

Cours de logique

TD 2

Logique propositionnelle, systèmes formels de preuves

Polytech Marseille - 3A
Filière Informatique

Séance 1

Exercice 1. Modélisez en logique des prédicats les phrases suivantes :

- (i) Jean suit un cours.
- (ii) Un entier naturel est pair ou impair.
- (iii) Dans un triangle isocèle une médiane est également hauteur.
- (iv) Dans un triangle équilatéral une médiane est également hauteur.

Exercice 2 (Logique du premier ordre et sémantique de vérité). On considère le langage du premier ordre composé des signatures suivantes (on note entre parenthèse les symboles et leur arité) :

$$\mathcal{X} = \{x, y, z \dots\}$$

$$\mathcal{F} = \{(f, 2)\}$$

$$\mathcal{P} = \{(R, 2), (=, 2)\}$$

On considère la sémantique de vérité définie par l'interprétation $\mathcal{I}$ suivante :

- $\mathcal{D}_{\mathcal{I}} = \mathbb{Z}$
- $f^{\mathcal{I}} = +$
- $R^{\mathcal{I}}$ définie comme $<$, et $=^{\mathcal{I}}$ définie comme $=$ sur $\mathbb{Z}$.

Quelle est l'interprétation des formules suivantes (qui peuvent dépendre d'une valuation des variables libres) :

- (i) $\forall x. \exists z. (f(z, y) = x)$
- (ii) $\exists x. (R(x, y) \wedge R(y, f(x, x)))$
- (iii) $\forall x. (R(x, y) \Rightarrow R(f(x, x), y))$

Exercice 3. Quand cela est possible, prouver en calcul des séquents classique les formules suivantes ; sinon, donner un modèle falsifiant le séquent :

- (i) $\forall x. (P(x) \vee Q(x)) \vdash (\forall x. P(x)) \vee (\forall x. Q(x))$
- (ii) $(\forall x. P(x)) \vee (\forall x. Q(x)) \vdash \forall x. (P(x) \vee Q(x))$
- (iii) $\forall x. (P(x) \Rightarrow Q(x)) \vdash (\forall x. P(x)) \Rightarrow (\forall x. Q(x))$
- (iv) $P(0), \forall x. (P(x) \Rightarrow P(S(x))) \vdash P(S(S(S(0))))$

Exercice 4 (Arithmétique de Peano et sémantique de vérité). L'arithmétique de Peano est le langage du premier ordre défini par les signatures : $\mathcal{F} = \{(0, 0), (S, 1), (+, 2), (\times, 2)\}$ et $\mathcal{R} = \{ (=, 2) \}$.

Si on considère l'interprétation $\mathcal{I}$ définie par :

- $\mathcal{D}_{\mathcal{I}} = \mathbb{N}$

- $0^{\mathcal{I}} : 0, S^{\mathcal{I}} : n \mapsto n + 1, +^{\mathcal{I}} : (n, m) \mapsto n + m$ et $\times^{\mathcal{I}} : (n, m) \mapsto n \times m$
- $=^{\mathcal{I}}$ définie comme $=$ sur $\mathbb{N}$.

Prouvez que les formules suivantes sont valides :

- (i) $\forall x. \forall y. \forall z. ((x + z = y + z) \Rightarrow (x = y))$
- (ii) $\forall x. \forall y. ((x + y = 0) \Rightarrow ((x = 0) \wedge (y = 0)))$
- (iii) $\forall x. \forall y. ((x \times y = 0) \Rightarrow ((x = 0) \vee (y = 0)))$

Séance 2

Exercice 5 (Arithmétique de Peano et preuves). On s'intéresse maintenant à une théorie relative à l'arithmétique de Peano, c'est-à-dire un ensemble d'axiomes $\mathcal{F}$ tels que toute formule A est valide dans l'interprétation précédente de l'arithmétique de Peano ($\mathcal{F} \models A$) si et seulement si $\mathcal{F} \vdash A$ est prouvable.

On considère les axiomes suivants (théorie axiomatique de Peano) :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathcal{P}} = \{ & A1 : \forall x. \forall y. ((S(x) = S(y)) \Rightarrow (x = y)) \\ & A2 : \forall x. \neg(S(x) = 0) \\ & A3 : \forall x. ((x = 0) \vee \exists y. (x = S(y))) \\ & A4 : \forall x. (x + 0 = x) \\ & A5 : \forall x. \forall y. (x + S(y) = S(x + y)) \\ & A6 : \forall x. (x \times 0 = 0) \\ & A7 : \forall x. \forall y. (x \times S(y) = x \times y + x) \} \end{aligned}$$

On suppose par ailleurs que pour toute formule F , la formule suivante est un axiome (axiome de récurrence) :

$$A_F : F(0) \Rightarrow (\forall x. (F(x) \Rightarrow F(S(x))) \Rightarrow \forall x. F(x))$$

- (i) On souhaite prouver $A = \forall x. \forall y. \forall z. ((x + z = y + z) \Rightarrow (x = y))$ dans le calcul des séquents la formule à partir des hypothèses $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$.
- (a) Essayez de faire cette preuve : que vous manque-t-il ?
- (b) Soient les axiomes suivants (théorie axiomatique de ???) :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{=} = \{ & B1 : \forall x. (x = x) \\ & B2 : \forall x. \forall y. ((x = y) \Rightarrow (F[x/z] \Rightarrow F[y/z])) \text{ (famille d'axiomes pour toute formule } F) \} \end{aligned}$$

- i. De quoi $\mathcal{F}_{=}$ est-il une théorie axiomatique ?
- ii. Prouvez que :

$$\begin{aligned} F_1 &= \forall x. \forall y. ((x = y) \Rightarrow (y = x)) \\ F_2 &= \forall x. \forall y. \forall z. ((x = y) \Rightarrow ((y = z) \Rightarrow (x = z))) \end{aligned}$$

- (c) Finir la preuve de A