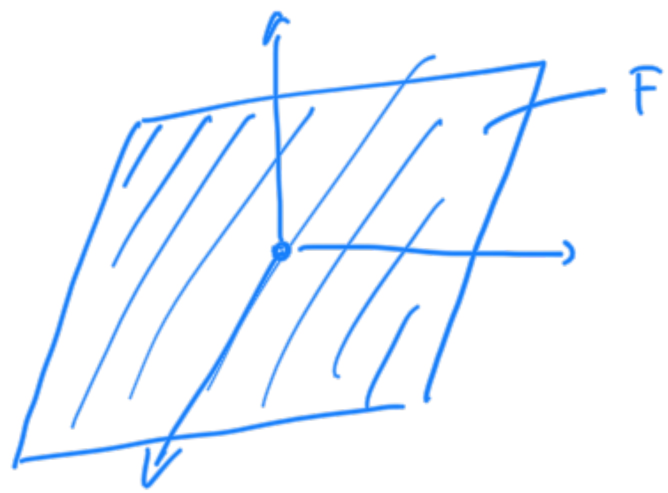
sous - ensemble non vide de
E stable par combinaison

stable par combinaison
linéaire

ex. dans $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$:



Les seuls sous-espaces vectoriels sont
- $\{\vec{0}\}$
- droites
- plans
- $\mathbb{R}^3$



pas un sev car $\vec{u}, \vec{v} \in F$
mais $2.\vec{u} \notin F$
et $\vec{u}+\vec{v} \notin F$
ces 2 comb. linéaires devraient être ds F

Un sev est stable par combinaisons linéaires

↓

réciproquement, on voit que cette opération permet de générer tous les vecteurs de

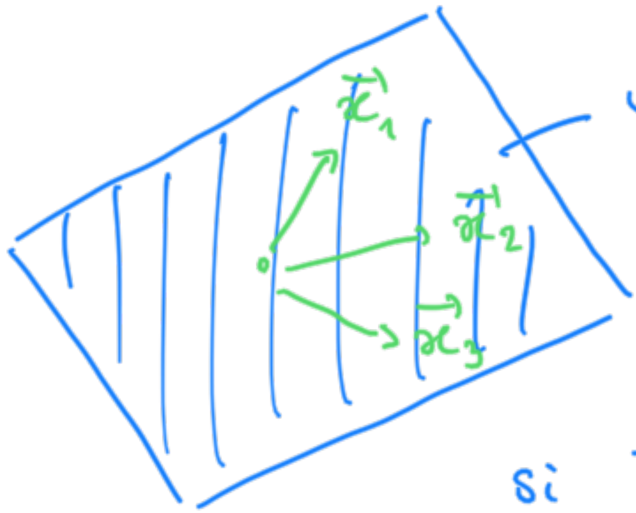
E à partir de quelques vecteurs

sous-espace vectoriel engendré par des vecteurs — $\mathrm{Vect}\{\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n\}$

$=$ ens. des comb. linéaires des vecteurs

$= \{\alpha_1 \cdot \vec{x}_1 + \dots + \alpha_n \cdot \vec{x}_n \,;\, \alpha_i \in \mathbb{K}\}$

ex :



plan F

si $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ non colinéaires :

$$F = \mathrm{Vect}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$$

mais aussi, qui peut le plus peut le moins :

$$F = \mathrm{Vect}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\} \quad \dots$$

F sev de E $\qquad \{\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n\}$

Famille génératrice de F

si : $F = \mathrm{Vect}\{\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n\}$

Famille libre

si aucun $\vec{x}_i$ ne peut s'écrire comme comb. linéaire des autres

$\Longleftrightarrow$

$\forall \alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{K}$

$\alpha_1 \cdot \vec{x}_1 + \dots + \alpha_n \cdot \vec{x}_n = \vec{0} \Longrightarrow$

$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

Base

si libre + génératrice

$\Updownarrow$

$\forall \vec{x} \in F \quad \exists \alpha_1 \dots \alpha_n$ <u>uniques</u>

tq $\vec{x} = \alpha_1 \cdot \vec{x}_1 + \dots + \alpha_n \cdot \vec{x}_n$

Pour notre exemple de F : plan

$\downarrow$

base : 2 vecteurs non

colinéaires

Résultat central :

$\boxed{\text{théorème de la base incomplète}}$

1) On dit d'un espace vectoriel qu'il est de $\boxed{\text{dimension finie}}$ s'il admet une base finie

ex :

$(\mathbb{R}^n, +, \cdot) \longrightarrow$ ex de base :

$$e_1 = (1, 0 \dots 0) \qquad e_2 = (0, 1 \dots 0) \qquad e_3 = (0, 0, 1 \dots 0) \qquad \vdots \qquad e_n \ (0, 0, \dots 0, 1)$$

vect. quelconque $(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdot e_1 + \dots + x_n \cdot e_n \longrightarrow$ dim. finie

noté $\mathbb{R}[X]$

$\{\text{polynômes}, +, \cdot\} \longrightarrow$ pas de base finie $\longrightarrow$ dim. infinie

degrés non bornés

noté $\mathbb{R}_n[X]$

$\{$ polynômes degré $\leq n$ $, +, \cdot \}$ $\rightarrow$ ex de base : $\{1, X, X^2 \dots X^n\}$ $\left\{ \begin{array}{l} P = a_0 + a_1 X \dots + a_n X^n \\ \text{se décompose bien} \\ \text{sur cette base} \end{array} \right.$ $\rightarrow$ dim. finie

2) **Th. de la base incomplète**

Si E est un $\mathbb{K}$-ev de dim. finie, il admet des bases finies et elles ont toutes même cardinal

$\downarrow$

$\boxed{\text{dimension de } E}$

ex : $(\mathbb{R}^n, +, \cdot) \longrightarrow$ dim n

$(\mathbb{R}_n[X], +, \cdot) \longrightarrow$ dim $n+1$ (car une base est $1, X, \dots X^n$)

$\{$ matrices $n \times m$ $, +, \cdot \}$
$\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$

$\rightsquigarrow$ ex de base : $\underset{A_{11}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 \\ \vdots & & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}}$ $\underset{A_{12}}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & & & 0 \end{pmatrix}}$ $\dots$ $\underset{A_{1m}}{\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & & 0 \\ \vdots & & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}}$

$\vdots$

$$\vdots$$

$$\underbrace{\underset{A_{n1}}{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & 0 & \vdots \\ 0 & & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}} \quad \cdots \quad \underset{A_{nm}}{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & 0 & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}}_{n \times m \text{ matrices}}$$

$\downarrow$

dim. $n \times m$

$\boxed{\text{Rang}}$

d'une famille de vecteurs $\{\vec{x}_1 \dots \vec{x}_m\}$ — $\text{rang}\{\vec{x}_1 \dots \vec{x}_m\}$

se calcule par pivot de Gauss sur les vects (cf. §1 de mon cours) — taille de la plus grande sous-famille <u>libre</u>

~ "nombre de vects non comb. lin. les uns des autres"

⚠ $\{\vec{x}_1 \dots \vec{x}_m\}$ —— $\text{Vect}\{\vec{x}_1 \dots \vec{x}_m\}$

ensemble de vecteurs $\downarrow$ $\mathrm{rang}\{\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n\} \in \mathbb{N}$

$=$

(sous) espace vectoriel $\downarrow$ $\dim\left(\mathrm{Vect}\{\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n\}\right)$

<u>ex ds</u> $\mathbb{R}^3$:

$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ 3 vects coplanaires

F

rang = 2

$\rightsquigarrow$ $F = \mathrm{Vect}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ plan

dim = 2

seuls 2 vect. sur 3 sont "nécessaires"

<u>Notions liées</u> :

F_1, F_2 sev de E

- somme de sous-espaces vect $\longrightarrow$ $\boxed{F_1 + F_2}$
- somme directe

$\downarrow$

$F_1 + F_2 = \{\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \ ; \ \vec{x}_1 \in F_1$

$\vec{x}_2 \in F_2 \}$

quand $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$

$\Longleftrightarrow$

les décompositions sont uniques : $\vec{x} \in F_1 + F_2$

$\vec{x} = \underbrace{\vec{x}_1 + \vec{x}_2}_{\text{unique}}$

noté $\boxed{F_1 \oplus F_2}$

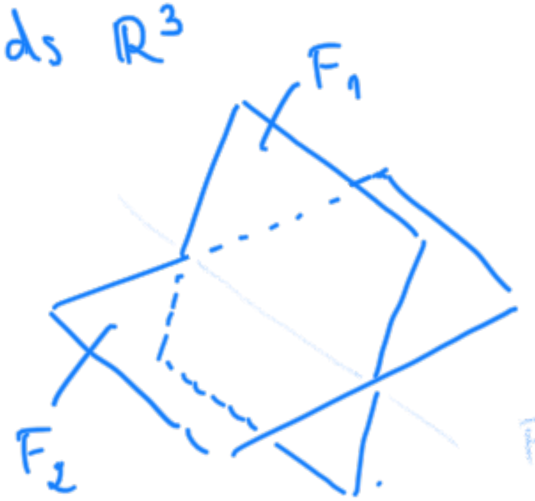
décomposition de l'espace

une base est l'union des bases etc...

Théorème :

$$\dim F_1 + \dim F_2 = \dim F_1 + F_2 + \dim (F_1 \cap F_2)$$

ex : ds $\mathbb{R}^3$

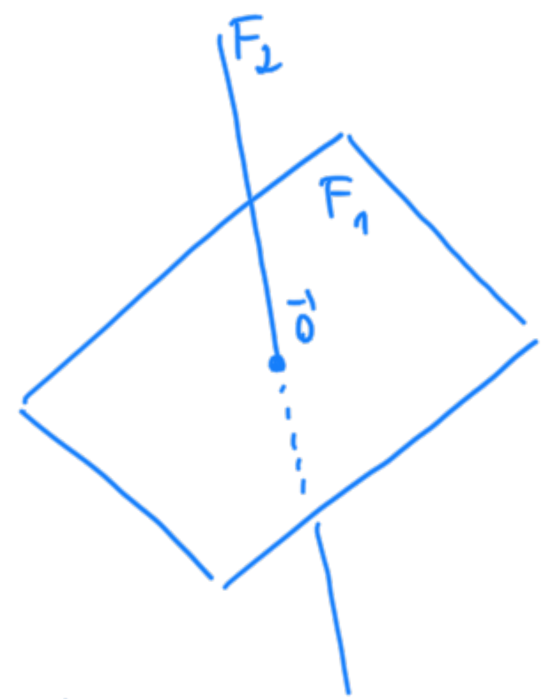


$F_1 \cap F_2$: droite

2 plans $\to$ somme non directe

$\mathbb{R}^3 = F_1 + F_2$

$\cancel{\oplus}$



droite, plan $\to$ somme directe

$\mathbb{R}^3 = F \oplus F$

II. Applications linéaires

$\boxed{\text{Application linéaire}}$ — fonction entre 2 $\mathbb{K}$-esp. vectoriels

ou / morphisme d'espaces vectoriels

$$f : E \to F$$

tq f commute aux comb. linéaires

ie : $\forall$ comb. linéaire ds E : $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in E$

$$f(\alpha_1 \cdot \vec{x}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{x}_2) = \underbrace{\alpha_1 \cdot f(\vec{x}_1) + \alpha_2 \cdot f(\vec{x}_2)}_{\text{opérations ds } F}$$

Beaucoup d'applications "standard" géométriques sont linéaires

→ homothéties
→ projections
→ rotations ....

ces applications ont beaucoup de propriétés très utiles ...

Seules les translations ne sont pas linéaires

$f : E \to F$ linéaire

noyau de f — $\boxed{\ker f}$

sous-esp. vect. de E

$\{\vec{x} \in E \text{ tq } f(\vec{x}) = \vec{0}_F\}$

<u>Th:</u>

f injective ssi $\ker f = \{\vec{0}\}$

Image de f — $\boxed{\mathrm{Im}(f)}$

sous-esp. vect de F

$\{f(\vec{x})\,;\ \vec{x} \in E\} \subseteq F$

<u>Théorème du rang</u> (**)

$\dim E = \dim \mathrm{Im} f + \dim \ker f$

$\dim E = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f$

Vecteurs / valeurs propres

$f : E \to E$ (endomorphisme)

⇝ on s'intéresse aux vecteurs $\vec{x} \in E$ tq $f(\vec{x})$ colinéaire à $\vec{x}$

$\boxed{f(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x}}$

le ratio est également caractéristique

↓

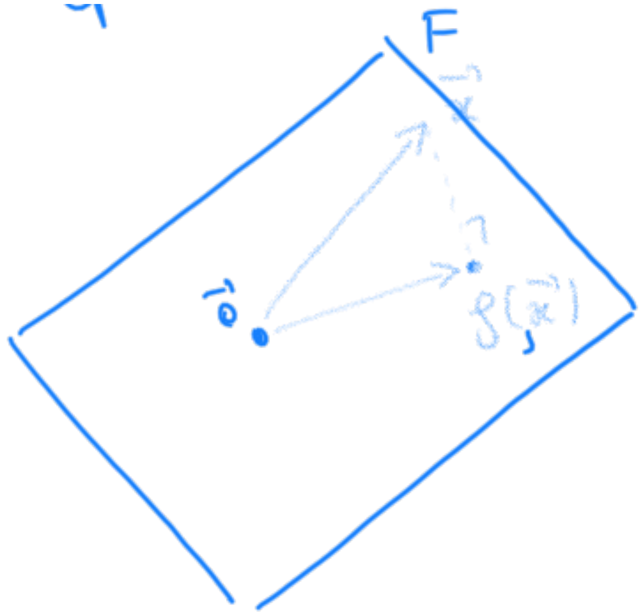
λ — valeur propre

directions caractéristiques de f

↓

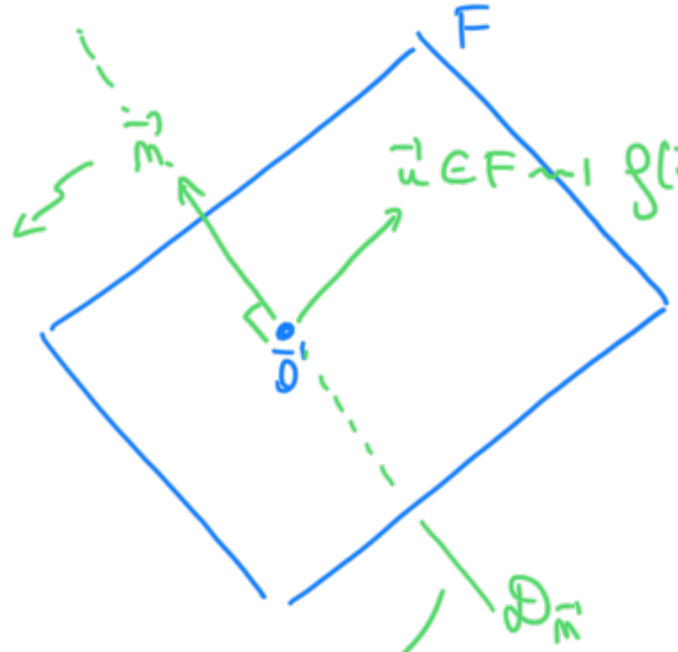
vecteur propre — $\vec{x}$

ex : ds $\mathbb{R}^3$: projection orthogonale sur un plan F



normale au plan projetée sur $\vec{0}$

$\vec{u} \in F \rightsquigarrow f(\vec{u}) = \vec{u}$



$\forall \vec{x} \in \mathcal{D}_{\vec{n}}$
$f(\vec{x}) = \vec{0} = 0 . \vec{x}$

vecteurs propres pour $\lambda = 0$

$\forall \vec{x} \in F$
$f(\vec{x}) = \vec{x} = 1 . \vec{x}$

vecteurs propres pour $\lambda = 1$: F

- $\lambda \in \mathbb{K}$ <u>valeur propre</u> de f
  si $\exists \, \vec{x} \neq \vec{0}$ tq
  $f(\vec{x}) = \lambda . \vec{x}$

  <u>vecteur propre</u>

associé

l'ensemble des
vecteurs propres
associé à λ val. propre
est un sous-esp. vect

noté $\boxed{E_\lambda} = \operatorname{Ker}(f - \lambda . Id)$

sous-espace
propre associé
à λ

III. Matrices et applications linéaires

Soit E, F des esp. vect de dim. finie

dim n   dim m   et $f : E \longrightarrow F$ linéaire

ex:

Observation :

on sait qu'il existe des base

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ y+z+t \\ x-t \end{pmatrix}$$

⇝ soit $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n\}$ base de E

$\mathcal{C} = \{\vec{v}_1 \dots \vec{v}_m\}$ base de F

$\Longrightarrow$ $\forall \vec{x} \in E$ $\vec{x}$ se décompose de manière unique :

$$\vec{x} = \alpha_1 . \vec{u}_1 + \dots + \alpha_n . \vec{u}_n$$

$$\Longrightarrow \quad f(\vec{x}) = f(\alpha_1 . \vec{u}_1 + \dots + \alpha_n . \vec{u}_n)$$

$\|$ f linéaire !

$$\alpha_1 . f(\vec{u}_1) + \dots + \alpha_n . f(\vec{u}_n)$$

ces n valeurs déterminent donc toute f — images des vecteurs d'une base

elles sont de F

chacun a m coords ds $\mathcal{C}$

puisqu'elles déterminent f, il suffit de les stocker ...

$\boxed{\text{matrice de } f}$

$\boxed{\text{Matrice de } f \text{ dans les bases } \mathcal{B}, \mathcal{C}}$

colonne 1 colonne 2 colonne n

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix} \leadsto \text{tableau } m \text{ lignes, } n \text{ colonnes}$$

$m \times n$

stockage par colonnes

$f(u_1) \in F$ $\quad$ $f(u_2) \in F$ $\quad$ $f(u_n) \in F$

$\to$ m coords ds $\mathcal{C}$

Sur notre ex:

- Si on prend $\mathcal{B}$: base canonique de $\mathbb{R}^4$: $\underset{\vec{u}_1}{(1,0,0,0)}, \underset{\vec{u}_2}{(0,1,0,0)} \dots \underset{\vec{u}_4}{(0,0,0,1)}$

$\mathcal{C}$: ________ $\mathbb{R}^3$: $\vec{v}_1 = (1,0,0)$, $\vec{v}_2 = (0,1,0)$, $\vec{v}_3 = (0,0,1)$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ y+z+t \\ x-t \end{pmatrix}$$

$f(1,0,0,0) = (1,0,1)$
$f(0,1,0,0) = (1,1,0)$
$f(0,0,1,0) = (1,1,0)$
$f(0,0,0,1) = (0,1,-1)$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Si on prend comme bases :

$\mathcal{B}'$: $u'_1 = (1,0,0,0)$
$u'_2 = (0,1,0,0)$
$u'_3 = (1,0,-1,1)$
$u'_4 = (0,1,-1,0)$

$\mathcal{C}'$: $v'_1 = (1,0,1)$
$v'_2 = (1,1,0)$
$v'_3 = (0,0,1)$

$f(u'_1) = (1,0,1) = v'_1$

$f(u'_2) = (1,1,0) = v'_2$ $\rightsquigarrow$ $M_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ } de $\mathcal{C}'$

$f(u'_3) = (0,0,0) = \vec{0}$

$f(u'_4) = (0,0,0) = \vec{0}$

$f(u'_1) = v'_1 = 1 \cdot v'_1 + 0 \cdot v'_2 + 0 \cdot v'_3$ $\quad f(u'_2) \quad \dots$

On voit bien que cette matrice est beaucoup plus simple

trouver les bonnes bases

réduction / diagonalisation

pour les matrices carrées

décomp. en valeurs singulières ou SVD

pour les matrices

quelconques
(c.f. §2 MNI)

$\boxed{\text{Calcul matriciel}}$

c.f. cours Polytech si besoin

① calcul sur les matrices

$\updownarrow$ codage de

calcul sur les applications linéaires

E, F, G esp. vectoriels

base $\mathcal{B}$ (E), base $\mathcal{C}$ (F), base $\mathcal{D}$ (G)

$\boxed{\text{somme}}$

$f, g : E \to F$

$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$

$B = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g)$

$f+g$ …… $A+B = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f+g)$

② changement de base

$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \overset{?}{-} \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$

Ingrédient 1 : matrice de passage

⚠ matrices spéciales codant le changement de bases

Si $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n\}$
$\mathcal{B}' = \{\vec{u}_1', \dots, \vec{u}_n'\}$ bases de E

Matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$:

$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \Big(\Big| \; \Big| \; \dots \; \Big| \Big)$ → nouvelle produit par un scalaire

$f : E \to F$ | $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$

$\lambda \cdot f$ ...... | $\lambda . A = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\lambda . f)$

composition / prod. matrices

$f : E \to F$ | $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$

$g : F \to G$ | $B = \mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)$

$g \circ f$ ..... | $B \times A = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f)$

⚠ produit non commutatif

$(B \times A \neq A \times B)$

coords du u'_1 ds $\mathcal{B}$ ... coords de u'_n ds $\mathcal{B}$

base écrite ds l'ancienne

$$\boxed{P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1}}$$

Ingrédient 2 : Changement de base pour les vecteurs

si X : coords de $\vec{x} \in E$ ds $\mathcal{B}$

X' : ———————— $\mathcal{B}'$

et

$P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$

alors :

$$\boxed{X = P X'}$$

Ingrédient 3 : Changement de base pour les matrices si A carrée $\longleftrightarrow$ $f : E \to E$

A inversible $\longleftrightarrow$ f bijective $\Leftrightarrow$ inversible

si $\exists B$ tq

$AB = BA = I$

mat. identité

on note l'inverse A^{-1}

$$f : E \longrightarrow F$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{A} & \mathcal{C} \\ {\scriptstyle P}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Q} \\ \mathcal{B}' & \xrightarrow[A' \ ?]{} & \mathcal{C}' \end{array}$$

bases de E — bases de F

$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$

$P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$

$Q = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}$

$A' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$?

on a : $\boxed{A' = Q^{-1} \times A \times P}$

Calculer $f(\vec{x}) \longleftrightarrow A \times X$

Déterminant — d'une matrice carrée

(c.f. cours Polytech pour def / calcul)

si $A : n \times n$ $\qquad \det(A) \in \mathbb{K}$ (nombre)

$\boxed{\underline{\text{Th}} \quad A \text{ inversible ssi } \det(A) \neq 0}$

IV. Réduction, vect. et val propres

— $f : E \to \underline{\underline{E}}$ (endomorphisme)

— A matrice $\underline{\underline{\text{carrée}}}$

<u>Observation</u> soit $f : E \to E$

Imaginons que $\mathcal{B}$ soit une base ds laquelle $\underbrace{M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)}_{\text{noté } M_{\mathcal{B}}(f)}$

$\mathcal{B} = \{\vec{u}_1 \ldots \vec{u}_n\}$

soit

<u>diagonale</u>

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}}_{\text{se lit :}}$$

$\forall i \quad f(\vec{u}_i) = \lambda_i \cdot \vec{u}_i$!

$\downarrow$

($\vec{u}_i$ est un vecteur propre
associé à la val. propre λ_i

Base où
f est diagonale

$\Longleftrightarrow$

Base formée
de vecteurs propres

Important

$\downarrow$

Comment les
calculer $\leadsto$ réduction ...

Pour les calculer :

soit λ valeur propre

$\Longleftrightarrow$

$\exists \vec{x} \neq \vec{0}$ tq $\quad f(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x}$

$\Longleftrightarrow$

$$f(\vec{x}) - \underbrace{\lambda \cdot \vec{x}}_{= \lambda \cdot Id(\vec{x})} = \vec{0}$$

$$(f - \lambda \mathrm{Id})\vec{x}$$

$$\Longleftrightarrow \quad (f - \lambda \cdot \mathrm{Id})(\vec{x}) = \vec{0}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underset{\neq \vec{0}}{\vec{x}} \in \ker(f - \lambda \mathrm{Id}) \quad (= E_\lambda)$$

$$\Updownarrow$$

$f - \lambda \mathrm{Id}$ non injective

$\downarrow$

donc non bijective

$\downarrow$

$\underline{\det(f - \lambda \mathrm{Id})} = 0$

|

polynôme en λ

$\downarrow$

trouver ses racines

=

trouver les valeurs propres

Polynôme caractéristique — $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

de A carrée $n \times n$ — polynôme en λ de degré n

ensemble des val. propres : spectre de A — $Sp(A)$

λ valeur propre de A $\Longleftrightarrow$ λ racine de $\chi_A(\lambda)$

Puis pour trouver les vecteurs propres :

$\mathcal{E}_\lambda = \ker(A - \lambda . I)$ (ie résoudre $(A - \lambda I)X = 0$)

Prop $\dim(\mathcal{E}_\lambda) \leqslant$ multiplicité de la racine λ ds $\chi_A(\lambda)$ — mult(λ)

ex: 1 est racine double de $(X-1)^2$

Prop

A est diagonalisable ... et triple de ...

A est diagonalisable

ssi

$\exists$ base base formée de vecteurs propres

$\iff$

$\forall \lambda \in Sp(A) \quad \underbrace{\dim(\mathcal{E}_\lambda) = \mathrm{mult}(\mathcal{E}_\lambda)}$

$\downarrow$

pour toutes les racines multiples, il faut calculer $\mathcal{E}_\lambda$ pour vérifier sa dimension ...

$$(X-1)^3 \times (X-2)$$

A diagonalisable $\longleftrightarrow$ $\exists$ matrice de passage P et D diagonale (valeurs propres sur la diag)

tq

$$D = P^{-1} \times A \times P$$

c.f. cours Polytech pour

plus de détails ...