

PARCOURS **IMD**

INFORMATIQUE ET **M**MATHÉMATIQUES **D**ISCRÈTES

Alexandra Bac

Séminaire tutoré / 19 novembre 2020

A LA CROISÉE ENTRE GÉOMÉTRIE ET TOPOLOGIE : THÉORIE DE MORSE

Introduction

Topologie

Étudier la structure des
espaces à déformation
continue près

Géométrie

Étudier la « forme » des
objets / espaces

Homotopie

Topologie
algébrique

Topologie

Variétés

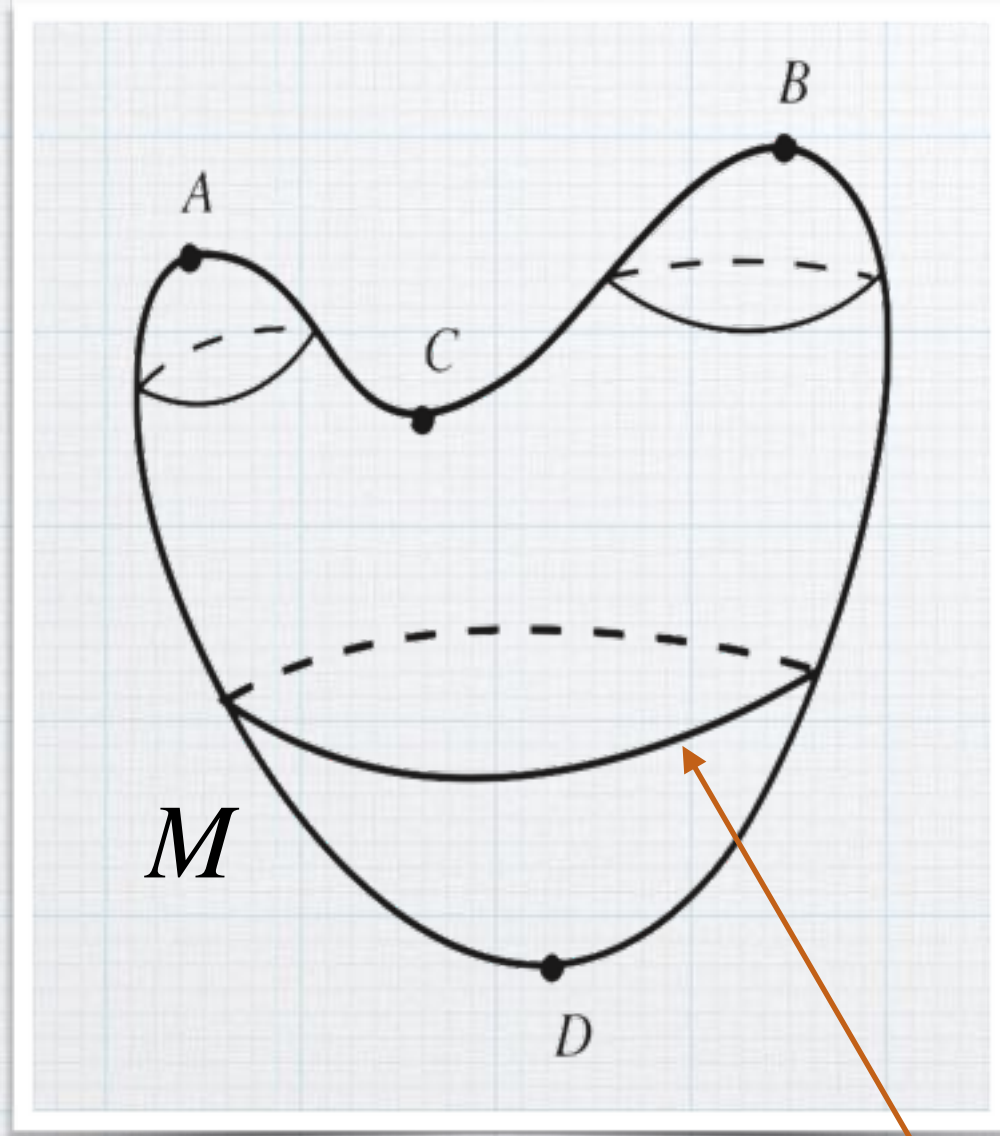
Géométrie
différentielle

Géométrie

Théorie de Morse

Variétés

Géométrie
différentielle



Points critiques
 $df = 0$

Fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$

Topologie

Étudier la structure des
espaces à déformation
continue près

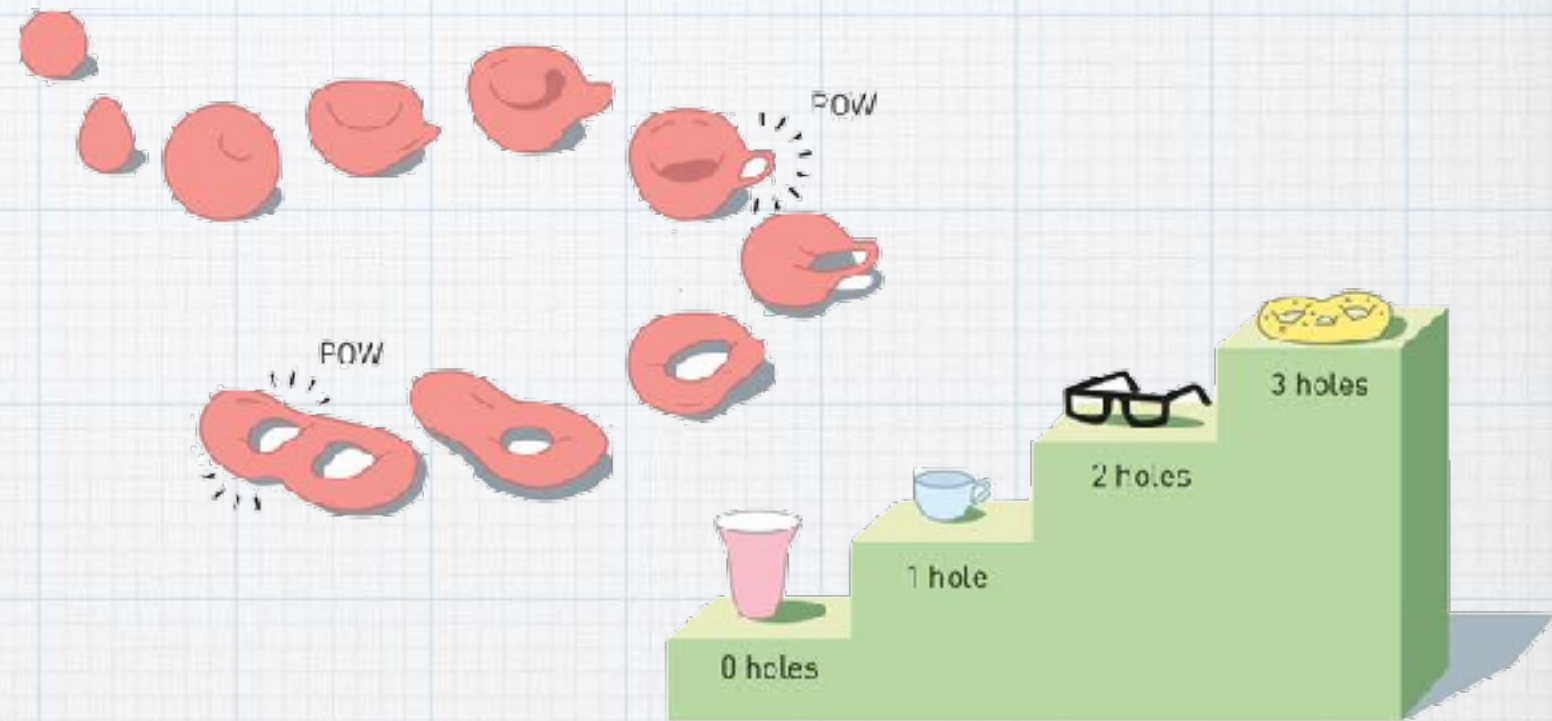


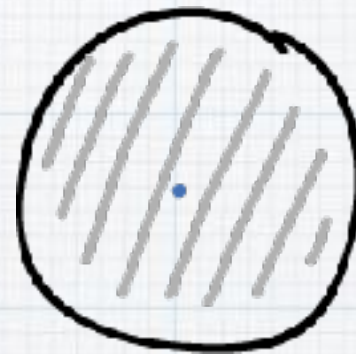
Illustration: © Johan Jarnestad/The Royal Swedish Academy of Sciences

Homéomorphisme

$f : X \rightarrow X'$ continue, f^{-1} continue

Topologie

Étudier la structure des
espaces à déformation
continue près



Homéomorphisme

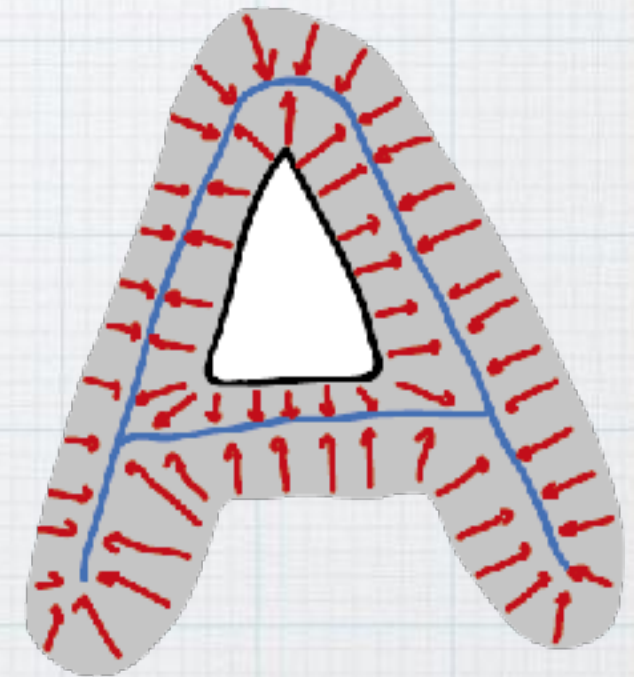
$f : X \rightarrow X'$ continue, f^{-1} continue

Homotopie

Topologie
algébrique

Topologie

Rétract par déformation



Homotopiquement équivalent /
de même type d'homotopie

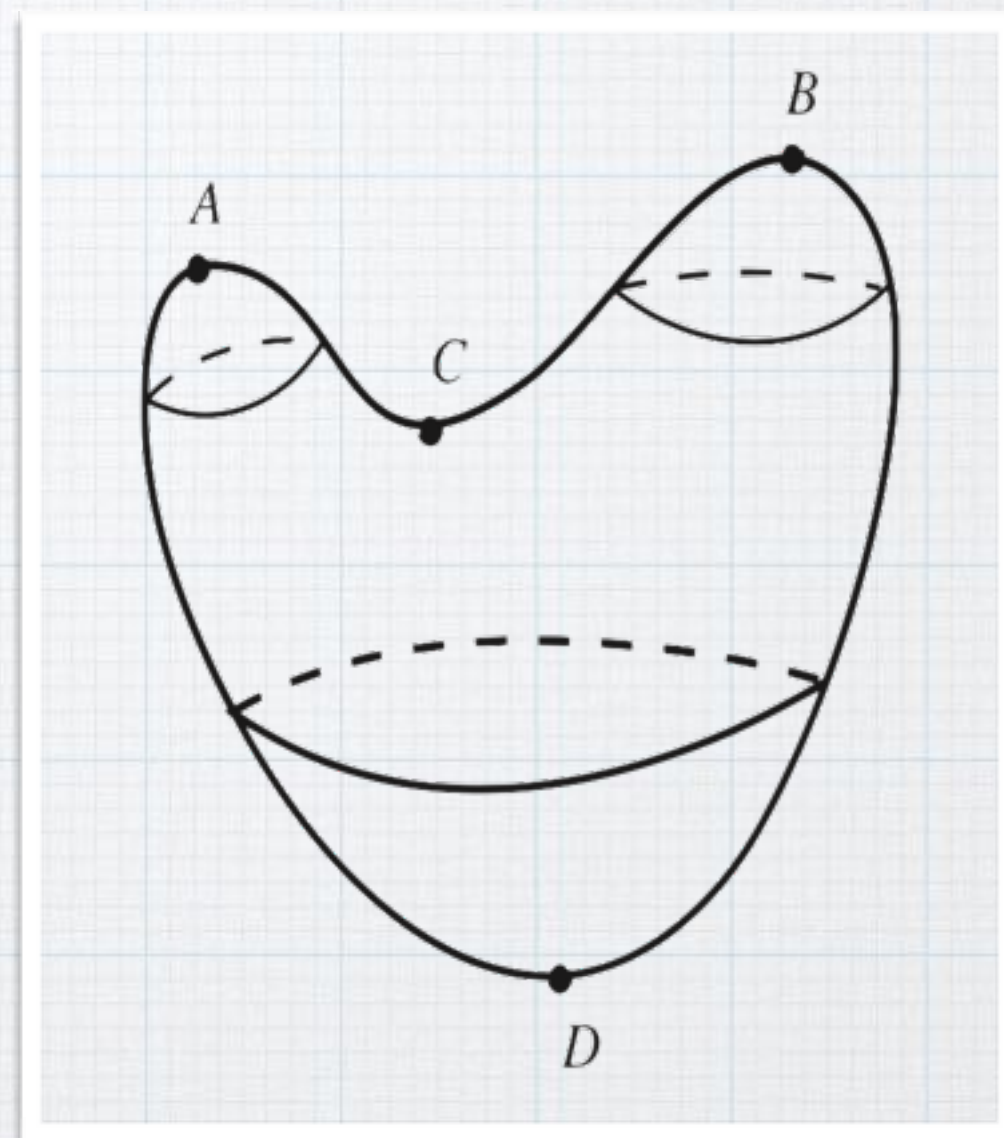
Points critiques de f



Théorie de Morse



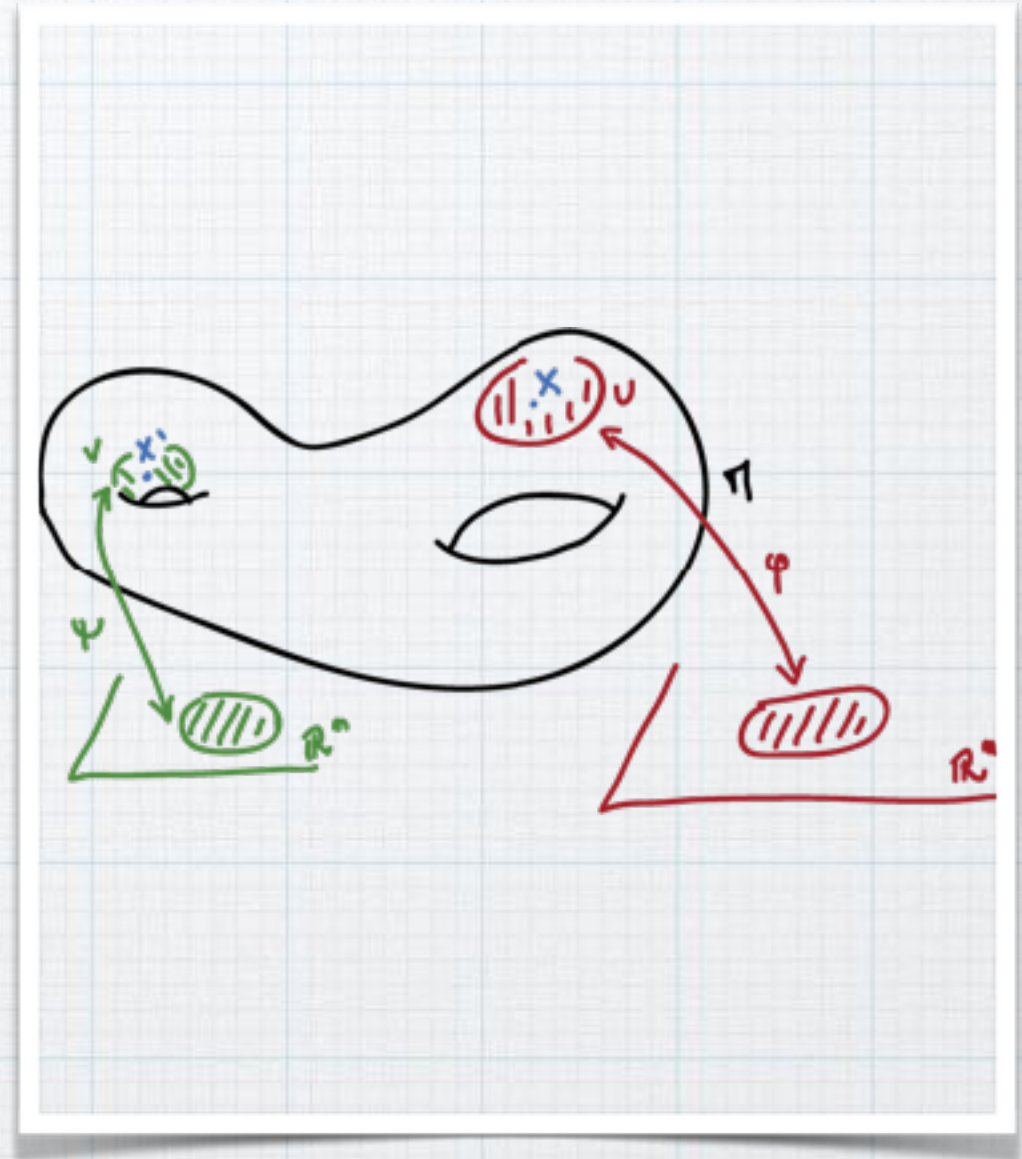
Topologie de M

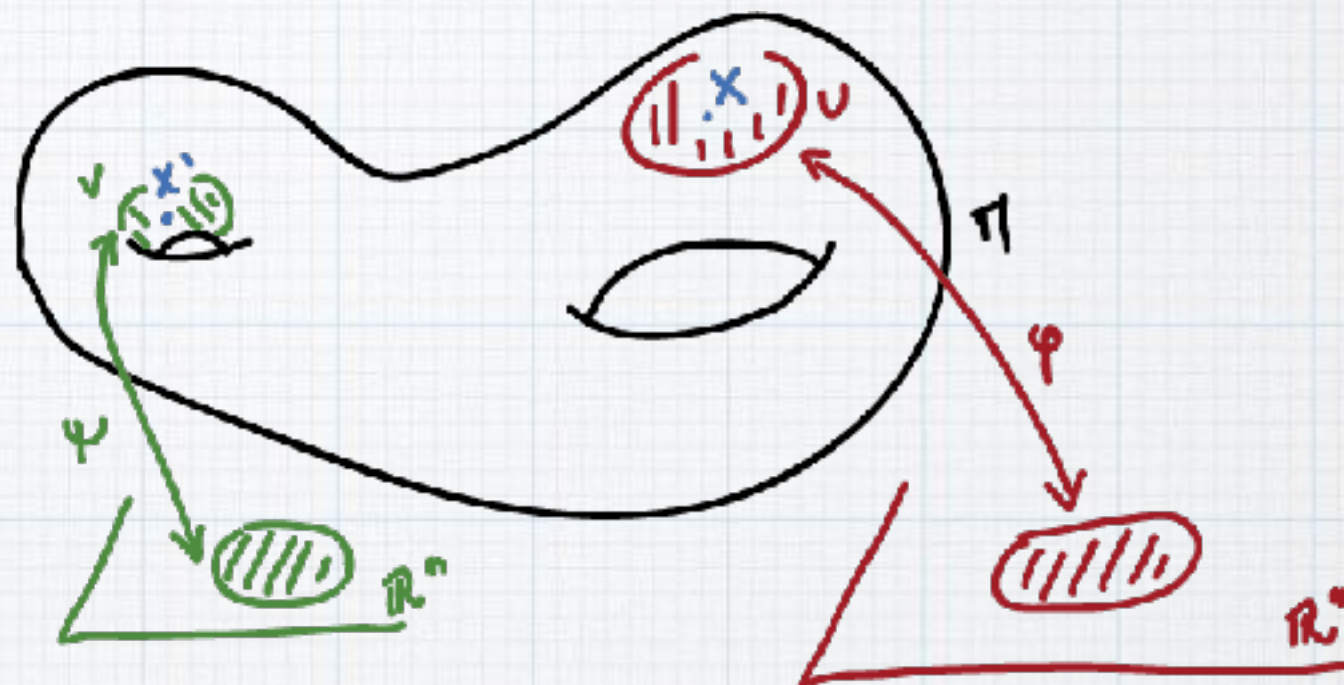


Espace M

Variétés différentielles

En 3 slides ...





M variété topologique

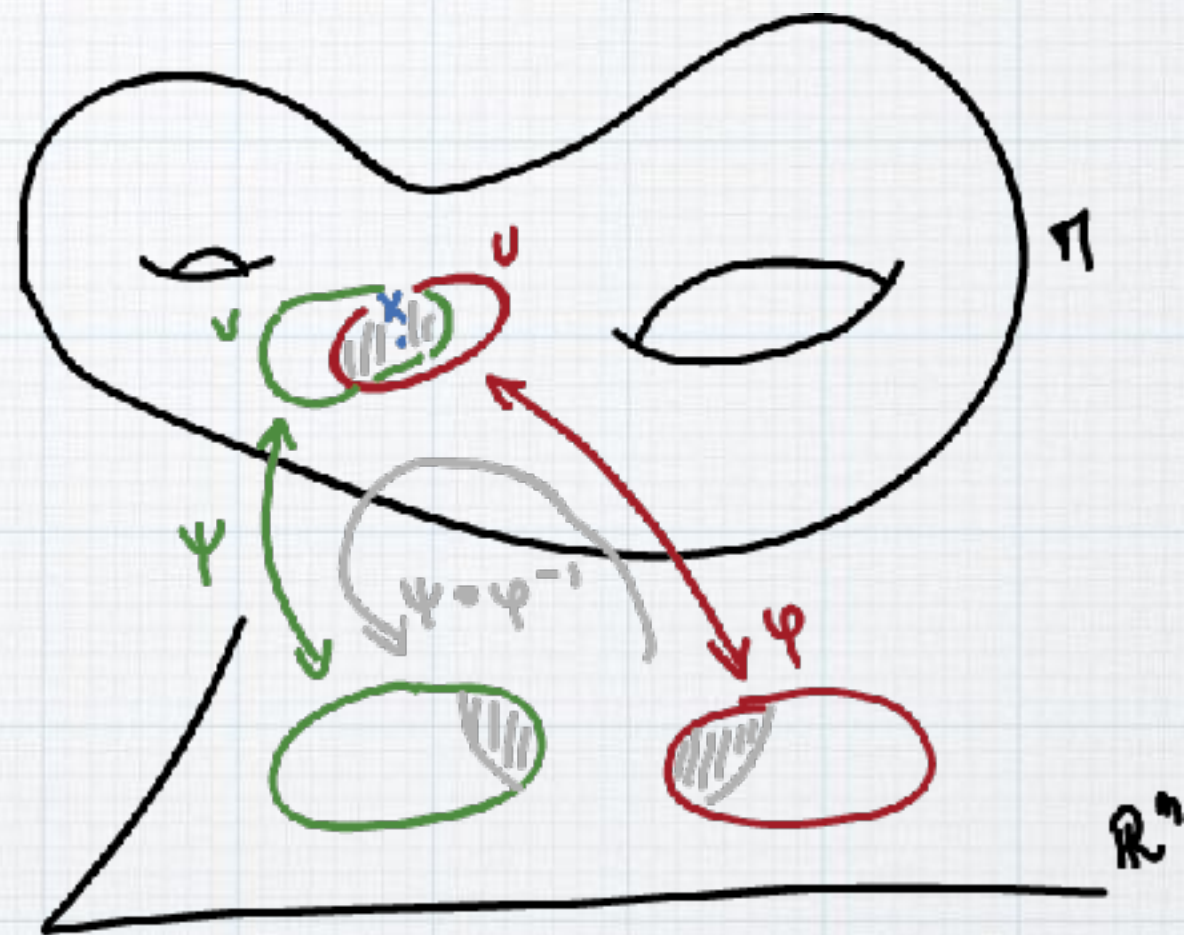
Espace topologique séparé

$\forall X \in M \quad \exists U$ ouvert contenant X et

$\varphi : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ homéomorphisme

(U, φ) carte

$(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ atlas de cartes

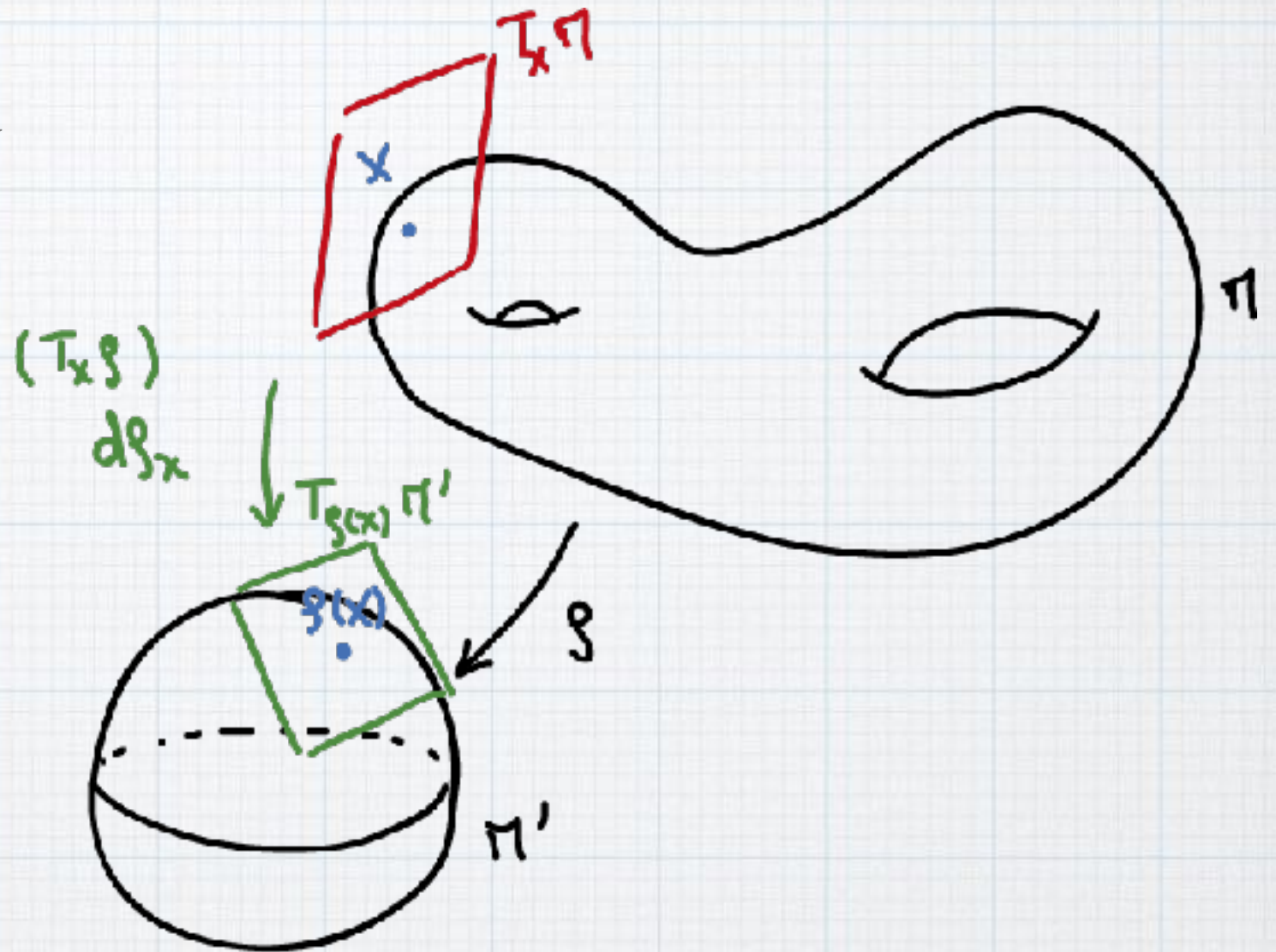


Variété différentielle de classe \mathcal{C}^k

- * Cartes compatibles (de classe \mathcal{C}^k)
- * Atlas de classe \mathcal{C}^k

Plan tangent au point X

$$T_X M$$

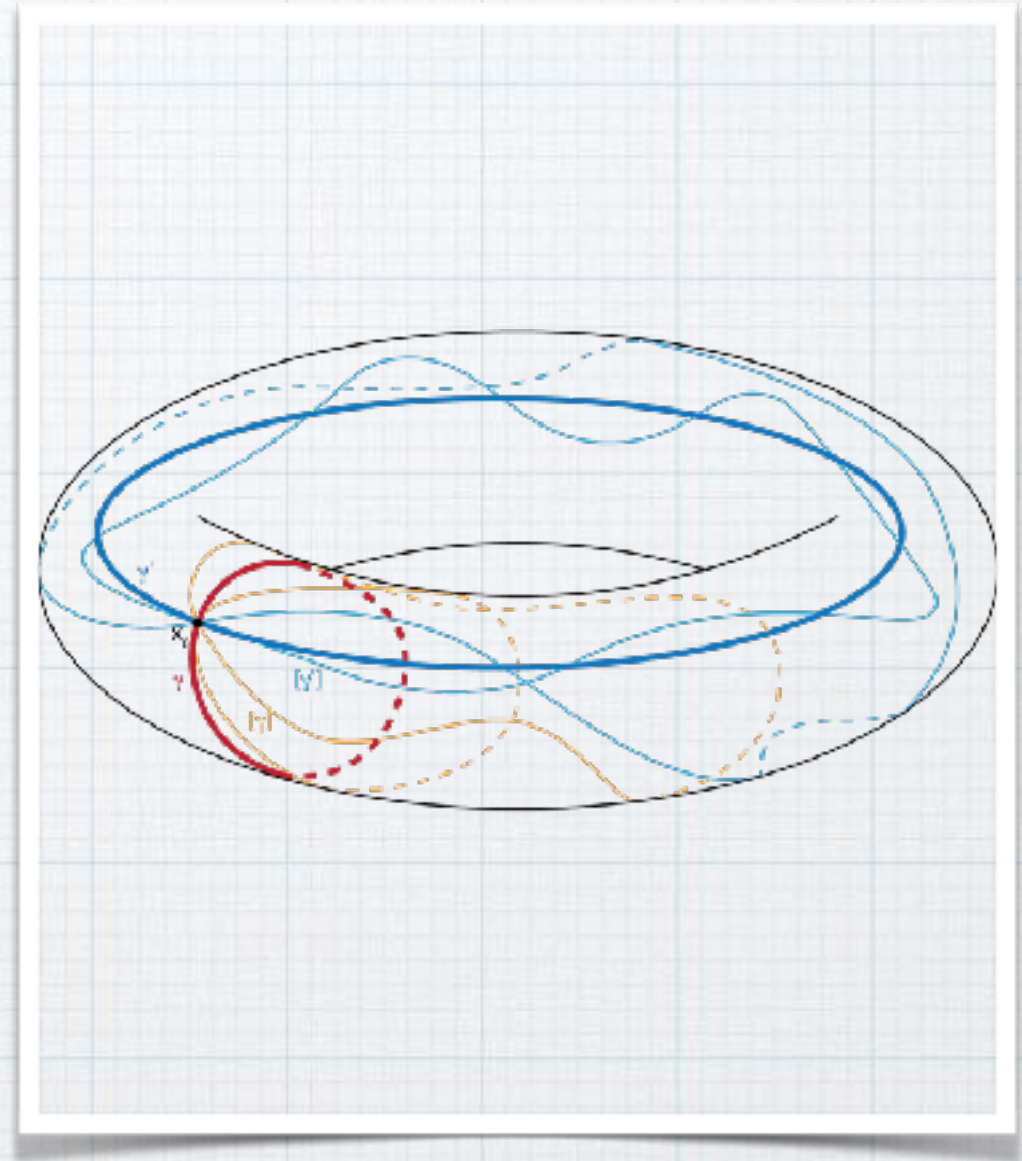


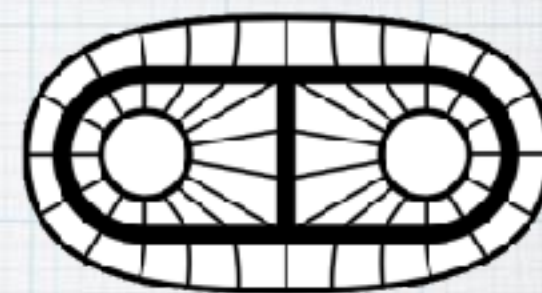
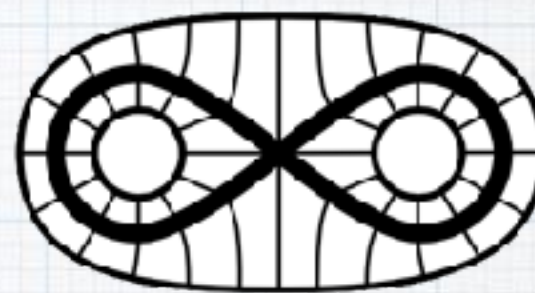
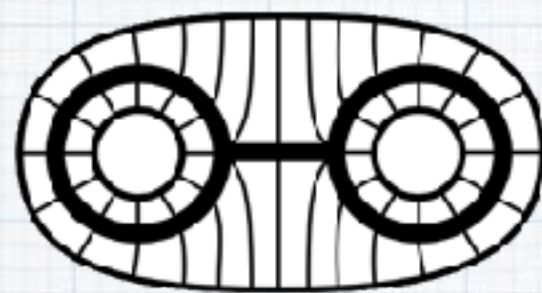
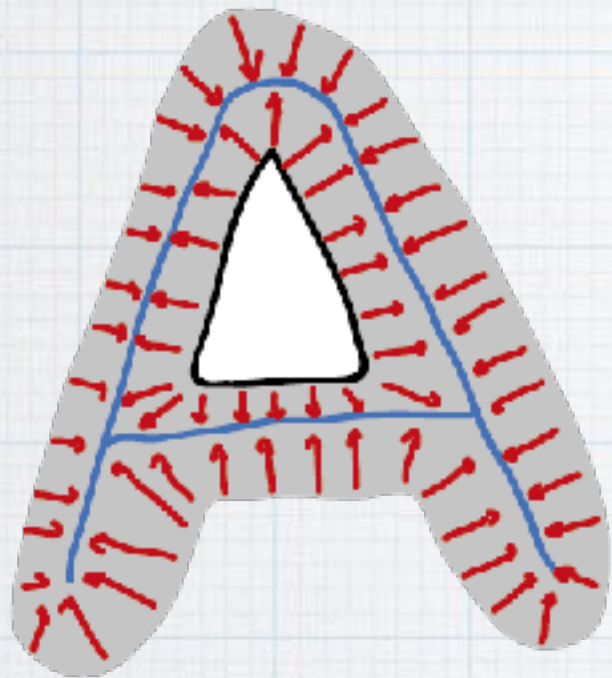
Si $f : M \rightarrow M'$, application linéaire tangente

$$T_X f : T_X M \rightarrow T_{f(X)} M'$$

Topologie (algébrique)

En 5 slides ...





$$A \subseteq X$$

Rétraction par déformation de X sur A

Famille de fonctions $f_t : X \rightarrow X$, $t \in [0,1]$ tq

* $f_0 = I$

* $f_1(X) = A$

* $f_t|_A = I \quad \forall t$

* $(x, t) \mapsto f_t(x)$ continue de $X \times I \rightarrow X$

$f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ homotopes

S'il existe une famille de fonctions $f_t : X \rightarrow Y$ tq
 $(x, t) \mapsto f_t(x)$ continue de $X \times I \rightarrow Y$

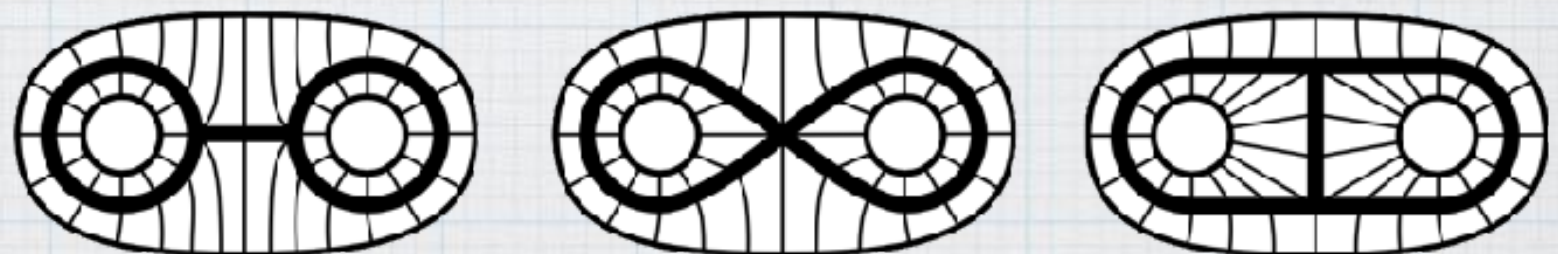
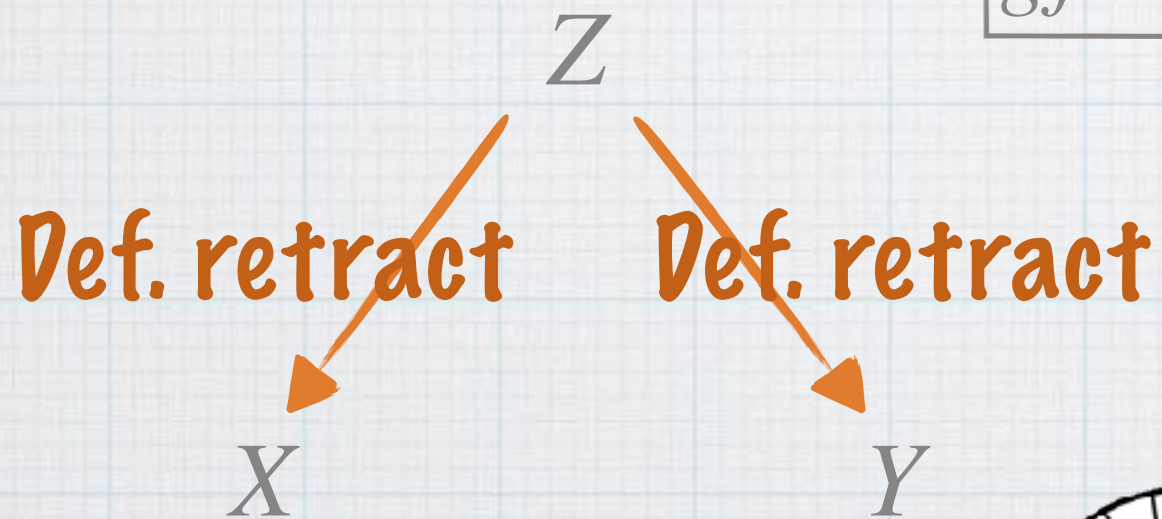
$$f_0 \simeq f_1$$

X et Y homotopiquement équivalents /
de même type d'homotopie :

il existe $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow X$ tq

$$fg \simeq I_Y$$

$$gf \simeq I_X$$



CW-complexe

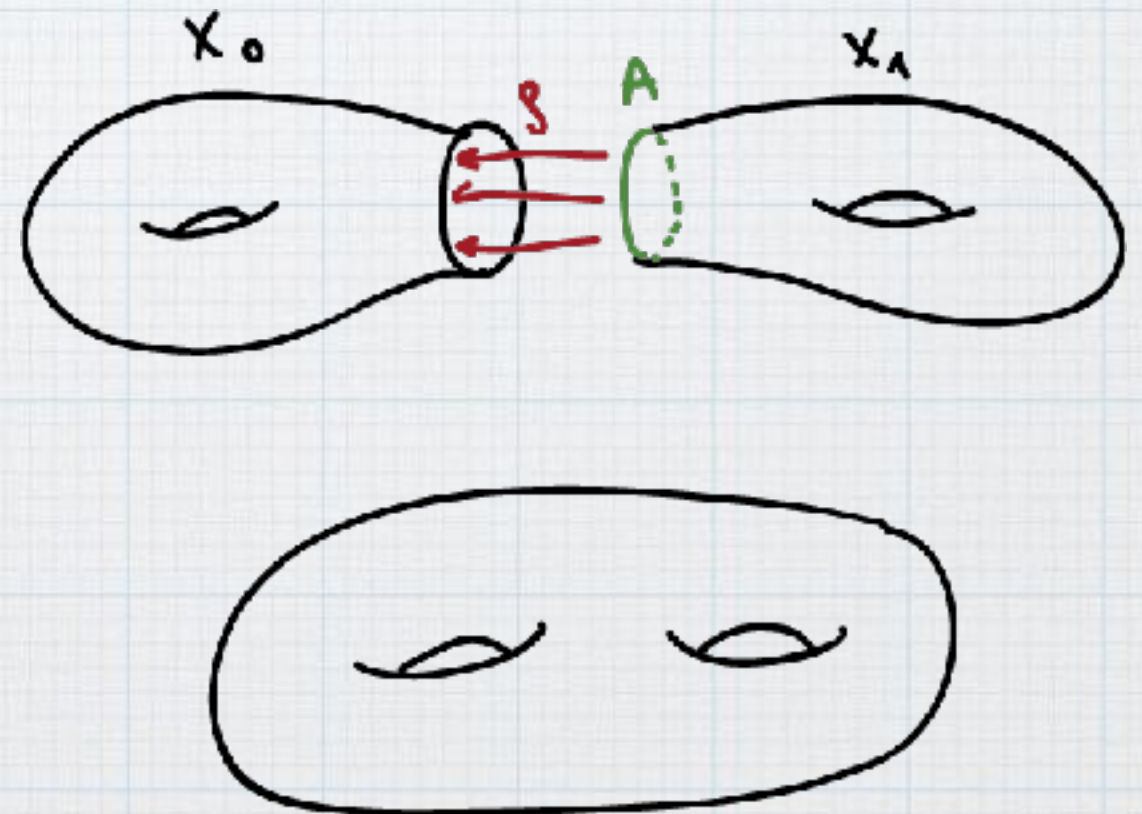
Représentation combinatoire d'un objet topologique

Recollement de X_0 et X_1 le long de f

Soit $A \subseteq X_1$ et $f : A \rightarrow X_0$

$$X_0 \cup_f X_1 = X_0 \amalg X_1 / \sim$$

Avec : $x \in A \sim f(x) \in X_0$



CW-complexe

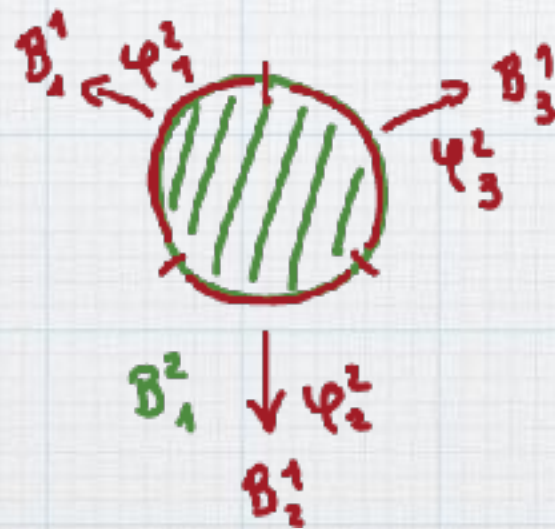
Représentation combinatoire d'un objet topologique

B^n - disque unité fermé de dim n

- * X^0 ensemble discret de points (0-cellules)
- * n -squelette X^n construit récursivement :
 - * $X^n = X^{n-1} \amalg_{\varphi_i} B_i^n \quad i \in I$ (fini)
où B_i^n copies de B^n (n -cellules)
 $\varphi_i : \partial B^n = S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$
 - * muni de la topologie faible

CW-complexe

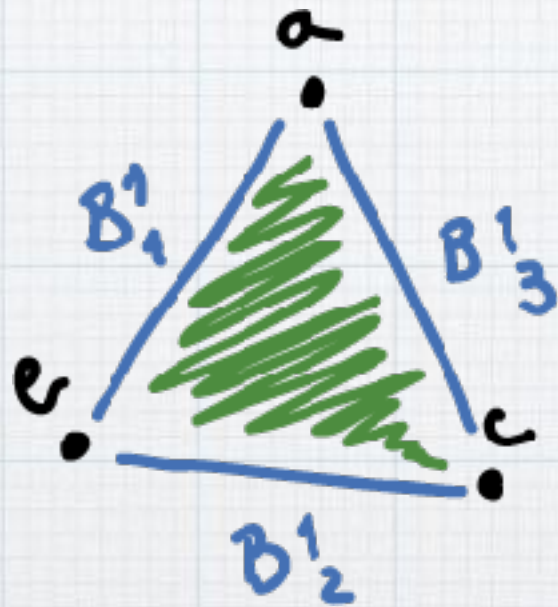
Représentation combinatoire d'un objet topologique



0-cellules : 3
1-cellules : 3
2-cellules : 1

CW-complexe

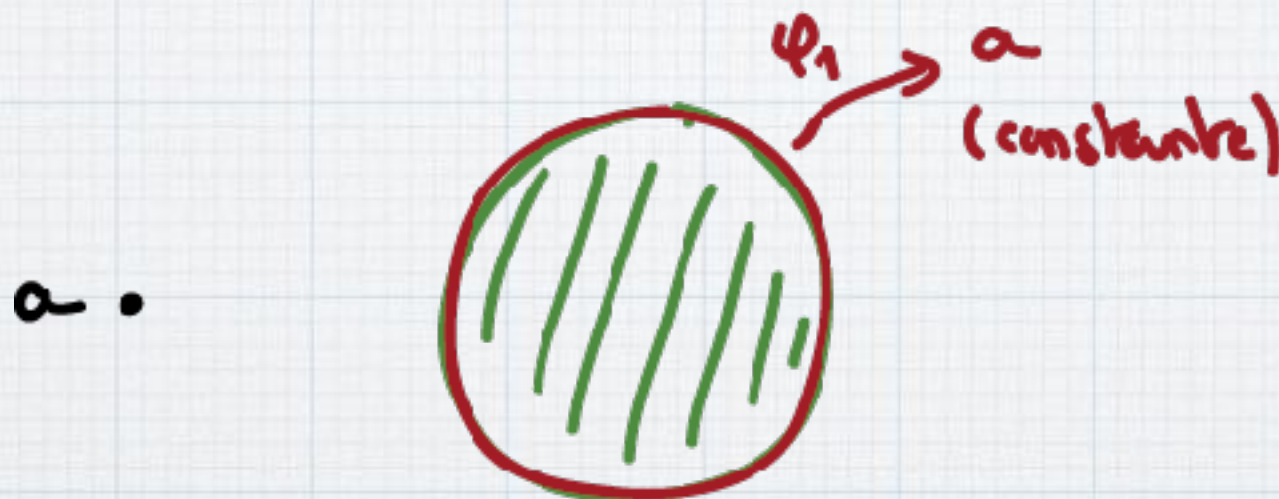
Représentation combinatoire
d'un objet topologique



0-cellules : 3
1-cellules : 3
2-cellules : 1

CW-complexe

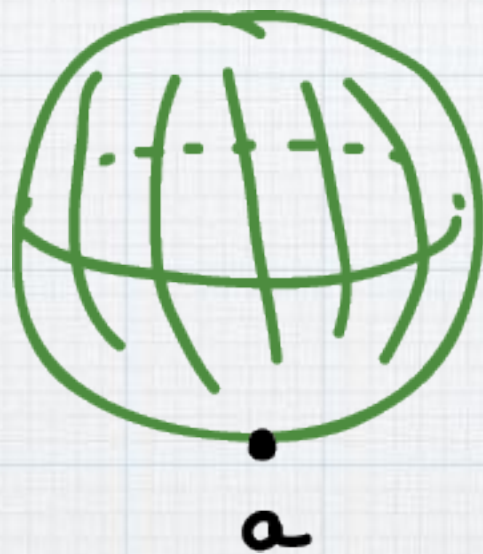
Représentation combinatoire d'un objet topologique



0-cellules : 1
1-cellules : 0
2-cellules : 1

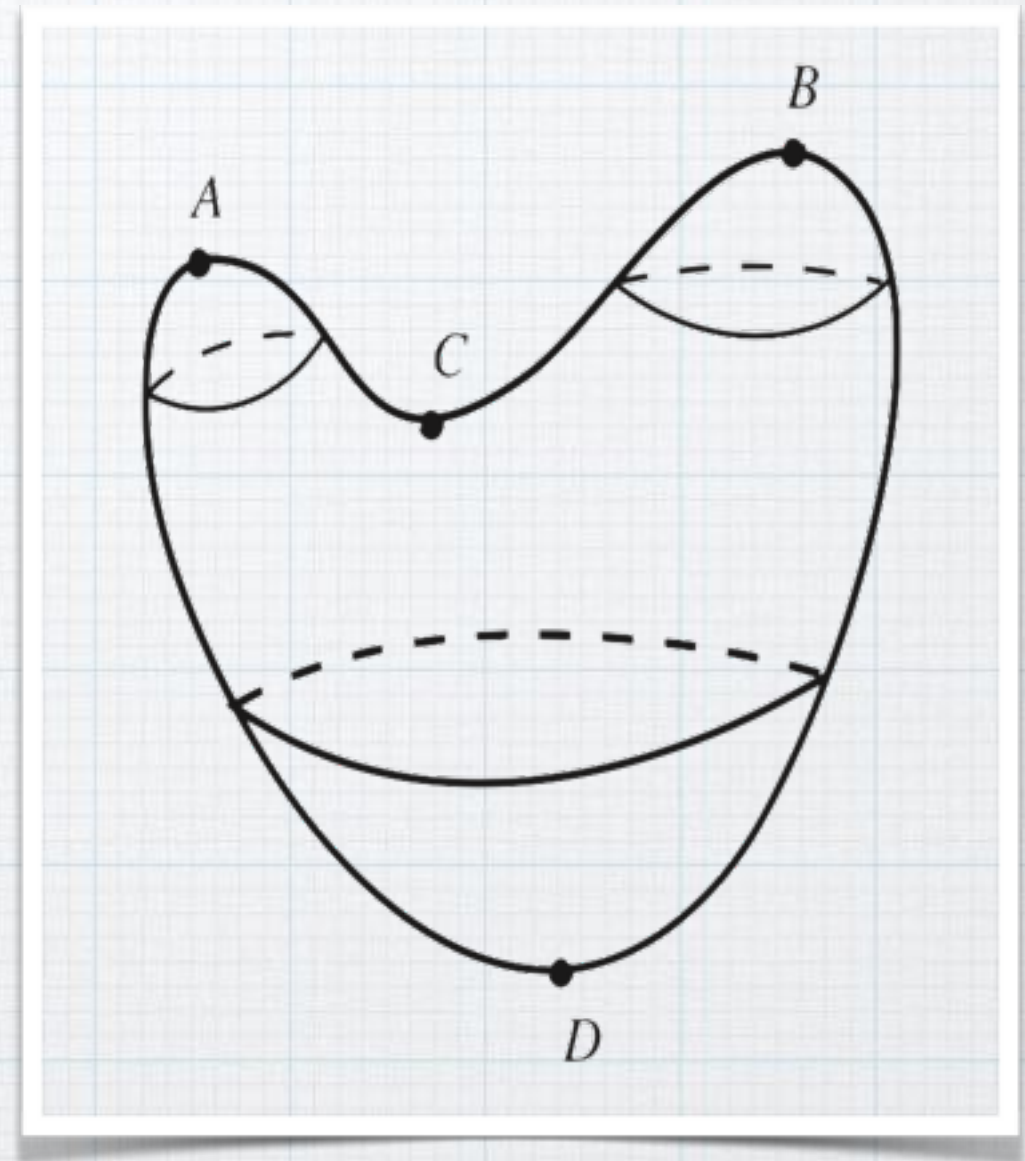
CW-complexe

Représentation combinatoire
d'un objet topologique



0-cellules : 1
1-cellules : 0
2-cellules : 1

Théorie de Morse



Théorie de Morse

Fonction sur \mathcal{S} , variété fermée (compacte sans bord)

$$f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$$

Fonction de Morse

Lemme de Morse

Etude locale des points critiques

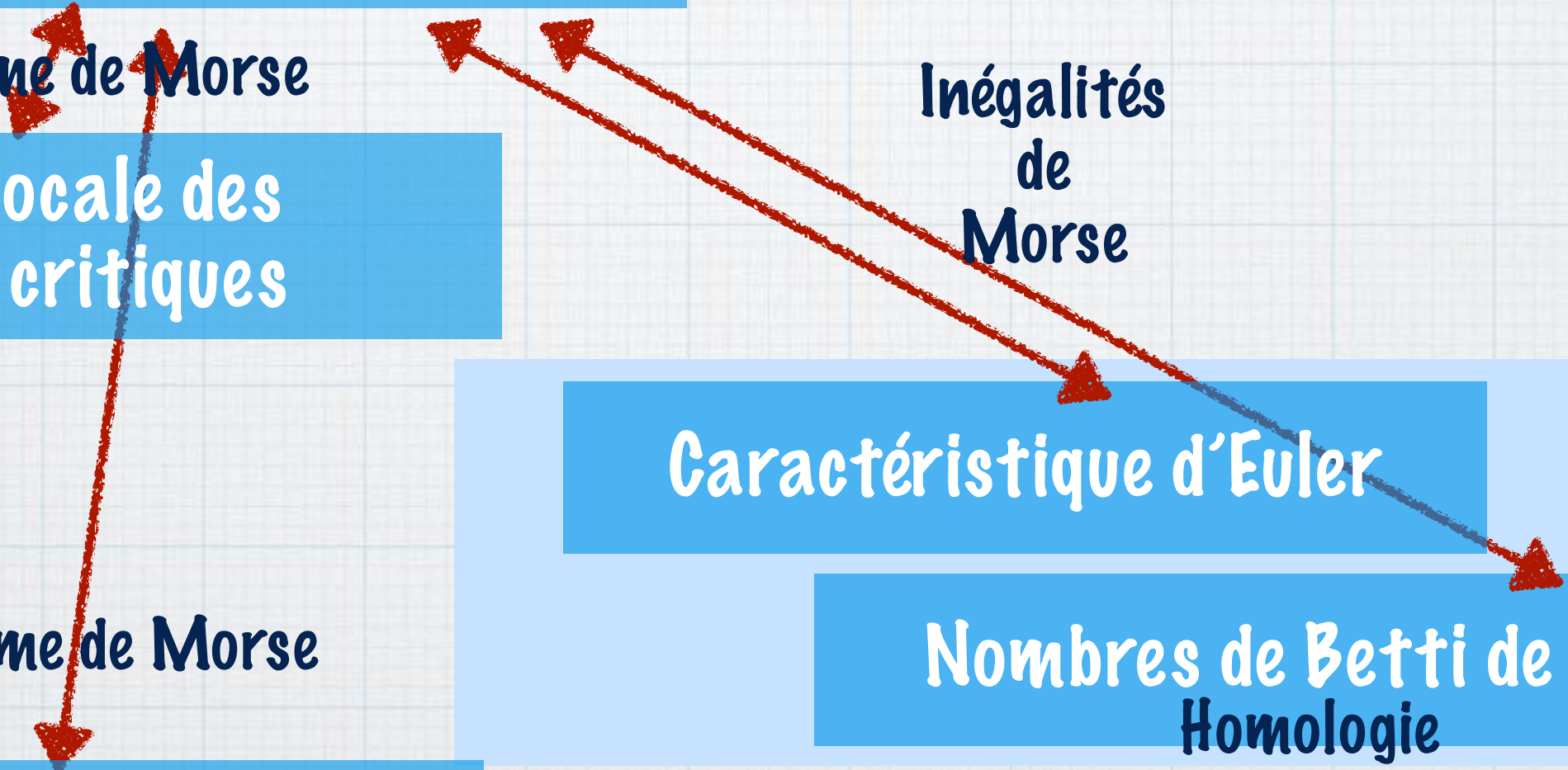
Inégalités de Morse

Caractéristique d'Euler

Théorème de Morse

Nombres de Betti de \mathcal{S}
Homologie

Décomposition en CW-complexe



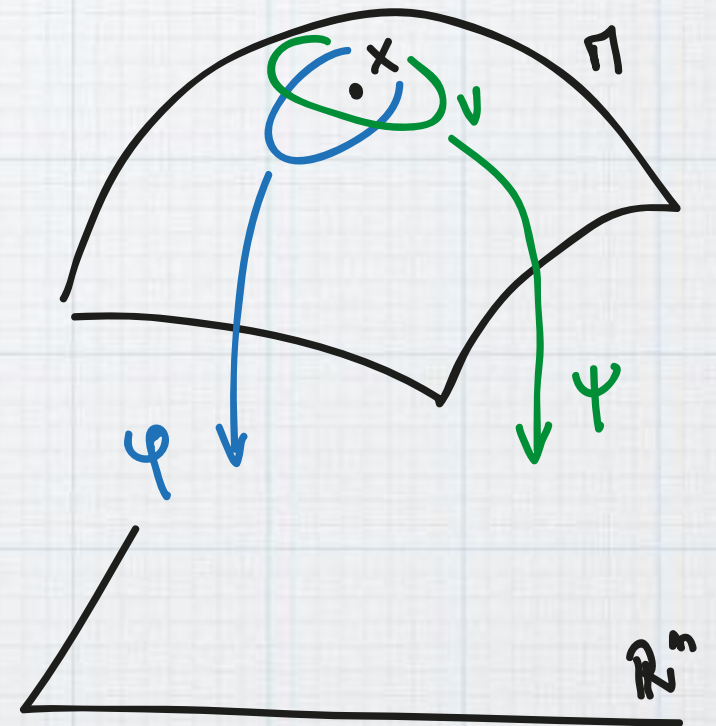
Points critiques

M variété lisse

Points critiques de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ lisse :

X point critique si $df_X : T_X M \rightarrow \mathbb{R}$ nulle

Stables par
changement de
carte / coordonnées



$$d(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(X)} = 0$$

\Leftrightarrow

$$d(f \circ \psi^{-1})_{\psi(X)} = 0$$

Points critiques

Etude de la géométrie locale
au vois. des points critiques

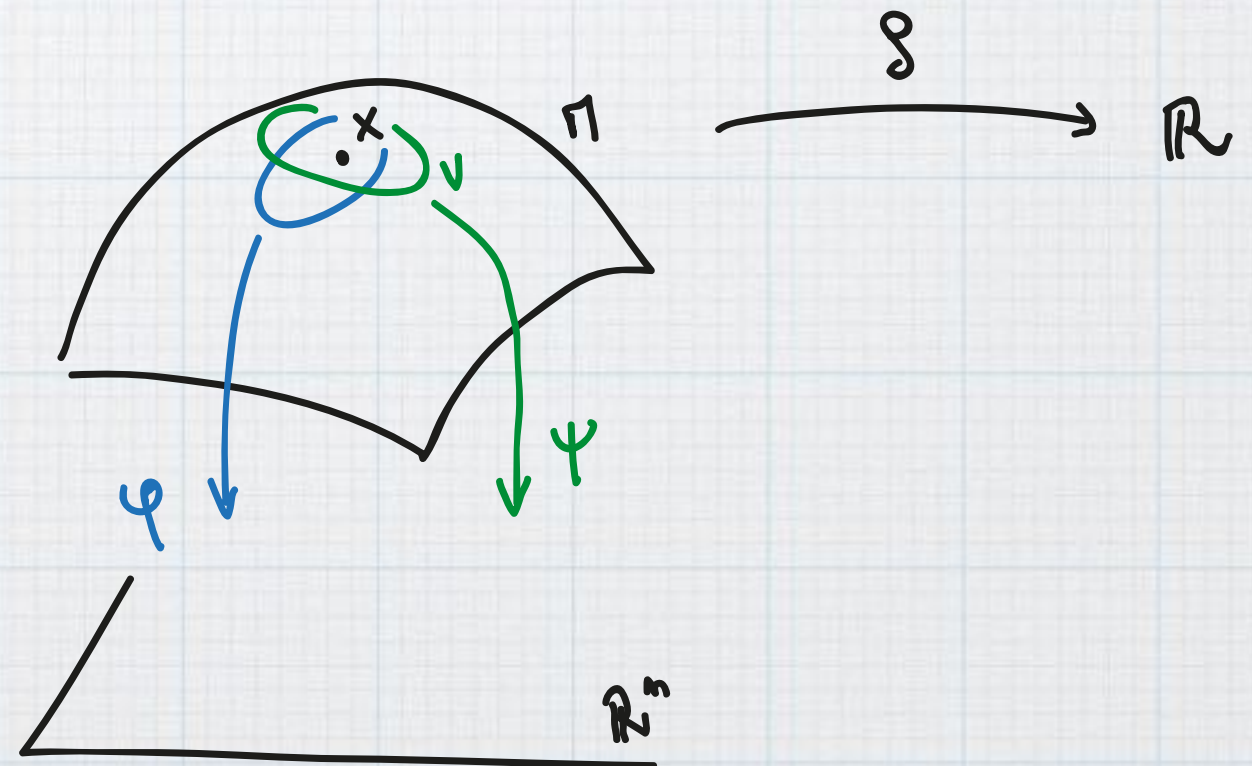
Dérivées secondes

$\text{Hess}_X(f)$

$$T_X(f) \in \mathcal{L}(T_X M, \mathbb{R})$$

Dépend de X ...

~~$\mathcal{L}_2(T_X M, \mathbb{R})$~~



Points critiques

Etude de la géométrie locale au vois. des points critiques

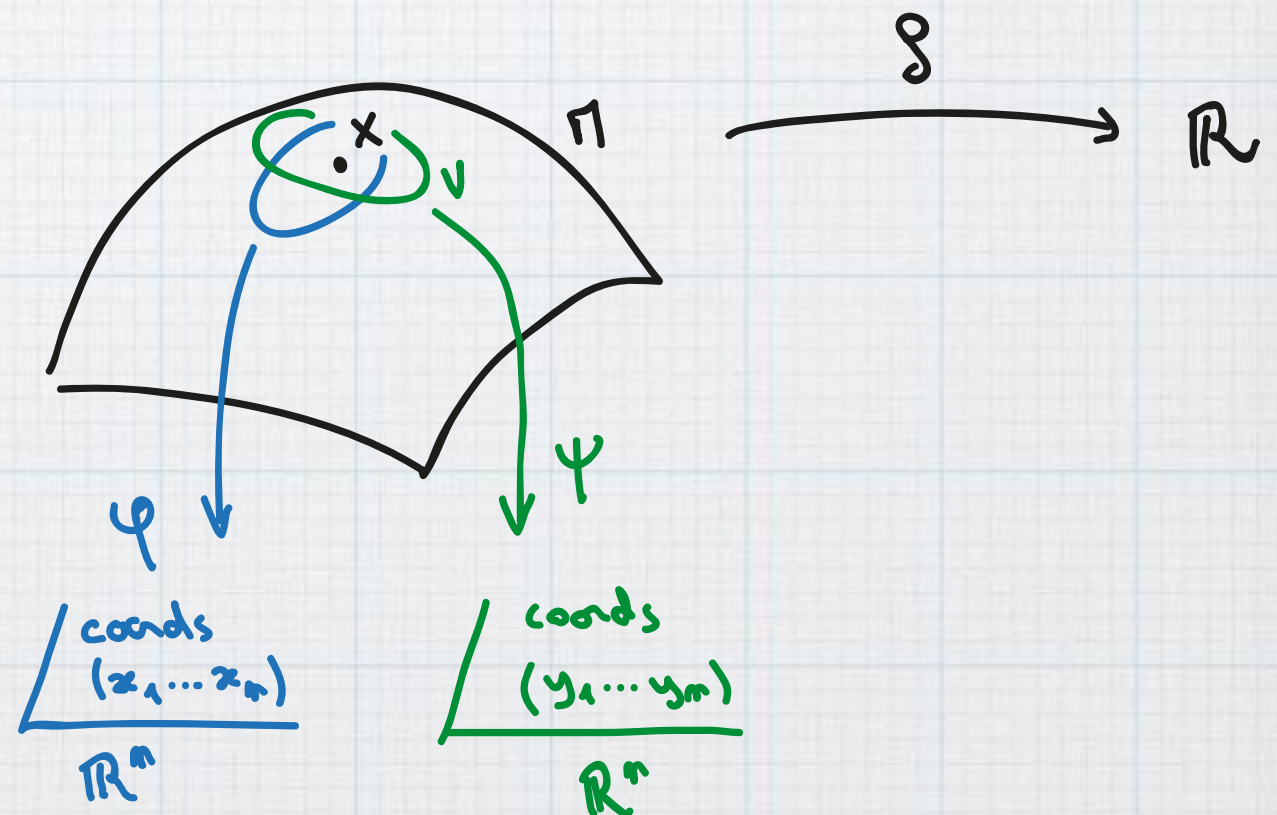
Dérivées secondes

$\text{Hess}_X(f)$

$$\left[\frac{\partial^2 (f \circ \varphi)^{-2}}{\partial x_i \partial x_j} (\varphi(X)) \right]_{i,j}$$

\neq

$$\left[\frac{\partial^2 (f \circ \psi)^{-2}}{\partial y_i \partial y_j} (\psi(X)) \right]_{i,j}$$



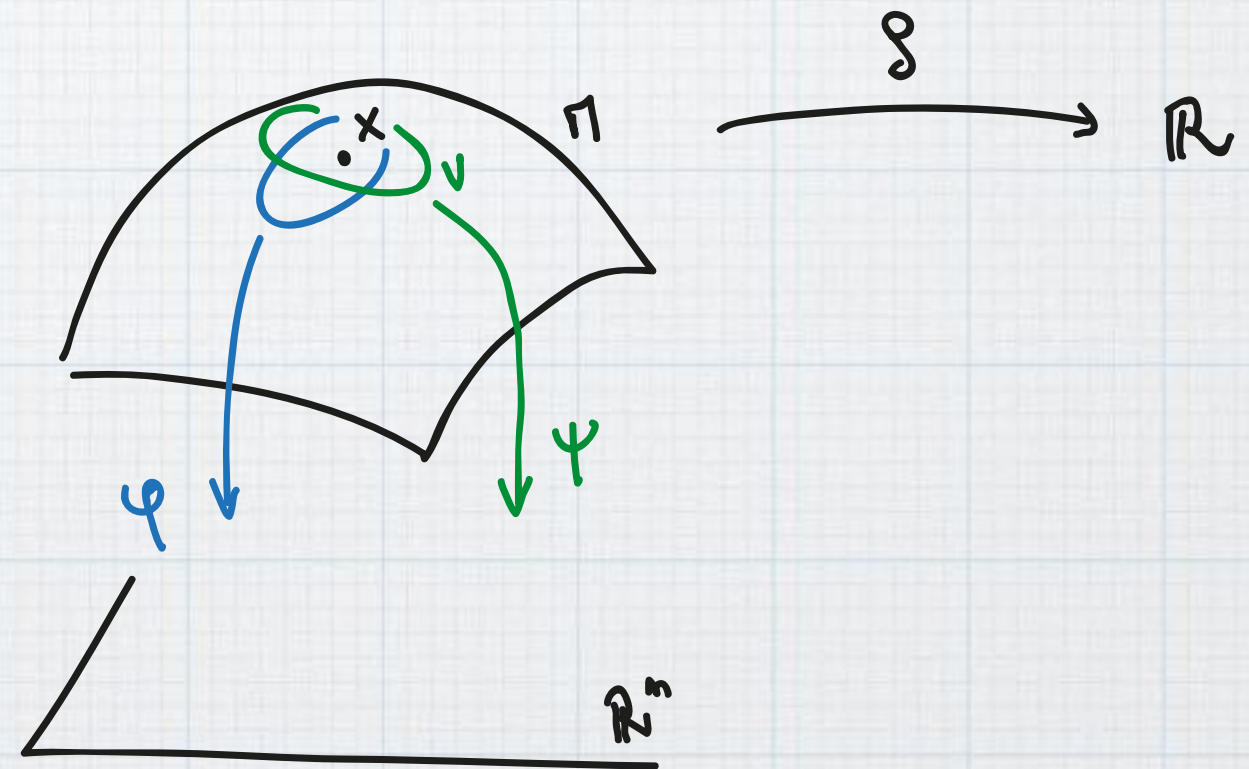
Points critiques

Etude de la géométrie locale
au vois. des points critiques

Dérivées secondes

Si X est un point critique

$\text{Hess}_X(f)$



$$\text{Hess}_X(f \circ \psi^{-1})(\psi(X)) =$$

$$J(\varphi \circ \psi^{-1})(\psi(X))^t \cdot \text{Hess}_X(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(X)) \cdot J(\varphi \circ \psi^{-1})(\psi(X))^t$$

Points critiques

Points critiques non dégénérés

X critique non dégénéré si

$\text{Hess}_X(f) \in \mathcal{L}_2(T_X M \times T_X, \mathbb{R})$ non singulière

Cas de la dimension 2

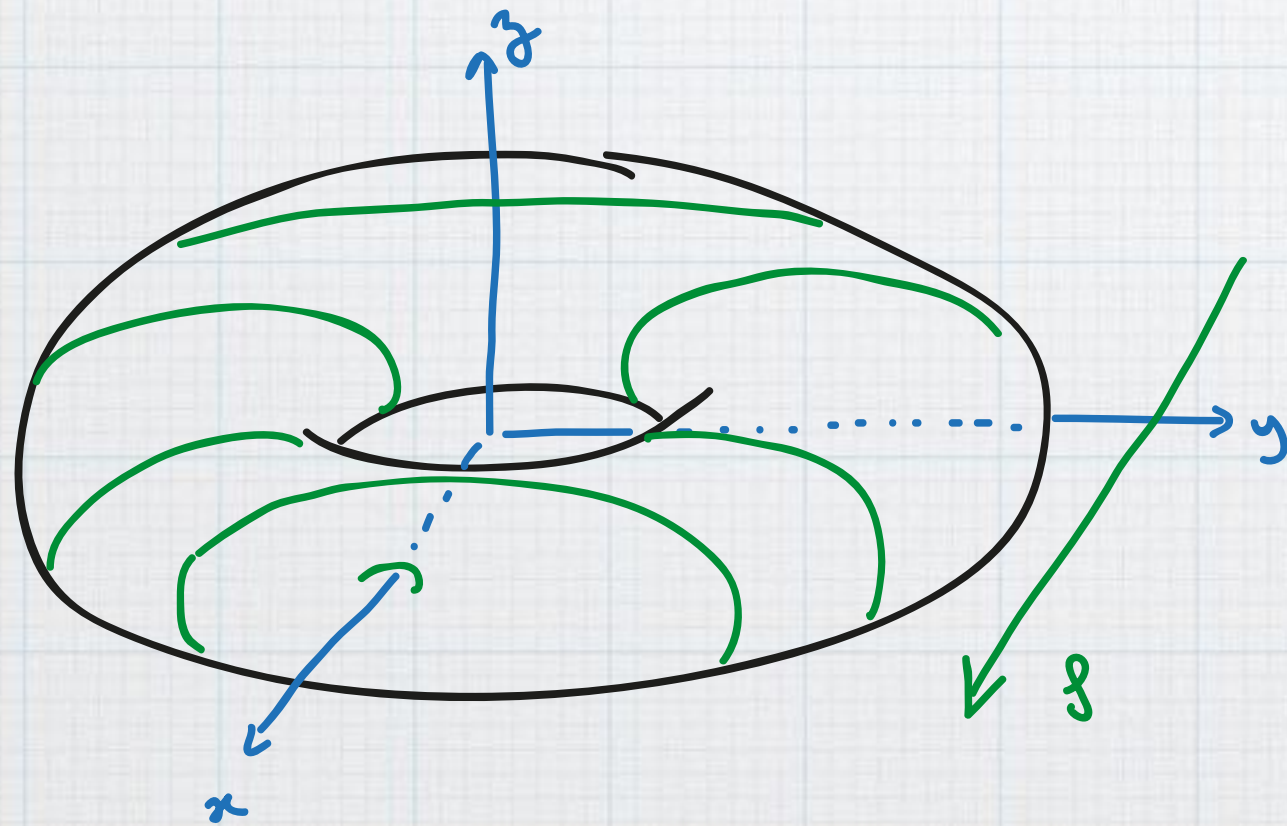
$P = (x, y)$ coordonnées de X dans une carte,

X critique non dégénéré si :

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) \end{pmatrix} \neq 0$$

Fonction de Morse

$f : M \rightarrow \mathbb{R}$ fonction lisse est une **fonction de Morse** sur M si elle n'a que des points critiques non dégénérés.



Fonction « hauteur » sur le tore

Fonction de Morse

$f : M \rightarrow \mathbb{R}$ fonction lisse est une **fonction de Morse** sur M si elle n'a que des points critiques non dégénérés.

Existence de fonctions de Morse

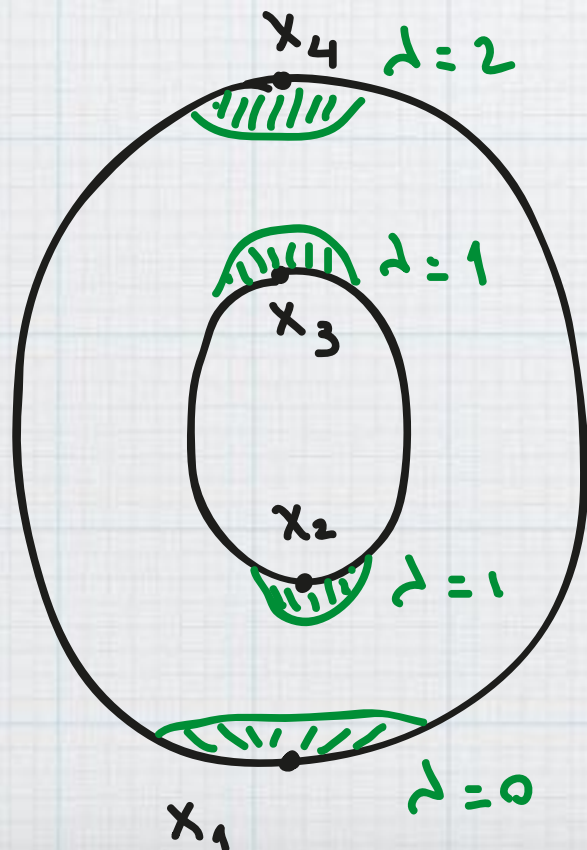
M variété fermée (compacte sans bord) et $g : M \rightarrow \mathbb{R}$,
il existe une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ arbitrairement
proche de g .

Preuve basée sur le théorème de Sard

Lemme de Morse

$f : M \rightarrow \mathbb{R}$ fonction lisse et X critique non dégénéré
Il existe un système de coordonnées locales (x_1, \dots, x_n)
sur un voisinage U de X où :

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(X) - \sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2 + \sum_{j=\lambda+1}^n x_j^2$$



λ indice du point critique non
dégénéré

Fonctions de Morse et « chirurgie »

f fonction de Morse
Sur une variété fermée M , f a un
nombre fini de points critiques

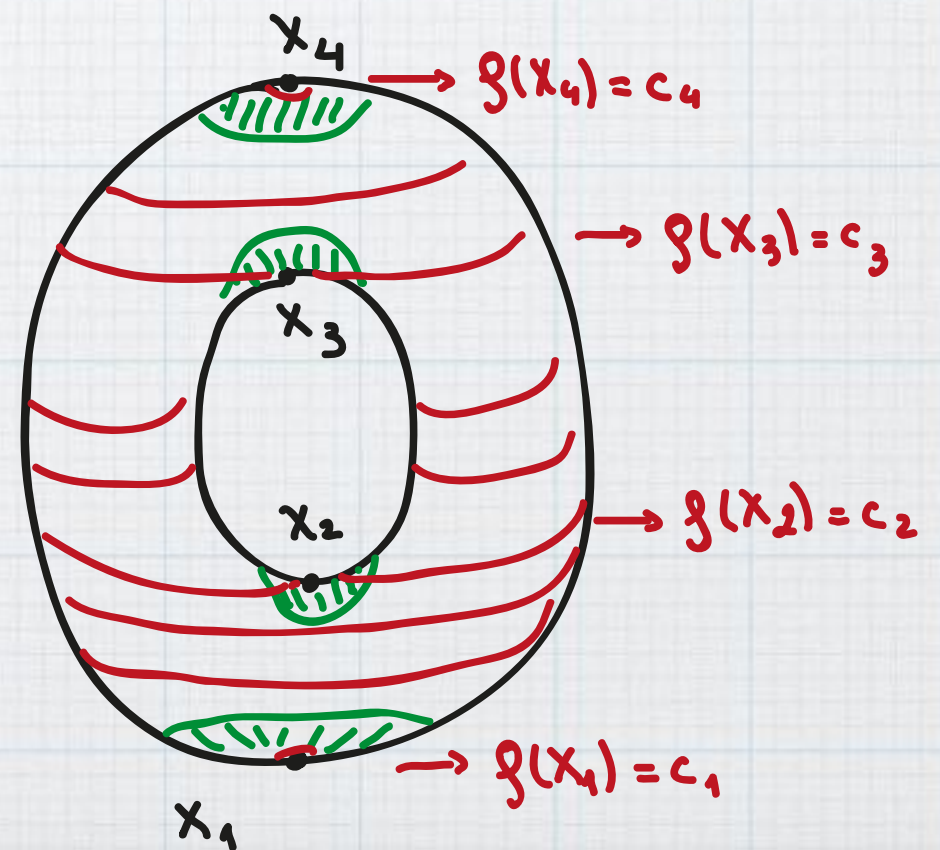
Point critique X_i

Valeur critique c_i

$$c_i = f(X_i)$$

Modulo éventuellement
modification de f :

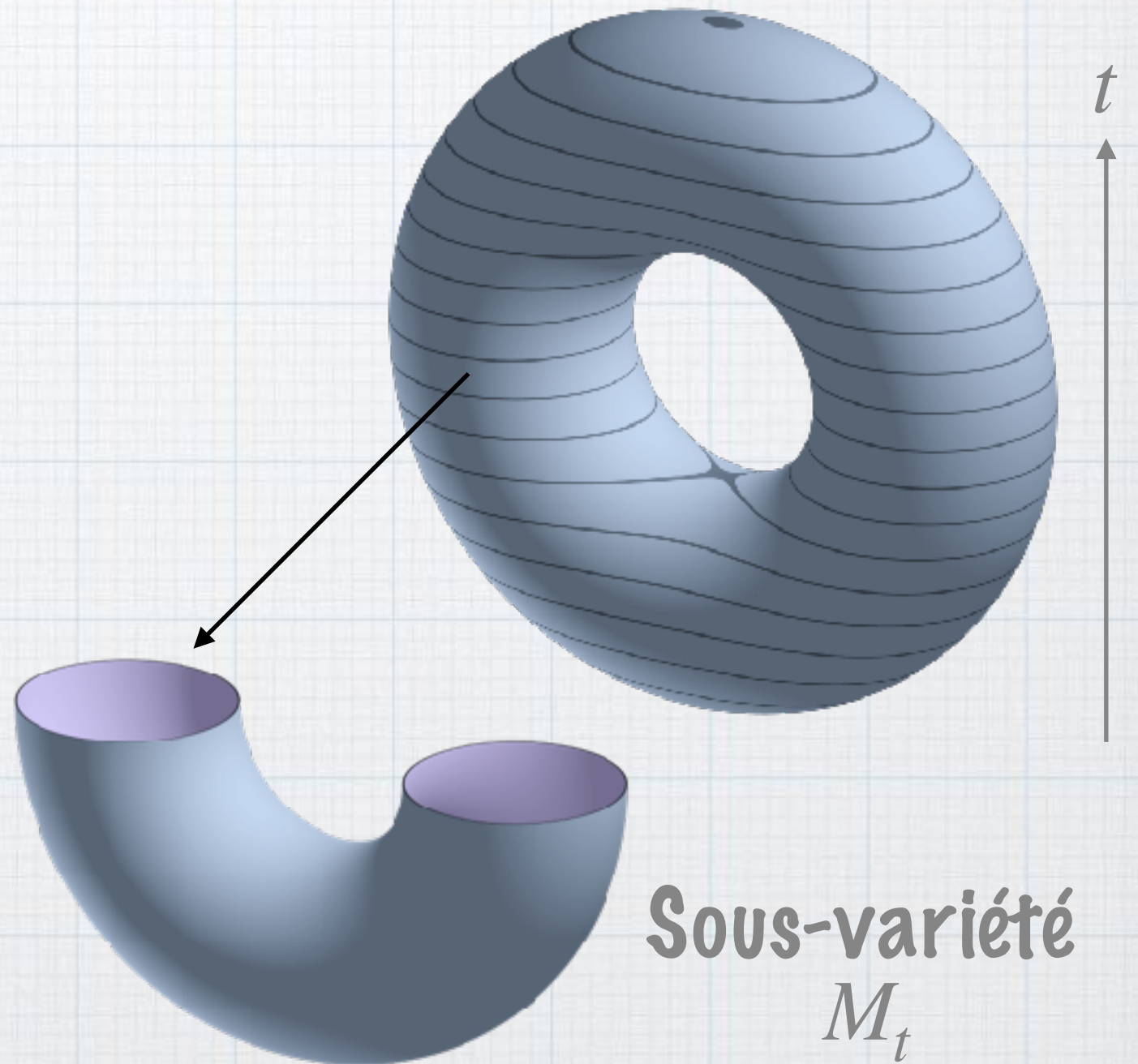
$$0 < c_1 < \dots < c_n$$



Fonctions de Morse et « chirurgie »

Soit $t \in \mathbb{R}$

$$M_t = f^{-1}(] - \infty, p])$$



Fonctions de Morse et « chirurgie »

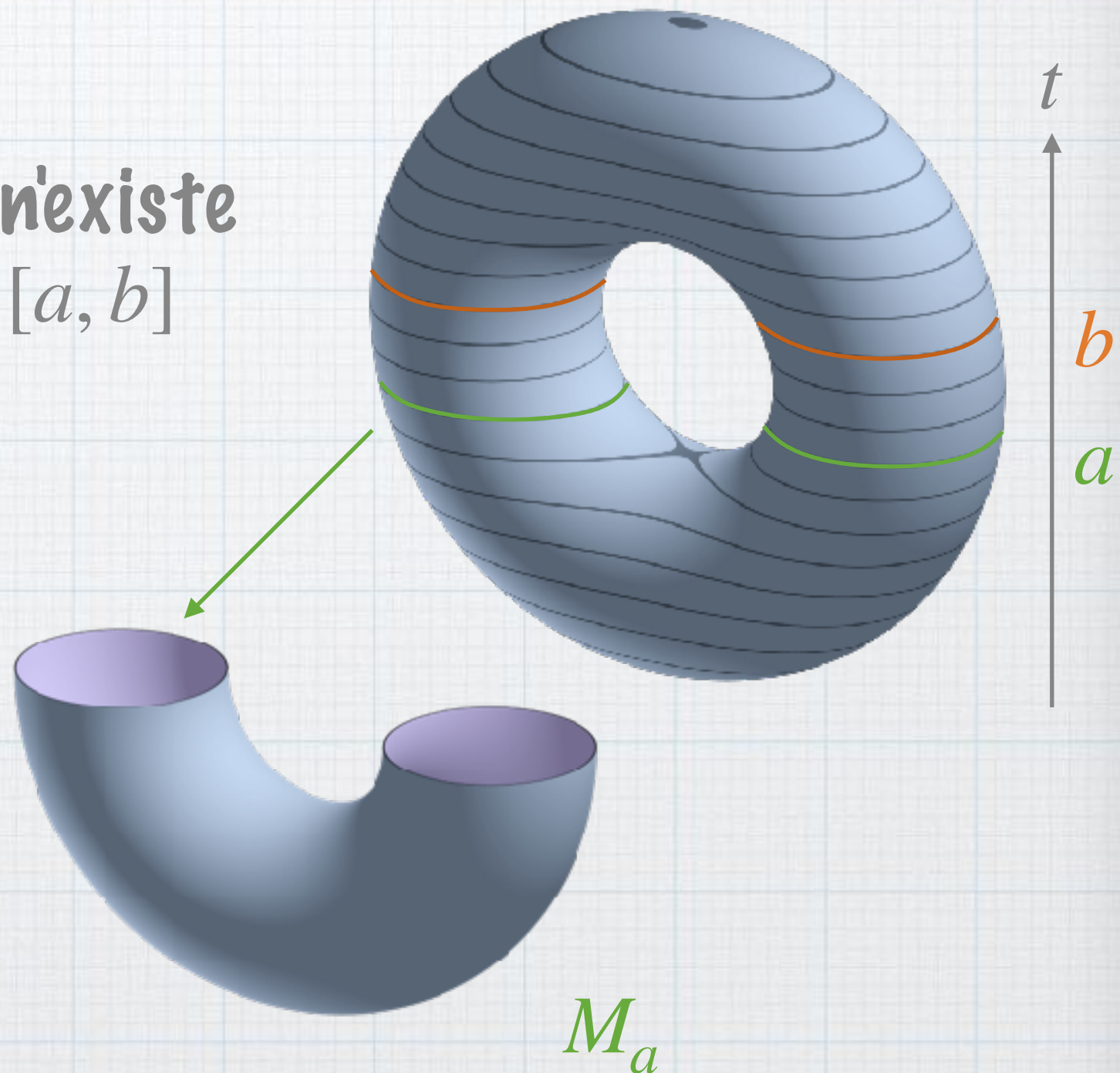
Théorème 1

Soient $a < b \in \mathbb{R}$ tels qu'il n'existe pas de valeur critique dans $[a, b]$

$$M_a \stackrel{\text{difféo}}{\simeq} M_b$$

Et par ailleurs :

$$M_b \stackrel{\text{rétracte par déformation}}{\hookrightarrow} M_a$$



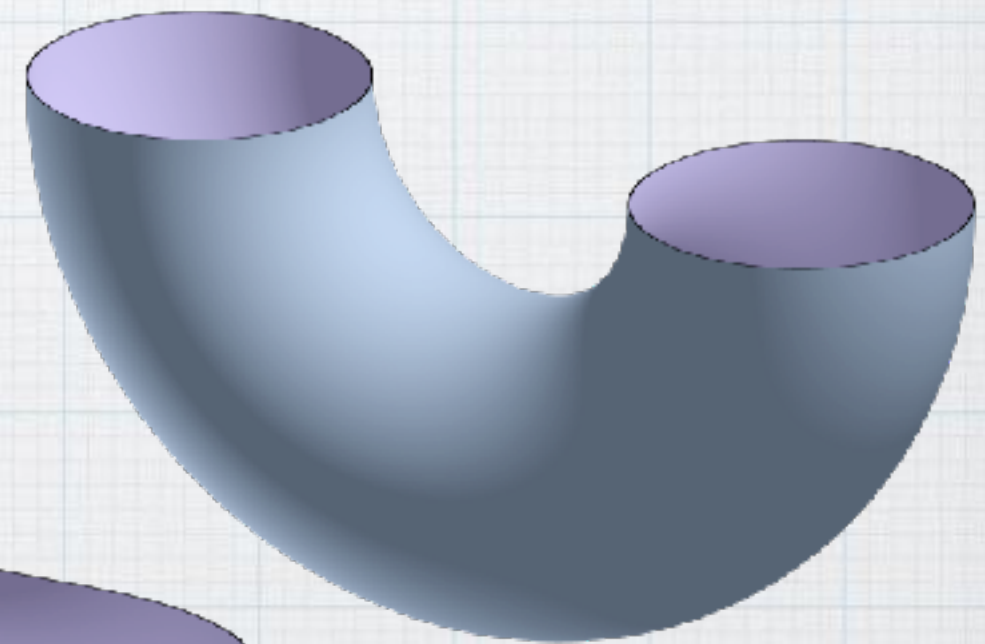
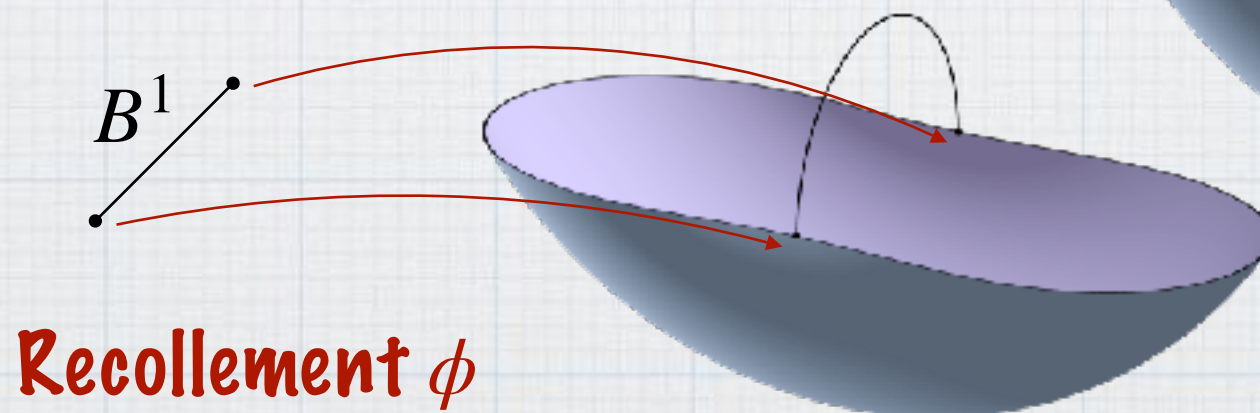
Fonctions de Morse et « chirurgie »

Théorème 2

Une valeur critique $c \in [c - \epsilon, c + \epsilon]$
d'indice λ

$$M_{c+\epsilon} \xrightarrow{\text{rétracte par déformation}} M_{c-\epsilon} \cup_{\phi} B^{\lambda}$$

$$\phi : \partial B^{\lambda} = S^{\lambda-1} \rightarrow \mathcal{S}_{c-\epsilon}$$

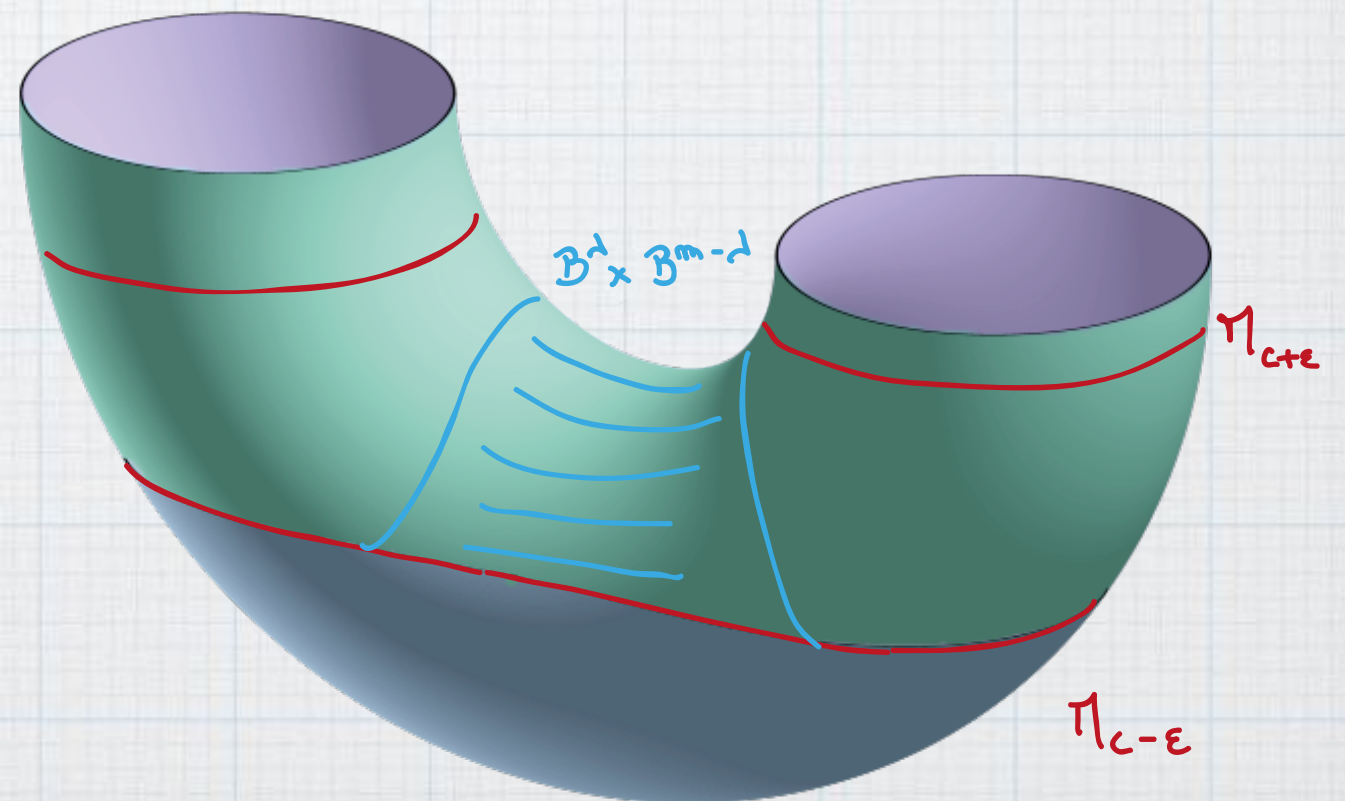


Fonctions de Morse et « chirurgie »

Théorème 2

Une valeur critique $c \in [c - \epsilon, c + \epsilon]$
d'indice λ

$$M_{c+\epsilon} \stackrel{\text{difféo}}{\simeq} M_{c-\epsilon} \cup_g B^\lambda \times B^{m-\lambda}$$



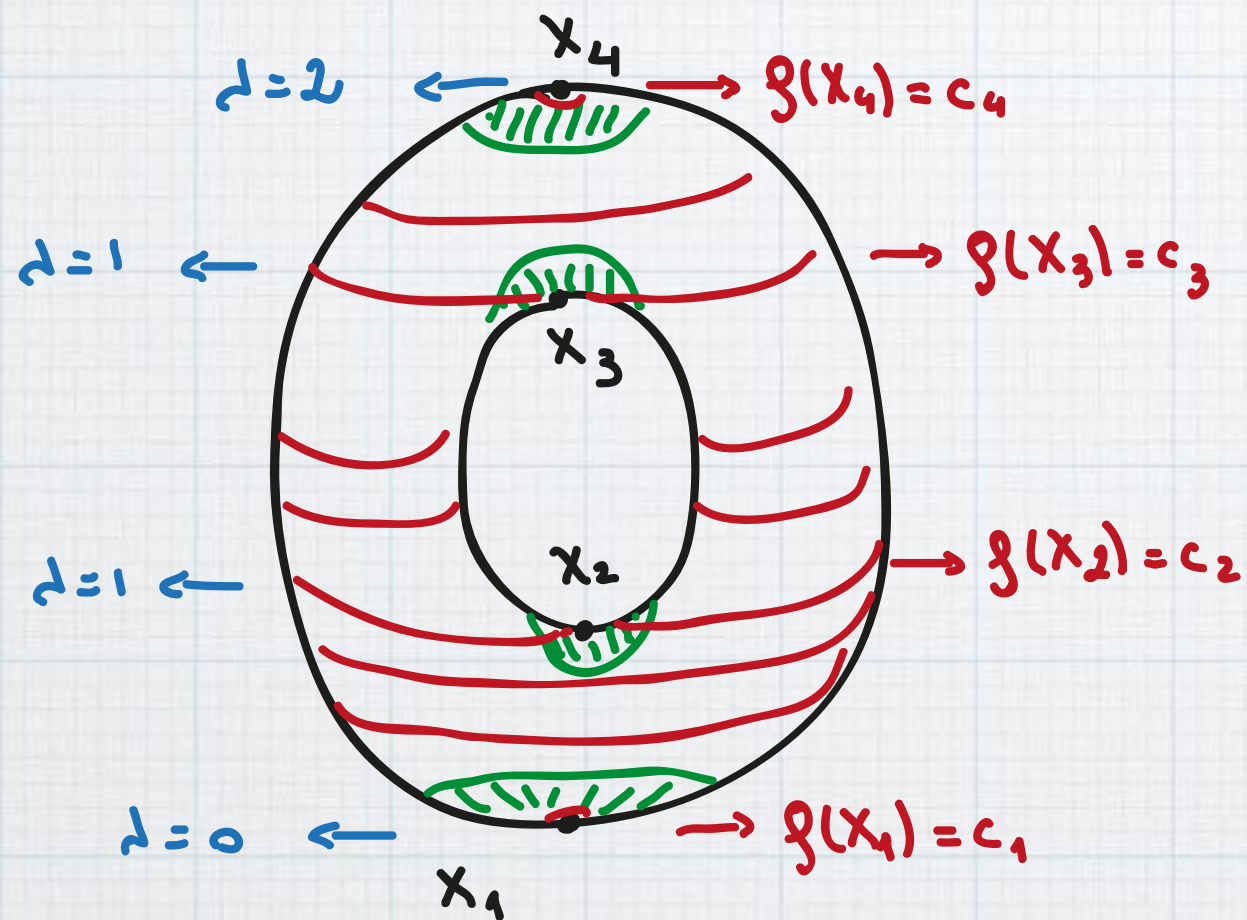
Théorie de Morse et CW-complexe

Théorème (corollaire)

Soit M une variété fermée et $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse.

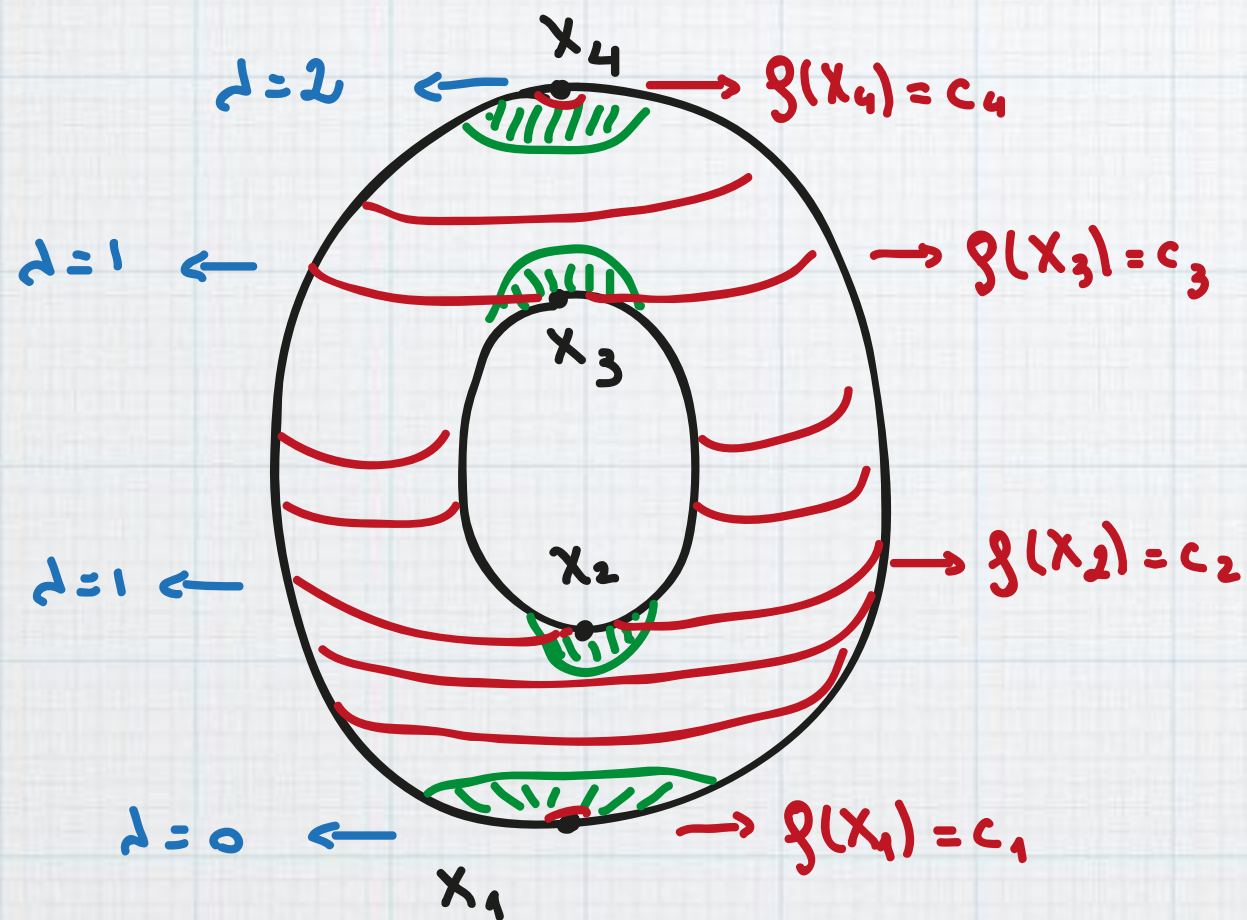
M est homotopiquement équivalente à un CW-complexe ayant une λ -cellule par point critique d'indice λ .

Théorie de Morse et CW-complexe



0-cellules : 1
1-cellules : 2
2-cellules : 1

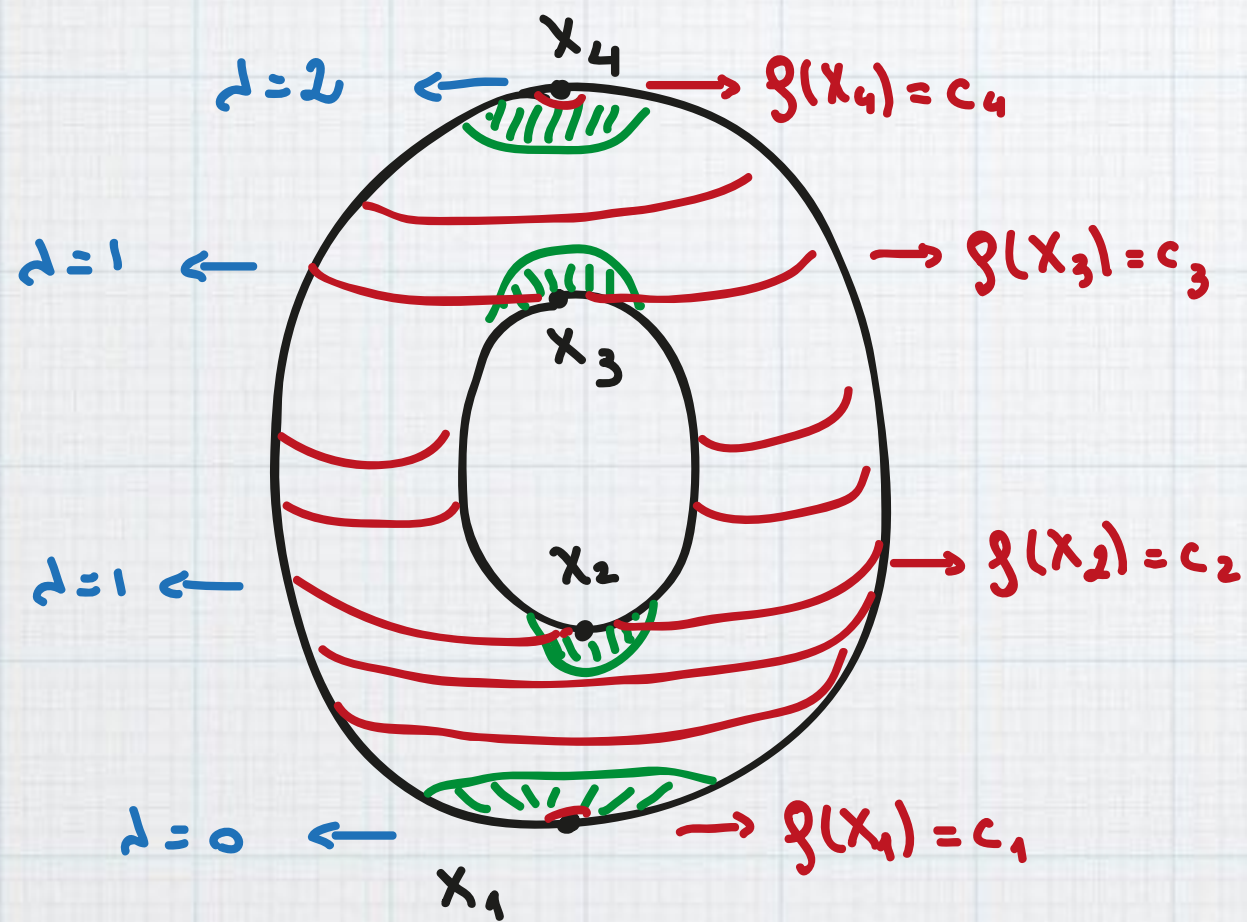
Théorie de Morse et CW-complexe



Une 0-cellule

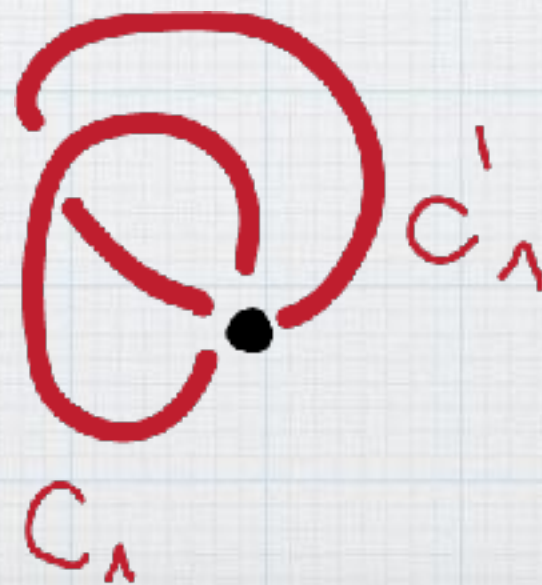
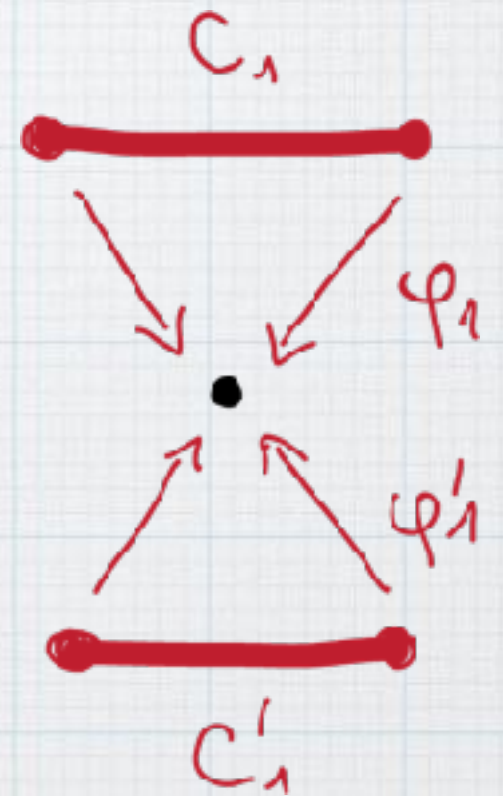
•
 C_0

Théorie de Morse et CW-complexe

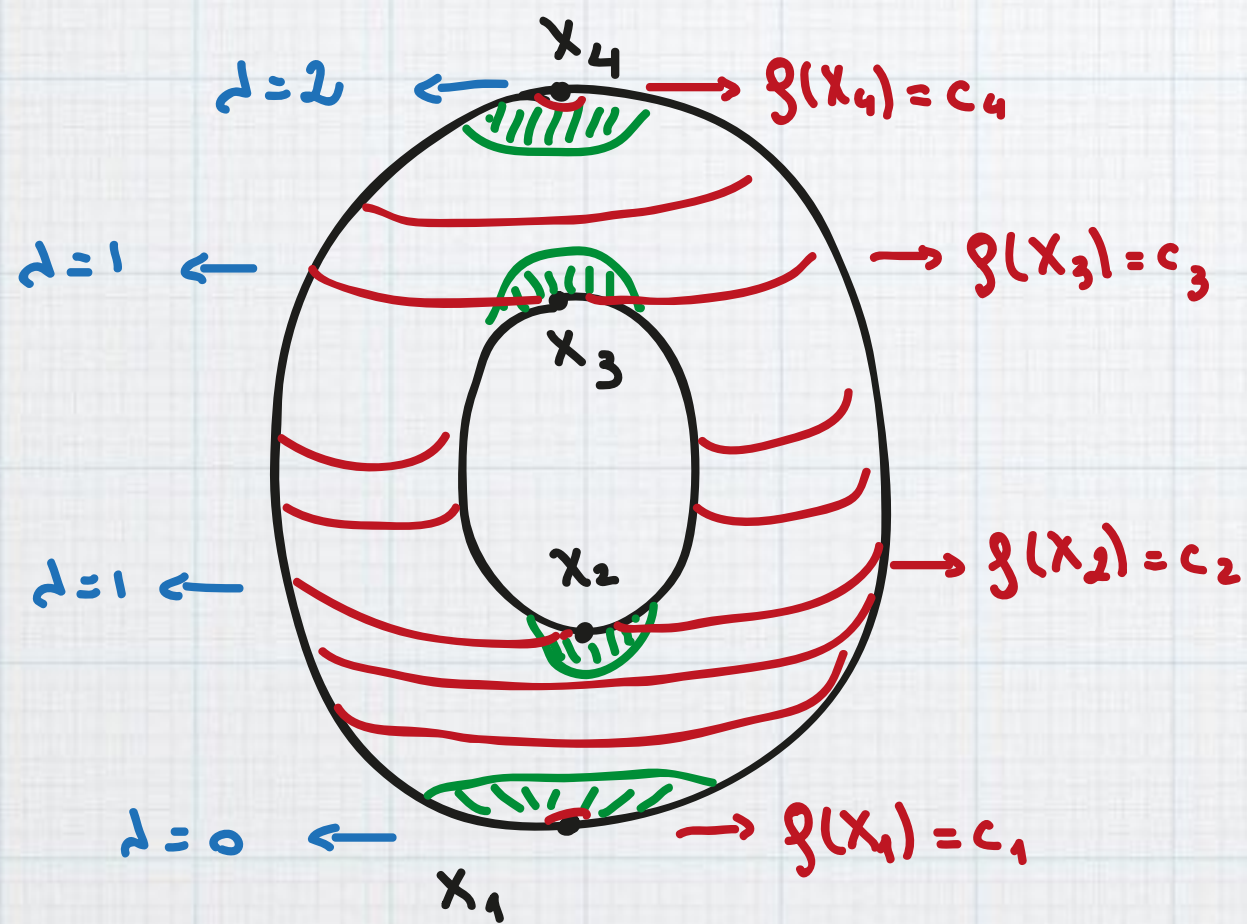


Deux 1-cellules

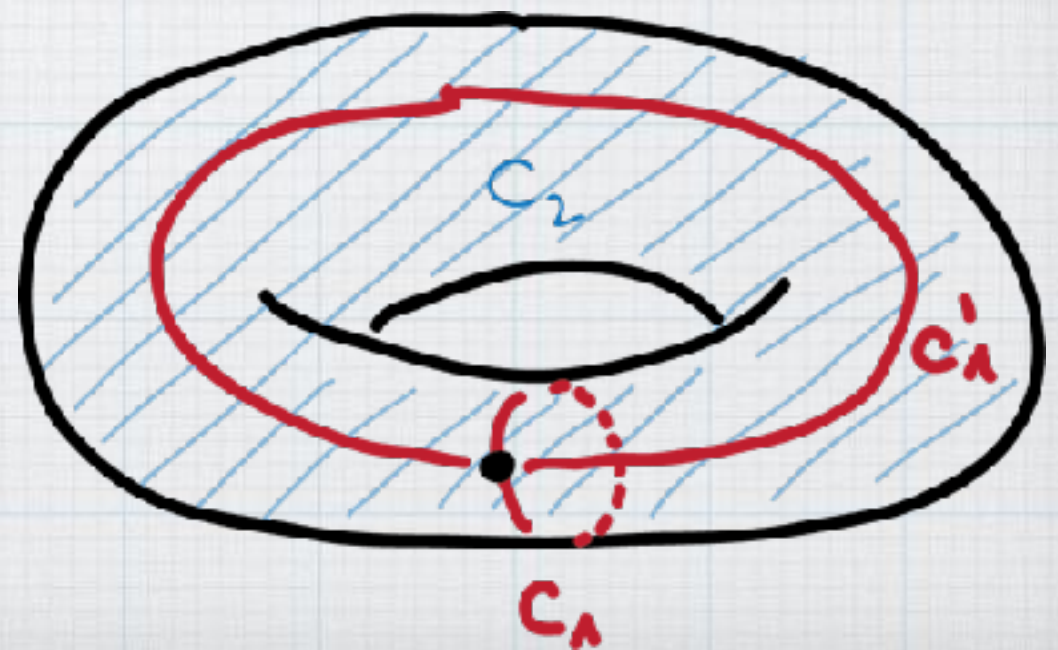
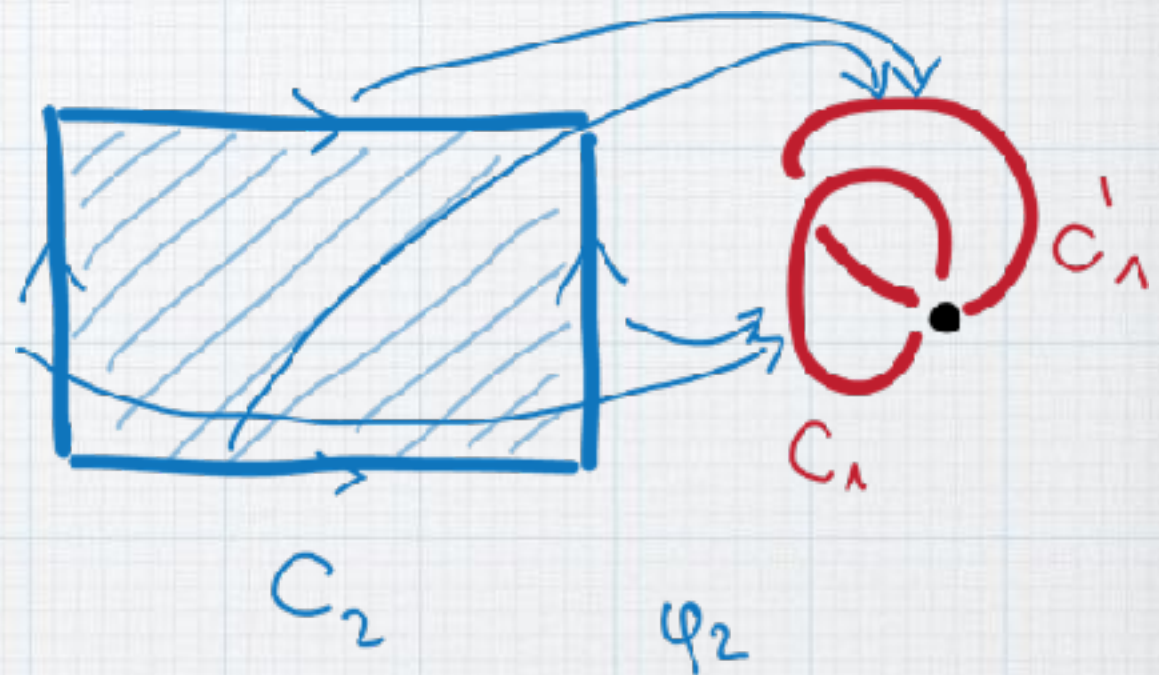
φ_1, φ'_1
recollements



Théorie de Morse et CW-complexe



Une 2-cellule



Fonctions de Morse et topologie

Corollaire : théorème de Morse

M variété compacte de dimension m

* κ_d nombre de points critiques d'indice d

$$\chi = \sum_{d=0}^m (-1)^d \kappa_d$$

**Invariant d'Euler-
Poincaré**

ne dépend que du
type d'homotopie

β_d nombre de Betti de dimension d
Rang de la partie libre du d ème groupe d'homologie

$$\chi(\mathcal{S}) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \beta_i$$

Fonctions de Morse et topologie

Théorème (inégalité de Morse faible)

- \mathcal{S} variété compacte de dimension m
- * κ_d nombre de points critiques d'indice d
 - * β_d nombre de Betti de dimension d

$$\forall d \quad \kappa_d \geq \beta_d$$

f parfaite si $\kappa_d = \beta_d \quad \forall d$

Flot de gradient et topologie

Théorème (inégalité de Morse forte)

Et plus ...

X complexe cellulaire de dimension m

* κ_d nombre de cellules critiques de dimension d

* β_d nombre de Betti de dimension d

$$\sum_{d=0}^i (-1)^{i-d} \kappa_d \geq \sum_{d=0}^i (-1)^{i-d} \beta_d \quad \forall i$$

Flot du champ de vecteur gradient

Approche de Smale

Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse et g une métrique Riemannienne sur M fermée

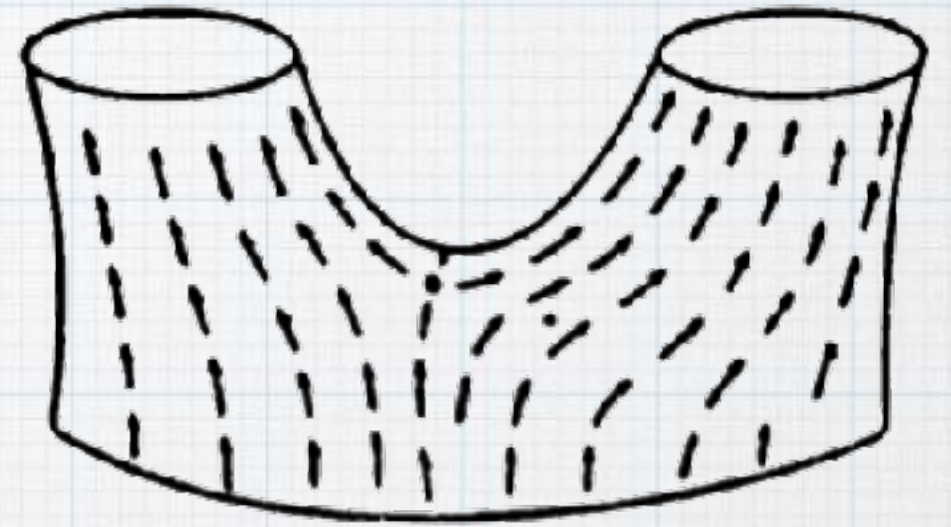
(on notera simplement $\langle u, v \rangle = g_X(u, v) \quad \forall u, v \in T_X M$)

Champ de vecteur gradient (bien) déterminé par f :

Au point X , $\nabla_X f \in T_X M$ tel que :

$$\forall v \in T_X M \quad \langle \nabla_X f, v \rangle = df_X(v)$$

Flot du champ de vecteur gradient



Lignes de flot du champ de vecteur gradient

$$\gamma_X : \mathbb{R} \rightarrow M$$

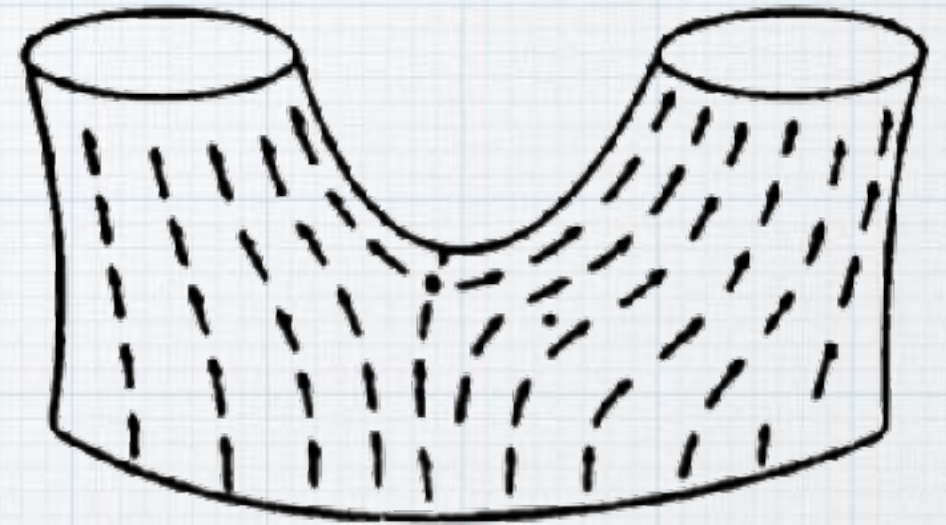
$$\frac{d\gamma_X}{dt} = \nabla_X f$$

$$\text{et } \gamma_X(0) = X$$

Flot du champ de vecteur gradient

$$\frac{d\gamma_X}{dt} = \nabla_X f$$

et $\gamma_X(0) = X$



$\forall X \in M$, il existe une unique ligne de flot γ_x

* Définie sur \mathbb{R}

* $\lim_{x \rightarrow -\infty} \gamma_X(t)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \gamma_X(t)$ converge vers des points critiques

* Si X n'est pas critique :

f est croissante le long des lignes de flot

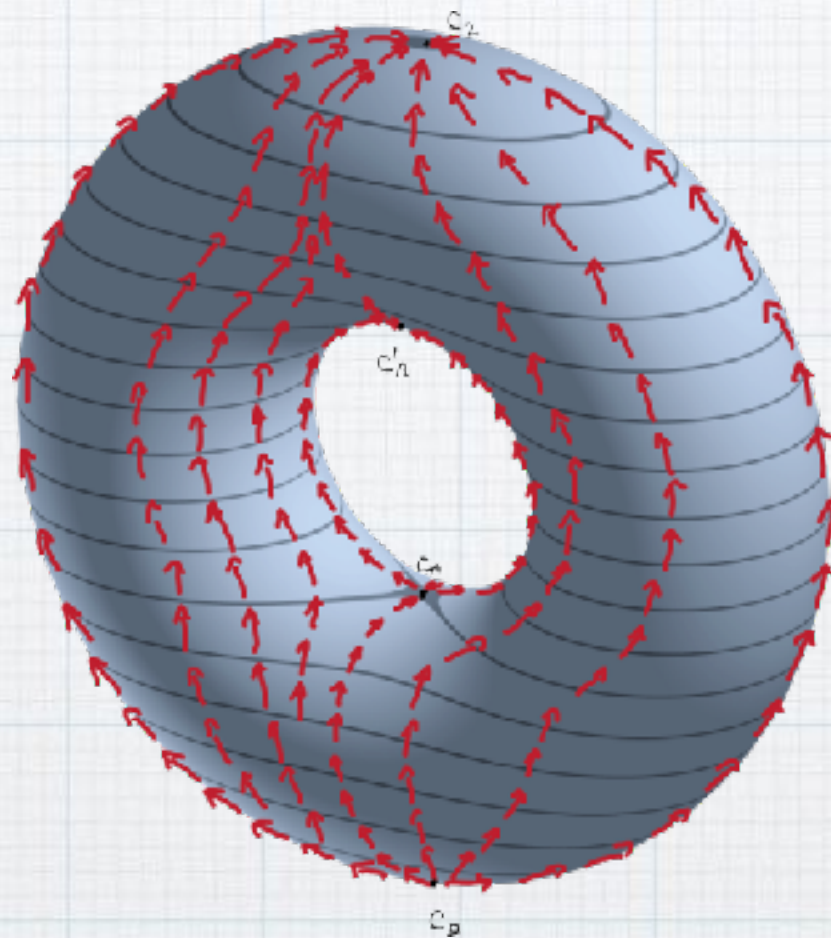
* Si X critique :

γ_X constante (flot « bloqué » au point X)

Flot du champ de vecteur gradient

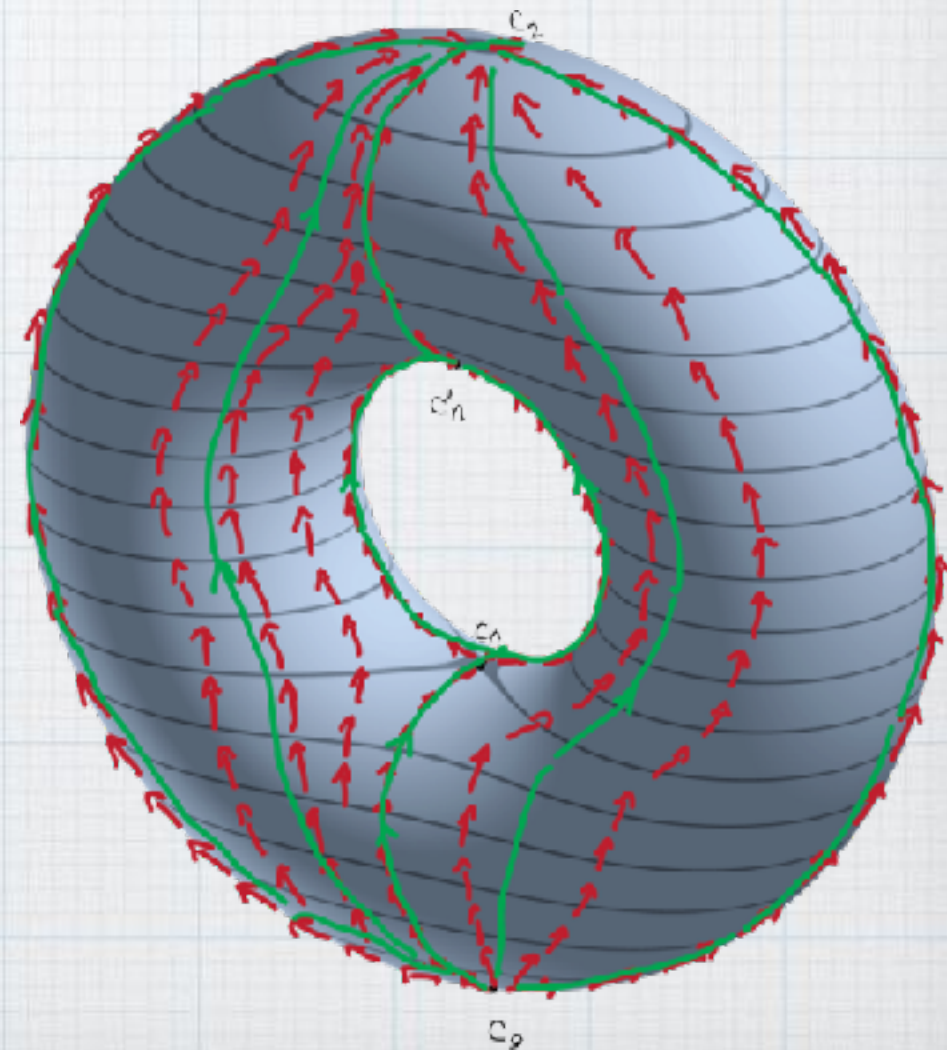
$$\frac{d\gamma_X}{dt} = \nabla_X f$$

et $\gamma_X(0) = X$



∇f

Flot γ



Flot du champ de vecteur gradient

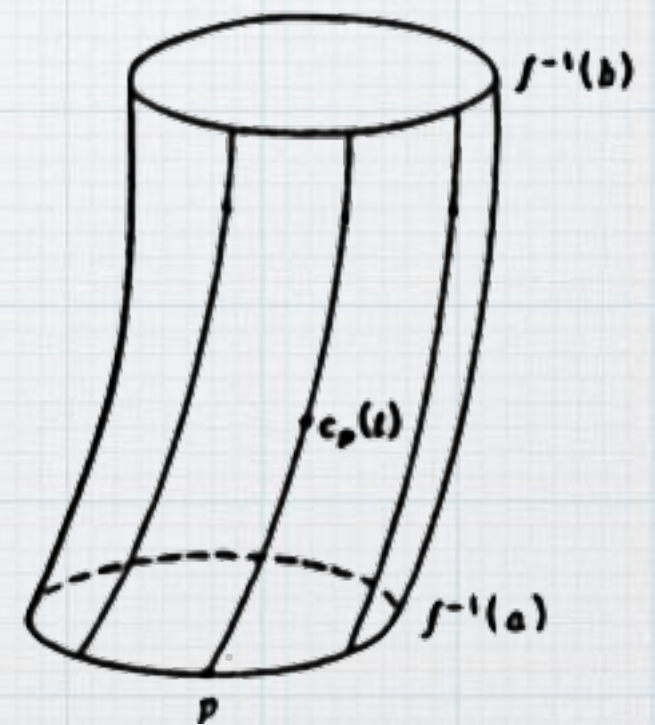
Application : preuve du théorème

Soient $a < b \in \mathbb{R}$ tels qu'il n'existe pas de valeur critique dans $[a, b]$

$$M_a \overset{\gamma_{b-a}}{\simeq} M_b$$

Et par ailleurs :

$$M_b \overset{\text{rétracte par déformation}}{\hookrightarrow} M_a$$



Références

Milnor, J., et al. Morse Theory.
(AM-51), Volume 51. Princeton University Press, 1969.

Yukio Matsumoto. An Introduction to Morse Theory.
Oxford University Press, 2001.

Allen Hatcher. Algebraic Topology
Cambridge University Press, 2001.