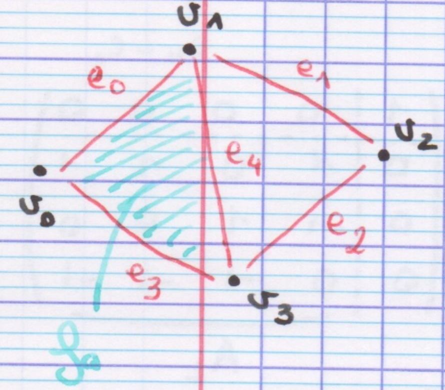
Homologie algorithmique

- exemples et exercices -

(1) Calcul de l'homologie par FNS (ex. p.33)



Matrice de ∂_2 :

$$\begin{array}{c|c} & \sigma_0 \\ \hline \begin{matrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Matrice de ∂_1 :

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & 1 & \\ -1 & 1 & & & 1 \\ & -1 & 1 & & \\ & & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

* **FNS de ∂_2 :**

On se contente de multiplier la matrice par -1.

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \alpha(A) \qquad \begin{matrix} e_4 \leftarrow e_4 + e_1 \\ e_5 \leftarrow e_5 - e_1 \end{matrix} \qquad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ FNS}$$

$$\begin{matrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ \\ e'_5 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\} \longrightarrow$ base de $W_1 \Rightarrow$ rang 1

$\longrightarrow \{1 \cdot e'_1\}$ base de $B_1 = W_1$

$\longrightarrow$ base de $Z_2 = \{0\}$

* FNS de ∂_1 :

$$\alpha(A) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \; \ell_2 \leftarrow \ell_2 + \ell_1 \;\rightsquigarrow\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$c_4 \leftarrow c_4 - c_1$

divise tous les élts de ∂_1

$\Longrightarrow$ on met la ligne/col à 0

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \qquad \text{bloc } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \; \ell_2 \leftarrow \ell_2 + \ell_1 \;\rightsquigarrow\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\alpha(A) \rightsquigarrow$ idem

$c_3 \leftarrow c_3 - c_1$, $c_4 \leftarrow c_4 - c_1$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \qquad \text{bloc } A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha(A) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \; \ell_2 \leftarrow \ell_2 + \ell_1 \;\rightsquigarrow\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$c_2 \leftarrow c_2 - c_1$, $c_3 \leftarrow c_3 - c_1$

On obtient donc la FNS :

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} e''_1 \\ e''_2 \\ e''_3 \\ e''_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

→ base de W_0

→ $\{1.e''_1, 1.e''_2, 1.e''_3\}$ base de B_0 $= W_0$

→ base de Z_1

Groupes d'homologie : $\xrightarrow{0} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{0}$

- $H_2 = Z_2/B_2 \simeq Z_2/W_2 \oplus \underbrace{W_2/B_2}_{0}$

$Z_2/W_2 \simeq 0$; $W_2 = 0$

Donc $\boxed{H_2 \simeq 0}$

- $H_1 = Z_1/B_1 \simeq Z_1/W_1 \oplus \underbrace{W_1/B_1}_{0}$ car $W_1 = B_1$.

Z_1 : rang 2 ; W_1 : rang 1

Donc $\boxed{H_1 \simeq \mathbb{Z}}$

- $H_0 = Z_0/B_0 \simeq Z_0/W_0 \oplus \underbrace{W_0/B_0}_{W_0 = B_0}$ $= 0$

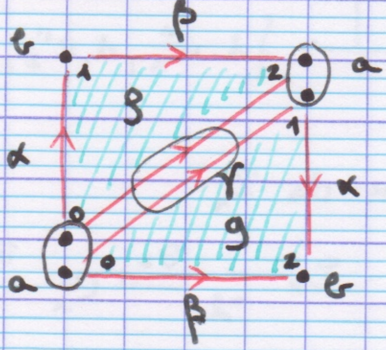
$Z_0 = C_0$ car $\underline{\partial_0 = 0}$: rang 4 ; W_0 : rang 3

Donc $\boxed{H_0 \simeq \mathbb{Z}}$

Puis $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$.

β_0 → 1 CC ; β_1 → 1 trou de dim 1 ; β_2 → 0 cavités.

2 Δ-complexe du ruban de Möbius



Matrice de ∂_2 :

$$\begin{array}{c|cc} & \delta & g \\ \hline \alpha & -1 & -1 \\ \beta & -1 & 1 \\ \gamma & 1 & -1 \end{array}$$

Matrice de ∂_1 :

$$\begin{array}{c|ccc} & \alpha & \beta & \gamma \\ \hline a & 1 & 1 & 0 \\ b & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

* FNS de ∂_2 :

$\alpha(A)$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ e_2 \leftarrow e_2 - e_1 \\ e_3 \leftarrow e_3 + e_1 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 \leftarrow c_2 - c_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{e_1\ (\times -1)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}_{A_1}$$

$\alpha(A)$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} e_2 \leftarrow e_2 + e_1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où la FNS :

$$\begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

⟶ base de W_1 ⇒ rang 2

⟶ $\{1 \cdot e'_1, 2 \cdot e'_2\}$ base de B_1

⟶ Base de $Z_2 = \{0\}$

* FNS de ∂_1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\ell_2 \leftarrow \ell_2 + \ell_1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{c_2 \leftarrow c_2 - c_1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où la FNS :

$$\begin{array}{c} e''_1 \\ e''_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ Base de W_0 $\rightsquigarrow$ rang 1

$\longrightarrow$ $\{1 \cdot e''_1\}$ base de B_0.

$\longrightarrow$ Z_1 $\rightsquigarrow$ rang 2

Groupes d'homologie

- $H_2 \simeq \underbrace{\underset{0}{Z_2} / \underset{0}{W_2}}_{} \oplus \underbrace{W_2 / B_2}_{0}$

$$\boxed{H_2 \simeq 0}$$

- $H_1 \simeq \underbrace{\underset{\text{rang } 2}{Z_1} / \underset{\text{rang } 2}{W_1}}_{0} \oplus W_1 / B_1$

$W_1 \longrightarrow \operatorname{span}\{e'_1, e'_2\}$

$B_1 \longrightarrow \operatorname{span}\{e'_1, 2e'_2\}$

$\simeq 0 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$$\boxed{H_1 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$$

- $H_0 \simeq Z_0 / W_0 \oplus W_0 / B_0$

$Z_0 \to \operatorname{span}\{a, b\}$ — rang 2

$W_0 \to$ rang 1

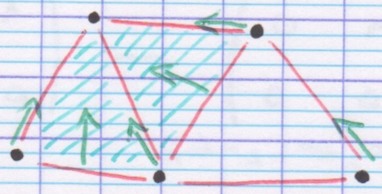
$W_0 / B_0 \simeq 0$; $W_0 = B_0$

$$\boxed{H_0 \simeq \mathbb{Z}.}$$

3 DGVF – exemple 1

→ théorie de Morse discrète.

K :



DGVF

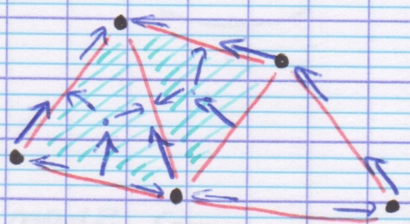
On vérifie que ce champ de vecteurs discret est un DGVF.

(1) ⇝ soit en vérifiant qu'il n'y a aucun V-chemin

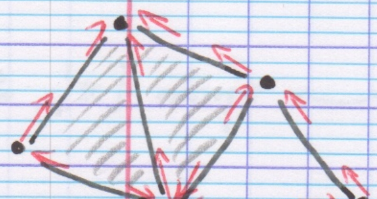
(2) ⇝ que tous les sous-graphes $G_{q,q+1}$ du graphe de Morse sont acycliques

On utilise (2) :

→ graphe de Morse:

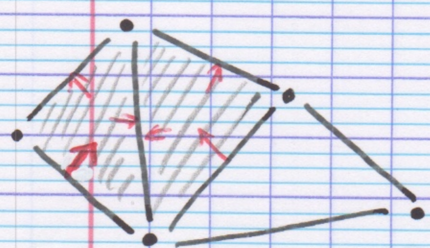


G



$G_{0,1}$

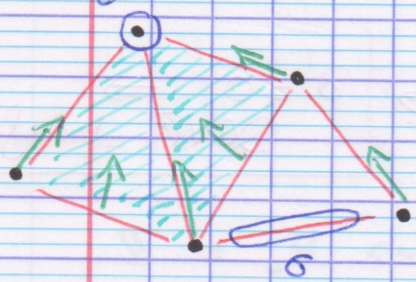
acyclique



$G_{1,2}$

acyclique également

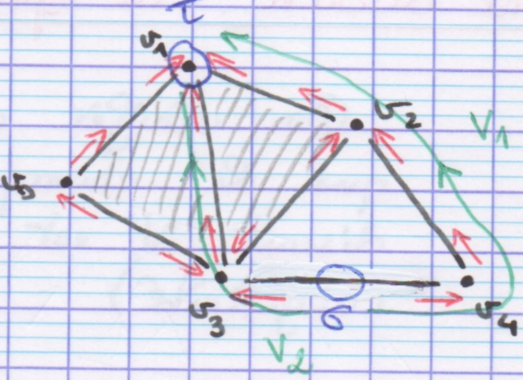
Calcul du complexe de Morse associé



○ Cellules critiques

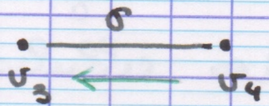
Donc $\begin{cases} \beta_0 \leq 1 \\ \beta_1 \leq 1 \\ \beta_2 = 0. \end{cases}$

Pour calculer $\partial' \sigma$, on dénombre les V-chemins de $\underbrace{\sigma \rightsquigarrow \tau}_{\text{donc dans } G_{0,1}}$ (seule cellule critique de dim. 1)

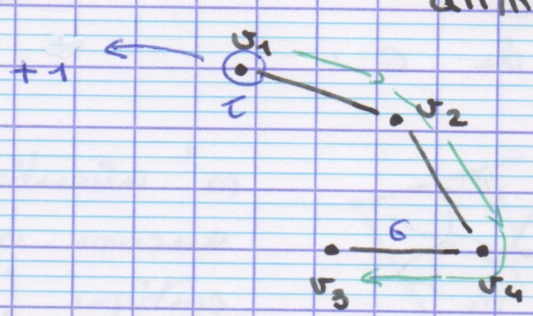


$\partial \sigma = -v_4 + v_3$
$= v_3 - v_4$

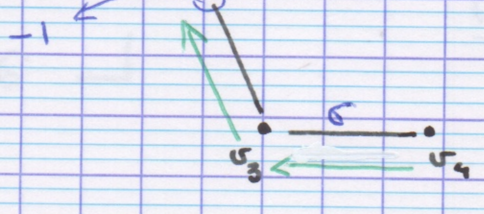
Donc l'orientation de σ est :



On propage cette orientation le long des V-chemins $\Longrightarrow$ induit le signe ± 1 attribué au chemin



$$\partial'(\sigma) = \sum_{V_1, V_2} (\pm 1)\, \tau = \underbrace{+\tau}_{V_1} - \underbrace{\tau}_{V_2} = 0.$$



Donc le complexe de Morse associé est

$$C_0 = \text{Span}\{\tau\}$$
$$C_1 = \text{Span}\{\sigma\}$$

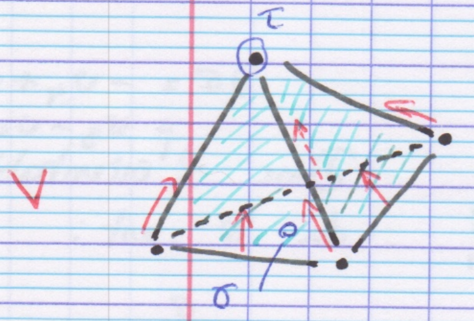
avec

$$C_1 \xrightarrow{\partial' = 0} C_0 \quad \rightsquigarrow \quad H_0 = \mathbb{Z}, \quad H_1 = \mathbb{Z}$$

$\partial' = 0 \Rightarrow$ DGVF parfait

Or l'homologie du complexe de Morse est identique à celle du complexe initial.

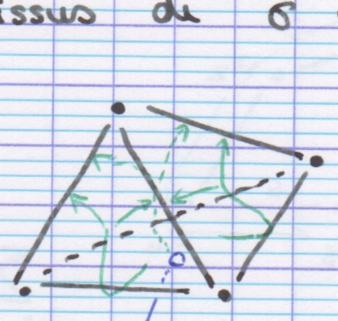
4 Théorie de Morse discrète : la sphère



On vérifie aisément que le champ de vecteurs discret V est un DGVF (acyclicité).

Les cellules critiques sont alors
- σ (face du bas) ↳ dim 2
- τ (sommet sup) ↳ dim 0.

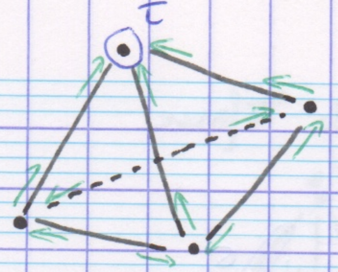
Dans ce DGVF, les V-chemins issus de σ :



n'aboutissent à aucune cellule critique (qui serait de dim 1)

↳ $\partial'(\sigma) = 0$.

De même,



aucun V-chemin issu d'une cellule critique n'aboutit à τ

Le complexe de Morse est donc :

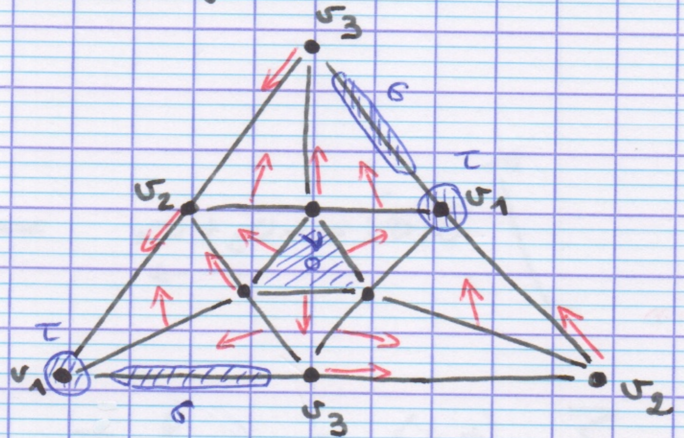
$$\left.\begin{array}{l} C_0 = \mathrm{Span}\{\tau\} \\ C_1 = 0 \\ C_2 = \mathrm{Span}\{\sigma\} \end{array}\right) \qquad C_2 \xrightarrow{\partial' = 0} C_1 \xrightarrow{\partial' = 0} C_0$$

$\partial' = 0 \rightsquigarrow$ DGVF parfait.

Puis $H_0 = \mathbb{Z} \longrightarrow 1$ cc
$H_1 = 0 \longrightarrow 0$ trou de dim 1 / cycles
$H_2 = \mathbb{Z} \longrightarrow 1$ cavité.

⑤ Théorie de Morse discrète – $\mathbb{P}_2$ (esp. projectif)

On considère le complexe simplicial suivant, maillage de l'espace projectif de dim 2.



V

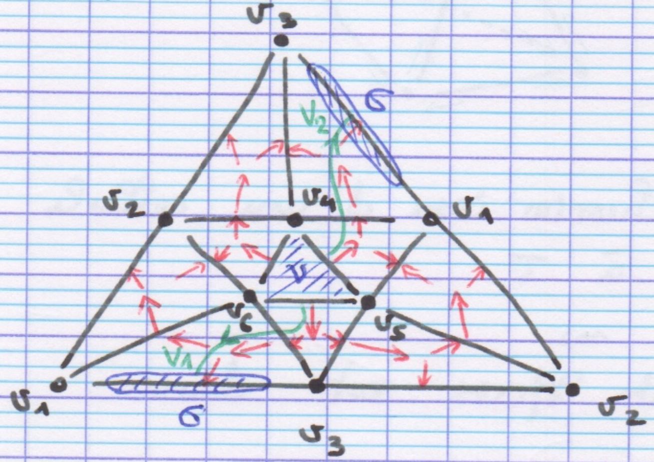
On vérifie que V est un DGVF
↓
3 cellules critiques : σ, τ, ν.

Calcul du complexe de Morse

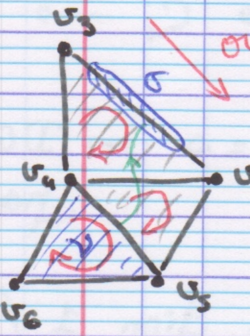
$\rightsquigarrow \partial'(\nu)$

$\downarrow$

$G_{2,2}$



V_2



orientation induite par le V-chemin

où $\partial(\sigma) = -v_3 + v_1 = v_1 - v_3$

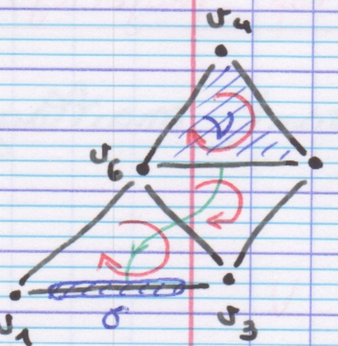
$v_3 \longrightarrow v_1$

orientation conforme à celle de ∂

$\Downarrow$

$+1$

V_1



$\longleftarrow$

orientation induite sur σ par le V-chemin

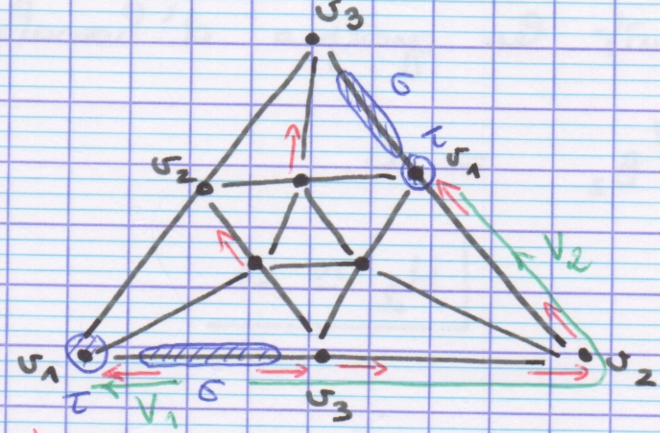
où $\partial(\sigma) = \underrightarrow{-v_3 + v_1} \Longrightarrow +1.$

D'où $\partial'(\sigma) = \sum_{V_1, V_2} (\pm 1) \cdot \tau = 2 \cdot \tau$

$\rightsquigarrow \partial'(\sigma)$

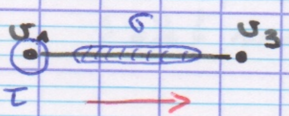
$\downarrow$

$G_{0,1}$



Certaines arêtes du diag. du Hasse ont été omises.

V_1

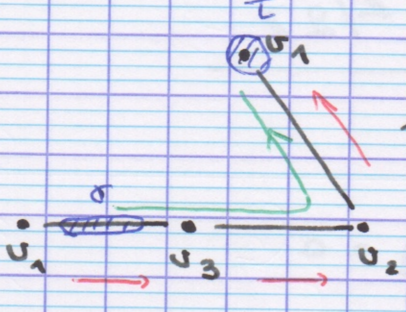


$\rightsquigarrow -1$

orientation induite par V

$(v_3 - v_1)$

V_2



$\rightsquigarrow v_1 - v_2 \quad \rightsquigarrow +1$

D'où $\partial'(\sigma) = \underbrace{-\tau}_{V_1} + \underbrace{\tau}_{V_2} = 0.$

Le complexe du Morse est donc :

$$\begin{array}{ccccccc} \xrightarrow{0} & C_2 & \xrightarrow{\partial'} & C_1 & \xrightarrow{\partial'} & C_0 & \xrightarrow{0} \\ & \| & & \| & & \| & \\ & \mathrm{span}\{\nu\} & & \mathrm{span}\{\sigma\} & & \mathrm{span}\{\tau\} & \end{array}$$

$$\partial'(\nu) = 2\sigma \qquad \partial'(\sigma) = 0$$

On en déduit les groupes d'homologie :

$$H_2 = \underbrace{Z_2}_{\substack{\partial_2'(v) = 2\sigma \\ \Downarrow \\ \ker \partial_2' = 0}} / B_2 = 0.$$

$$\boxed{H_2 \simeq 0}$$

$$H_1 = \underbrace{Z_1}_{\substack{\ker \underbrace{\partial_1'}_{0} \\ \| \\ C_1 = \mathrm{Span}\{\sigma\}}} / \underbrace{B_1}_{\mathrm{Im}\,\partial_2' = \mathrm{Span}\{2\sigma\}}$$

D'où :

$$\boxed{H_1 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$$

$$H_0 = \underbrace{Z_0}_{\substack{\ker \underbrace{\partial_0'}_{0} \\ C_0 \\ \| \\ \mathrm{Span}\{\tau\}}} / \underbrace{B_0}_{\mathrm{Im}\,\underbrace{\partial_1'}_{0} = 0}$$

$$\boxed{H_0 \simeq \mathbb{Z}}$$