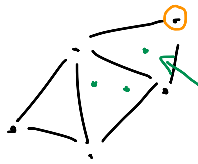
§3

Maillage

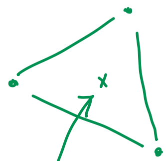


→ accès aux pts.

sommets du maillage.

pts s/ les faces

→ coords des sommets



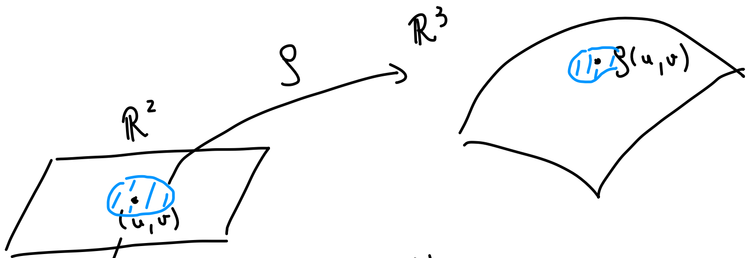
→ pts ∈ triangle

↓

coords barycentriques.

Surface paramétrique

ex :
- carreaux de Béziers
- NURBS
- B-splines



paramètres les pts de la surface

$\mathbb{R}^2$ → paramètres

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (u,v) \longmapsto f(u,v)$$

→ carreaux de Béziers

→ B-spline

→ NURBS

f fabriquée à partir de fonctions de base différentes

↓

polynômes

ou

P/Q fonctions rationnelles

Accès explicite aux pts de la surface

pt 3D — $f(u,v)$ ⇝ faire varier (u,v)

|

parcourir la surface.

Σ polynômes

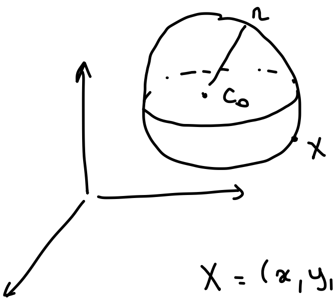
facile à calculer...

Surface implicite

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\text{pt 3D } X \longmapsto \text{valeur } f(X) \in \mathbb{R}.$$

Surface $\longrightarrow$ pts sur lesquels f s'annule
$$\{X \in \mathbb{R}^3 \,;\, f(X) = 0\}$$

ex : sphère | centre $c_0 \in \mathbb{R}^3$
| rayon r



$X \in$ sphère — équation ?

$\updownarrow$

$d(c_0, X) = r$

$\|X - c_0\|$
$$= \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

$X = (x, y, z)$
$c_0 = (x_0, y_0, z_0)$
$X - c_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

(éviter la racine

$$X \in \text{Sphère} \longleftrightarrow \|X - c_0\|^2 = r^2$$
$$\underbrace{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 - r^2}_{f(X) = f(x,y,z)} = 0$$

X tq $f(X) = 0$.

(description implicite
équation

Accéder / calculer des pts de la surface
$\hookrightarrow$ résoudre $f(X) = 0$ ......

($\neq$ modèle paramétrique)

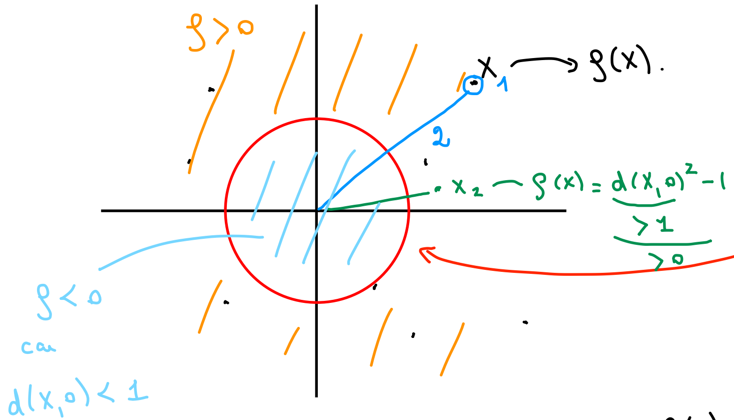
pas direct

complexe.

approximer ...

§4 2D $\longrightarrow$ cercle centre 0 / rayon 1

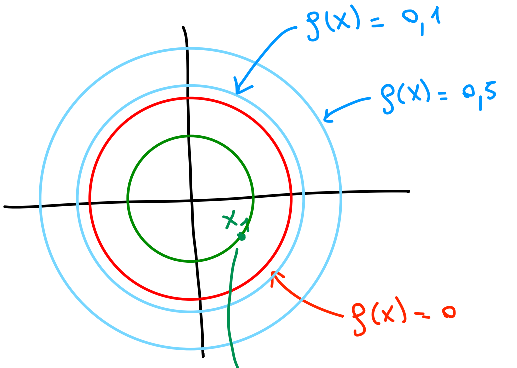
$\hookrightarrow$ éq. $\underbrace{x^2 + y^2 - 1}_{f(x,y)} = 0$



éq
↓
sur le cercle
$f(x) = 0.$

$$f(x) = \underbrace{x^2 + y^2}_{d(x,0)^2} - 1 = d(x,0)^2 - 1$$

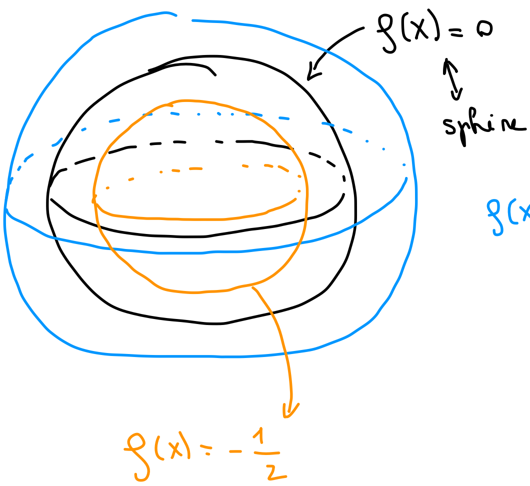
$$f(x_1) = \overbrace{d(x_1,0)}^{2}{}^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3$$



$f(x) = \alpha > 0$
↓
α augmente.

$f(x_1) = c < 0.$
|
pts où $f(x) = c$

3D ⇝ pts tq $f(x) = \underset{\text{cste}}{c}$ → lignes de niveau
↓
(iso)-surfaces

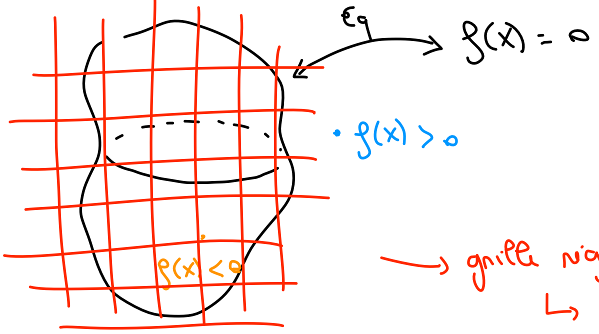


$f(x) = 1/2$ ⇝ surface → autre sphère ⊕ grande à l'ext de la sphère
|
$\geq 0.$

Intérêt : accès au volume

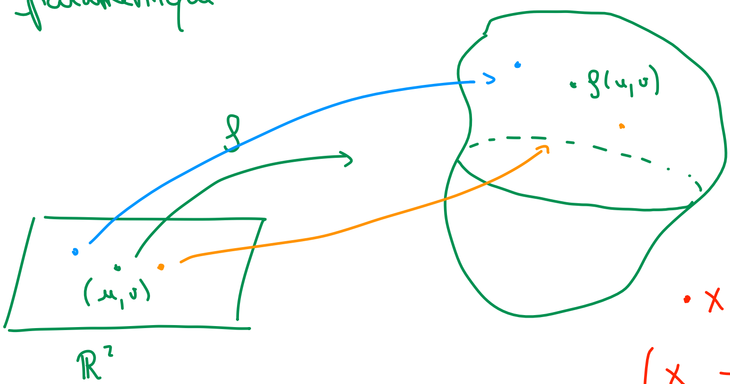
- Tester si $\underset{3D}{X}$ est à l'intérieur / extérieur de f tq $f(x) = 0.$
↓
signe de $f(x)$

• Calculer (approx) le volume ?



→ grille rég s/ espace
↳ compter les voxels intérieurs
↓
Σ de leurs volumes ...

≠ paramétrique

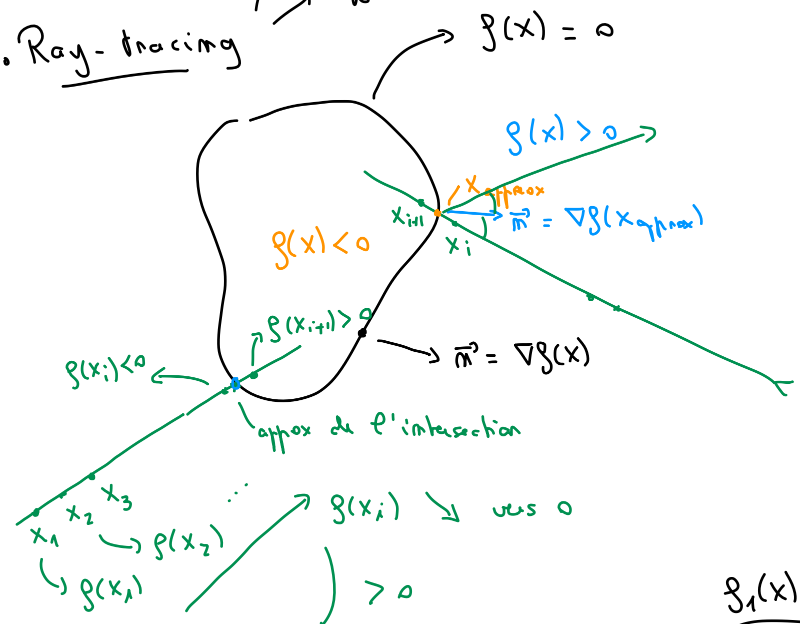


$\cdot X$

X → sur la surface ? ⟷ $\exists ? (u,v)$ tq $X = f(u,v)$.
→ intérieur ?
→ ext ?

↙ pas direct.

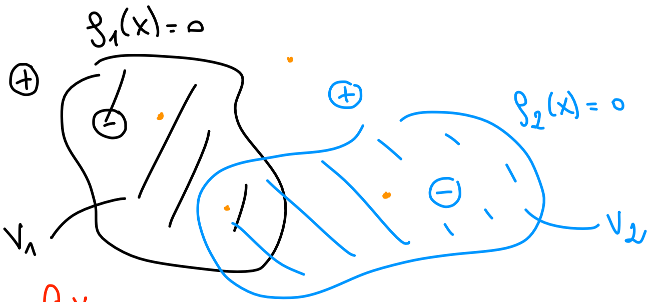
• Ray-tracing → simple, efficace ++



• Op. binaires s/ volumes

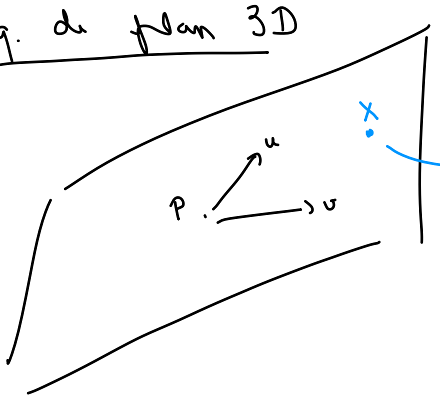
$V_1 \cup V_2 \rightarrow f = \min(f_1, f_2)$

$V_1 \cap V_2 \rightarrow f = \max(f_1, f_2)$



$\complement V_1 \rightarrow f = -f_1$

Eq. du plan 3D



1) P + 2 vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$

$X \in$ plan $\longleftrightarrow$ $X = P + \lambda.\vec{u} + \mu.\vec{v}$ paramètres

↳ paramétrique

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(\lambda,\mu) \longmapsto P + \lambda.\vec{u} + \mu.\vec{v}$

2) éq. cartésienne

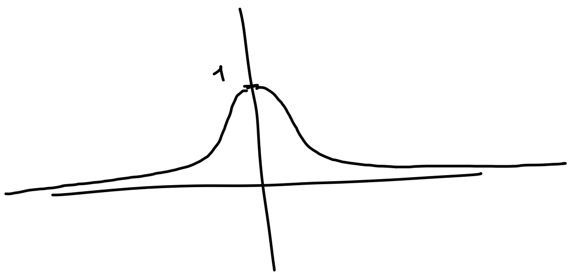
$$ax+by+cz+d=0$$

$X=(x,y,z)$ $\quad f(X) = ax+by+cz+d$

plan $\longleftrightarrow$ pts X tq $f(X)=0$

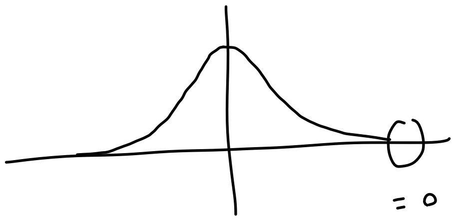
implicite

§ 12 Gaussienne e^{-x^2}



↓

" forme Gaussienne "



$= 0$ / tendant vers 0 ...

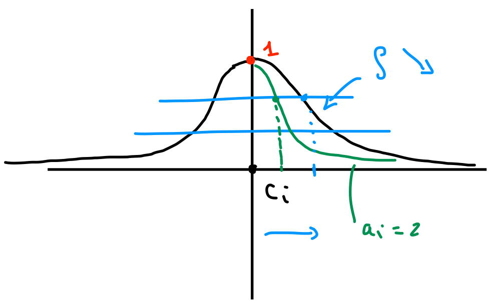
§ 15. $f(X) = \sum_i e^{-\frac{\|X-c_i\|^2}{a_i}}$ centrée en c_i

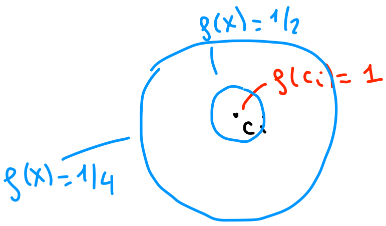
/2

↓

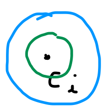
décroît + vite.

$a_i = 1$ / $a_i = 2$





$a_i = 1$



$f(X) = 1/2$

$a_i = 2$

$f(X) = 1/2$

$a_i \longrightarrow$ dilater / resserrer

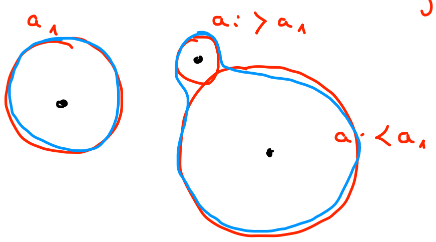
Squelette → pts c_i

↓

gaussienne

$$\rho(x) = \sum e^{-\frac{\|x-c_i\|^2}{a_i}}$$

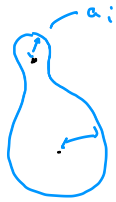
a_i : largeur de la Gaussienne



$\rho(x) = 1/2$ ⟶ $\rho(x)$ ← épaississement / squelette

$\rho(x)$ —— dist (x / squelette)

⟶ surface $\rho(x) = \varepsilon$ ou épaississement.



c_i / a_i

↓

contrôler la forme ...

§ 21. Bases de fonctions

$$f(x) = \sum \alpha_i \cdot \varphi_i(x)$$

fonctions de base ?

Pour construire les φ_i $\xrightarrow{\text{Maths}}$ théorie de l'approx. | fonctions à base radiale ont de bonnes prop.

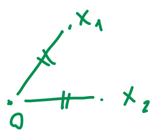
$$f(x) = \varphi(\|x\|)$$

fonction à base radiale

ex : Blobs : gaussienne

$$f(x) = e^{-\|x\|^2/a}$$

ne dépend que de $\|\cdot\|$



$$f(x_1) = e^{-\|x_1\|^2} = e^{-\|x_2\|^2} = f(x_2).$$

φ "bien foutues" → garanties d'approximation...

↓

pts $c_i \in \mathbb{R}^3$

↓

valeur $f_i \in \mathbb{R}$

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

échantillonnage aux pts c_i

↓

N pts

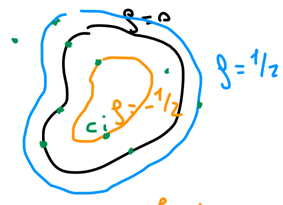
$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot \varphi(\|X - c_i\|)$$

? ?

φ bien choisie

$\sim$ gaussienne

$f_i \leftarrow c_i$

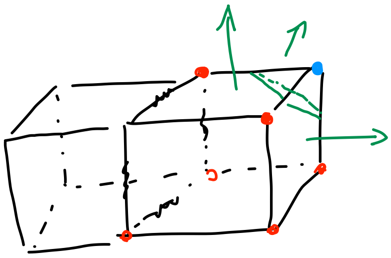


pts c_i / valeurs $f_i \in \mathbb{R}$.

$\exists\, \alpha_1 \dots \alpha_N$ tq $\forall i$ $f(c_i) = f_i$ — Pb. d'approximation.

existance garantie pour certaines fonctions φ → gaussienne, multiquadriques, ...

§ 3e.



Bloomenthal → balayage incrémental.