

PARCOURS **IMD**

INFORMATIQUE ET **M**MATHÉMATIQUES **D**ISCRÈTES

MODULE « TOPOLOGIE ALGÈBRE DISCRÈTE »

Alexandra Bac

TOPOLOGIE ALGORITHMIQUE

Introduction

Topologie algorithmique

~~Groupe fondamental~~

~~Groupes d'homotopie~~

Homologie

Topologie algorithmique

Que calculer ?

Homologie

Niveau 0 : Caractéristique d'Euler-Poincaré

Niveau 1 : Nombres de Betti

Niveau 2 : Décomposition en facteurs invariants des groupes d'homologie $\mathbb{Z}^{\beta_q} \times \mathbb{Z}/\lambda_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\lambda_2\mathbb{Z} \times \dots$

Niveau 3 : Facteurs invariants et générateurs

$$\mathbb{Z}[z_1] \times \dots \times \mathbb{Z}[z_{b_q}] \times \mathbb{Z}/\lambda_1\mathbb{Z}[c_1] \times \mathbb{Z}/\lambda_2\mathbb{Z}[c_2] \times \dots$$

Niveau 4 : Facteurs invariants et générateurs et décomposition des cycles

Topologie algorithmique

Calcul de l'homologie

```
graph TD; A[Calcul de l'homologie] --> B[Forme normale de Smith]; A --> C[Homologie effective]; A --> D[Théorie de Morse discrète];
```

Forme normale
de Smith

* Algébrique

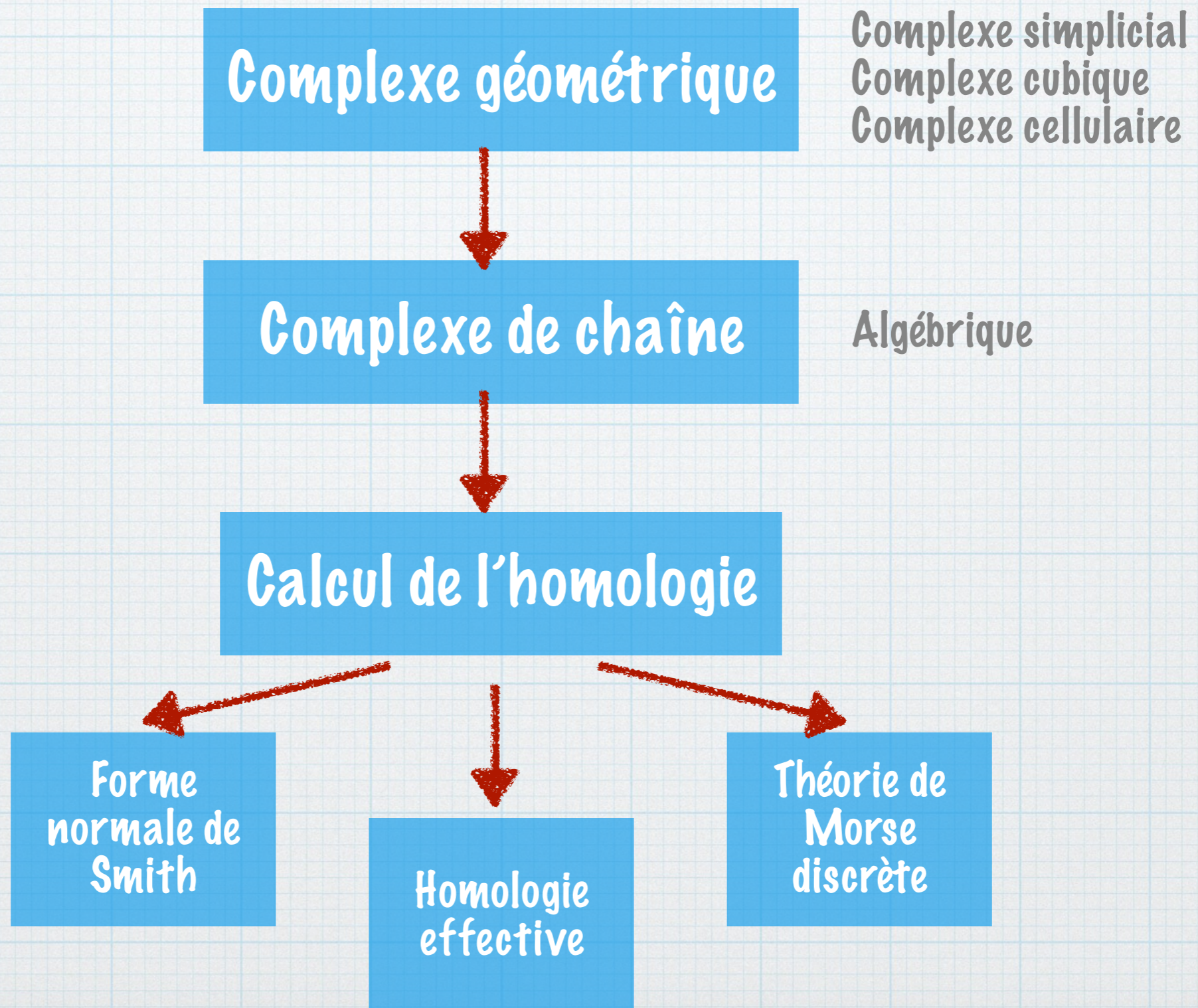
Homologie
effective

Réduction

Théorie de
Morse discrète

* Combinatoire
* Géométrie

Topologie algorithmique



Complexe simplicial

Complexe simplicial

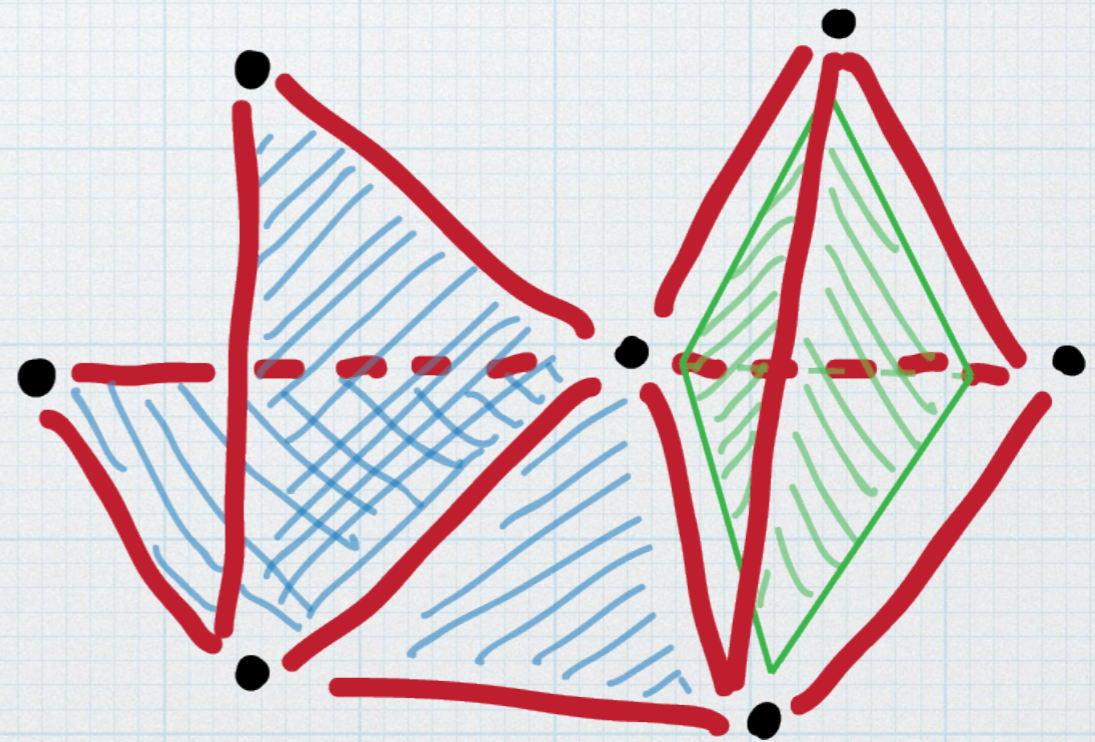
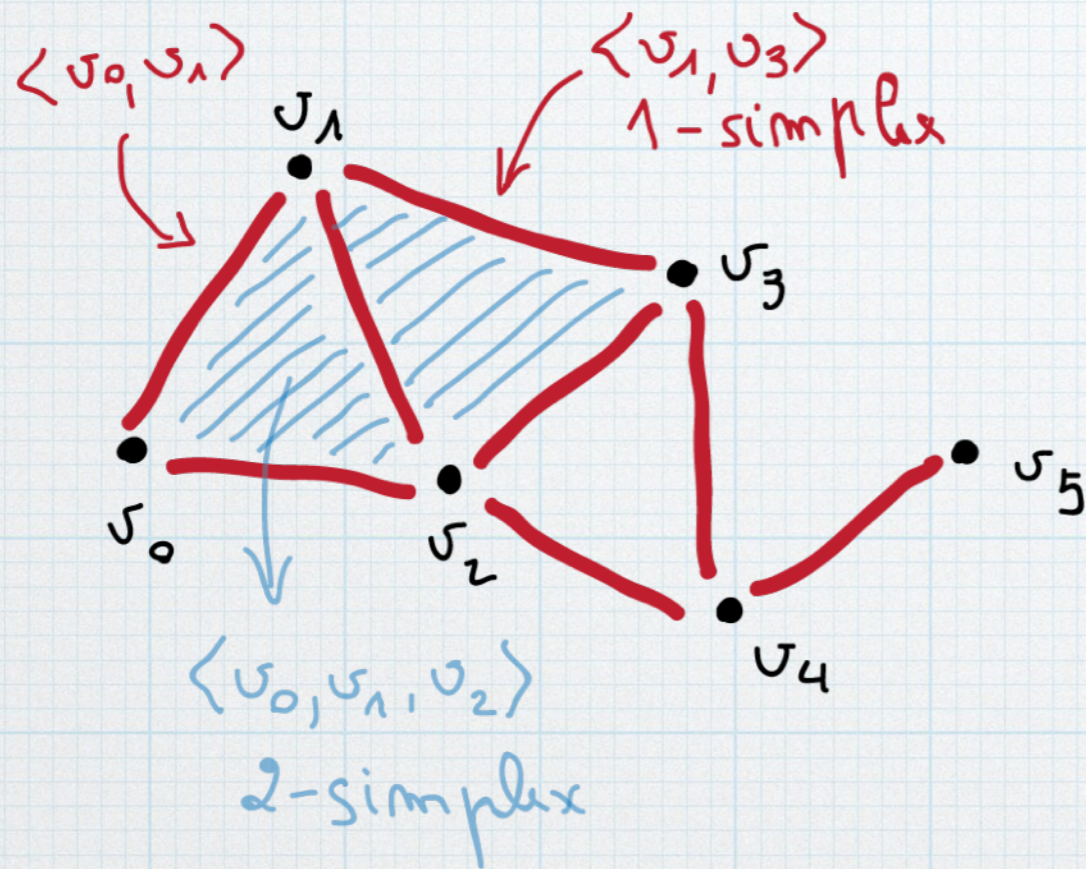
p_0, \dots, p_n points de \mathbb{R}^m
 $\langle p_0, \dots, p_n \rangle$ enveloppe convexe

- * q -simplex : $\langle p_0, \dots, p_{q+1} \rangle$ points en position générale
- * K complexe simplicial fini
 - * ensemble de simplex
 - * $\forall \sigma \in K$ ses faces sont dans K
 - * $\forall \sigma, \tau \in K, \sigma \cap \tau$ vide ou face commune

Dimension de K

K_q

Complexe simplicial



Complexe de chaîne

K
complexe
simplicial

C
complexe de
chaîne

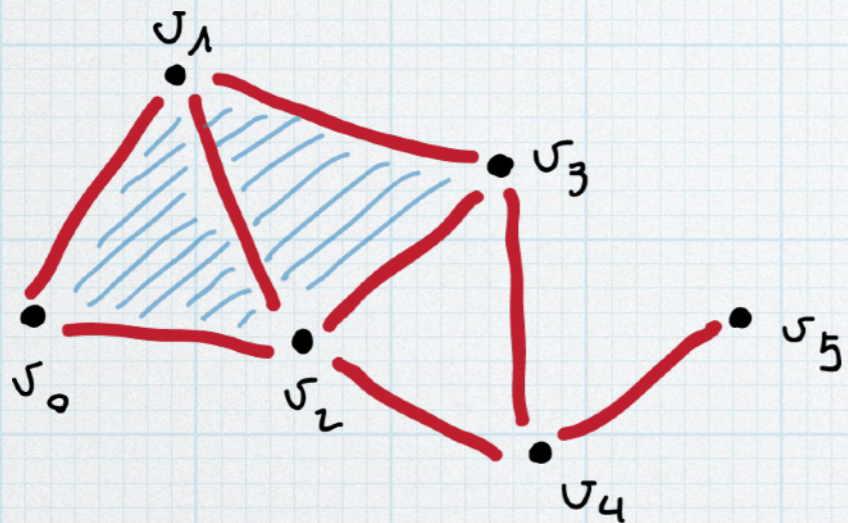
Numérotation des
0-simplex
(orientation)

$$C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \rightarrow 0$$
$$\partial_q \partial_{q-1} = 0 \quad \forall q$$

$$C_q = \text{Span}(K_q)$$

$$\partial_q \langle p_0, \dots, p_q \rangle = \sum_{i=0}^q (-1)^{i+1} \langle p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_q \rangle$$

Complexe de chaîne



$$\partial_1 e_{01} = \frac{-\langle \hat{v}_0, v_1 \rangle + \langle v_0, \hat{v}_1 \rangle}{v_0 - v_1}$$

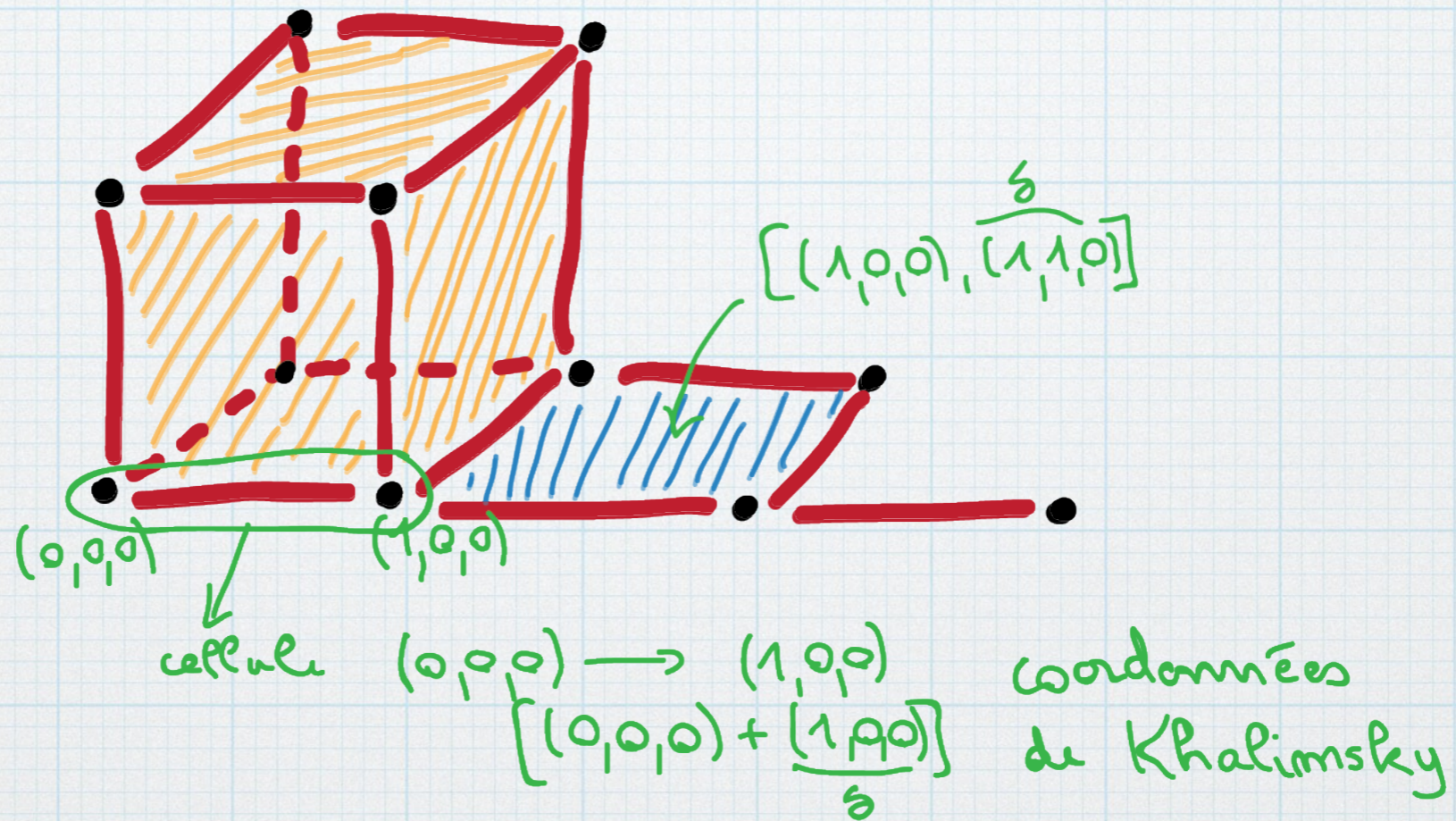
$$\partial_1 e_{23} = v_2 - v_3$$

$$\partial_2 f_{012} = -e_{12} + e_{02} - e_{01}$$

$$\partial_1 \partial_2 f_{012} = -(v_1 - v_2) + (v_0 - v_2) - (v_0 - v_1) = 0$$

$$\partial_{q-1} \partial_q = 0$$

Complexe cubique



Complexe cubique

$$\partial_q([x, \delta]) = \sum_{i=1}^n -1^{o(i)} ([x + \delta_i e_i, \delta - \delta_i e_i] - [x, \delta - \delta_i e_i])$$

où $o(i)$ désigne le nombre de 1 dans $(\delta_1, \dots, \delta_i)$

$\partial[(1,0,0), (1,1,0)] =$
 $-([(2,0,0), (0,1,0)] - [(1,0,0), (0,1,0)])$
 $+([(1,1,0), (1,0,0)] - [(1,0,0), (1,0,0)])$

$(0,0,0)$ cellule $(0,0,0) \rightarrow (1,0,0)$ coordonnées de Khalimsky
 $[(0,0,0) + \frac{\delta}{s}(1,0,0)]$

Un outil avant de
commencer :
réduction

Réduction

Réduction entre deux complexes de chaîne
 (C, ∂) et (C', ∂') :

$$\rho = (h, f, g)$$

$$h_q : C_q \rightarrow C_{q+1}, f : C \rightarrow C', g : C' \rightarrow C$$

(i) f, g morphismes de chaînes

(ii) $fg = \text{Id}_{C'}$

(iii) $gf = \text{Id}_C + h\partial + \partial h$

(iv) $hh = 0, fh = 0, hg = 0$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \longrightarrow & C_{q+1} & \xrightleftharpoons{\partial_{q+1}} & C_q & \xrightleftharpoons{\partial_q} & C_{q-1} & \longrightarrow \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & f_{q+1} \downarrow & & f_q \downarrow & & f_{q-1} \downarrow & \\
 & \uparrow g_{q+1} & & \uparrow g_q & & \uparrow g_{q-1} & \\
 & C'_{q+1} & \xrightarrow{\partial'_{q+1}} & C'_q & \xrightarrow{\partial'_q} & C'_{q-1} & \longrightarrow \\
 & & & h_q & & h_{q-1} &
 \end{array}$$

Etant donnée
une réduction :

$$\forall q \quad H_q(C) = H_q(C')$$

Forme normale de Smith

Références

Munkres, J. Elements of algebraic topology.
Addison-Wesley Publishing. 1984.

Peltier, S. et al. Computation of homology groups and
generators.
Computer and Graphics. 2006.

Forme Normale de Smith

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{Z})$

Il existe U, V deux matrices inversibles telles que :

$$UAV = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_1 & & & 0 \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & b_l \end{matrix}} & & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad b_i \mid b_{i+1}$$

Forme Normale de Smith et homologie

Théorème

Soit C le complexe de chaîne :

$$C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \rightarrow 0$$

$$C_p = U_p \oplus \underbrace{V_p \oplus W_p}_{Z_p}$$

cycles

$$Z_q = \ker \partial_q$$
$$B_q = \operatorname{Im} \partial_{q+1}$$

bords

Matrice de $\partial_q : U_q \rightarrow W_{q-1}$

$$\begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_l \end{pmatrix} \quad b_i | b_{i+1}$$

$$\partial_q(U_q) \subseteq W_{q-1}$$

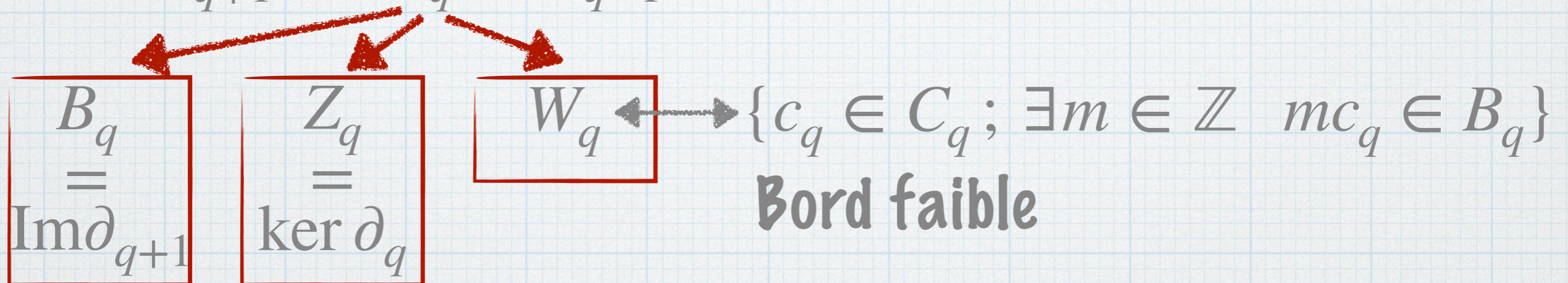
$$\partial_q(V_q) = 0$$

$$\partial_q(W_q) = 0$$

Forme Normale de Smith et homologie

Preuve

$$\dots \rightarrow C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \rightarrow \dots$$



$$B_q \subseteq W_q \subseteq Z_q \subseteq C_q$$

Forme Normale de Smith et homologie

Étape 1

$$Z_q/W_q \simeq H_q/T_q$$

Sous-groupe de torsion
de H_q

$$\pi : Z_q \rightarrow H_q = Z_q/B_q \rightarrow H_q/T_q$$

$$\ker \pi = W_q$$

$W_q \triangleleft C_q$ libre

Z_q libre

$\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_k$ base de Z_q/W_q

d_1, \dots, d_l base de W_q

$\Rightarrow c_1, \dots, c_k, d_1, \dots, d_l$ base de $Z_q \simeq V_q \oplus W_q$

Forme Normale de Smith et homologie

Etape 2

Il existe e_1, \dots, e_n base de C_q
 e'_1, \dots, e'_m base de C_{q-1} où ∂_q en FNS

$$\begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{cccc}
 b_1 & & & \\
 & b_2 & & \\
 & & \dots & \\
 & & & b_l \\
 \hline
 & & & 0 \\
 & & & 0 \\
 & & & \vdots \\
 & & & e'_m \\
 \hline
 & & & 0 \\
 & & & 0 \\
 & & & \vdots \\
 & & & e'_m
 \end{array} \right)
 \begin{array}{l}
 e'_1 \\
 \vdots \\
 e'_l \\
 e'_{l+1} \\
 \vdots \\
 e'_m
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 e_1 \quad \dots \quad e_l \quad e_{l+1} \dots e_n
 \end{array}$$

$$b_i | b_{i+1}$$

- i. e_{l+1}, \dots, e_n base de Z_q
- ii. e'_1, \dots, e'_l base de W_{q-1}
- iii. $b_1 e'_1, \dots, b_l e'_l$ base de B_{q-1}

Forme Normale de Smith et homologie

Etape 3

On pose $U_q = \text{Span}\{e_1, \dots, e_n\}$

Soit $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_k$ base de Z_q/W_q , on pose

$V_q = \text{Span}\{c_1, \dots, c_k\}$

$$C_q = U_q \oplus V_q \oplus W_q$$

$$\mathcal{M}(\partial_q : U_q \rightarrow W_q) = \left(\begin{array}{ccc|c} b_1 & & & e'_1 \\ & b_2 & & \vdots \\ & & \dots & \\ 0 & & & e'_l \\ & & & \vdots \\ & & & e'_l \end{array} \right) \quad b_i | b_{i+1}$$

Forme Normale de Smith et homologie

On en déduit :

$$H_q \simeq \underbrace{\mathbb{Z}_q / W_q}_{\text{libre}} \oplus \underbrace{W_q / B_q}_{\text{torsion}}$$

i. e_{l+1}, \dots, e_n base de \mathbb{Z}_q
 ii. e'_1, \dots, e'_l base de W_{q-1}
 iii. $b_1 e'_1, \dots, b_l e'_l$ base de B_{q-1}

$$\mathbb{Z}^{\beta_q} = \mathbb{Z}^{\text{rang}(\mathbb{Z}_q) - \text{rang}(W_q)}$$

$$W_{q-1} = \text{Span}\{e'_1, \dots, e'_l\}$$

$$B_{q-1} = \text{Span}\{b_1 e'_1, \dots, b_l e'_l\}$$

$$W_{q-1} / B_{q-1} \simeq \bigoplus_{i=1}^l \mathbb{Z} / b_i \mathbb{Z}$$

Calcul de la FNS

Rang de A constant

$$A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{Z})$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & e'_1 \\ & & & \vdots \\ & & & e'_l \\ e_1 & \dots & e_l & \end{array} \right)$$

Opérations de base :

- * Echanges de lignes $l_i \leftrightarrow l_k \xrightarrow{\sim} e'_i \leftrightarrow e'_k$
- * Multiplication $l_i \leftarrow -l_i \xrightarrow{\sim} e'_i \leftarrow -e'_i$
- * Combinaison $l_i \leftarrow l_i + q \cdot l_k \xrightarrow{\sim} e'_i \leftarrow e'_i + q \cdot e'_k$

- * Echanges de col $c_i \leftrightarrow c_k \xrightarrow{\sim} e_i \leftrightarrow e_k$
- * Multiplication $c_i \leftarrow -c_i \xrightarrow{\sim} e_i \leftarrow -e_i$
- * Combinaison $c_i \leftarrow c_i + q \cdot c_k \xrightarrow{\sim} e_i \leftarrow e_i + q \cdot e_k$

Calcul de la FNS

$$A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{Z})$$
$$\begin{pmatrix} & & & & e'_1 \\ & & & & \vdots \\ & & a_{i,j} & & \\ & & & & e'_l \\ e_1 & \dots & e_l & & \end{pmatrix}$$

Entrée minimale de A :

$$\alpha(A) = \min_{a_{i,j} \neq 0} |a_{i,j}|$$

Algorithme

(1) Transformer A en B de même rang tq

(a) $\alpha(B) \leq \alpha(A)$

(b) $\alpha(B) \mid b_{i,j} \quad \forall i, j$

(2) Réduire la dimension de B

$\rightarrow (n - 1) \times (n - 1)$

Calcul de la FNS (1)

Tant que $\exists k, l; \alpha(A) \nmid a_{k,l}$ ($\alpha(A) = |a_{i,j}|$)
 Tant que $\exists k; \alpha(A) \nmid a_{k,j}$ (colonne) ou $\exists l; \alpha(A) \nmid a_{i,l}$ (ligne)

→ Cas 1

Cas 1

Cas 2

$$\alpha(A) = |a_{i,j}|$$

On a $a_{i,j} \nmid a_{k,j}$

$$a_{k,j} = q \cdot a_{i,j} + r \quad 0 \leq r < |a_{i,j}|$$

$$l_k \leftarrow l_k - q \cdot l_i$$

$$\begin{array}{c}
 l_i \\
 l_k
 \end{array}
 \left(
 \begin{array}{ccc}
 \vdots & & \\
 \text{---} & a_{i,j} & \text{---} \\
 \vdots & & \\
 \text{---} & a_{k,j} & \text{---} \\
 \vdots & & \\
 & \vdots & \\
 & & e_l
 \end{array}
 \right)
 \begin{array}{c}
 e'_1 \\
 \vdots \\
 e'_l
 \end{array}$$

r ←

$$\alpha(A) \leq r < |a_{i,j}|$$

Calcul de la FNS (1)

Tant que $\exists k, l; \alpha(A) \nmid a_{k,l}$

Tant que $\exists k; \alpha(A) \nmid a_{k,j}$ (colonne) ou $\exists l; \alpha(A) \nmid a_{i,l}$ (ligne)

→ Cas 1

Cas 1

Cas 2

→ Cas 2

$$\alpha(A) = |a_{i,j}|$$

On a $a_{i,j} \nmid a_{i,l}$

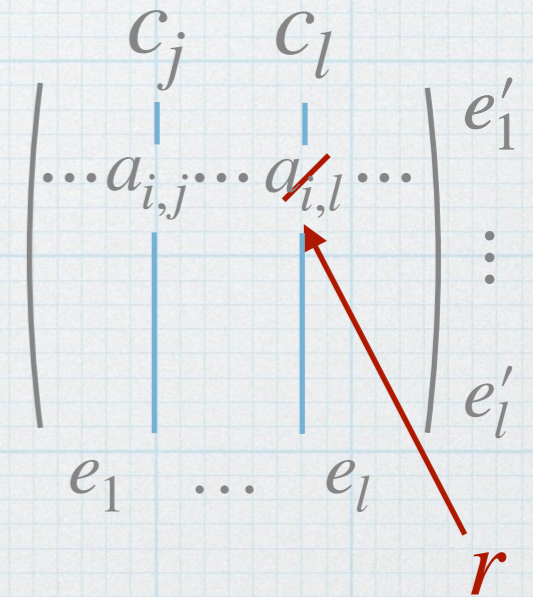
$$a_{i,l} = q \cdot a_{i,j} + r \quad 0 \leq r < |a_{i,j}|$$

$$c_l \leftarrow c_l - q \cdot c_j$$

Ftq

// $\alpha(A)$ divise toute sa ligne et sa colonne

$\alpha(A)$ décroît strictement
Par induction, les boucles
terminent



$$\alpha(A) \leq r < |a_{i,j}|$$

Calcul de la FNS (1)

Tant que $\exists k, l; \alpha(A) \nmid a_{k,l}$

Tant que $\exists k; \alpha(A) \nmid a_{k,j}$ (colonne) ou $\exists l; \alpha(A) \nmid a_{i,l}$ (ligne)

... / ...

Ftq

// $\alpha(A)$ divise toute sa ligne et sa colonne

Si $\exists a_{s,t}$ tq $\alpha(A) = |a_{i,j}| \nmid a_{s,t}$

On a : $a_{s,j} = z a_{i,j}$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ c_j \quad c_t \\ \vdots \\ l_i \left(\begin{array}{ccc} \cdots & a_{i,j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l_s \left(\begin{array}{ccc} \cdots & a_{s,j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right) & \cdots & a_{i,t} \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_1 & \cdots & e_l \end{array} \right) \begin{array}{c} e'_1 \\ \vdots \\ e'_l \end{array} \end{array}$$

Calcul de la FNS (1)

Tant que $\exists k, l; \alpha(A) \nmid a_{k,l}$

Tant que $\exists k; \alpha(A) \nmid a_{k,j}$ (colonne) ou $\exists l; \alpha(A) \nmid a_{i,l}$ (ligne)

... / ...

Ftq

// $\alpha(A)$ divise toute sa ligne et sa colonne

Si $\exists a_{s,t}$ tq $\alpha(A) = |a_{i,j}| \nmid a_{s,t}$

On a : $a_{s,j} = z a_{i,j}$

$$l_s \leftarrow l_s - z \cdot l_i$$

$$\begin{matrix} & c_j & c_t & & \\ l_i & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,t} & \dots & e'_1 \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ l_s & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & e'_1 \\ & e_1 & \dots & e_l & & & \end{matrix}$$

$a_{s,t} - z a_{i,t}$

Calcul de la FNS (1)

Tant que $\exists k, l; \alpha(A) \nmid a_{k,l}$

Tant que $\exists k; \alpha(A) \nmid a_{k,j}$ (colonne) ou $\exists l; \alpha(A) \nmid a_{i,l}$ (ligne)

... / ...

Ftq

// $\alpha(A)$ divise toute sa ligne et sa colonne

Si $\exists a_{s,t}$ tq $\alpha(A) = |a_{i,j}| \nmid a_{s,t}$

On a : $a_{s,j} = z a_{i,j}$

$$l_i \leftarrow l_i - z \cdot l_s$$

$$l_i \leftarrow l_i + l_s$$

$$\begin{array}{c}
 c_j \quad c_t \\
 \vdots \quad \vdots \\
 l_i \left(\begin{array}{ccc} \cdots & \circledast a_{i,j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right) \begin{array}{c} e'_1 \\ \vdots \\ e'_l \end{array} \\
 l_s \left(\begin{array}{ccc} \cdots & \vdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right) \begin{array}{c} e_1 \\ \cdots \\ e_l \end{array}
 \end{array}$$

$$a_{s,t} + (1 - z)a_{i,t}$$

Calcul de la FNS (1)

Tant que $\exists k, l; \alpha(A) \nmid a_{k,l}$

Tant que $\exists k; \alpha(A) \nmid a_{k,j}$ (colonne) ou $\exists l; \alpha(A) \nmid a_{i,l}$ (ligne)

... / ...

Ftq

// $\alpha(A)$ divise toute sa ligne et sa colonne

Si $\exists a_{s,t}$ tq $\alpha(A) = |a_{i,j}| \nmid a_{s,t}$

On a : $a_{s,j} = z a_{i,j}$

$$l_i \leftarrow l_i - z \cdot l_s$$

$$l_i \leftarrow l_i + l_s$$

Fsi

Ftq

// $\alpha(A)$ divise tous les **éléments non nuls** de A

$$\begin{array}{c} c_j \quad c_t \\ \vdots \quad \vdots \\ l_i \left(\begin{array}{ccc} \dots & a_{i,j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right) \begin{array}{c} e'_1 \\ \vdots \\ e'_l \end{array} \\ l_s \left(\begin{array}{ccc} \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right) \begin{array}{c} e_1 \\ \dots \\ e_l \end{array} \end{array}$$

$$a_{s,t} + (1 - z)a_{i,t}$$

Calcul de la FNS (2)

Puisque $\alpha(A) = |a_{i,j}|$ divise tous les éléments de A
Par opérations élémentaires, on met A sous la forme

$$\left(\begin{array}{c} \alpha(A) \dots \dots \dots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right)$$

Comme $\forall i \ a_{i,1} = z_i \cdot a_{1,1}$

$$l_i \leftarrow l_i - z_i \cdot l_1$$

Comme $\forall j \ a_{1,j} = z'_j \cdot a_{1,1}$

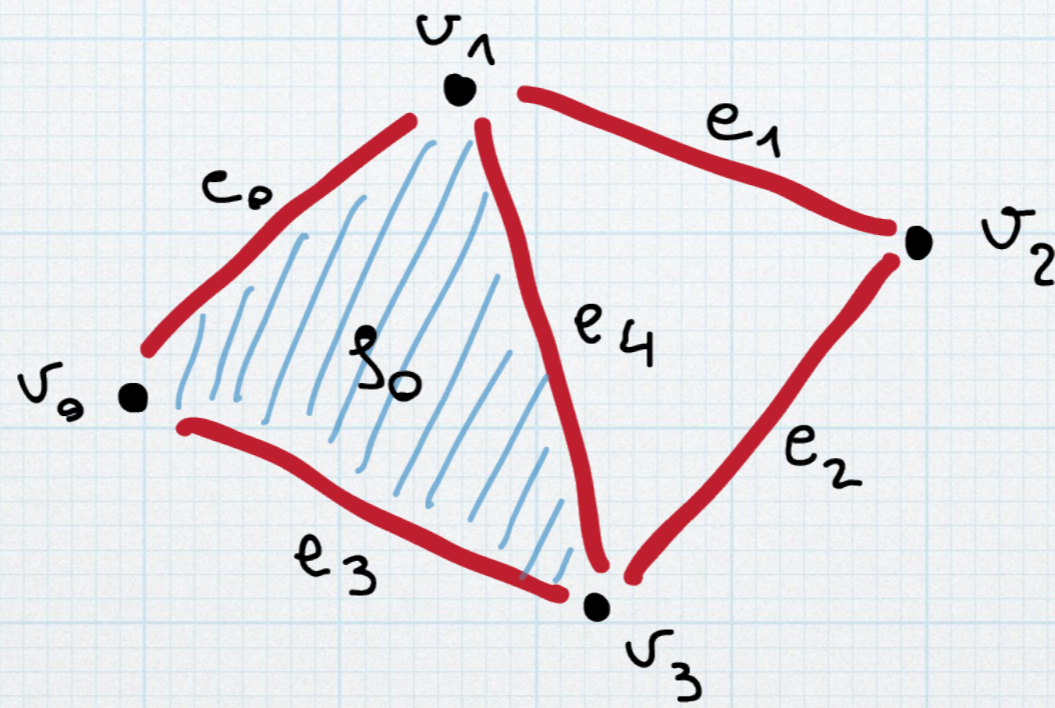
$$c_j \leftarrow c_j - z'_j \cdot c_1$$

$$\left(\begin{array}{c} \alpha(A) \ 0 \ \dots \ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} \\ \\ B \\ \\ \end{array}$$

Recommencer avec B

$$\alpha(A) \mid b_{i,j} \quad \forall i, j$$

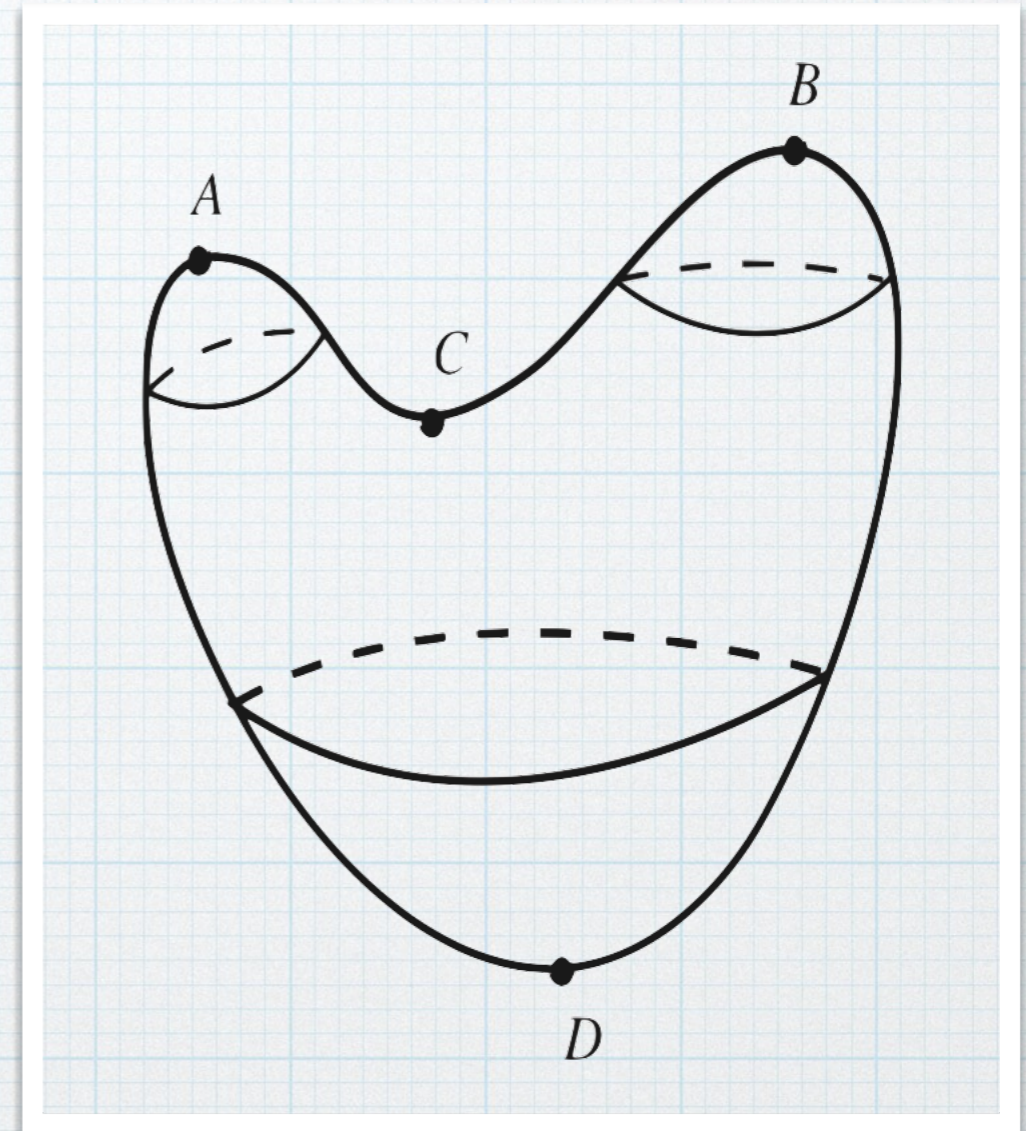
Calcul de la FNS



Théorie de Morse discrète

Théorie de Morse

(R)appels ...



Références

Milnor, J., et al. Morse Theory.
(AM-51), Volume 51. Princeton University Press, 1969.

Yukio Matsumoto. An Introduction to Morse Theory.
Oxford University Press, 2001.

Théorie de Morse

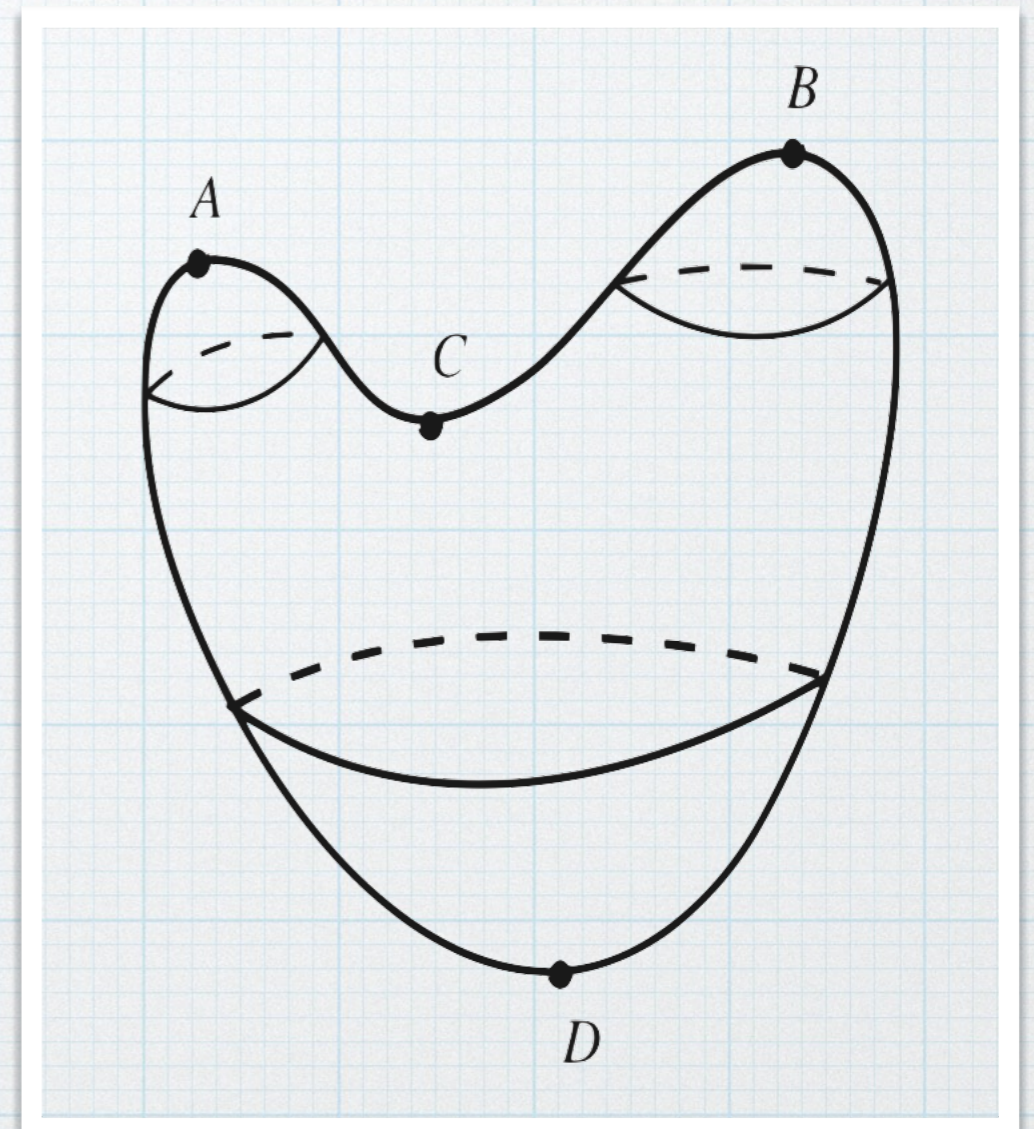
Fonction sur \mathcal{S} ,
variété fermée (compacte sans bord)

$$f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$$

Points critiques de f

Forme de \mathcal{S}

Homologie de \mathcal{S}



Espace \mathcal{S}

Théorie de Morse

Fonction sur \mathcal{S} , variété fermée (compacte sans bord)

$$f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$$

Fonction de Morse

Lemme de Morse

Décomposition et points critiques

Inégalités de Morse

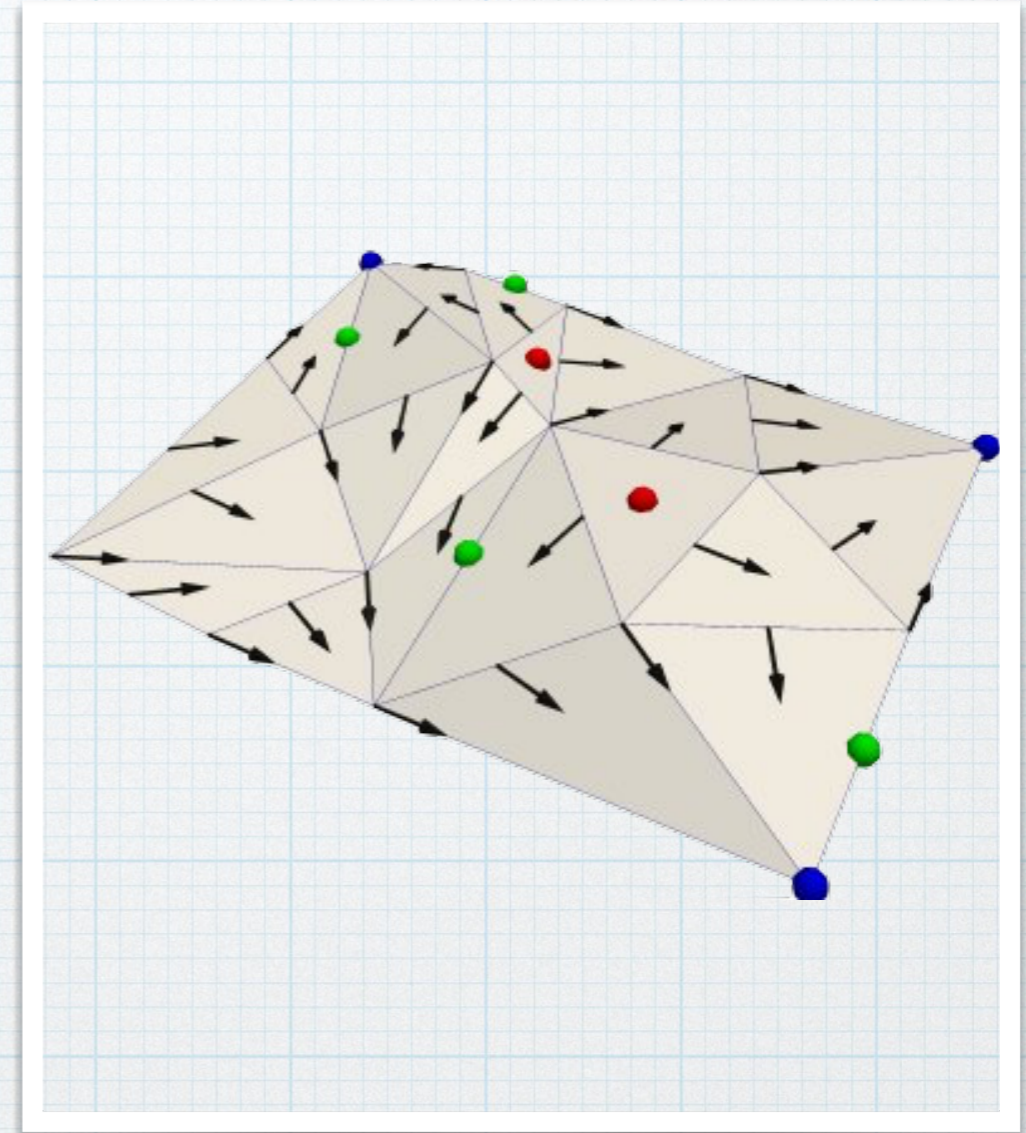
Caractéristique d'Euler

Nombres de Betti de \mathcal{S}

Champ de vecteurs gradient

Théorie de Morse-Smale

Théorie de Morse discrète

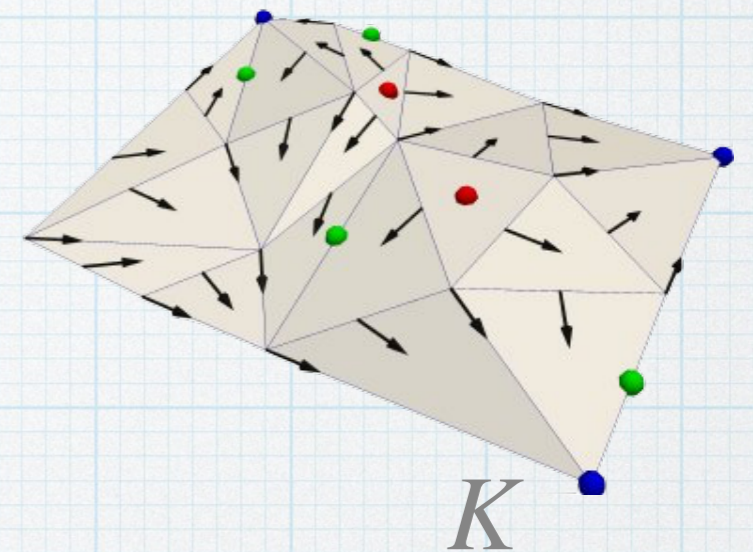


Références

Forman, Robin. A user's guide to discrete Morse Theory.
Sém. Lothar. Combin., 2001

Forman, Robin. Morse Theory for Cell Complexes.
Advances in Mathematics, vol. 134, 1998

Théorie de Morse discrète



Fonction de Morse discrète

Décomposition et points critiques

Complexe de Morse

Champ de vecteurs gradient discret

Inégalités de Morse

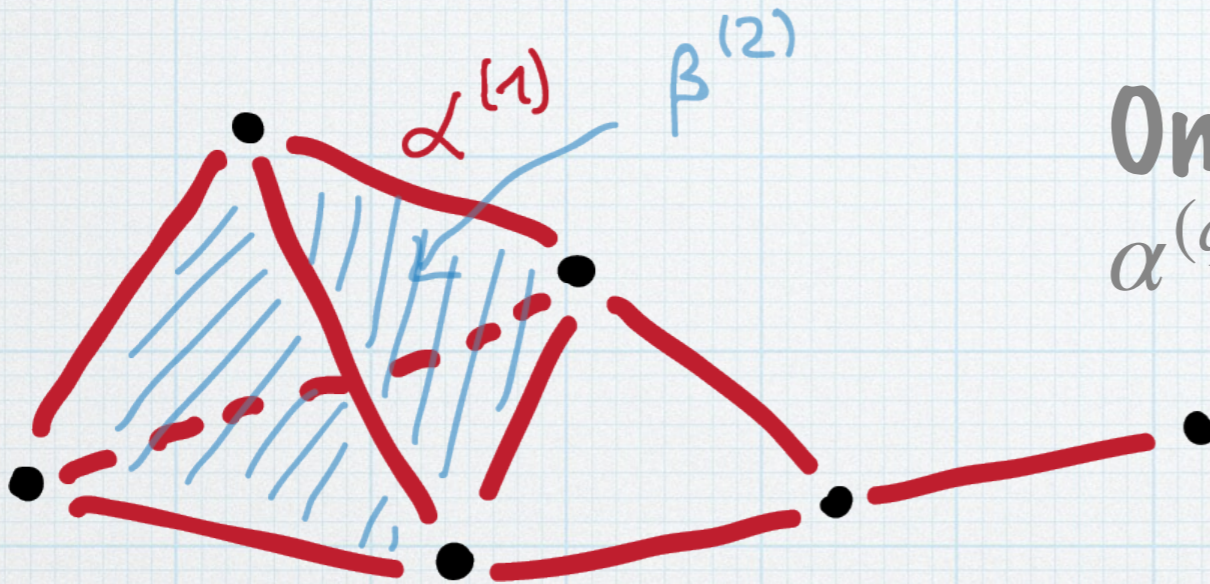
complexe simplicial

Caractéristique d'Euler

Nombres de Betti de \mathcal{S}

Homologie de \mathcal{S}

Quelques notations



On notera souvent
 $\alpha^{(q)}$: cellule de dimension q

$\alpha^{(q)}$ face de $\beta^{(q+1)}$ sera noté :
 $\alpha^{(q)} < \beta^{(q+1)}$

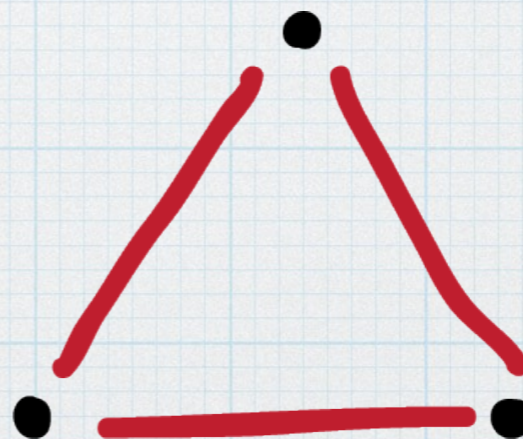
Fonction de Morse discrète

$f : K \rightarrow \mathbb{Z}$ est une fonction de Morse discrète

ssi $\forall \alpha^{(q)} \in K :$

1. $\#\{\beta^{(q+1)} ; \beta^{(q+1)} > \alpha^{(q)} \text{ et } f(\beta) \leq f(\alpha)\} \leq 1$
2. $\#\{\gamma^{(q-1)} ; \gamma^{(q-1)} < \alpha^{(q)} \text{ et } f(\gamma) \geq f(\alpha)\} \leq 1$

Triangulation du cercle ...



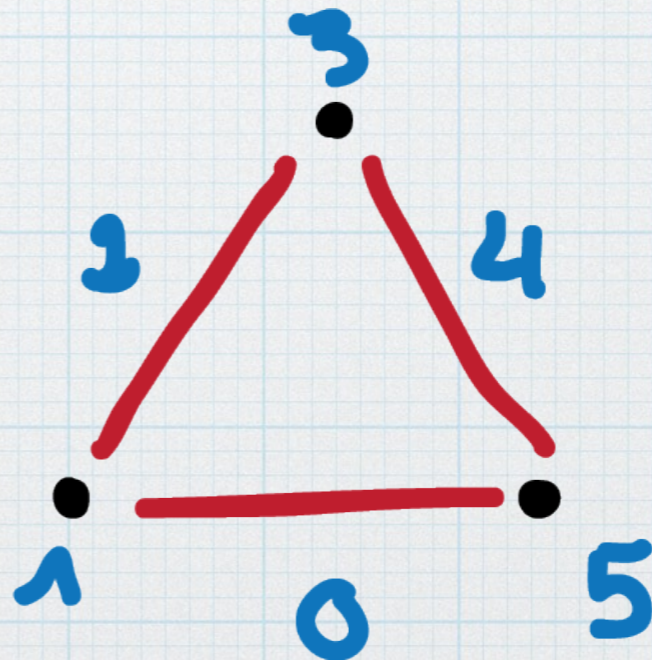
Fonction de Morse discrète

$f : K \rightarrow \mathbb{Z}$ est une fonction de Morse discrète

ssi $\forall \alpha^{(q)} \in K :$

1. $\#\{\beta^{(q+1)} ; \beta^{(q+1)} > \alpha^{(q)} \text{ et } f(\beta) \leq f(\alpha)\} \leq 1$
2. $\#\{\gamma^{(q-1)} ; \gamma^{(q-1)} < \alpha^{(q)} \text{ et } f(\gamma) \geq f(\alpha)\} \leq 1$

Triangulation du cercle ...



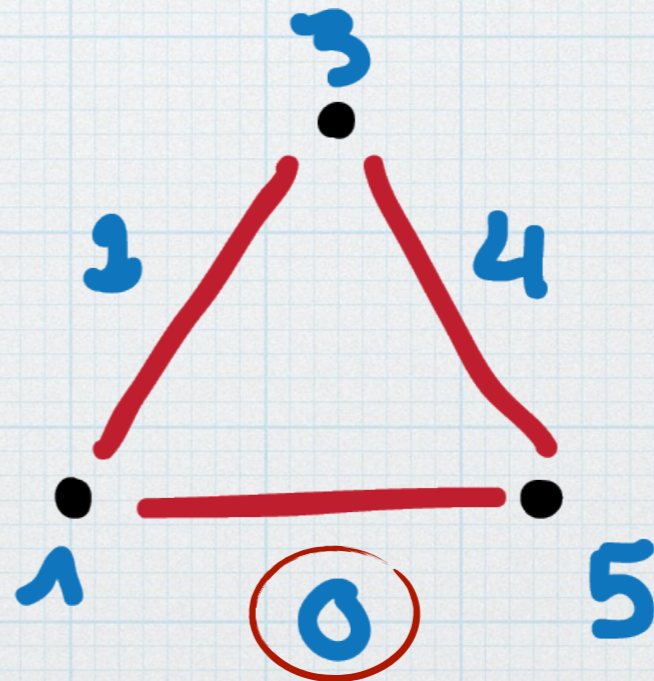
Fonction de Morse discrète

$f : K \rightarrow \mathbb{Z}$ est une fonction de Morse discrète

ssi $\forall \alpha^{(q)} \in K :$

1. $\#\{\beta^{(q+1)} ; \beta^{(q+1)} > \alpha^{(q)} \text{ et } f(\beta) \leq f(\alpha)\} \leq 1$
2. $\#\{\gamma^{(q-1)} ; \gamma^{(q-1)} < \alpha^{(q)} \text{ et } f(\gamma) \geq f(\alpha)\} \leq 1$

Triangulation du cercle ...



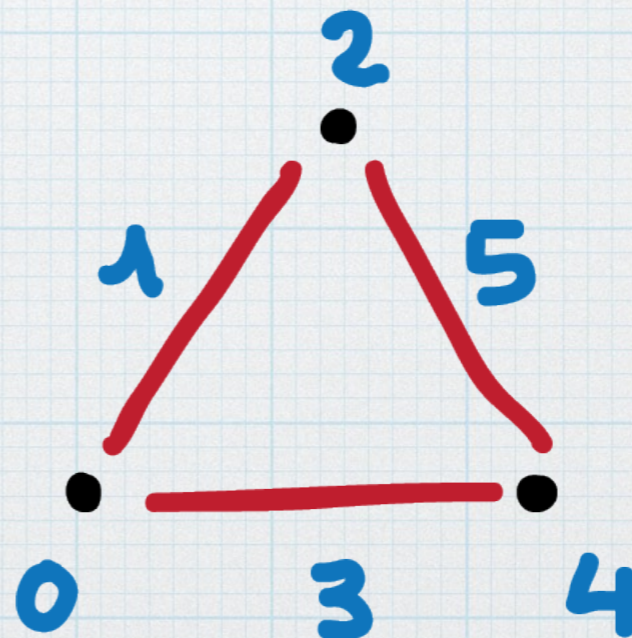
Fonction de Morse discrète

$f : K \rightarrow \mathbb{Z}$ est une fonction de Morse discrète

ssi $\forall \alpha^{(q)} \in K :$

1. $\#\{\beta^{(q+1)} > \alpha^{(q)} ; f(\beta) \leq f(\alpha)\} \leq 1$
2. $\#\{\gamma^{(q-1)} < \alpha^{(q)} ; f(\gamma) \geq f(\alpha)\} \leq 1$

Triangulation du cercle ...

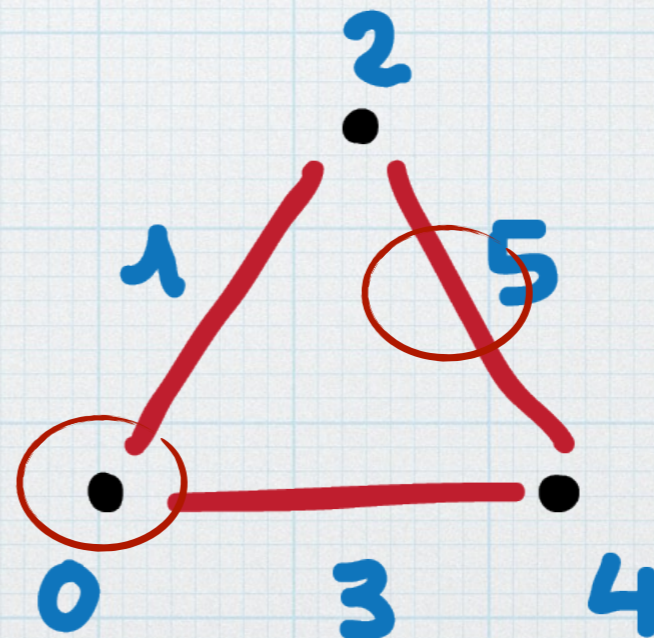


Fonction de Morse discrète

$\alpha^{(q)} \in K$ est une cellule critique si :

1. $\#\{\beta^{(q+1)} ; \beta^{(q+1)} > \alpha^{(q)} \text{ et } f(\beta) \leq f(\alpha)\} = 0$
et
2. $\#\{\gamma^{(q-1)} ; \gamma^{(q-1)} < \alpha^{(q)} \text{ et } f(\gamma) \geq f(\alpha)\} = 0$

Triangulation du cercle ...



Théorie de Morse discrète

Soit $c \in \mathbb{Z}$, sous-complexe de niveau c :

$$K_c = \bigcup_{\{\alpha; f(\alpha) \leq c\}} \bigcup_{\{\beta \leq \alpha\}} \beta$$

Théorème 1

S'il n'y a pas de cellule critique α tq $f(\alpha) \in [a, b]$ alors K_b est de même type d'homotopie que K_a .

Théorème 2

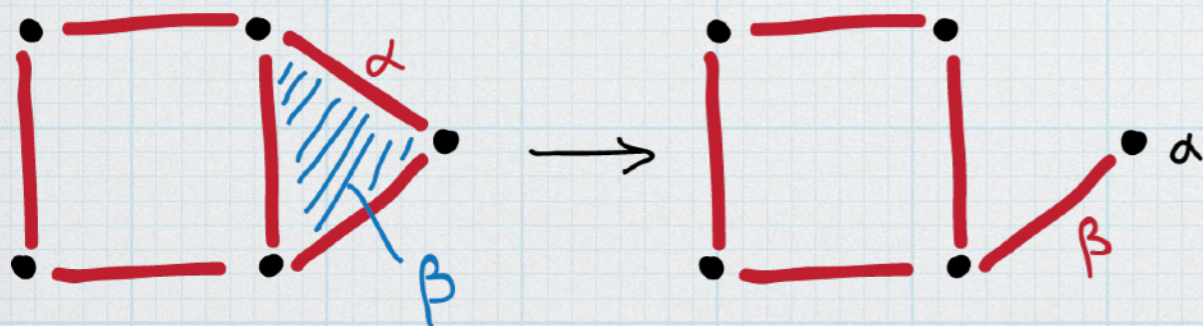
S'il y a une unique cellule critique $\alpha^{(q)}$ tq $f(\alpha) \in [a, b]$ alors il existe un recollement $f : S^{(q-1)} \rightarrow K_a$ tq K_b est de même type d'homotopie que $K_a \cup_f B^q$.

Théorie de Morse discrète

Ingrédient de la preuve ...

« Simplicial collapse »

Alors $K \simeq K \setminus \{\alpha, \beta\}$



α face libre si :
il existe exactement une face
maximale β de K tq :

► $\alpha < \beta$

Théorie de Morse discrète

Théorème (décomposition)

Soit K un complexe simplicial muni d'une fonction de Morse, K est de même type d'homotopie qu'un CW-complexe ayant exactement une cellule de dimension q par cellule critique de K de dimension q .

Théorie de Morse discrète

Théorème (inégalité de Morse faible)

K complexe simplicial

* κ_d nombre de cellules critiques de dimension d

* β_d nombre de Betti de dimension d

$$\forall d \quad \kappa_d \geq \beta_d$$

f parfaite si $\kappa_d = \beta_d \quad \forall d$

Théorie de Morse discrète

Corollaire : théorème de Morse

X complexe simplicial

- * k_d nombre de cellules de dimension d
- * κ_d nombre de cellules critiques de dimension d
- * β_d nombre de Betti de dimension d

$$\chi = \sum_{i=0}^m (-1)^d k_d = \sum_{i=0}^m (-1)^d \beta_d$$

Invariant d'Euler-
Poincaré

$$\chi = \sum_{d=0}^m (-1)^d \kappa_d$$

Théorie de Morse discrète

Théorème (inégalité de Morse forte)

X complexe simplicial

- * κ_d nombre de cellules critiques de dimension d
- * β_d nombre de Betti de dimension d

$$\sum_{d=0}^i (-1)^{i-d} \kappa_d \geq \sum_{d=0}^i (-1)^{i-d} \beta_d \quad \forall i$$

Champ de vecteurs gradients discret

Calcul d'une fonction de Morse difficile ...

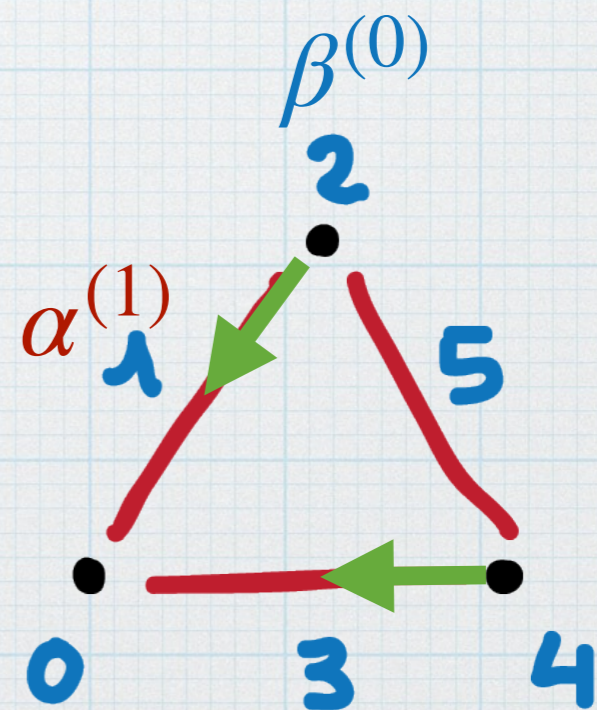
Caractérisation ?

Champ de vecteurs gradient suffisant

Paire de cellules non critiques

$$\alpha^{(q)} < \beta^{(q+1)} \text{ car } f(\alpha) > f(\beta)$$

V apparie
 $\alpha^{(q)} \rightarrow \beta^{(q+1)}$



Champ de vecteurs gradients discret

On va donc définir un champ de vecteur gradient discret (DGVF) \leftrightarrow champ de vecteur gradient d'une fonction de Morse.

Pour cela :

1. Champs de vecteurs discret
2. Notion de V -chemin
3. Un DGVF est un champ de vecteurs discrets avec condition sur les V -chemins

Champ de vecteurs gradients discret

Champ de vecteur discret V sur K

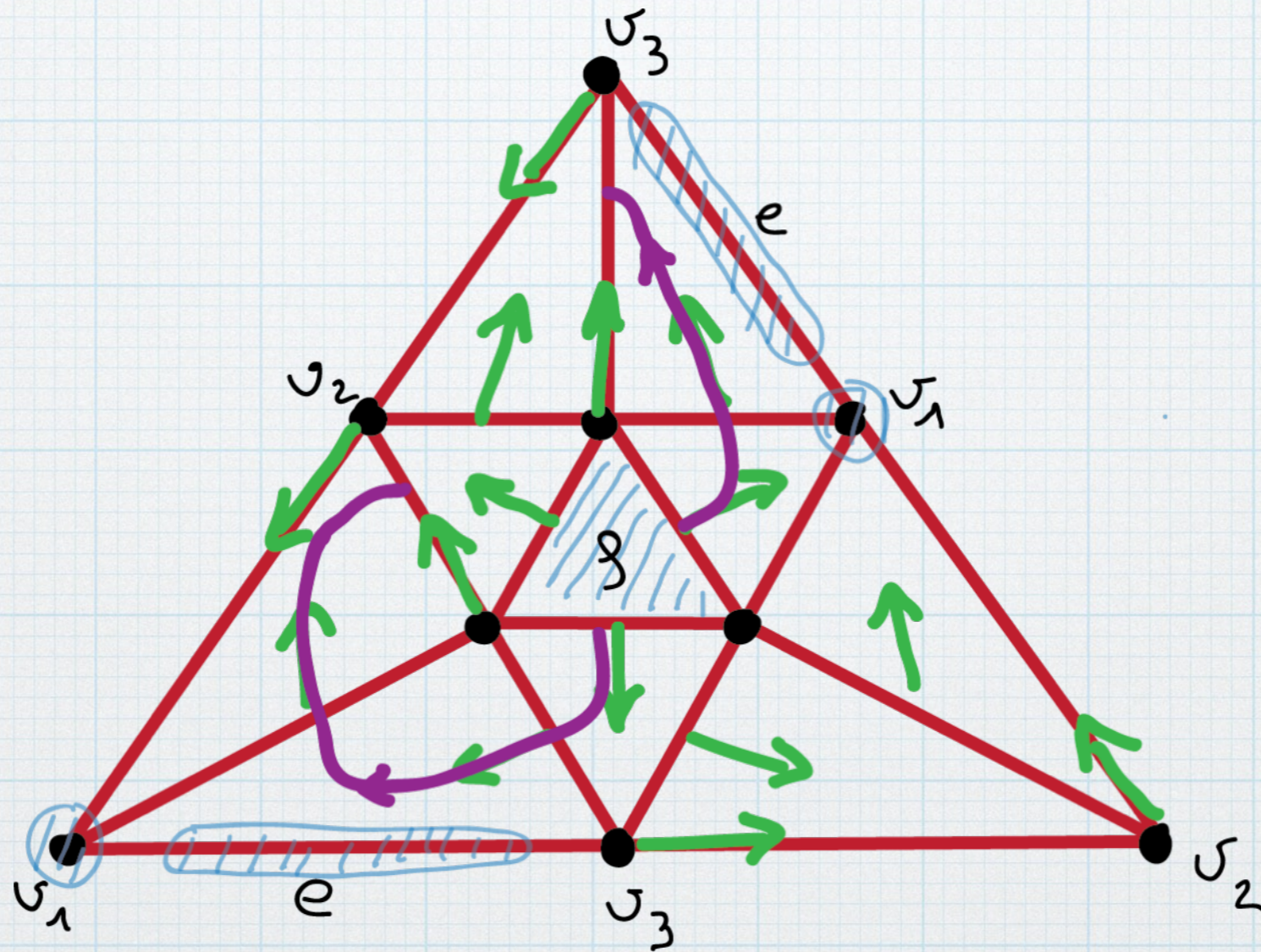
Ensemble de paires $\alpha^{(q)} < \beta^{(q+1)}$ tq
chaque simplexe est dans au plus une paire.

V -chemin (V -path)

Suite de simplexes:

$$\begin{array}{c} \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\in V} \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\in V} \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\in V} \\ \alpha_0^{(q)}, \beta_0^{(q+1)}, \alpha_1^{(q)}, \beta_1^{(q+1)}, \dots, \alpha_r^{(q)}, \beta_r^{(q+1)}, \alpha_{r+1}^{(q)} \\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{>} \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{>} \end{array}$$

Champ de vecteurs gradients discret



$\rightarrow V$

$\rightarrow V$ -chemins

Champ de vecteurs gradients discret

Théorème 1

Si un champ de vecteur discret V est le champ de vecteurs gradients d'une fonction de Morse discrète f , alors pour tout V -chemin

$$f(\alpha_0) \geq f(\beta_0) \geq f(\alpha_1) \geq f(\beta_1) \geq \dots \geq f(\alpha_r) \geq f(\beta_r) \geq f(\alpha_{r+1})$$

Théorème 2

Un champ de vecteur discret V est le champ de vecteurs gradients d'une fonction de Morse discrète f , s'il ne contient aucun V -chemin non trivial fermé.

Champ de vecteurs gradients discret

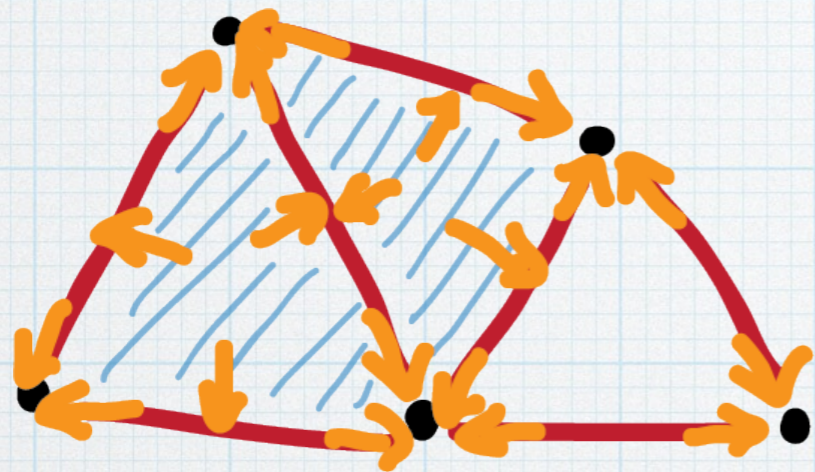
Discrete Gradient Vector Field (DGVF) :
champ de vecteur discret V ne contenant aucun V -chemin non trivial fermé.

Autre
construction

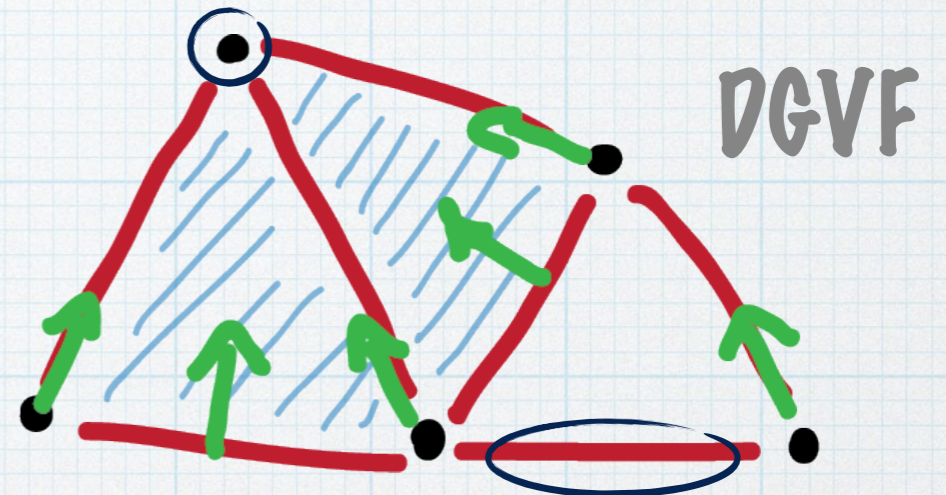
H diagramme de Hasse de K (bord)
 V est un couplage (partiel) de H
→ inverser les arêtes de H appartenant à V
→ graphe de Morse G

Tous les sous-graphes $G_{q,q+1} = G|_{\dim q \cup \dim q+1}$
sont acycliques

Champ de vecteurs gradients discret



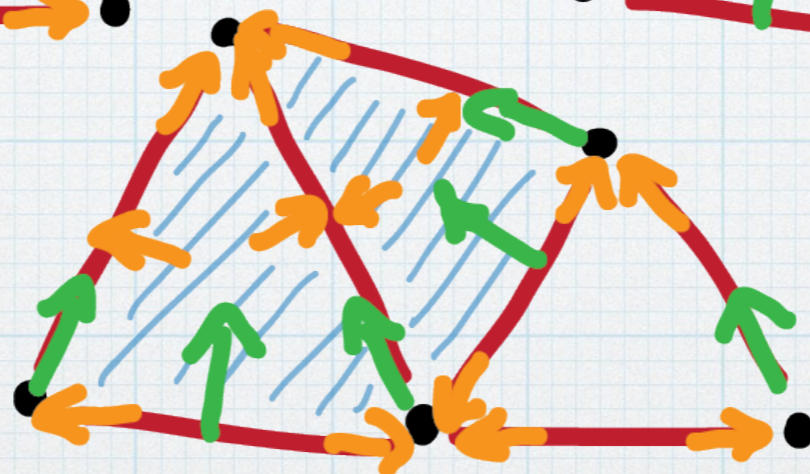
H



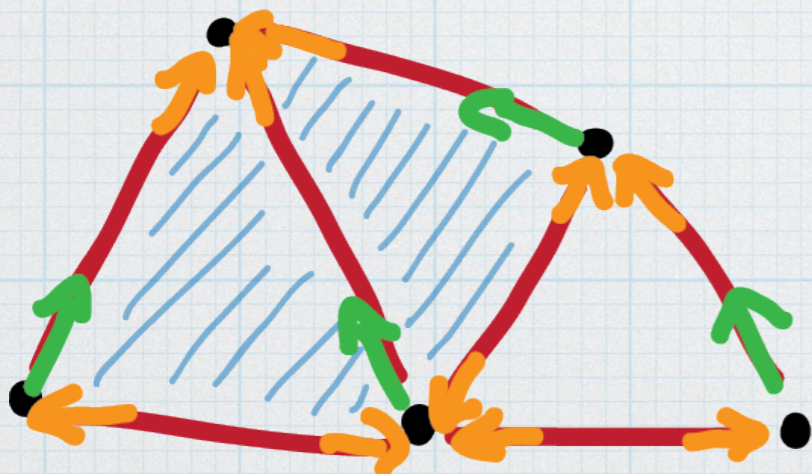
DGVF

V

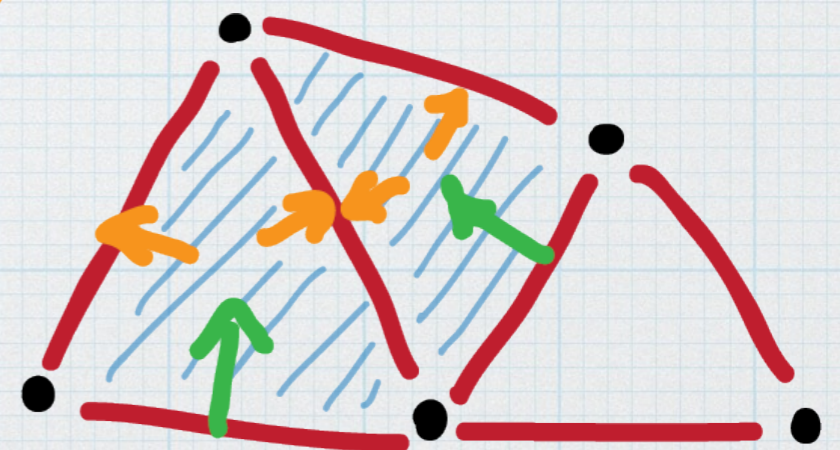
Cellules critiques



G

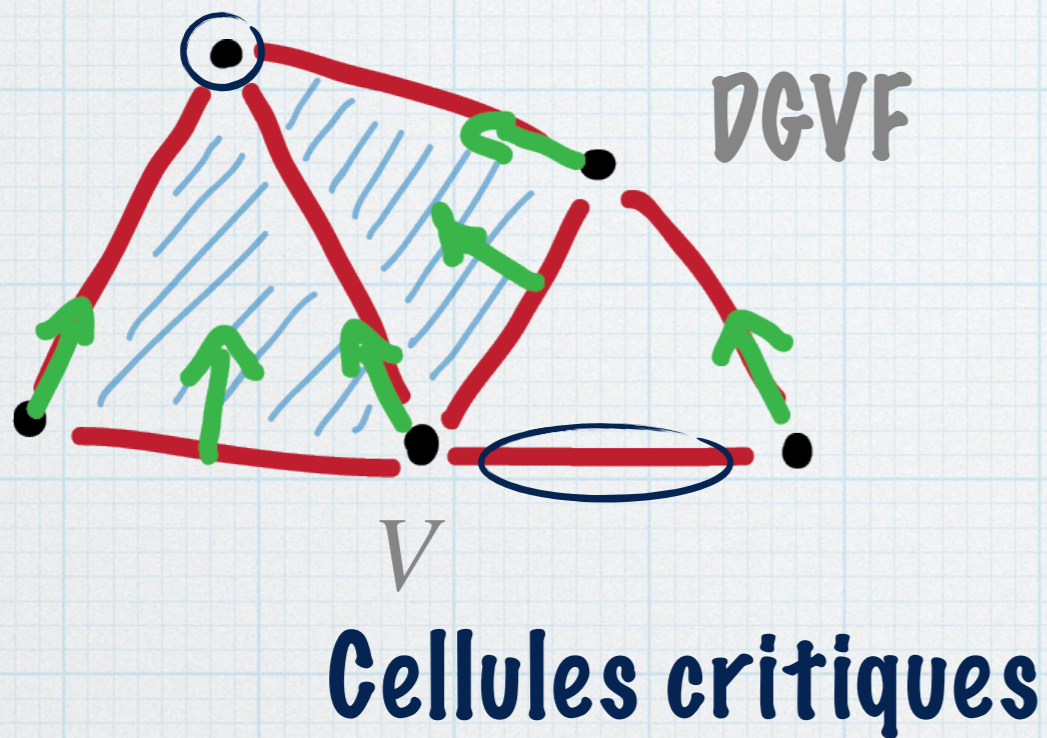


$G_{0,1}$



$G_{1,2}$

Champ de vecteurs gradients discret



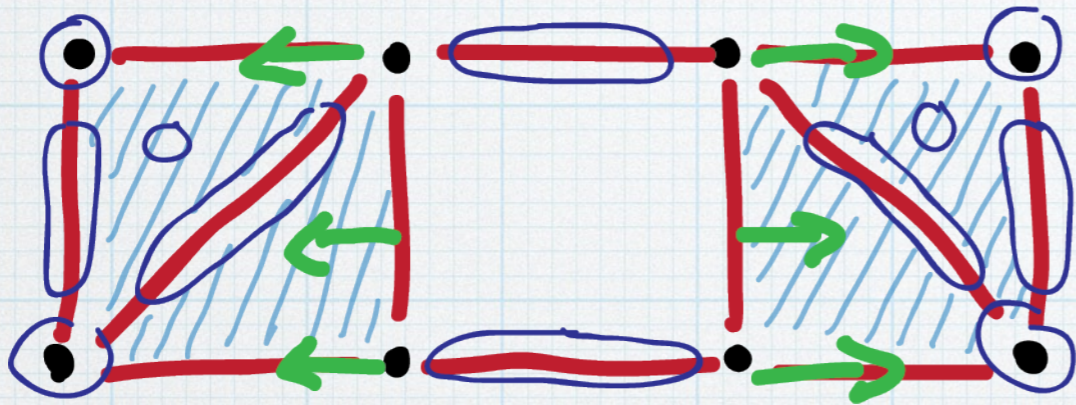
- * κ_d nombre de cellules critiques de dimension d
- * β_d nombre de Betti de dimension d

$$\forall d \quad \kappa_d \geq \beta_d$$

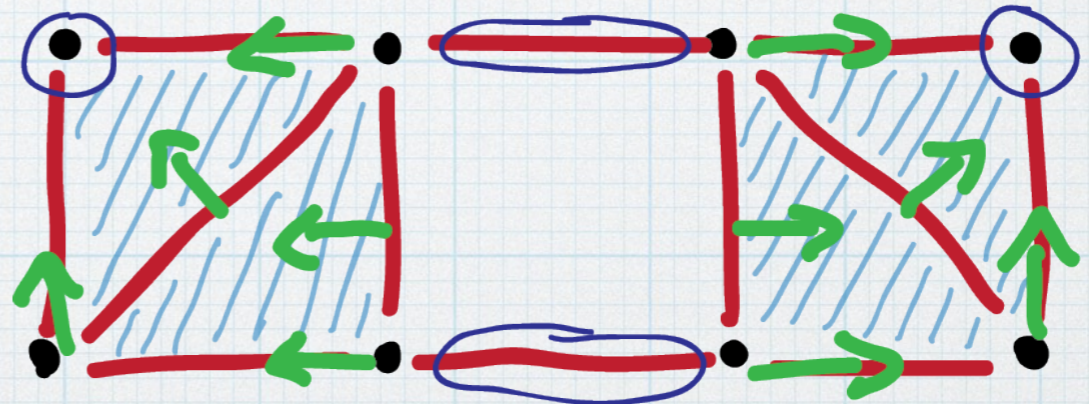
V optimal si κ_d minimal

V parfait si $\kappa_d = \beta_d \quad \forall d$

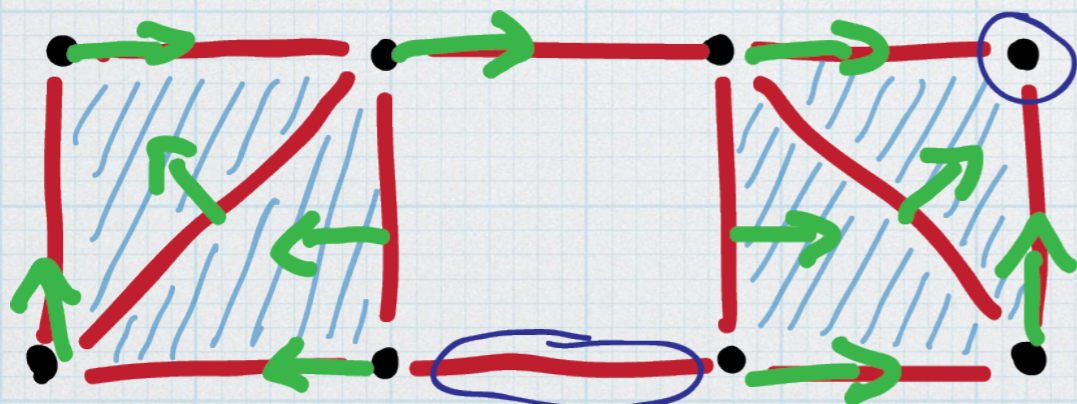
Champ de vecteurs gradients discret



$$\begin{aligned} \kappa_0 &= 2 & \beta_0 &= 1 \\ \kappa_1 &= 2 & \beta_1 &= 1 \end{aligned}$$



DGVF non parfait
(mais on ne peut
plus ajouter de paires)



DGVF parfait

Complexe de Morse

On peut construire un complexe de chaînes (complexe de Morse) \mathcal{M} tq :

$$\forall q \quad H_q(\mathcal{M}) \simeq H_q(K)$$

avec :

→ \mathcal{M}_q le \mathbb{Z} -module libre engendré par les cellules critiques de dim q

→ Opérateur de bord $\tilde{\partial}$ calculé à partir du flot de V

$$0 \rightarrow \mathcal{M}_n \xrightarrow{\tilde{\partial}_n} \mathcal{M}_{n-1} \xrightarrow{\tilde{\partial}_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\tilde{\partial}_1} \mathcal{M}_0 \rightarrow 0$$

Complexe de Morse

Calcul de \tilde{d}

Forman :

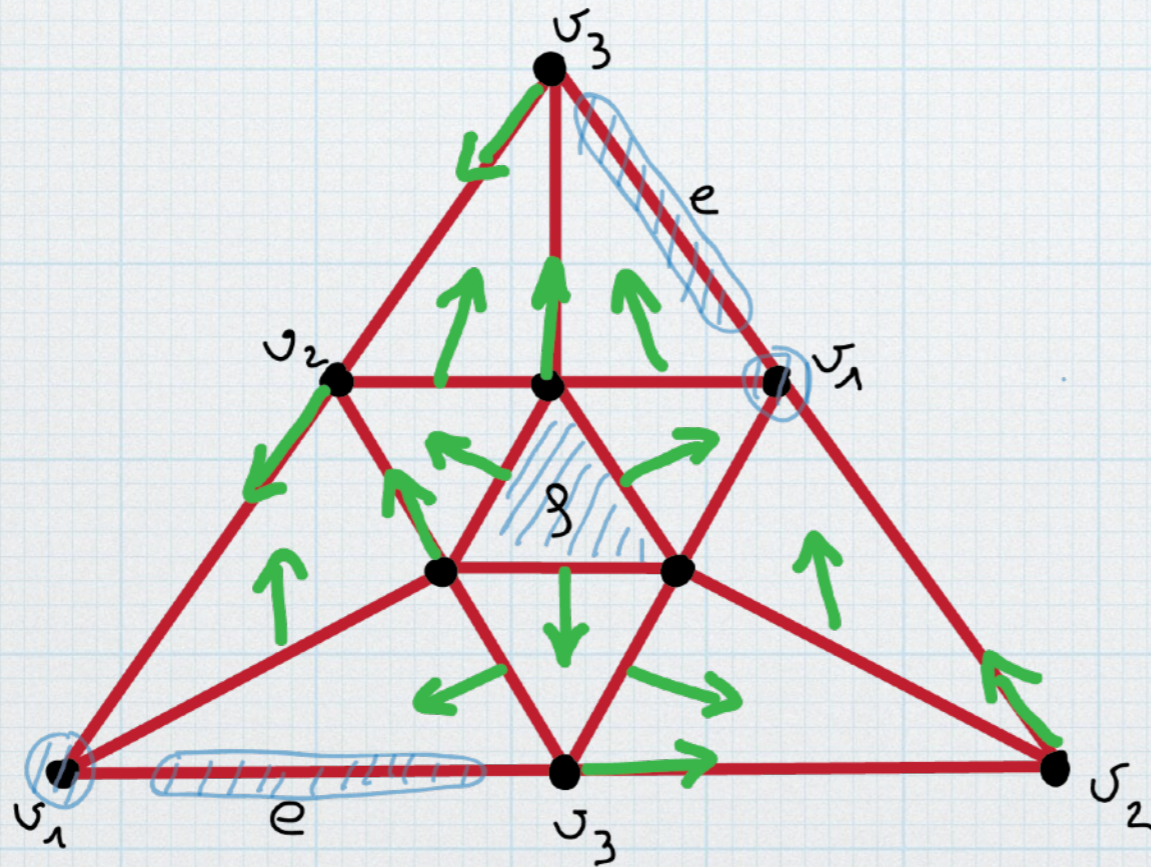
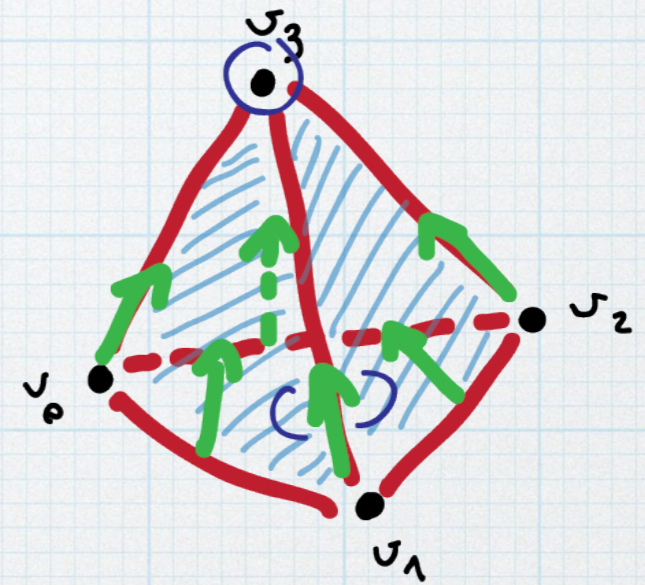
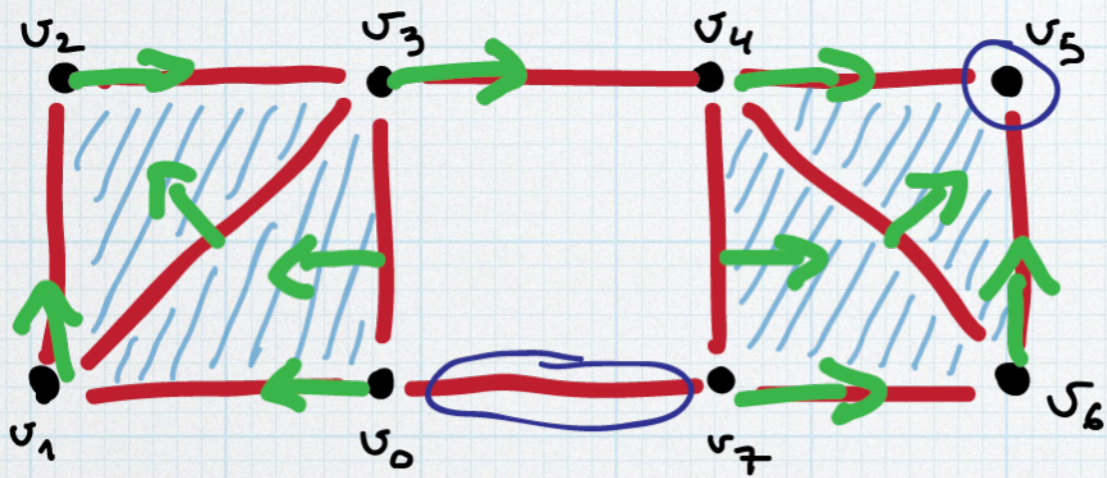
Dénombrement des V -chemins entre deux cellules critiques

$\alpha^{(q+1)}$ critique

$$\tilde{d} \alpha^{(q+1)} = \sum_{\beta^{(q)} \text{ critiques}} m(\alpha^{(q+1)}, \beta^{(q)}) \cdot \beta^{(q)}$$

$$\sum_{V\text{-chemins } \alpha \rightarrow \beta} \pm 1$$


Complexe de Morse



Théorie de Morse discrète et topologie

- * Calcul d'un HDVF optimal NP-difficile en général
- * Pour certains complexes, il n'existe pas de HDVF parfait
 - * Bing's house
 - * Dunce hat

Hypothèse d'acyclicité ...

Théorie de Morse discrète et topologie

- * En dimension 2, l'existence / calcul d'un DGVF parfait sont garantis
- * En dimension quelconque : calcul de l'homologie possible via complexe de Morse itéré
 - * Soit V un DGVF (non parfait) sur K
 - * Calculer le complexe de Morse associé à V
 - * Puis calculer un DGVF sur ce complexe de Morse, etc ...