Parcours IMD

Informatique et Mathématiques Discrètes

MODULE « TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE DISCRÈTE »

Alexandra Bac

TOPOLOGIE ALGORITHMIQUE

Aix*Marseille université
Initiative d'excellence

Introduction

Topologie algorithmique

~~Groupe fondamental~~

~~Groupes d'homotopie~~

Homologie

Topologie algorithmique

Que calculer ?

Homologie

Niveau 0 : Caractéristique d'Euler-Poincaré
Niveau 1 : Nombres de Betti
Niveau 2 : Décomposition en facteurs invariants des groupes d'homologie $\mathbb{Z}^{\beta_q} \times \mathbb{Z}/\lambda_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\lambda_2\mathbb{Z} \times \cdots$
Niveau 3 : Facteurs invariants et générateurs

$$\mathbb{Z}[z_1] \times \cdots \times \mathbb{Z}[z_{b_q}] \times \mathbb{Z}/\lambda_1\mathbb{Z}[c_1] \times \mathbb{Z}/\lambda_2\mathbb{Z}[c_2] \times \cdots$$

Niveau 4 : Facteurs invariants et générateurs et décomposition des cycles

Topologie algorithmique

Calcul de l'homologie

Forme normale de Smith

* Algébrique

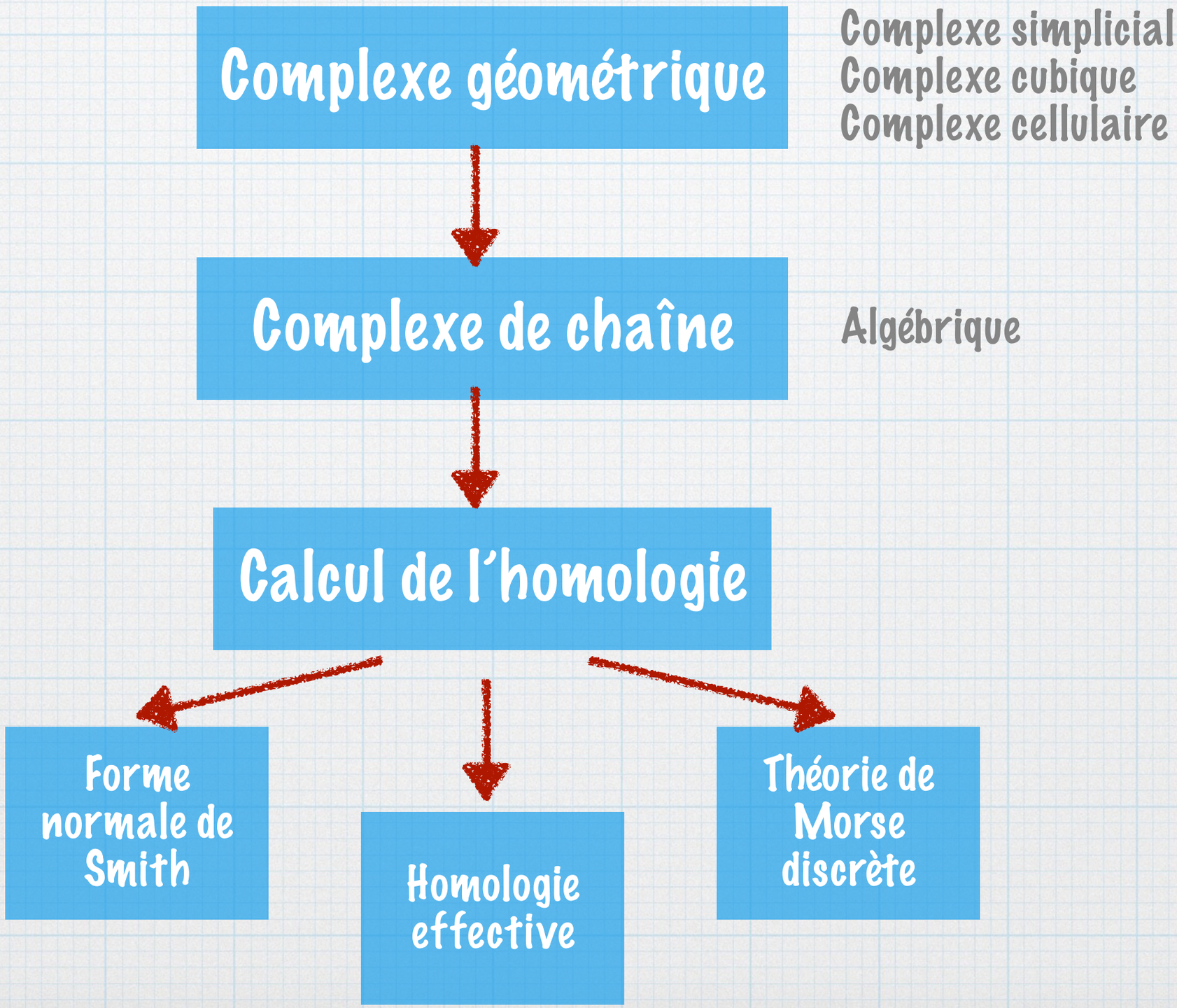
Homologie effective

Réduction

Théorie de Morse discrète

* Combinatoire
* Géométrique

Topologie algorithmique



Complexe simplicial

Complexe simplicial

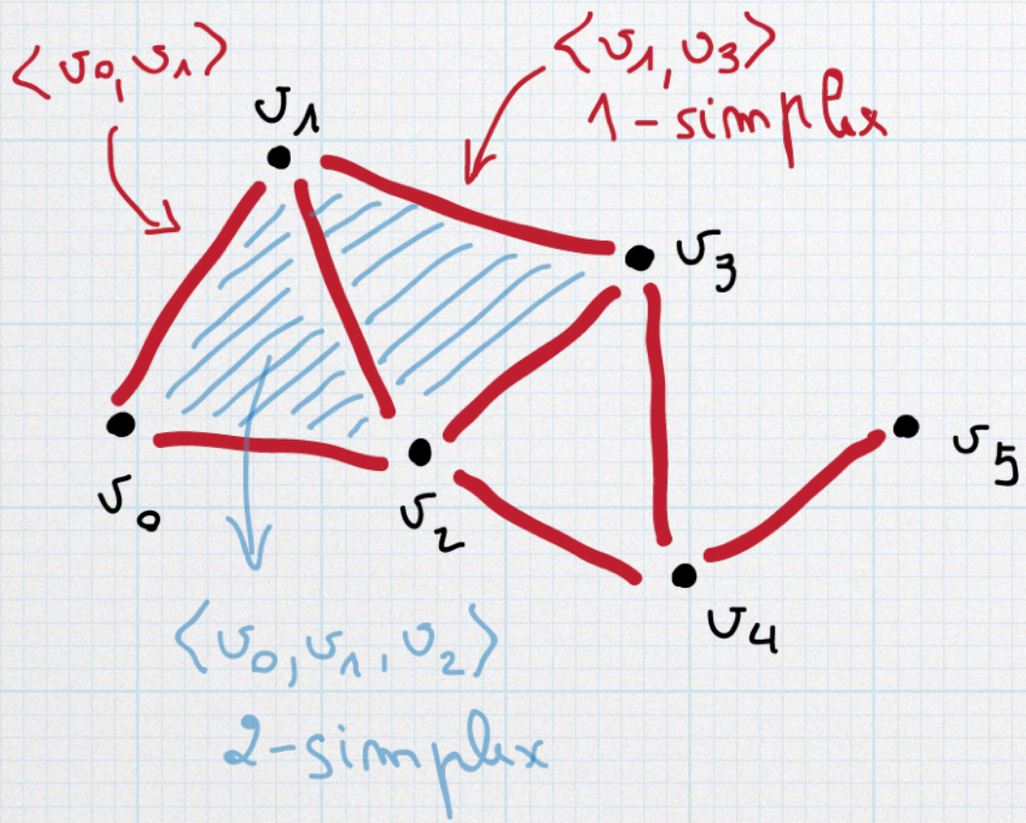
$p_0, \ldots, p_n$ points de $\mathbb{R}^m$
$\langle p_0, \ldots, p_n \rangle$ enveloppe convexe

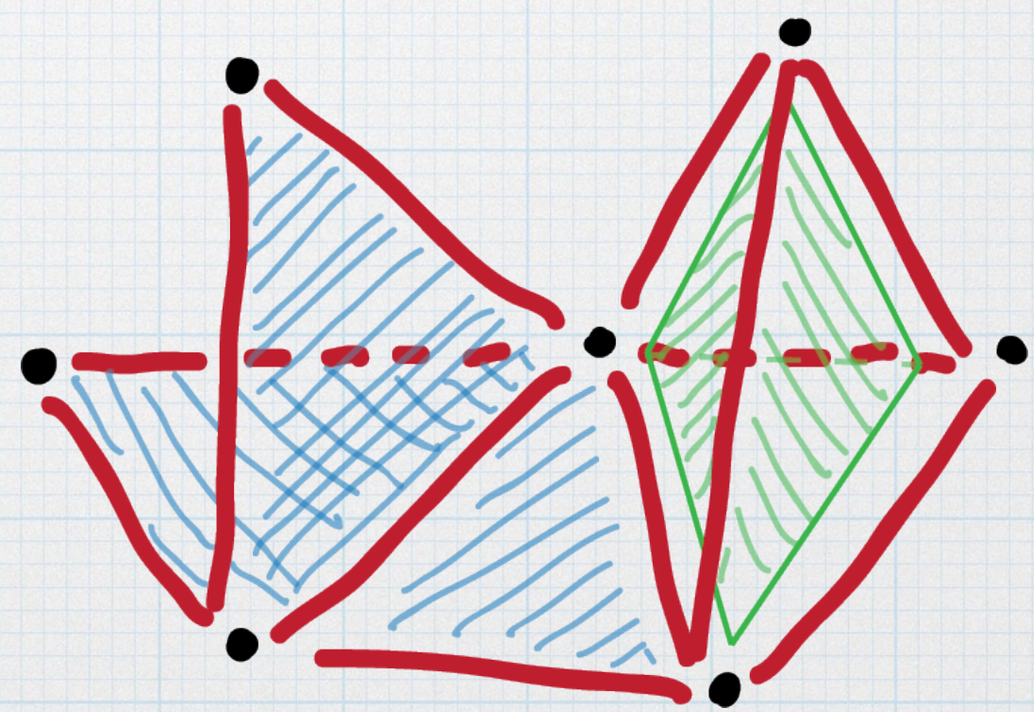
* q-simplex : $\langle p_0, \ldots, p_{q+1} \rangle$ points en position générale
* K complexe simplicial fini
  * ensemble de simplex
  * $\forall \sigma \in K$ ses faces sont dans K
  * $\forall \sigma, \tau \in K, \quad \sigma \cap \tau$ vide ou face commune

Dimension de K

K_q

Complexe simplicial





Complexe de chaîne

K
complexe simplicial

C
complexe de chaîne

Numérotation des 0-simplex (orientation)

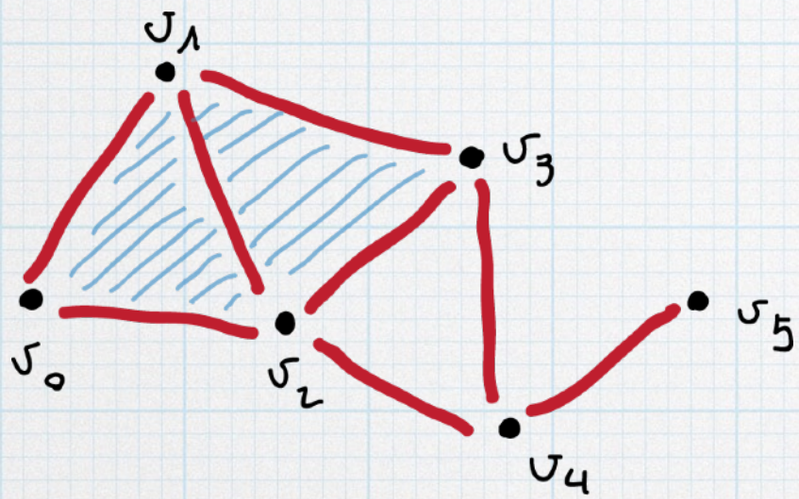
$$C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_2} C_0 \to 0$$

$$\partial_q \partial_{q-1} = 0 \quad \forall q$$

$$\boxed{C_q = Span(K_q)}$$

$$\boxed{\partial_q \langle p_0, \ldots, p_q \rangle = \sum_{i=0}^{q} (-1)^{i+1} \langle p_0, \ldots, \hat{p}_i, \ldots p_q \rangle}$$

Complexe de chaîne



$$\partial_1 e_{01} = \underbrace{-\langle \hat{v}_0, v_1 \rangle + \langle v_0, \hat{v}_1 \rangle}_{v_0 - v_1}$$

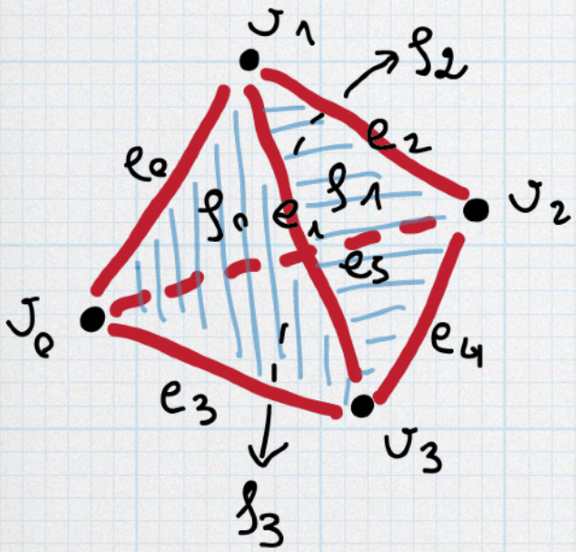
$$\partial_1 e_{23} = v_2 - v_3$$

$$\partial_2 f_{012} = -e_{12} + e_{02} - e_{01}$$

$$\partial_1 \partial_2 f_{012} = -(v_1 - v_2) + (v_0 - v_2) - (v_0 - v_1) = 0$$

$$\boxed{\partial_{q-1} \partial_q = 0}$$

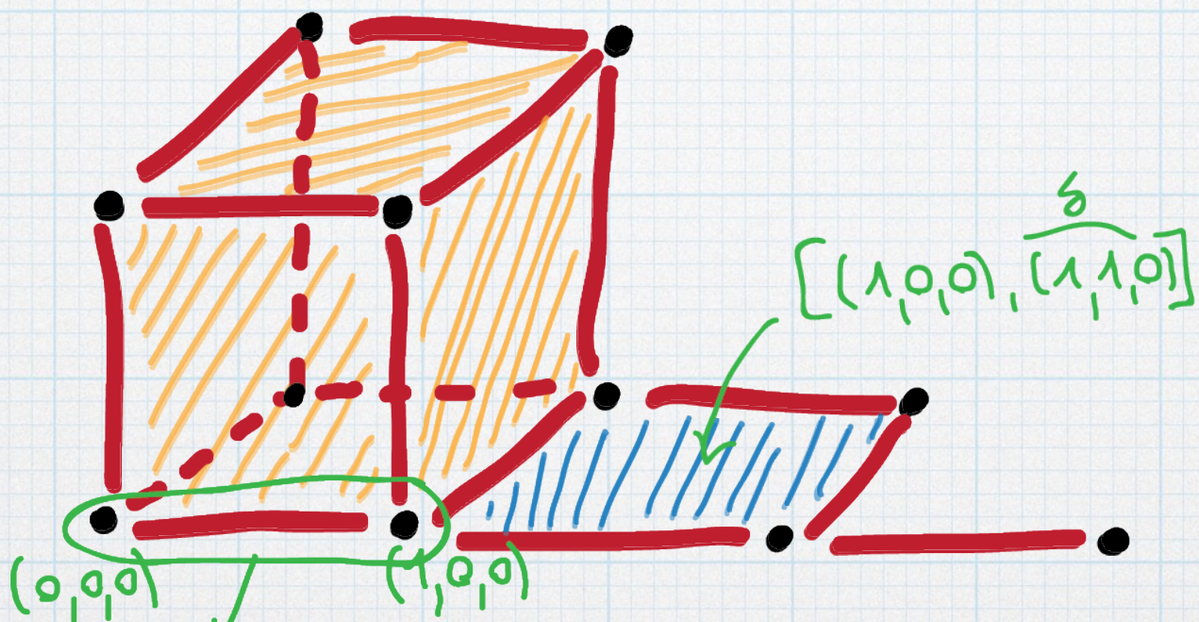
Complexe de chaîne



Matrice de bord

	v_0	v_1	v_2	v_3	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	f_0	f_1	f_2	f_3
v_0					1			1		1				
v_1					-1	1	1							
v_2							-1		1	-1				
v_3						-1		-1	-1					
e_0											-1		-1	
e_1											-1	1		
e_2												-1	-1	
e_3											1			1
e_4												-1		-1
e_5													1	-1
f_0														
f_1														
f_2														
f_3														

Complexe cubique



cellule $(0,0,0) \longrightarrow (1,0,0)$

$[(0,0,0) + \underbrace{(1,0,0)}_{\delta}]$

coordonnées de Khalimsky

Complexe cubique

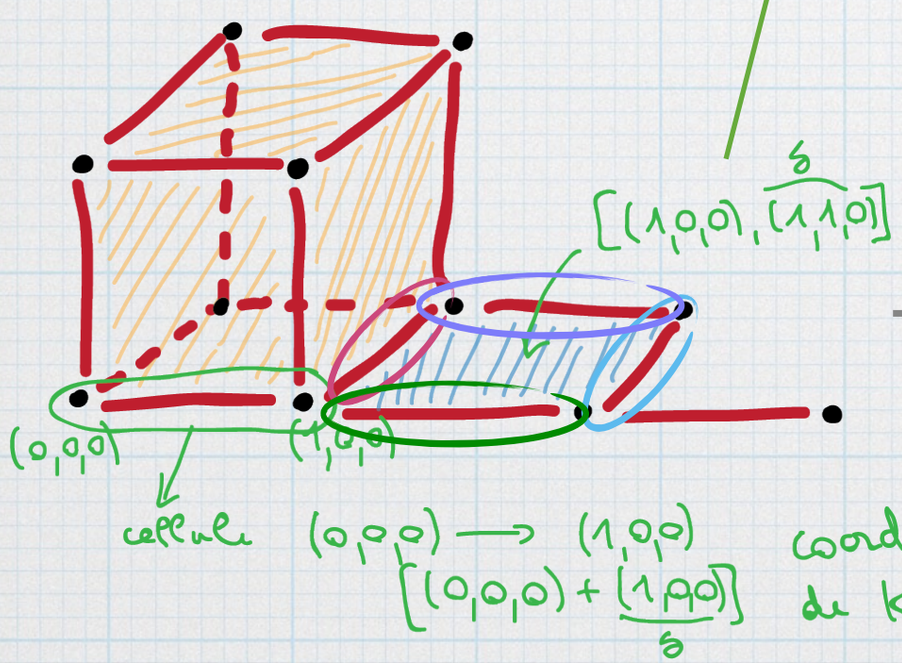
$$\partial_q([x,\delta]) = \sum_{i=1}^{n} -1^{o(i)} \left([x+\delta_i e_i, \delta - \delta_i e_i] - [x, \delta - \delta_i e_i]\right)$$

où $o(i)$ **désigne le nombre de 1 dans** $(\delta_1, \ldots, \delta_i)$

$$\partial[(1,0,0),(1,1,0)] =$$

$$-([(2,0,0),(0,1,0)] - [(1,0,0),(0,1,0)])$$

$$+([(1,1,0),(1,0,0)] - [(1,0,0),(1,0,0)])$$



Un outil avant de commencer : <u>réduction</u>

Réduction

Réduction entre deux complexes de chaîne (C, ∂) **et** (C', ∂') **:**

$$\rho = (h, f, g)$$

$h_q : C_q \to C_{q+1}$, $f : C \to C'$, $g : C' \to C$

(i) f, g **morphismes de chaînes**

(ii) $fg = \mathrm{Id}_{C'}$

(iii) $gf = \mathrm{Id}_C + h\partial + \partial h$

(iv) $hh = 0, fh = 0, hg = 0$

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & C_{q+1} \arrow[r, shift left, "\partial_{q+1}"] \arrow[d, shift right, "f_{q+1}"'] & C_q \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left, "\partial_q"] \arrow[d, shift right, "f_q"'] \arrow[dl, "h_q"] & C_{q-1} \arrow[l, shift left] \arrow[r] \arrow[d, shift right, "f_{q-1}"'] \arrow[dl, "h_{q-1}"] & {} \\
\arrow[r] & C'_{q+1} \arrow[r, "\partial'_{q+1}"] \arrow[u, shift right, "g_{q+1}"'] & C'_q \arrow[r, "\partial'_q"] \arrow[u, shift right, "g_q"'] & C'_{q-1} \arrow[r] \arrow[u, shift right, "g_{q-1}"'] & {}
\end{tikzcd}$$

Etant donnée une réduction :

$$\forall q \quad H_q(C) = H_q(C')$$

Forme normale de Smith

Références

Munkres, J. Elements of algebraic topology.
Addison-Wesley Publishing. 1984.

Peltier, S. et al. Computation of homology groups and generators.
Computer and Graphics. 2006.

Forme Normale de Smith

<u>Théorème</u>

Soit $A \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{Z})$

Il existe U, V deux matrices inversibles telles que :

$$UAV = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} b_1 & & & 0 \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & b_l \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$b_i \mid b_{i+1}$$

Forme Normale de Smith et homologie

Théorème

Soit C le complexe de chaîne :

$$C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \to 0$$

$$C_p = U_p \oplus \underbrace{V_p \oplus W_p}_{Z_p}$$

cycles

$$Z_q = \ker \partial_q$$

$$B_q = \operatorname{Im} \partial_{q+1}$$

bords

Matrice de $\partial_q \ : \ U_q \to W_{q-1}$

$$\begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_l \end{pmatrix} \qquad b_i \mid b_{i+1}$$

$$\partial_q(U_q) \subseteq W_{q-1}$$
$$\partial_q(V_q) = 0$$
$$\partial_q(W_q) = 0$$

Forme Normale de Smith et homologie

Preuve

$$\cdots \to C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \to \cdots$$

$$\boxed{\begin{array}{c} B_q \\ = \\ \mathrm{Im}\,\partial_{q+1} \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c} Z_q \\ = \\ \ker \partial_q \end{array}} \qquad \boxed{W_q} \longleftrightarrow \{c_q \in C_q \,;\, \exists m \in \mathbb{Z} \quad mc_q \in B_q\}$$

Bord faible

$$B_q \subseteq W_q \subseteq Z_q \subseteq C_q$$

Forme Normale de Smith et homologie

Etape 1

$$Z_q/W_q \simeq H_q/T_q$$

Sous-groupe de torsion de H_q

$$\pi : Z_q \to H_q = Z_q/B_q \to H_q/T_q$$

$$\ker \pi = W_q$$

$W_q \lhd C_q$ libre

$\downarrow$

Z_q libre

$\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_k$ base de Z_q/W_q

$d_1, \ldots, d_l$ base de W_q

$\Rightarrow c_1, \ldots, c_k, d_1, \cdots, d_l$ base de $Z_q \simeq V_q \oplus W_q$

Forme Normale de Smith et homologie

Etape 2

Il existe $e_1, \ldots, e_n$ base de C_q

$e'_1, \ldots, e'_m$ base de C_{q-1} où ∂_q en FNS

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc|ccc} b_1 & & 0 & & & \\ & b_2 & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ 0 & & b_l & & & \\ \hline & & & & & \\ & 0 & & & 0 & \\ & & & & & \end{array}\right) & \begin{array}{c} e'_1 \\ \vdots \\ e'_l \\ e'_{l+1} \\ \vdots \\ e'_m \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} e_1 & \ldots & e_l & e_{l+1} & \ldots e_n \end{array} & \end{array}$$

$$b_i \mid b_{i+1}$$

i. $e_{l+1}, \ldots, e_n$ base de Z_q

ii. $e'_1, \ldots, e'_l$ base de W_{q-1}

iii. $b_1 e'_1, \ldots, b_l e'_l$ base de B_{q-1}

Forme Normale de Smith et homologie

Etape 3

On pose $U_q = Span\{e_1, \ldots, e_n\}$

Soit $\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_k$ base de Z_q/W_q, on pose

$V_q = Span\{c_1, \ldots, c_k\}$

$$C_q = U_q \oplus V_q \oplus W_q$$

$$\mathscr{M}(\partial_q : U_q \to W_q) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc} b_1 & & & 0 \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & b_l \end{array}\right) \begin{array}{c} e'_1 \\ \vdots \\ e'_l \end{array} \\ \begin{array}{ccc} e_1 & \ldots & e_l \end{array} \end{array} \qquad b_i \,|\, b_{i+1}$$

Forme Normale de Smith et homologie

On en déduit :

$$H_q \simeq Z_q/W_q \underbrace{\oplus \; W_q/B_q}_{\text{libre}} \underbrace{\qquad}_{\text{torsion}}$$

$$\mathbb{Z}^{\beta_q} = \mathbb{Z}^{\mathrm{rang}(Z_q)-\mathrm{rang}(W_q)}$$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} b_1 & & 0 \\ & b_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & b_l \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} e'_1 \\ \vdots \\ e'_l \\ e'_{l+1} \\ \vdots \\ e'_m \end{matrix} \\ e_1 \quad \dots \quad e_l \; e_{l+1} \dots e_n \end{array}$$

i. $e_{l+1}, \dots, e_n$ **base de** Z_q

ii. $e'_1, \dots, e'_l$ **base de** W_{q-1}

iii. $b_1 e'_1, \dots, b_l e'_l$ **base de** B_{q-1}

$$W_{q-1} = \mathrm{Span}\{e'_1, \dots, e'_l)$$

$$B_{q-1} = \mathrm{Span}\{b_1 e'_1, \dots, b_l e'_l)$$

$$W_{q-1}/B_{q-1} \simeq \bigoplus_{i=1}^{l} \mathbb{Z}/b_i\mathbb{Z}$$

Calcul de la FNS

$A \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{Z})$

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} & & \\ & a_{i,j} & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e'_1 \\ \vdots \\ e'_l \end{array} \\ \begin{array}{ccc} e_1 & \dots & e_l \end{array} & \end{array}$$

Rang de A constant

Opérations de base :

* Echanges de lignes $l_i \leftrightarrow l_k$ $\overset{\sim}{\leftarrow}$ $e'_i \leftrightarrow e'_k$
* Multiplication $l_i \leftarrow -l_i$ $\overset{\sim}{\leftarrow}$ $e'_i \leftarrow -e'_i$
* Combinaison $l_i \leftarrow l_i + q \cdot l_k$ $\overset{\sim}{\leftarrow}$ $e'_i \leftarrow e'_i + q \cdot e'_k$

* Echanges de col $c_i \leftrightarrow c_k$ $\overset{\sim}{\leftarrow}$ $e_i \leftrightarrow e_k$
* Multiplication $c_i \leftarrow -c_i$ $\overset{\sim}{\leftarrow}$ $e_i \leftarrow -e_i$
* Combinaison $c_i \leftarrow c_i + q \cdot c_k$ $\overset{\sim}{\leftarrow}$ $e_i \leftarrow e_i + q \cdot e_k$

Calcul de la FNS

$A \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{Z})$

$$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & a_{i,j} & \\ & & \end{array}\right) & \begin{array}{c} e'_1 \\ \vdots \\ e'_l \end{array} \\ \begin{array}{ccc} e_1 & \dots & e_l \end{array} & \end{array}$$

Entrée minimale de A :

$$\alpha(A) = \min_{a_{i,j}\neq 0} |a_{i,j}|$$

Algorithme

(1) Transformer A en B de même rang tq

(a) $\alpha(B) \leqslant \alpha(A)$

(b) $\alpha(B) \mid b_{i,j} \quad \forall i, j$

(2) Réduire la dimension de B

$\rightarrow (n-1)\times(n-1)$

Calcul de la FNS (1)

Tant que $\exists k, l\,;\ \alpha(A) \nmid a_{k,l}$ $\quad (\alpha(A) = |a_{i,j}|)$

Tant que $\underbrace{\exists k\,;\ \alpha(A) \nmid a_{k,j}}_{\text{Cas 1}}$ (colonne) ou $\underbrace{\exists l\,;\ \alpha(A) \nmid a_{i,l}}_{\text{Cas 2}}$ (ligne)

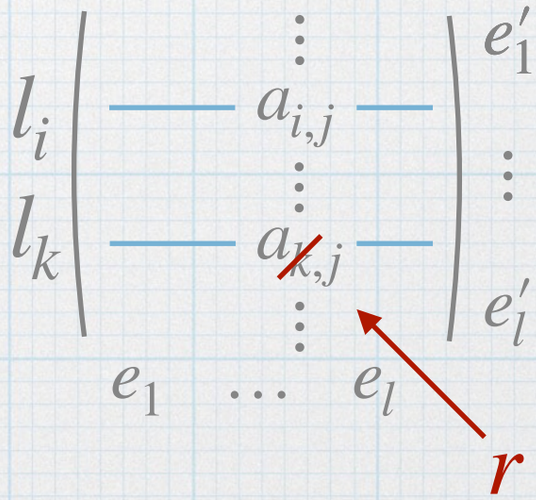
→ Cas 1

$\alpha(A) = |a_{i,j}|$

On a $a_{i,j} \nmid a_{k,j}$

$a_{k,j} = q \cdot a_{i,j} + r \quad 0 \leqslant r < |a_{i,j}|$

$l_k \leftarrow l_k - q \cdot l_i$



$\alpha(A) \leqslant r < |a_{i,j}|$

Calcul de la FNS (1)

Tant que $\exists k, l\,;\ \alpha(A) \nmid a_{k,l}$

Tant que $\underbrace{\exists k\,;\ \alpha(A) \nmid a_{k,j}}_{\text{Cas 1}}$ (colonne) ou $\underbrace{\exists l\,;\ \alpha(A) \nmid a_{i,l}}_{\text{Cas 2}}$ (ligne)

→ Cas 1

→ Cas 2

$\alpha(A) = |a_{i,j}|$

On a $a_{i,j} \nmid a_{i,l}$

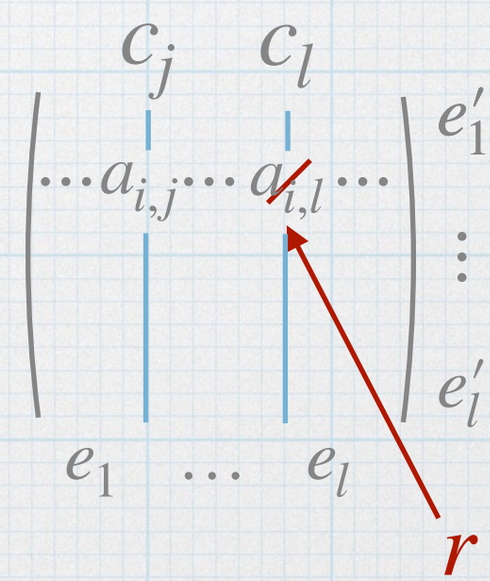
$a_{i,l} = q \cdot a_{i,j} + r \qquad 0 \leqslant r < |a_{i,j}|$

$c_l \leftarrow c_l - q \cdot c_j$

Ftq

// $\alpha(A)$ divise toute sa ligne et sa colonne

$\alpha(A)$ décroît strictement
Par induction, les boucles
terminent



$\alpha(A) \leqslant r < |a_{i,j}|$

Calcul de la FNS (1)

Tant que $\exists k, l\,;\ \alpha(A) \nmid a_{k,l}$

Tant que $\exists k\,;\ \alpha(A) \nmid a_{k,j}$ (colonne) ou $\exists l\,;\ \alpha(A) \nmid a_{i,l}$ (ligne)

... / ...

Ftq

// $\alpha(A)$ divise toute sa ligne et sa colonne

Si $\exists a_{s,t}$ tq $\alpha(A) = |a_{i,j}| \nmid a_{s,t}$

On a : $a_{s,j} = z a_{i,j}$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} c_j & & c_t \end{array} \\
\begin{array}{c} l_i \\ \\ l_s \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,t} & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & a_{s,j} & \cdots & a_{s,t} & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{array}{c} e'_1 \\ \\ \vdots \\ \\ e'_l \end{array} \\
 & \begin{array}{ccc} e_1 & \cdots & e_l \end{array}
\end{array}
$$

Calcul de la FNS (1)

Tant que $\exists k, l\,;\ \alpha(A) \nmid a_{k,l}$

Tant que $\exists k\,;\ \alpha(A) \nmid a_{k,j}$ (colonne) ou $\exists l\,;\ \alpha(A) \nmid a_{i,l}$ (ligne)

... / ...

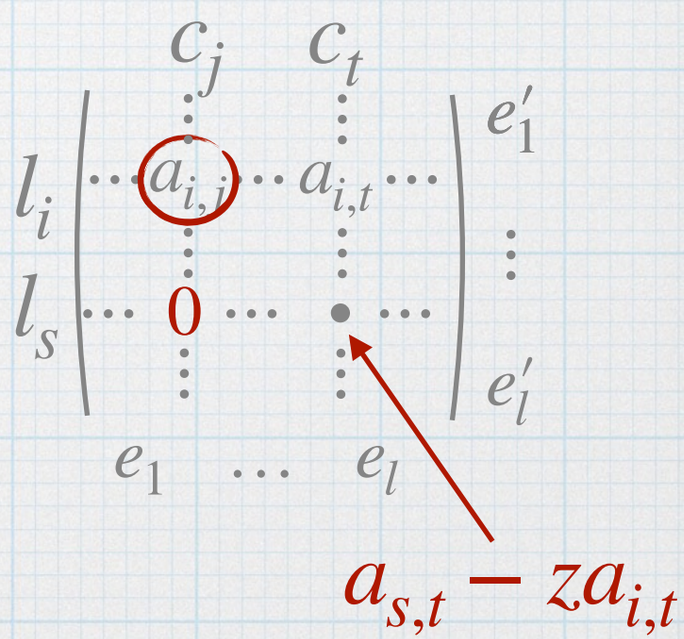
Ftq

// $\alpha(A)$ divise toute sa ligne et sa colonne

Si $\exists a_{s,t}$ tq $\alpha(A) = |a_{i,j}| \nmid a_{s,t}$

On a : $a_{s,j} = z a_{i,j}$

$l_s \leftarrow l_s - z \cdot l_i$



Calcul de la FNS (1)

Tant que $\exists k, l\,;\ \alpha(A) \nmid a_{k,l}$

Tant que $\exists k\,;\ \alpha(A) \nmid a_{k,j}$ (colonne) ou $\exists l\,;\ \alpha(A) \nmid a_{i,l}$ (ligne)

... / ...

Ftq

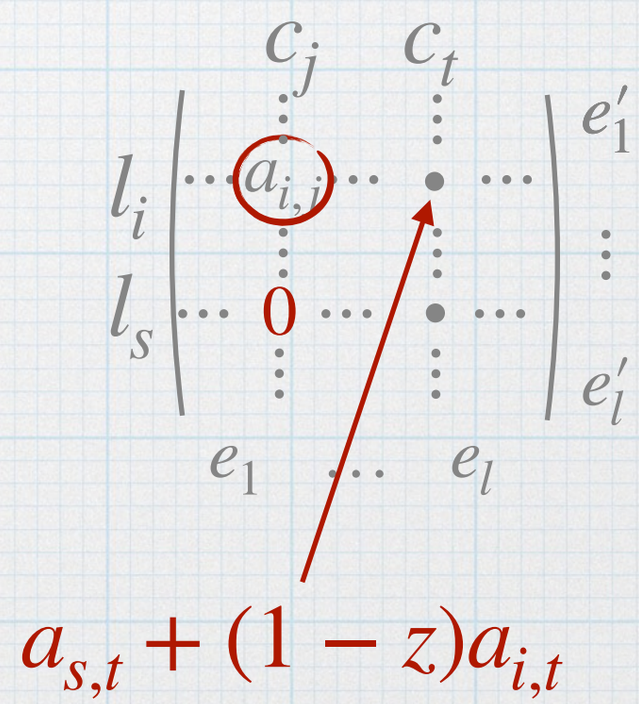
// $\alpha(A)$ divise toute sa ligne et sa colonne

Si $\exists a_{s,t}$ tq $\alpha(A) = |a_{i,j}| \nmid a_{s,t}$

On a : $a_{s,j} = z a_{i,j}$

$l_i \leftarrow l_i - z \cdot l_s$

$l_i \leftarrow l_i + l_s$



Calcul de la FNS (1)

Tant que $\exists k, l\,;\ \alpha(A) \nmid a_{k,l}$

Tant que $\exists k\,;\ \alpha(A) \nmid a_{k,j}$ (colonne) ou $\exists l\,;\ \alpha(A) \nmid a_{i,l}$ (ligne)

... / ...

Ftq

// $\alpha(A)$ divise toute sa ligne et sa colonne

Si $\exists a_{s,t}$ tq $\alpha(A) = |a_{i,j}| \nmid a_{s,t}$

On a : $a_{s,j} = z a_{i,j}$

$l_i \leftarrow l_i - z \cdot l_s$

$l_i \leftarrow l_i + l_s$

Fsi

Ftq

// $\alpha(A)$ divise tous les éléments non nuls de A

$$\begin{array}{c} \\ l_i \\ l_s \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & c_j & & c_t & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc} \cdots & a_{i,j} & \cdots & \bullet & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & 0 & \cdots & \bullet & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} e_1 & \cdots & & e_l & \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \\ e'_1 \\ \vdots \\ e'_l \\ \\ \end{array}$$

$a_{s,t} + (1 - z) a_{i,t}$

$$\left.\begin{array}{l} a_{i,j} \mid a_{i,t} \\ a_{i,j} \nmid a_{s,t} \end{array}\right. \Rightarrow a_{i,j} \nmid \bullet$$

Calcul de la FNS (2)

Puisque $\alpha(A) = |a_{i,j}|$ divise tous les éléments de A

Par opérations élémentaires, on met A sous la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha(A) & \cdots\cdots \\ \vdots & \\ \vdots & \end{pmatrix}$$

Comme $\forall i \; a_{i,1} = z_i \cdot a_{1,1}$

$$l_i \leftarrow l_i - z_i \cdot l_1$$

Comme $\forall j \; a_{1,j} = z'_j \cdot a_{1,1}$

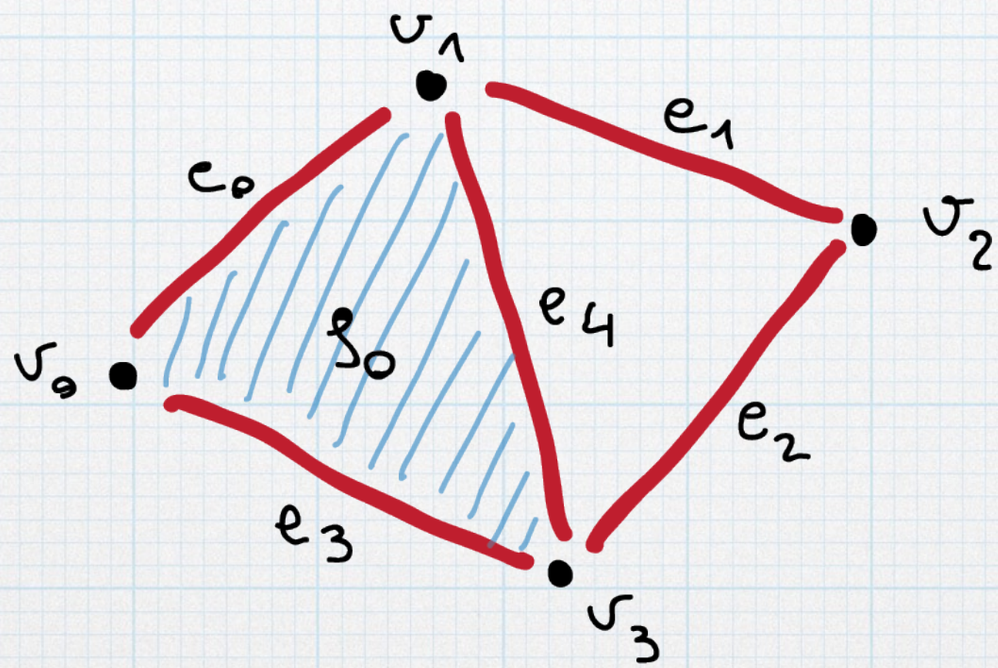
$$c_j \leftarrow c_j - z'_j \cdot c_1$$

$$\begin{pmatrix} \alpha(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$\alpha(A) \mid b_{i,j} \quad \forall i, j$

<u>Recommencer avec B</u>

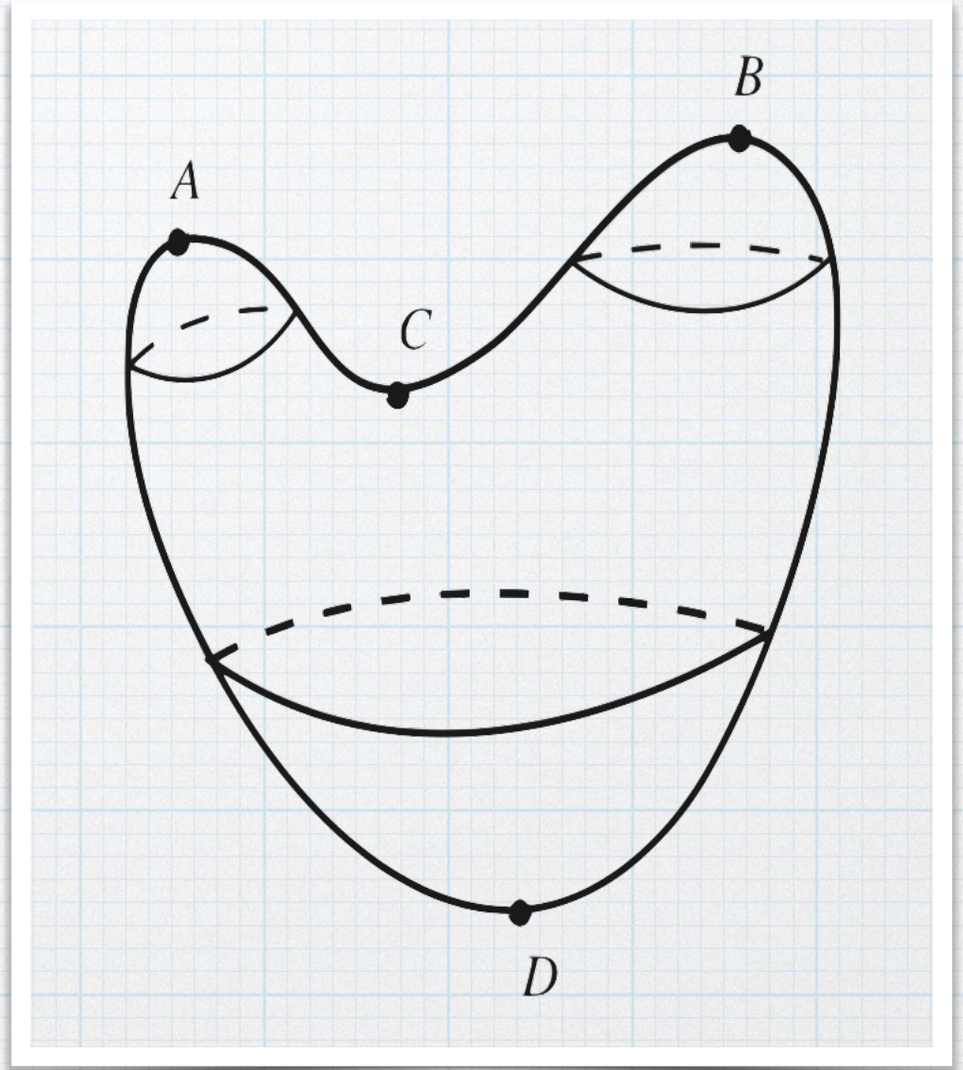
Calcul de la FNS



Théorie de Morse discrète

Théorie de Morse

(R)appels ...



Références

Milnor, J., et al. Morse Theory.
(AM-51), Volume 51. Princeton University Press, 1969.

Yukio Matsumoto. An Introduction to Morse Theory.
Oxford University Press, 2001.

Théorie de Morse

Fonction sur $\mathcal{S}$,
variété fermée (compacte sans bord)

$$f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$$

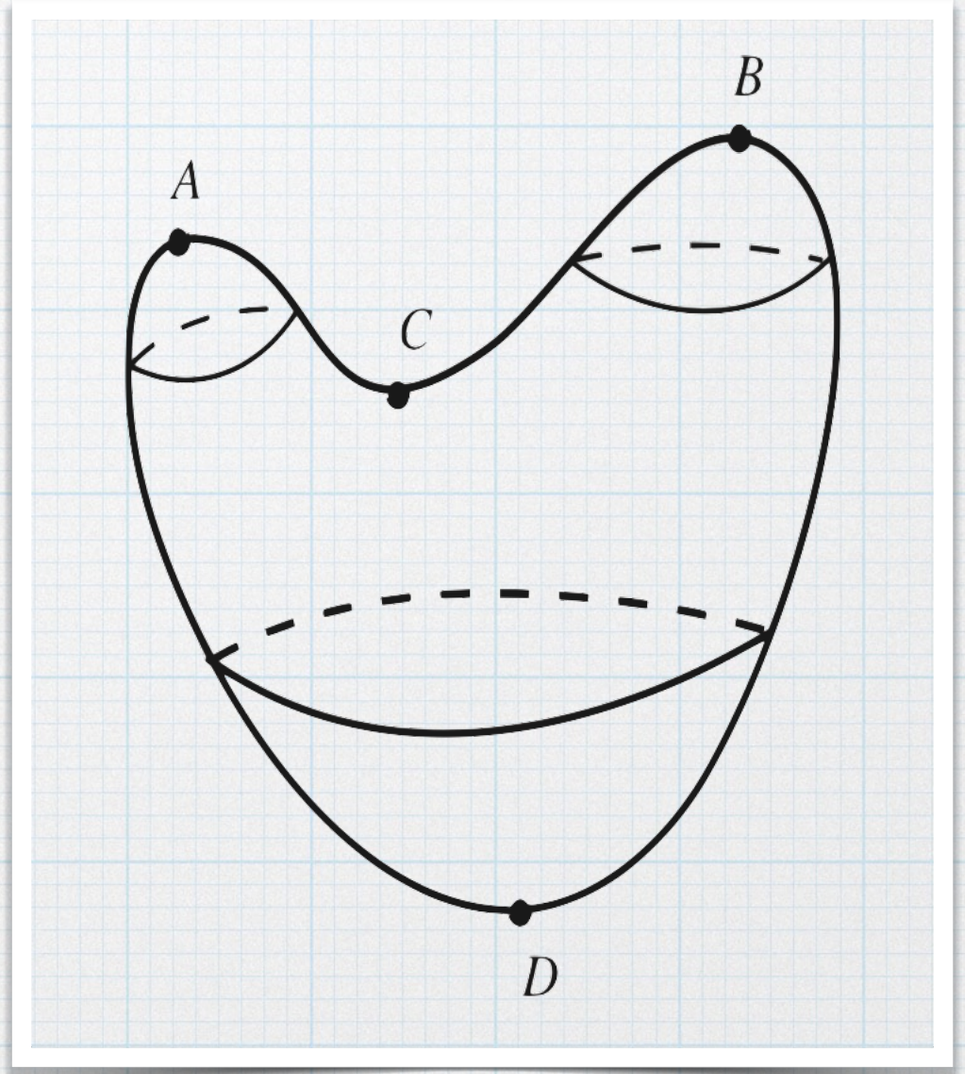
Points critiques de f

$\updownarrow$

Forme de $\mathcal{S}$

$\updownarrow$

Homologie de $\mathcal{S}$

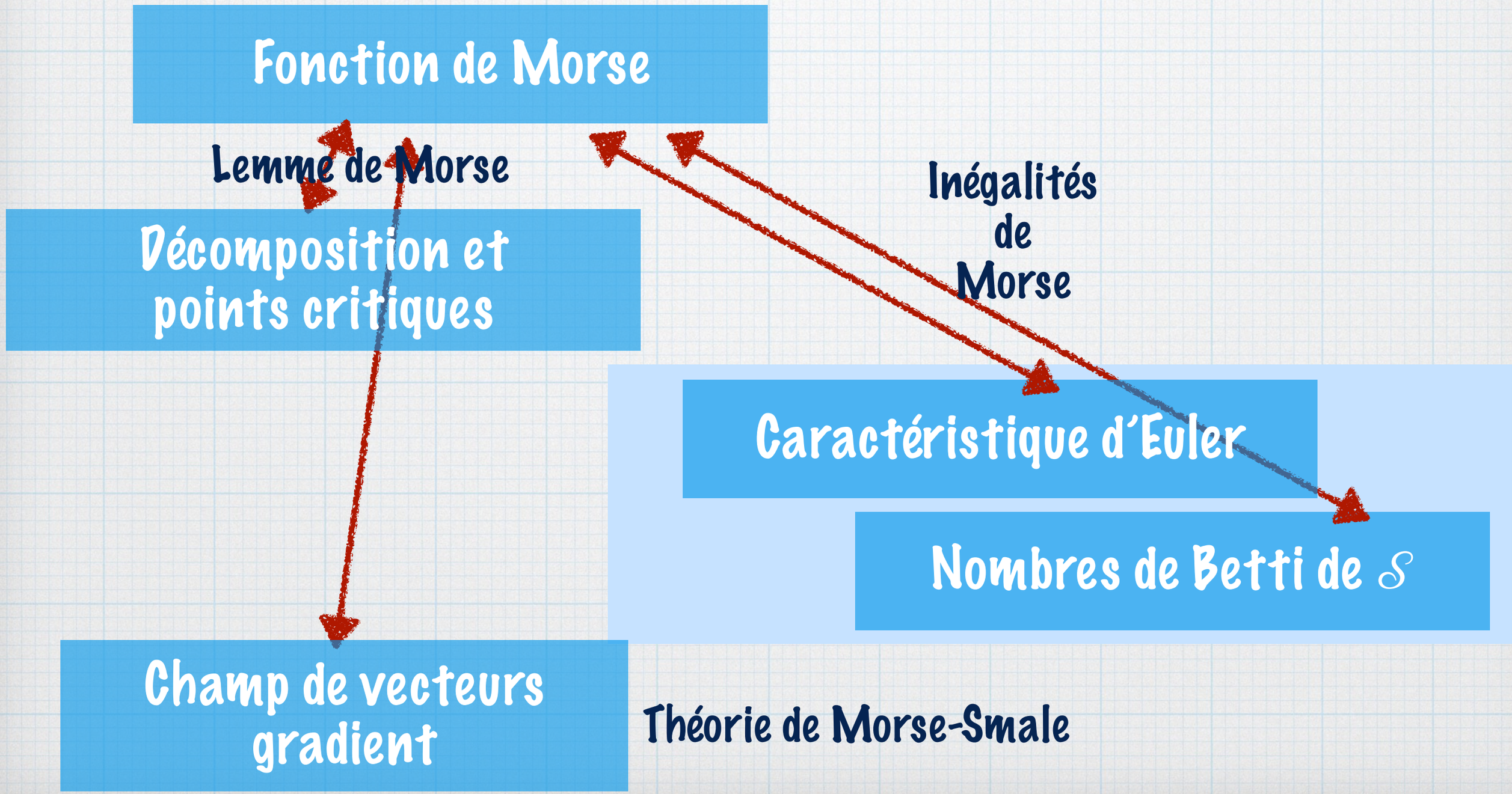


Espace $\mathcal{S}$

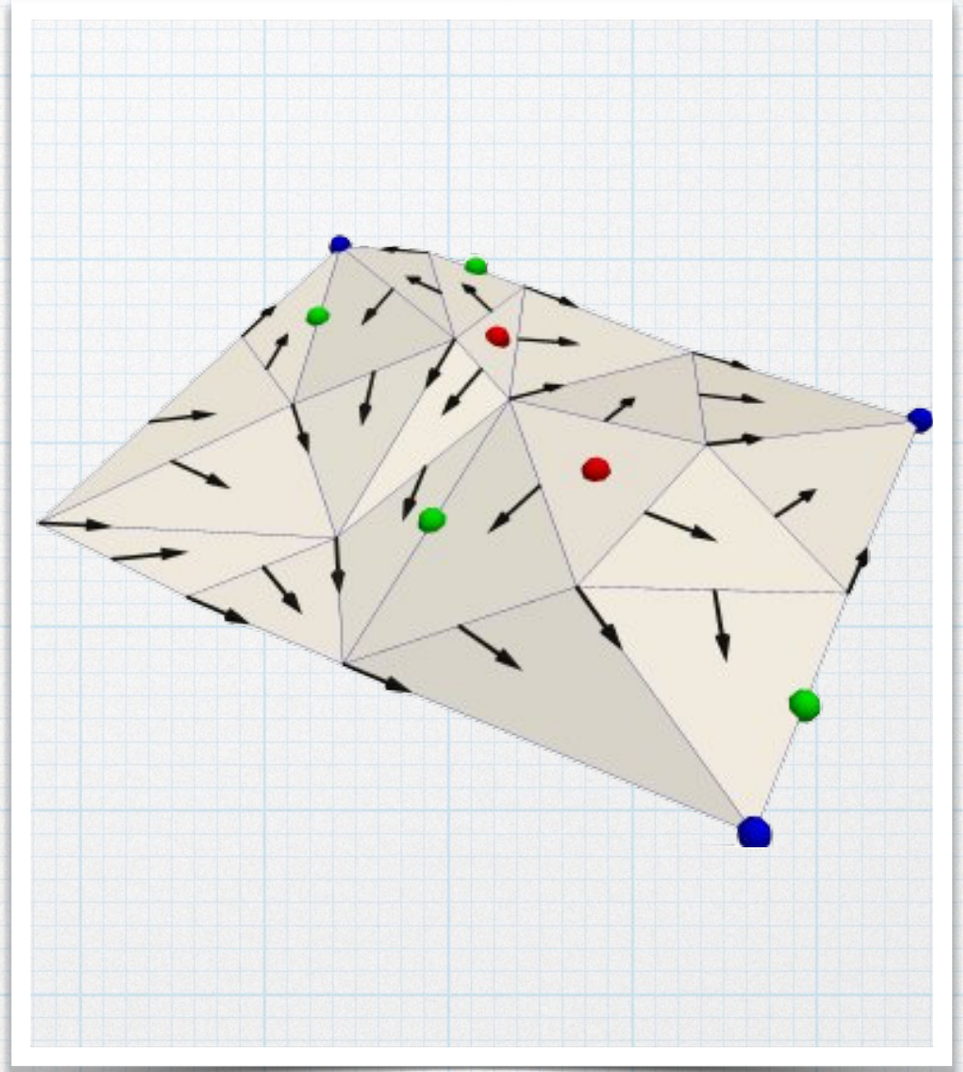
Théorie de Morse

Fonction sur $\mathcal{S}$, variété fermée (compacte sans bord)

$$f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$$



Théorie de Morse discrète

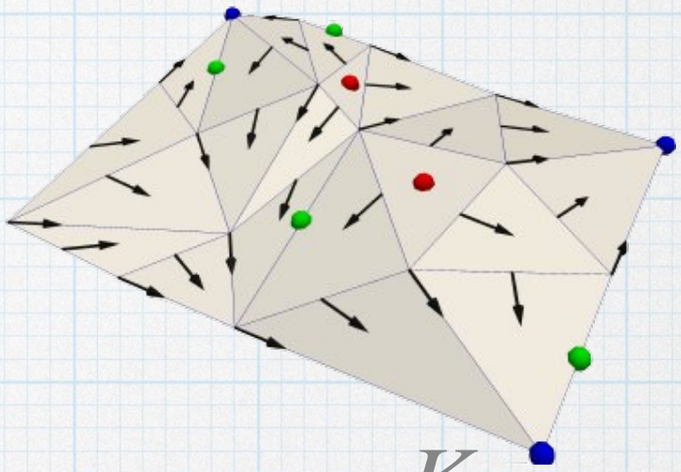


Références

Forman, Robin. A user's guide to discrete Morse Theory. Sém. Lothar. Combin., 2001

Forman, Robin. Morse Theory for Cell Complexes. Advances in Mathematics, vol. 134, 1998

Théorie de Morse discrète



K

complexe simplicial

Fonction de Morse discrète

Décomposition et points critiques

Complexe de Morse

Inégalités de Morse

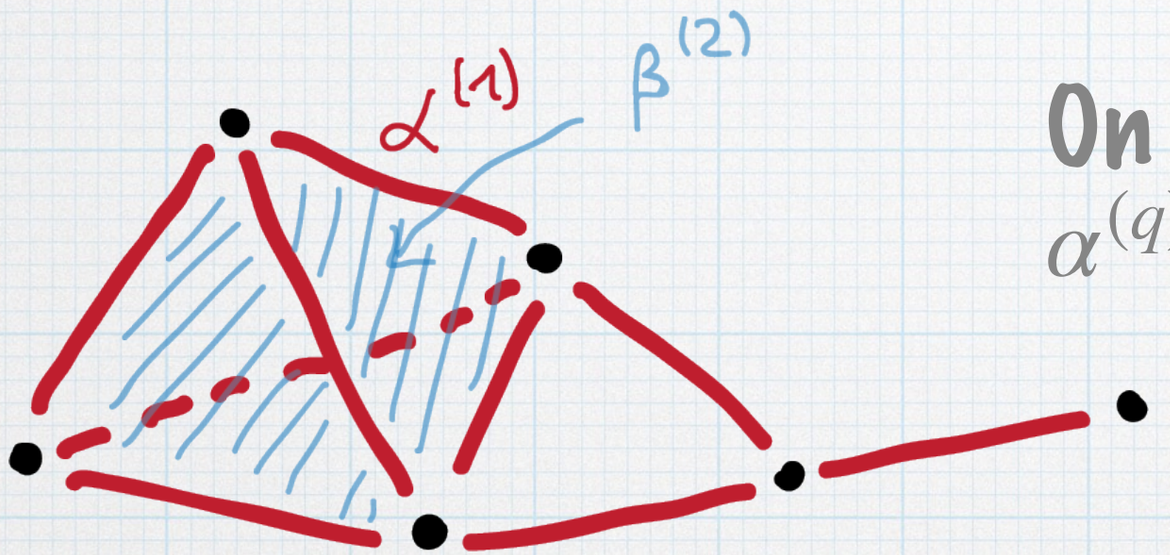
Caractéristique d'Euler

Nombres de Betti de $\mathcal{S}$

Homologie de $\mathcal{S}$

Champ de vecteurs gradient discret

Quelques notations



On notera souvent
$\alpha^{(q)}$: cellule de dimension q

$\alpha^{(q)}$ face de $\beta^{(q+1)}$ sera noté :

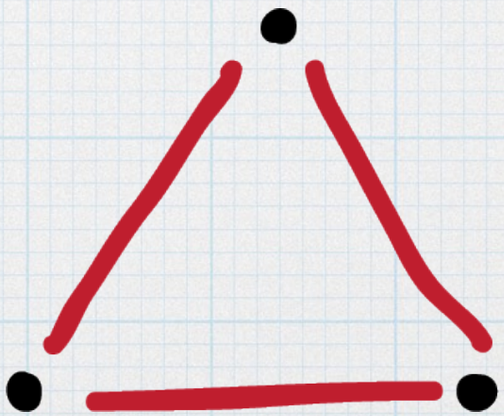
$$\alpha^{(q)} < \beta^{(q+1)}$$

Fonction de Morse discrète

$f : K \to \mathbb{Z}$ est une <u>fonction de Morse discrète</u> sssi $\forall \alpha^{(q)} \in K$:

1. $\sharp\{\beta^{(q+1)} ; \beta^{(q+1)} > \alpha^{(q)}$ et $f(\beta) \leqslant f(\alpha)\} \leqslant 1$
2. $\sharp\{\gamma^{(q-1)} ; \gamma^{(q-1)} < \alpha^{(q)}$ et $f(\gamma) \geqslant f(\alpha)\} \leqslant 1$

Triangulation du cercle ...

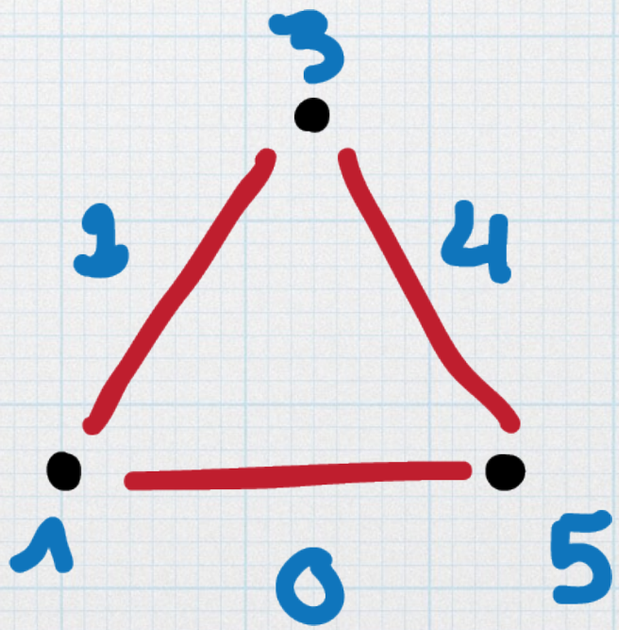


Fonction de Morse discrète

$f : K \to \mathbb{Z}$ est une <u>fonction de Morse discrète</u> sssi $\forall \alpha^{(q)} \in K$:

1. $\sharp\{\beta^{(q+1)} ; \beta^{(q+1)} > \alpha^{(q)}$ et $f(\beta) \leqslant f(\alpha)\} \leqslant 1$
2. $\sharp\{\gamma^{(q-1)} ; \gamma^{(q-1)} < \alpha^{(q)}$ et $f(\gamma) \geqslant f(\alpha)\} \leqslant 1$

Triangulation du cercle ...

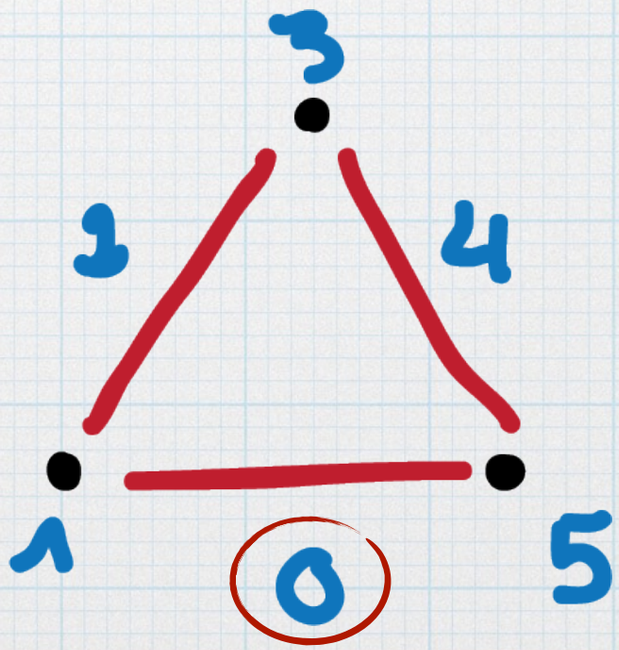


Fonction de Morse discrète

$f : K \to \mathbb{Z}$ est une <u>fonction de Morse discrète</u> sssi $\forall \alpha^{(q)} \in K$:

1. $\sharp\{\beta^{(q+1)} ; \beta^{(q+1)} > \alpha^{(q)}$ et $f(\beta) \leqslant f(\alpha)\} \leqslant 1$
2. $\sharp\{\gamma^{(q-1)} ; \gamma^{(q-1)} < \alpha^{(q)}$ et $f(\gamma) \geqslant f(\alpha)\} \leqslant 1$

Triangulation du cercle ...

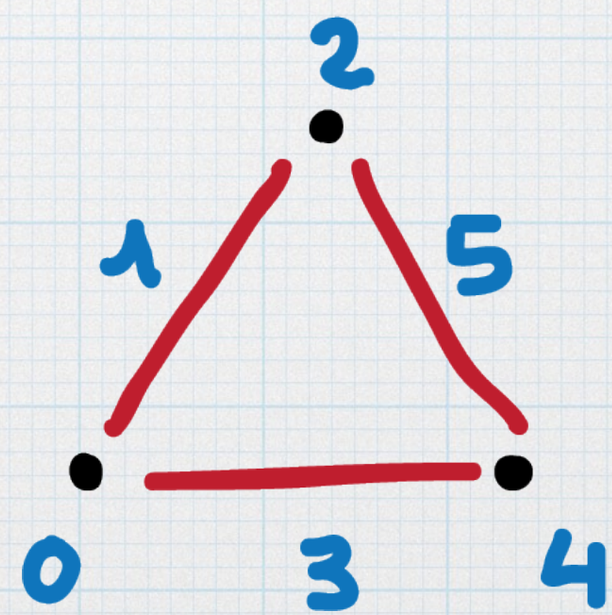


Fonction de Morse discrète

$f : K \to \mathbb{Z}$ est une <u>fonction de Morse discrète</u>
sssi $\forall \alpha^{(q)} \in K$:

1. $\sharp\{\beta^{(q+1)} > \alpha^{(q)} ; f(\beta) \leqslant f(\alpha)\} \leqslant 1$
2. $\sharp\{\gamma^{(q-1)} < \alpha^{(q)} ; f(\gamma) \geqslant f(\alpha)\} \leqslant 1$

Triangulation du cercle ...

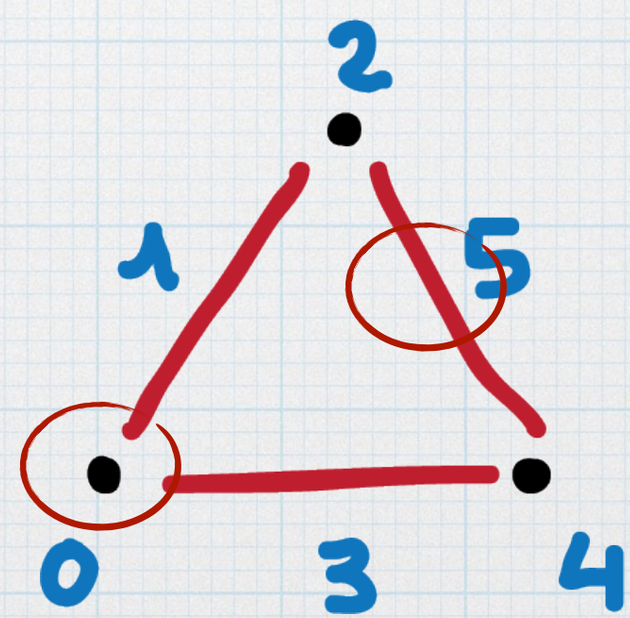


Fonction de Morse discrète

$\alpha^{(q)} \in K$ est une <u>cellule critique</u> si :

1. $\sharp\{\beta^{(q+1)} ; \beta^{(q+1)} > \alpha^{(q)}$ et $f(\beta) \leqslant f(\alpha)\} = 0$
   et
2. $\sharp\{\gamma^{(q-1)} ; \gamma^{(q-1)} < \alpha^{(q)}$ et $f(\gamma) \geqslant f(\alpha)\} = 0$

Triangulation du cercle ...



Théorie de Morse discrète

Soit $c \in \mathbb{Z}$, sous-complexe de niveau c :

$$K_c = \cup_{\{\alpha\,;\,f(\alpha)\leqslant c\}} \cup_{\{\beta\leqslant\alpha\}} \beta$$

Théorème 1

S'il n'y a pas de cellule critique α tq $f(\alpha) \in [a, b]$ alors K_b est de même type d'homotopie que K_a.

Théorème 2

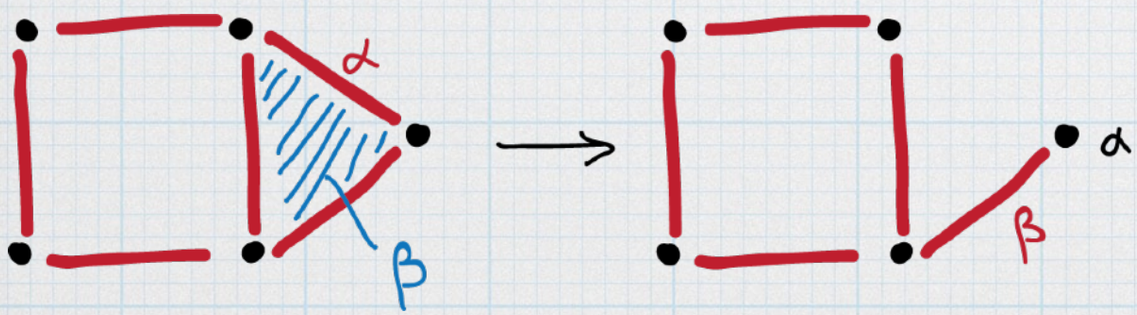
S'il y a une unique cellule critique $\alpha^{(q)}$ tq $f(\alpha) \in [a, b]$ alors il existe un recollement $f\ :\ S^{(q-1)} \to K_a$ tq K_b est de même type d'homotopie que $K_a \cup_f B^q$.

Théorie de Morse discrète

Ingrédient de la preuve ...

« Simplicial collapse »

Alors $K \simeq K \backslash \{\alpha, \beta\}$



α face libre si :
il existe exactement une face maximale β de K tq :

- $\alpha < \beta$

Théorie de Morse discrète

<u>Théorème (décomposition)</u>
Soit K un complexe simplicial muni d'une fonction de Morse, K est de même type d'homotopie qu'un CW-complexe ayant exactement une cellule de dimension q par cellule critique de K de dimension q.

Théorie de Morse discrète

Théorème (inégalité de Morse faible)

K complexe simplicial

* κ_d nombre de cellules critiques de dimension d
* β_d nombre de Betti de dimension d

$$\forall d \qquad \kappa_d \geqslant \beta_d$$

f parfaite si $\kappa_d = \beta_d \quad \forall d$

Théorie de Morse discrète

Corollaire : théorème de Morse

X complexe simplicial

* k_d nombre de cellules de dimension d
* κ_d nombre de cellules critiques de dimension d
* β_d nombre de Betti de dimension d

$$\chi = \sum_{i=0^m} (-1)^d k_d = \sum_{i=0^m} (-1)^d \beta_d$$

Invariant d'Euler-Poincaré

$$\chi = \sum_{d=0}^{m} (-1)^d \kappa_d$$

Théorie de Morse discrète

Théorème (inégalité de Morse forte)

X complexe simplicial

* κ_d nombre de cellules critiques de dimension d
* β_d nombre de Betti de dimension d

$$\sum_{d=0}^{i} (-1)^{i-d} \kappa_d \geqslant \sum_{d=0}^{i} (-1)^{i-d} \beta_d \qquad \forall i$$

Champ de vecteurs gradients discret

Calcul d'une fonction de Morse difficile ...

Caractérisation ?

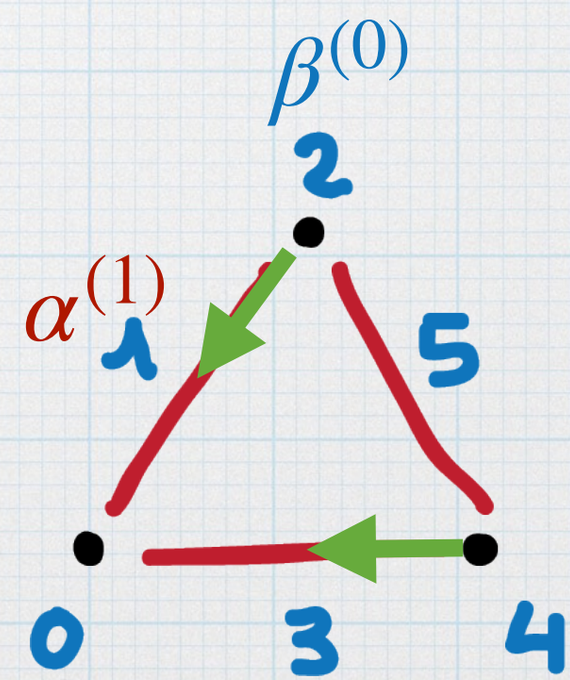
Champ de vecteurs gradient suffisant

Paire de cellules non critiques

$\alpha^{(q)} < \beta^{(q+1)}$ car $f(\alpha) > f(\beta)$

V apparie

$\alpha^{(q)} \to \beta^{(q+1)}$



Champ de vecteurs gradients discret

On va donc définir un champ de vecteur gradient discret (DGVF) $\leftrightarrow$ champ de vecteur gradient d'une fonction de Morse.

Pour cela :

1. Champs de vecteurs discret
2. Notion de V-chemin
3. Un DGVF est un champ de vecteurs discrets avec condition sur les V-chemins

Champ de vecteurs gradients discret

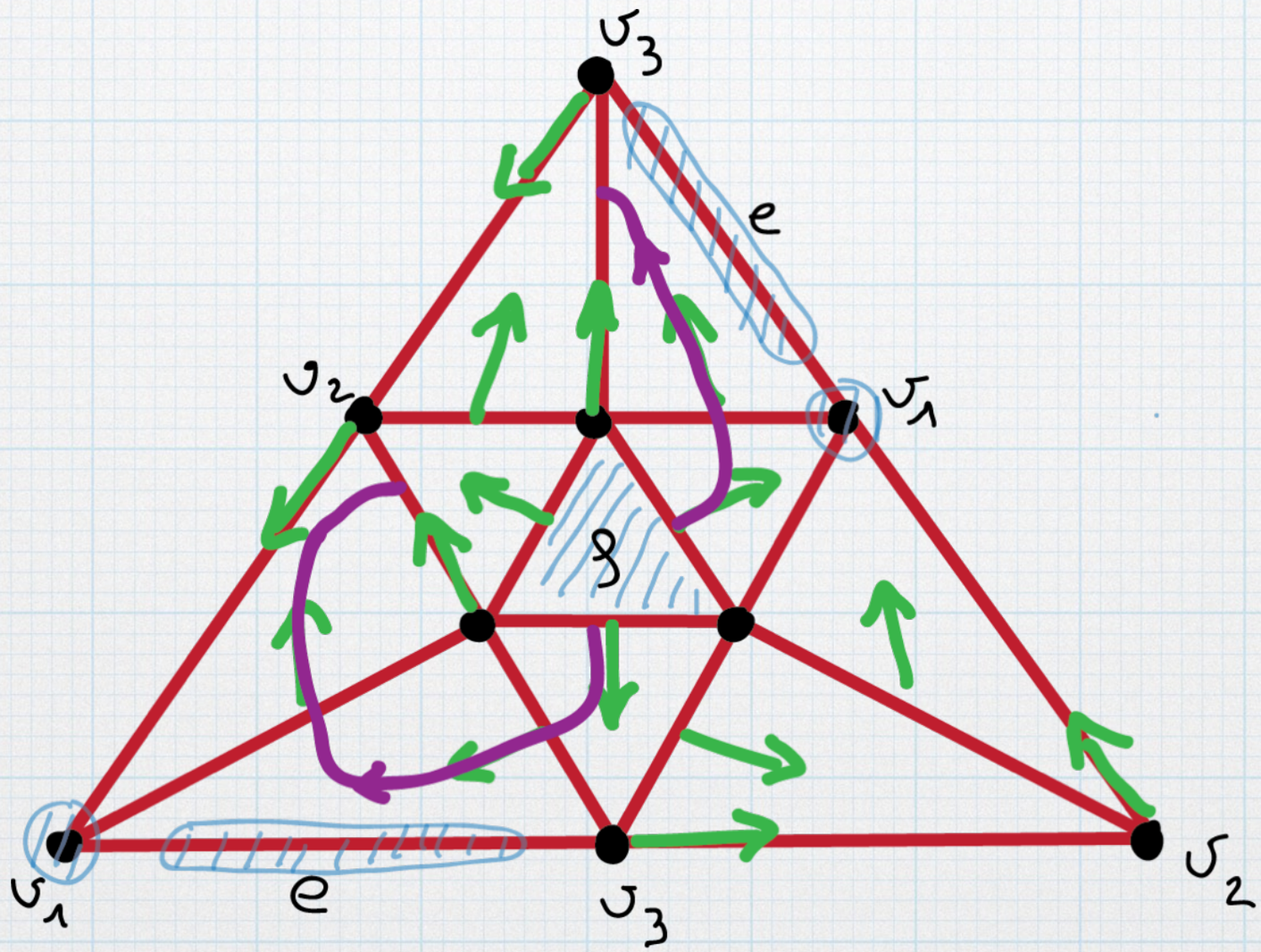
<u>Champ de vecteur discret V sur K</u>
Ensemble de paires $\alpha^{(q)} < \beta^{(q+1)}$ tq
chaque simplexe est dans au plus une paire.

<u>V-chemin (V-path)</u>
Suite de simplexes:

$$\overbrace{\alpha_0^{(q)}, \beta_0^{(q+1)}}^{\in V}, \overbrace{\alpha_1^{(q)}, \beta_1^{(q+1)}}^{\in V}, \ldots, \overbrace{\alpha_r^{(q)}, \beta_r^{(q+1)}}^{\in V}, \alpha_{r+1}^{(q)}$$

$$\beta_0^{(q+1)} > \alpha_1^{(q)} \qquad \beta_r^{(q+1)} > \alpha_{r+1}^{(q)}$$

Champ de vecteurs gradients discret



→ V

→ V-chemins

Champ de vecteurs gradients discret

Théorème 1

Si un champ de vecteur discret V est le champ de vecteurs gradients d'une fonction de Morse discrète f, alors pour tout V-chemin

$$f(\alpha_0) \geqslant f(\beta_0) \geqslant f(\alpha_1) \geqslant f(\beta_1) \geqslant \cdots \geqslant f(\alpha_r) \geqslant f(\beta_r) \geqslant f(\alpha_{r+1})$$

Théorème 2

Un champ de vecteur discret V est le champ de vecteurs gradients d'une fonction de Morse discrète f, s'il ne contient aucun V-chemin non trivial fermé.

Champ de vecteurs gradients discret

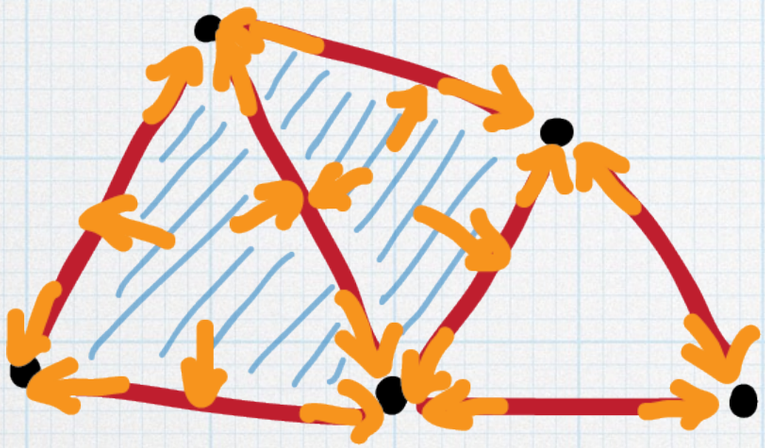
Discrete Gradient Vector Field (DGVF) :
champ de vecteur discret V ne contenant aucun V-chemin non trivial fermé.

Autre construction

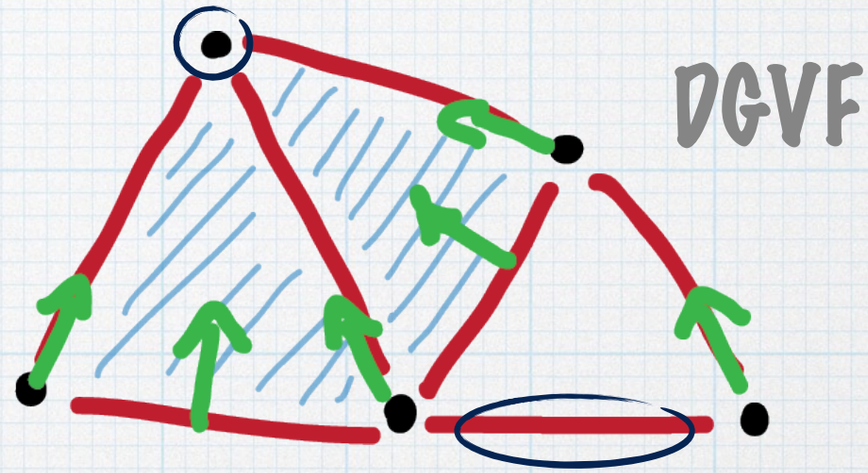
H diagramme de Hasse de K (bord)
V est un couplage (partiel) de H
$\rightarrow$ inverser les arêtes de H appartenant à V
$\rightarrow$ graphe de Morse G

Tous les sous-graphes $G_{q,q+1} = G|_{\dim q \cup \dim q+1}$ sont acycliques

Champ de vecteurs gradients discret

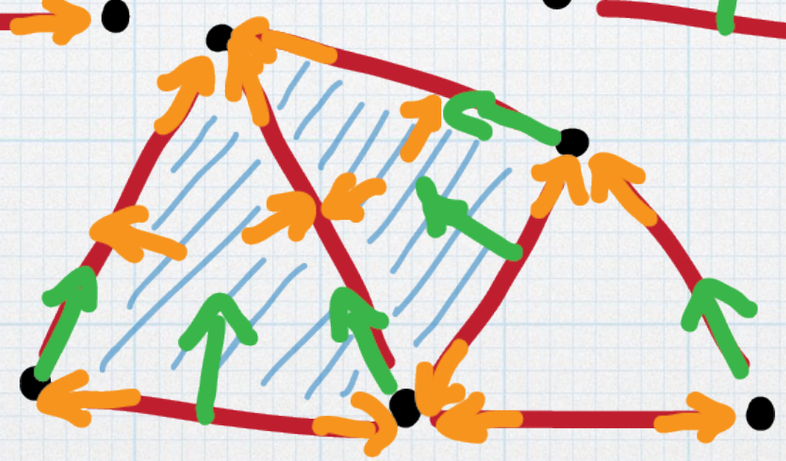


H

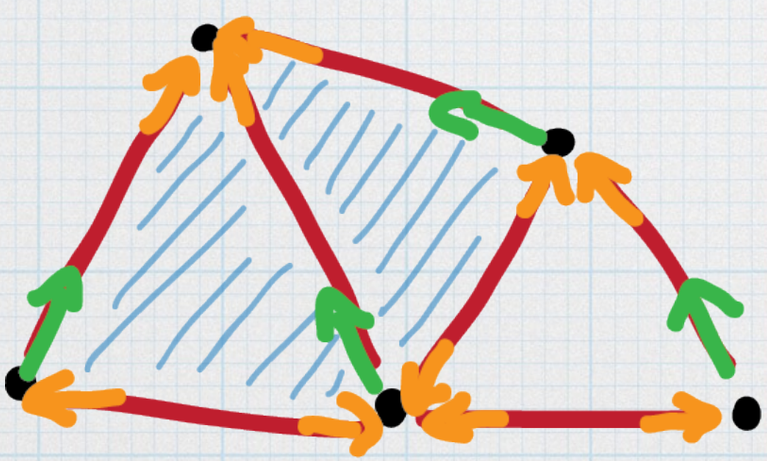


V

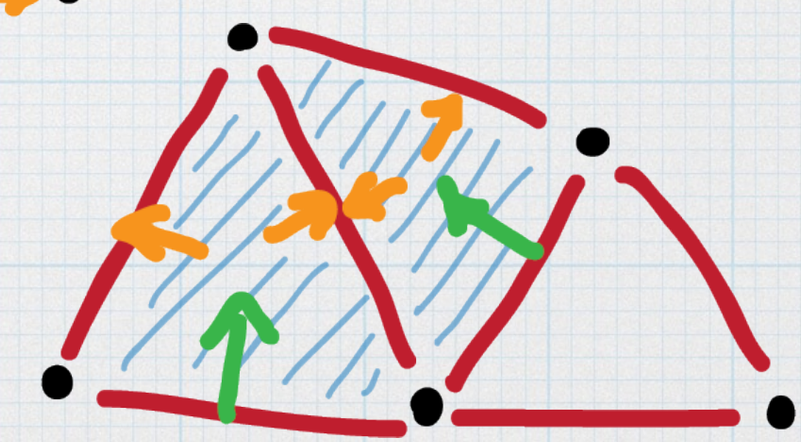
Cellules critiques



G

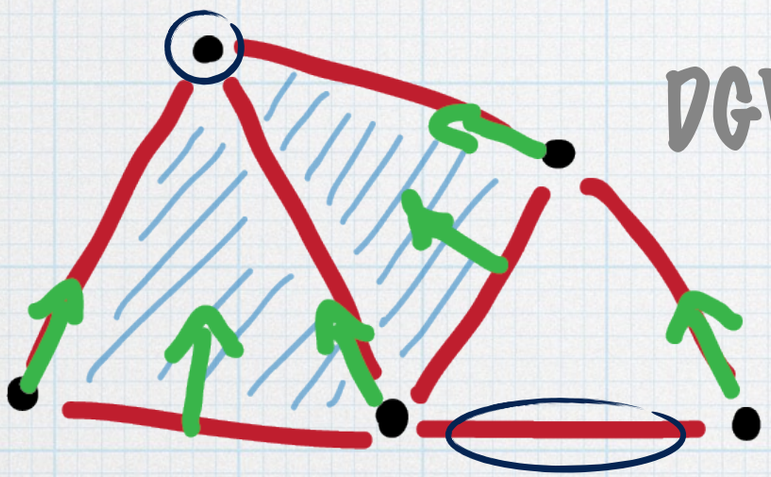


$G_{0,1}$



$G_{1,2}$

Champ de vecteurs gradients discret



DGVF

V

Cellules critiques

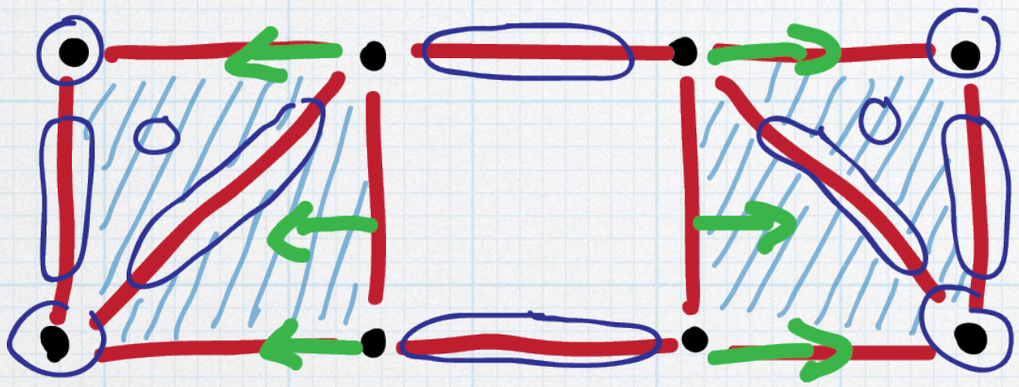
* κ_d nombre de cellules critiques de dimension d
* β_d nombre de Betti de dimension d

$$\forall d \qquad \kappa_d \geqslant \beta_d$$

V <u>optimal</u> si κ_d minimal

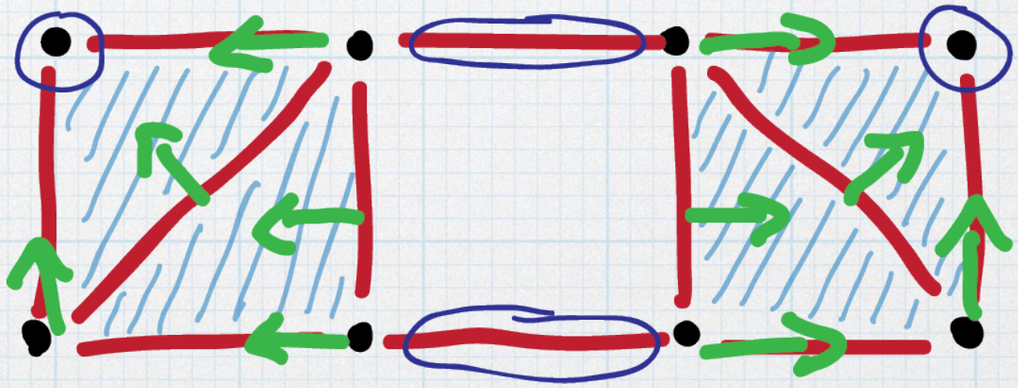
V <u>parfait</u> si $\kappa_d = \beta_d \quad \forall d$

Champ de vecteurs gradients discret



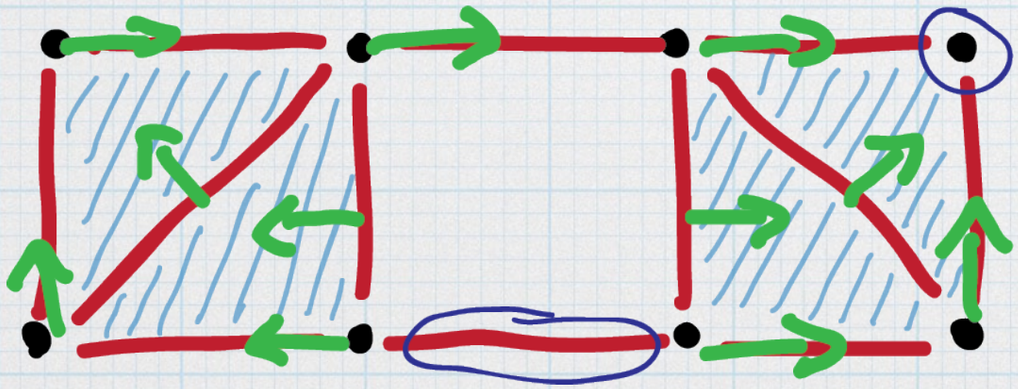
$\kappa_0 = 2 \qquad \beta_0 = 1$

$\kappa_1 = 2 \qquad \beta_1 = 1$



DGVF non parfait

(mais on ne peut plus ajouter de paires)



DGVF parfait

Complexe de Morse

On peut construire un complexe de chaînes (complexe de Morse) $\mathscr{M}$ tq :

$$\forall q \quad H_q(\mathscr{M}) \simeq H_q(K)$$

avec :

→ $\mathscr{M}_q$ le $\mathbb{Z}$-module libre engendré par les cellules critiques de dim q

→ Opérateur de bord $\tilde{\partial}$ calculé à partir du flot de V

$$0 \to \mathscr{M}_n \xrightarrow{\tilde{\partial}_n} \mathscr{M}_{n-1} \xrightarrow{\tilde{\partial}_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\tilde{\partial}_1} \mathscr{M}_0 \to 0$$

Complexe de Morse

Calcul de $\tilde{\partial}$

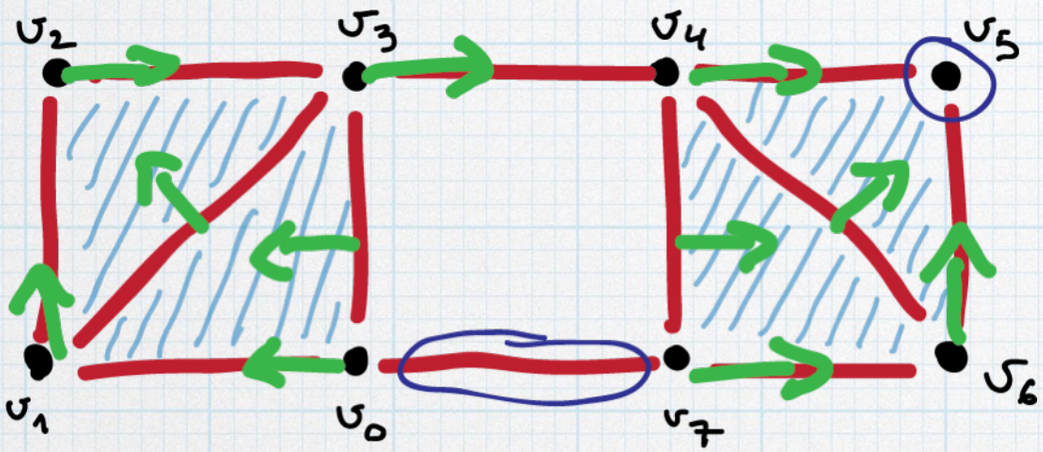
Forman :
Dénombrement des V-chemins entre deux cellules critiques

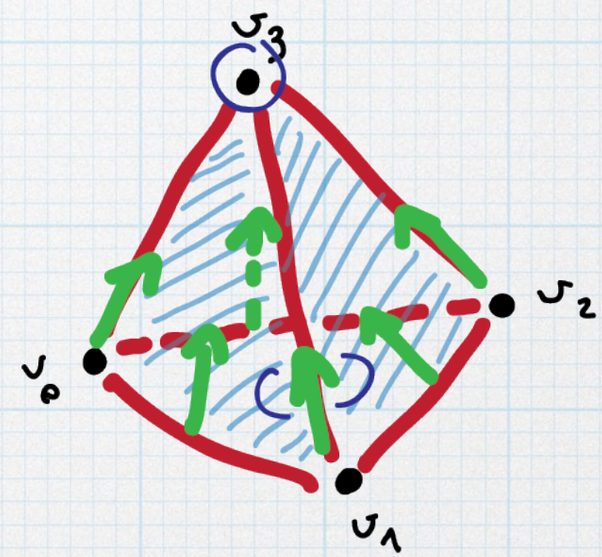
$\alpha^{(q+1)}$ critique

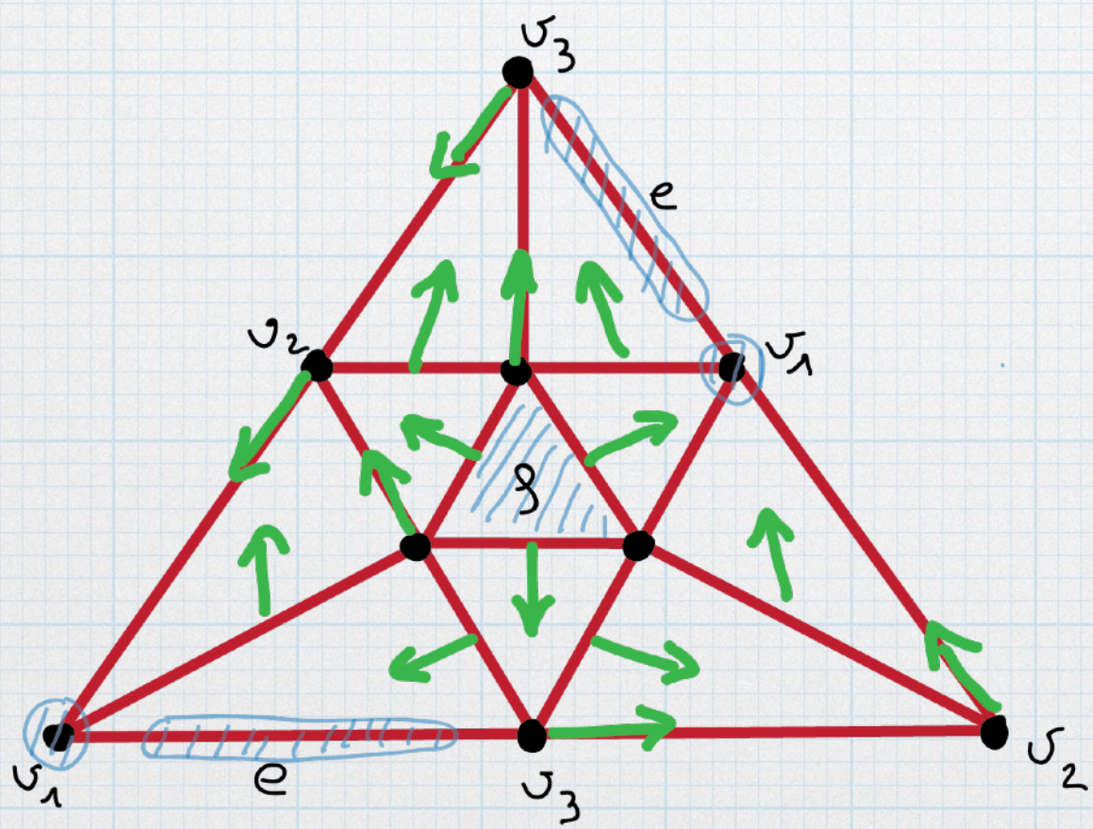
$$\tilde{\partial}\,\alpha^{(q+1)} = \sum_{\beta^{(q)}\ \text{critiques}} m(\alpha^{(q+1)}, \beta^{(q)}) \cdot \beta^{(q)}$$

$$\sum_{V\text{-chemins } \alpha \to \beta} \pm 1$$

Complexe de Morse







Théorie de Morse discrète et topologie

* Calcul d'un DGVF optimal NP-difficile en général
* Pour certains complexes, il n'existe pas de DGVF parfait
  * Bing's house
  * Dunce hat

Hypothèse d'acyclicité ...

Théorie de Morse discrète et topologie

* En dimension 2, l'existence / calcul d'un DGVF parfait sont garantis

* En dimension quelconque :calcul de l'homologie possible via complexe de Morse itéré

  * Soit V un DGVF (non parfait) sur K

  * Calculer le complexe de Morse associé à V

  * Puis calculer un DGVF sur ce complexe de Morse, etc ...