Cours de logique
TD 1

Logique propositionnelle, sémantique de vérité et SAT

Polytech Marseille - 3A
Filière Informatique

1 Séance 1

Exercice 1. Les formules suivantes du calcul propositionnel sont-elles des valides (des tautologies) ?

(i) $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

(ii) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

(iii) $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

Exercice 2 (Equivalences logiques classiques)**.** On rappelle les équivalences logiques classiques vues en cours :

- Lois de De Morgan
  - $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
  - $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
- Lois de commutativité
  - $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
  - $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$
- Lois de distributivité
  - $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
  - $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

(i) Prouvez que les lois de de Morgan sont valides

(ii) Pour prouver la validité des lois de distributivité, combien de cas faudrait-il étudier ?

Exercice 3. En utilisant les équivalences logiques classiques, mettre les formules suivantes sous la forme normale conjonctive :

(i) $A \vee (\neg A \vee B \wedge C)$

(ii) $(\neg A \wedge B) \vee (A \vee \neg B)$

(iii) $\neg(A \Rightarrow B) \vee (A \vee B)$

Exercice 4. En utilisant les équivalences logiques classiques, mettre les formules suivantes sous la forme normale disjonctive :

(i) $A \Rightarrow ((B \wedge C) \Rightarrow D)$

(ii) $\neg(A \vee \neg B) \wedge (C \Rightarrow \neg D)$

(iii) $\neg(A \wedge B) \wedge (A \vee B)$

Exercice 5. Est-ce que C_1 est une conséquence logique de C_2 :

(i) $C_1 = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C)$ et $C_2 = B \vee C$

(ii) $C_1 = (A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow \neg C)$ et $C_2 = \neg A$

On s'attachera, en particulier, à énumérer de manière claire et efficace les valuations de C_1 et C_2.

Exercice 6 (Méthode de résolution)**.** On considère l'ensemble de clauses propositionnelles suivant (on sous-entend la conjonction de ces clauses) :

$$C = \{C_1 = \neg A \vee \neg B, C_2 = A \vee \neg C, C_3 = C, C_4 = B \vee \neg D, C_5 = D \vee B\}$$

On se demande si cet ensemble est cohérent, pour cela :

(i) Combien de cas faudra-t-il tester si vous utilisez la sémantique de vérité ?

(ii) On peut parfois utiliser une méthode appelée la preuve par **résolution**.
Cette méthode s'applique à des **clauses**, qui sont des disjonction de variables ou négations de variables propositionnelles (appelé littéraux). Par exemple $A \vee B \vee \neg C$ ou $\neg A$ sont des clauses, mais $(A \wedge B) \vee V$ n'est pas une clause.

La réduction repose sur la proposition suivante : soient $C_1 = A \vee B_1 \vee \cdots \vee B_n$ et $C_2 = \neg A \vee B'_1 \vee \cdots \vee B'_m$ deux clauses, alors :

$$(C_1 \wedge C_2) \quad \Rightarrow \quad (B_1 \vee \cdots \vee B_n \vee B'_1 \vee \cdots \vee B'_m) \tag{1}$$

$(B_1 \vee \cdots \vee B_n \vee B'_1 \vee \cdots \vee B'_m)$ est alors appelée la **clause résolvante** de C_1 et C_2.

(a) Prouvez (1).

(b) En utilisant une stratégie de résolution, prouvez que l'ensemble de clauses C est cohérent.

Exercice 7 (SAT et l'algorithme de Davis-Putnam)**.** Dans cet exercice, on s'intéresse au problème SAT et à sa résolution par l'un des algorithmes les plus simples (donc basique), l'algorithme de Davis-Putnam. Cet algorithme résoud SAT en temps exponentiel pour une formule F exprimée en forme normale conjonctive (donc comme une conjonction de clauses qui sont des disjonctions de littéraux).

L'algorithme comporte deux "ingrédients" : une procédure de simplification (globalement les règles relèvent du bon sens) et une fonction récursive construisant une valuation satisfaisant la formule.

Dans la suite, étant donnée une valuation v des variables propositionnelle et b un booléen, on notera $v[A \leftarrow b]$ la valuation dans laquelle la variable A s'évalue à b et étant donnée une formule F, on note $F[A \leftarrow b]$ la formule dans laquelle A est remplacée par b.

Soit v la valuation "en cours de construction".

— **Simplification**
  — Si une clause est un unique littéral A (resp. $\neg A$) alors remplacer A par $\top$ (resp. $\bot$) partout dans la formule et remplacer v par $v[A \leftarrow \top]$ (resp. $v[A \leftarrow \bot]$).
  — Si une formule contient un littéral A (resp. $\neg A$) mais pas sa négation alors remplacer A par $\top$ (resp. $\bot$) partout dans la formule et remplacer v par $v[A \leftarrow \top]$ (resp. $v[A \leftarrow \bot]$).
  — Si une clause contient une variable A et sa négation, alors remplacer cette clause par $\top$ et remplacer v par $v[A \leftarrow \top]$ (ou $\bot$, peu importe).
  — Si une clause contient deux fois le même littéral, remplacer par un seul.
  — Si les littéraux d'une clause C_1 sont un sous-ensemble des littéraux de C_2 alors supprimer C_2.
  — Si une clause contient $\bot$ alors supprimer cette constante de la clause. Si la clause devient vide, remplacer la formule entière par $\bot$.

  Cette simplification préserve la satisfiabilité de la formule et peut être implémentée en temps polynomial.

— **Davis-Putnam**

  Entrée : une formule F en forme normale conjonctive (conjonction de clauses)
  Sortie : teste si F et satisfiable et si elle l'est, retourne une valuation satisfaisant F
  Soit v une valuation vide.

  $F, v \ \leftarrow \ \text{simplification}(F, v)$

si F n'a pas de variables
retourner $(val(F), v)$ *fin si*
Soit X une variable de F
$(b', v') \leftarrow$ Davis-Putnam$(F[X \leftarrow \top], v[X \leftarrow \top])$
si $b' = \top$
retourner $(\top, v')$
sinon
retourner Davis-Putnam$(F[X \leftarrow \bot], v[X \leftarrow \bot])$

(i) Tester cet algorithme sur les formules de l'exercice 3. Vous représenterez au passage l'arbre des appels récursifs.
(ii) Que pensez-vous de son efficacité ? Avez-vous des idées pour améliorer ?

Exercice 8. Soit $\otimes$ le connecteur propositionnel dont la table de vérité est :

$\otimes$	0	1
0	1	1
1	1	0

Exprimez à partir des variables propositionnelles A et B et de $\otimes$ les formules suivantes :
(i) $\neg A$
(ii) $A \wedge B$
(iii) $A \vee B$
(iv) $A \Rightarrow B$
(v) $A \Leftrightarrow B$

2 Séance 2

Exercice 9. Vous avez prouvé au TD précédent que les formules suivantes du calcul propositionnel sont des tautologies.

$$\begin{aligned} F_1 &= A \Rightarrow (B \Rightarrow A) \\ F_2 &= (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \\ F_3 &= (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A) \end{aligned}$$

(i) Pourquoi peut-on en déduire qu'elles sont prouvables ?
(ii) Prouver chacune de ces formules en utilisant le calcul des séquents.

Exercice 10 (Equivalences logiques classiques)**.** Dans le TD précédent, on avait évalué le nombre de cas à traiter pour prouver que les lois de distributivité (rappelées ci-dessous) sont valides. Prouvez ces lois en utilisant le calcul des séquents :
(i) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
(ii) $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Exercice 11. Prouvez les séquents suivants :
(i) $\vdash A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$
(ii) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
(iii) $(A \Rightarrow B), (B \Rightarrow C) \vdash (A \Rightarrow C)$
(iv) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash B \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

On s'intéresse maintenant au noyau de déduction naturelle pour les connecteurs $\{\Rightarrow, \wedge, \bot\}$ vu en cours (rappelé ci-dessous) :

Règles structurelles

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\ \mathrm{ax}$$

Règles logiques

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \Rightarrow_{\text{intro}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \Rightarrow_{\text{élim}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge_{\text{intro}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \wedge_{\text{élim 1}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \wedge_{\text{élim 2}}$$

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A} \bot_{\text{élim}}$$

Exercice 12. Pour vous faire la main sur ce système de preuves, prouvez les deux premiers séquents de l'exercice 9.

On s'intéresse ici à la (une) traduction des preuves entre ces deux systèmes. On peut montrer que les règles pour chaque connecteur sont "traduisibles" d'un système à l'autre (on va se concentrer sur l'implication).

Exercice 13 (Du calcul des séquents vers la déduction naturelle)**.** On considère la preuve du calcul des séquents :

$$\frac{\dfrac{\pi}{\Gamma \vdash A} \qquad \dfrac{\pi'}{\Gamma, B \vdash C}}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash C} \Rightarrow_G$$

et on suppose que $\Gamma \vdash A$ et $\Gamma, B \vdash C$ ont pour preuve respectivement $\tilde{\pi}$ et $\tilde{\pi}'$ dans la déduction naturelle, en déduire une preuve de $\Gamma, A \Rightarrow B \vdash C$ en déduction naturelle.

Exercice 14 (De la déduction naturelle vers le calcul des séquents)**.** On considère la preuve suivante de la déduction naturelle :

$$\frac{\dfrac{\pi}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \qquad \dfrac{\pi'}{\Gamma \vdash A}}{\Gamma \vdash B} \Rightarrow_{\text{élim}}$$

et on suppose que $\Gamma \vdash A \Rightarrow B$ et $\Gamma \vdash A$ ont pour preuve respectivement $\tilde{\pi}$ et $\tilde{\pi}'$ dans le calcul des séquents.

(i) Prouver que $\Gamma, A \Rightarrow B, A \vdash B$ est prouvable (donc une tautologie)

(ii) En déduire une preuve en calcul des séquents de $\Gamma \vdash B$.