Alexandra Bac / Aldo Gonzalez Lorenzo

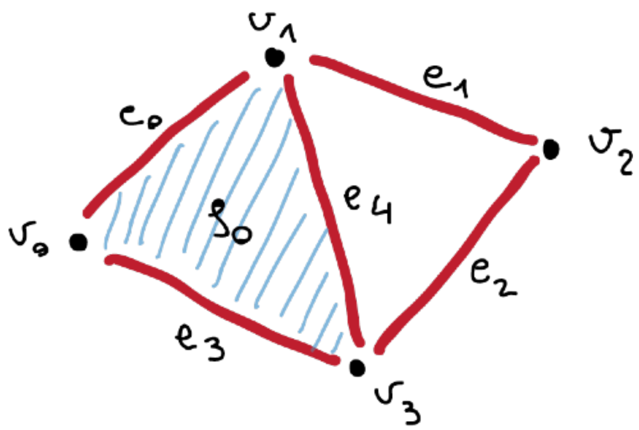
Polytech Marseille Luminy - Bureau 117 / Campus d'Arles

alexandra.bac@univ-amu.fr / aldo.gonzalez-lorenzo@univ-amu.fr

Exercices

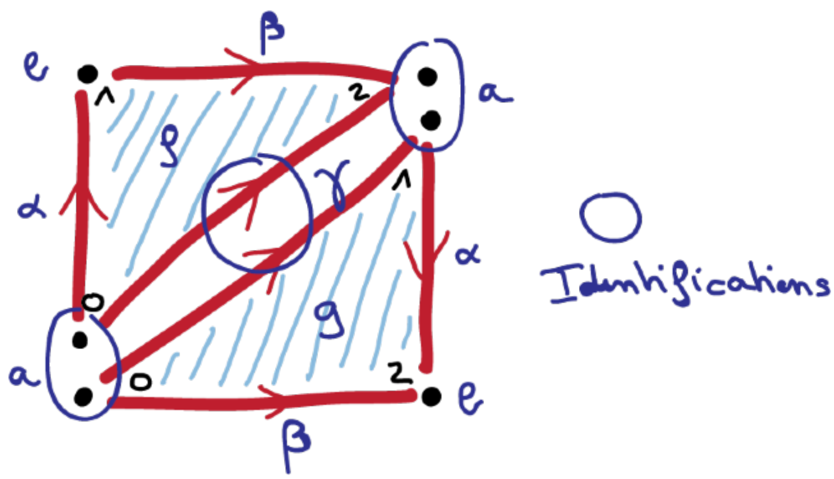
Exercice 1 (corrigé)

Calculez l'homologie du complexe simplicial suivant en utilisant la forme normale de Smith.



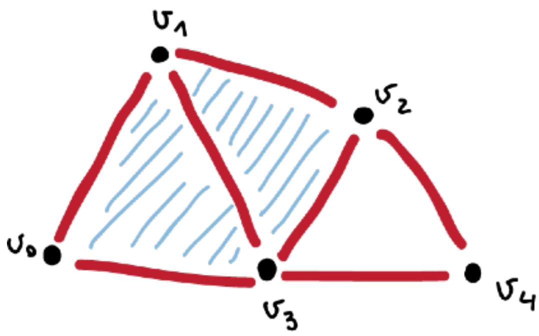
Exercice 2 (corrigé)

Calculez l'homologie du Δ-complexe suivant (ruban de Moebius) en utilisant la forme normale de Smith.



Exercice 3 (corrigé)

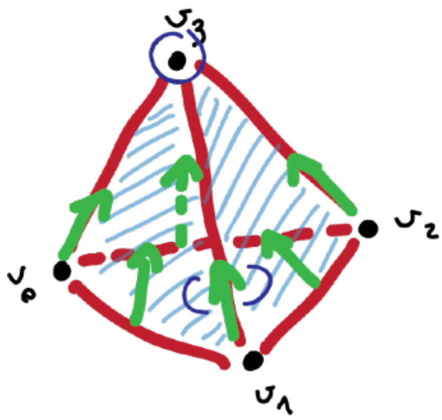
On considère le complexe simplicial suivant :



1. Déterminez un DGVF contenant un maximum d'arêtes sur ce complexe (vous prouverez que le champ de vecteurs discret que vous avez défini est bien un DGVF)
2. En déduire des majorants des nombres de Betti
3. Calculez le complexe de Morse associé et en déduire que le DGVF est parfait ($\partial' = 0$) puis l'homologie

Exercice 4 (corrigé)

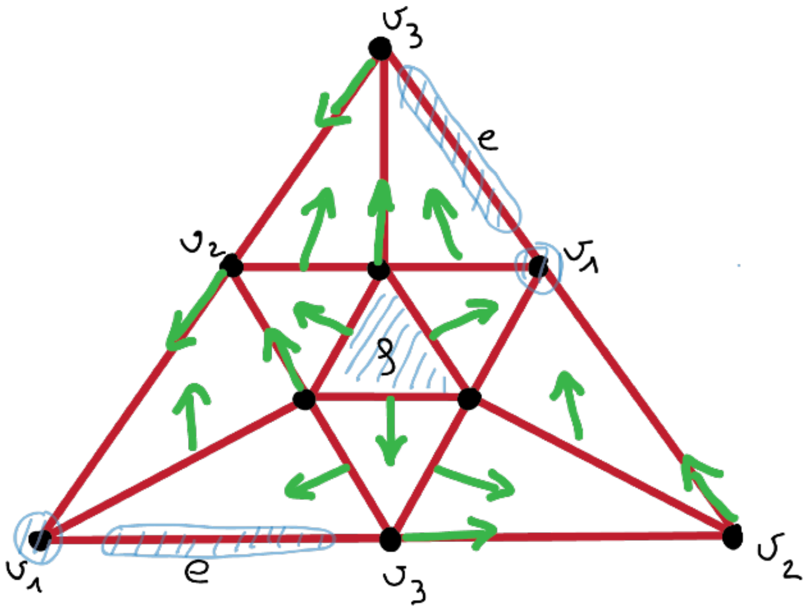
On considère le complexe simplicial suivant (maillage de la sphère) :



1. Vérifiez que le champ de vecteurs discrets représenté en vert est bien un DGVF sur ce complexe (vous prouverez que le champ de vecteurs discret que vous avez défini est bien un DGVF)
2. En déduire des majorants des nombres de Betti
3. Calculez le complexe de Morse associé et en déduire que le DGVF est parfait puis l'homologie du complexe.

<u>Exercice 5</u> (corrigé)

On considère le complexe simplicial suivant (maillage de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ l'espace projectif de dimension 2):



1. Vérifiez que le champ de vecteurs discrets représenté en vert est bien un DGVF sur ce complexe (vous prouverez que le champ de vecteurs discret que vous avez défini est bien un DGVF)
2. En déduire des majorants des nombres de Betti
3. Calculez le complexe de Morse associé et en déduire l'homologie du complexe.

<u>Exercice 6</u>

Etant donnés deux complexes de chaîne (C, ∂) et (C', ∂') on appelle réduction de (C, ∂) vers (C', ∂') tout triplet de fonctions (h, f, g) avec $h_q : C_q \to C_{q+1}$, $f : C \to C'$, $g : C' \to C$ telles que :

i) f, g morphismes de chaînes (commutation à ∂ et ∂')

ii) $fg = \mathrm{Id}_{C'}$

iii) $gf = \mathrm{Id}_C - h\partial - \partial h$

iv) $hh = 0,\ fh = 0,\ hg = 0$

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & C_{q+1} \arrow[r, shift left, "\partial_{q+1}"] \arrow[d, shift right, "f"'] & C_q \arrow[l, shift left, "h_q"] \arrow[r, shift left, "\partial_q"] \arrow[d, shift right, "f_q"'] & C_{q-1} \arrow[l, shift left, "h_{q-1}"] \arrow[r] \arrow[d, shift right, "f"'] & {} \\
\arrow[r] & C'_{q+1} \arrow[r, "\partial'_{q+1}"] \arrow[u, shift right, "g"'] & C'_q \arrow[r, "\partial'_q"] \arrow[u, shift right, "g_q"'] & C'_{q-1} \arrow[r] \arrow[u, shift right, "g"'] & {}
\end{tikzcd}$$

Montrez que pour tout q :

$$H_q(C) = H_q(C')$$

On considérera en particulier le morphisme :

$$\begin{aligned} \Phi \ : \ \ker \partial_q &\to H'_q \\ \sigma &\mapsto f(\sigma) \end{aligned}$$

tont on calculera le noyau et l'image …

<u>Exercice 7</u>

Soit $\mathscr{V}$ un DGVF sur un complexe K.
On définit les morphismes suivants :

- Opérateur associé à $\mathscr{V}$:

$$\begin{aligned} V(\sigma) &= \langle \partial\tau, \sigma \rangle \cdot \tau \quad \text{si } (\sigma, \tau) \in \mathscr{V} \\ &= 0 \qquad\qquad\quad \text{sinon} \end{aligned}$$

  Cet opérateur est simplement celui qui associe à une cellule σ, la cellule τ de dimension supérieure (avec le bon signe) telle que $(\sigma, \tau) \in \mathscr{V}$

- Opérateur de flot h

$$h(\sigma) = \sum_{k \geqslant 0} V(1 - \partial V)^k(\sigma)$$

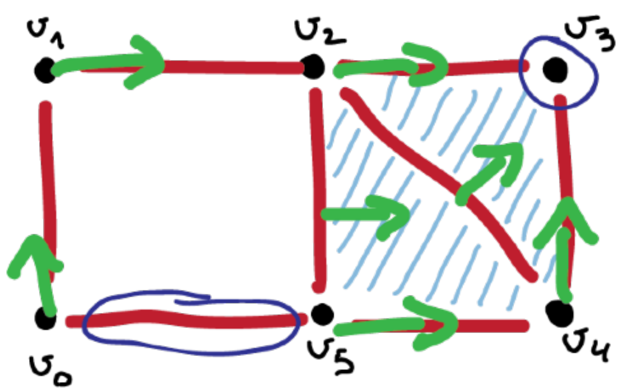
- Opérateur f :

$$f(\sigma) = (1 - \partial h - h\partial)(\sigma)$$

- Opérateur g : inclusion

Le triplet (h, f, g) est la réduction associée à $\mathscr{V}$

1. Afin de simplifier les calculs, on prendra ici les coefficients dans $\mathbb{Z}^2$. Montrez que pour le DGVF suivant :



$V(v_0) = e_{01}$ $\qquad$ $V(e_{25}) = f_{245}$ $\qquad$ $V(e_{24}) = f_{234}$

$h(v_1) = e_{12} + e_{23}$ $h(v_0) = e_{01} + e_{12} + e_{23}$ $h(e_{25}) = f_{245} + f_{234}$
$h(v_3) = 0$ $h(e_{05}) = 0$
On voit clairement pourquoi « opérateur de flot » …

$f(v_0) = f(v_1) = \cdots = v_3$ $f(e_{05}) = e_{05} + e_{01} + e_{12} + e_{25}$
$f(e_{01}) = f(e_{05})$ $f(e_{25}) = 0 = f(e_{23}) = f(e_{45}) = \cdots$
L'opérateur f envoie donc les cellules sur un générateur d'homologie « vers lequel leur flot est dirigé ».

2. Montrez que (h, f, g) est une réduction
3. Quel est le complexe réduit C' image de f ? De quoi sont constitués les C'_q ? Quel est leur rang, une base ?

Exercice 7

Soient K, K' deux complexes simpliciaux tels que $K' = K \cup \{\sigma\}$, où σ est un simplexe de dimension q. Nous appellerons ∂, ∂' leurs opérateurs de bord respectifs. Alors :
1. Montrez que les dimensions de $\ker(\partial_{q+1})$ et $\ker(\partial'_{q+1})$ sont égales.
2. Démontrez que les dimensions de $\mathrm{Im}(\partial_{q+1})$ et $\mathrm{Im}(\partial'_{q+1})$ sont égales.
3. Déduisez que $\beta_i(K) = \beta_i(K')$ pour tout $i \notin \{q-1, q\}$.
4. Démontrez que si σ appartient à un cycle de dimension q dans K', alors $\beta_q(K') = \beta_q(K') + 1$ et $\beta_{q-1}(K') = \beta_{q-1}(K')$. Vous pouvez utiliser la formule d'Euler-Poincaré :
$|K_0| - |K_1| + |K_2| - \ldots = \beta_0(K) - \beta_1(K) + \beta_2(K) - \ldots$
5. Démontrez que si σ n'appartient pas à un cycle de dimension q dans K', alors $\beta_{q-1}(K') = \beta_{q-1}(K') - 1$ et $\beta_q(K') = \beta_q(K')$.