Esp. projectifs.

→ Livre Robert Rolland – Géom. projective
⊕ explications claires
⊖ dessins ~ .

→ **Géométrie projective, analyse numérique et vision par ordinateur**
Roger Mohr, Matthijs Douze, Peter Sturm

Espace projectif → Esp. vectoriel ++

translation
perspective ....

→ Espaces vectoriels
↳ vecteurs
éléments

ex: $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$

card – nbre d'élts.
card – ∞

éléments
$\vec{u} + \vec{v}$ $(-\vec{v})$
$\lambda \cdot \vec{u}$
+ propriétés

① → base (vecteurs
libre générateurs)

dim finie (n)

base: n vecteurs $(e_1 \dots e_n)$
on peut générer l'espace entier
{
comb. linéaires
$\lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{e}_n$

base – n vects
↓
espace – ∞ vects

② → applications linéaires
↕
③ → matrices
↳ vect./val propres
↳ réduction
↳ dét
⋮

→ Espaces affines
↳ points
éléments

ex: $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3 \dots \mathbb{R}^n$

à l'intérieur
"de direction" E (espace vectoriel)
(dans un esp. affine, il y a 1 esp. vectoriel).

points ⟷ vecteurs

1) A, B ⟶ $\overrightarrow{AB} = B - A$

coords — coords ⟶ base de l'esp. vect

repère affine
↗ 1 origine
↘ 3 vecteurs libres

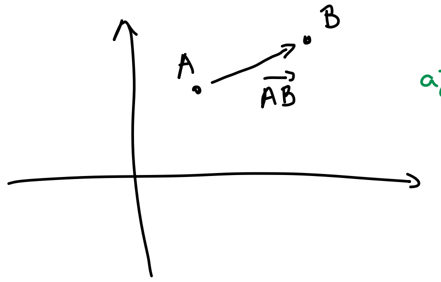
esp. affine
↗ vectoriel
+
↘ 1 pt

2) $M \longleftarrow \vec{u} = \vec{OM}$

coords $=$ coords

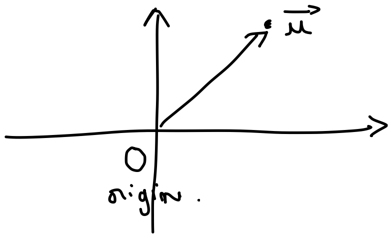
$\mathbb{R}^2$

1)



$\mathbb{R}^2$ affine

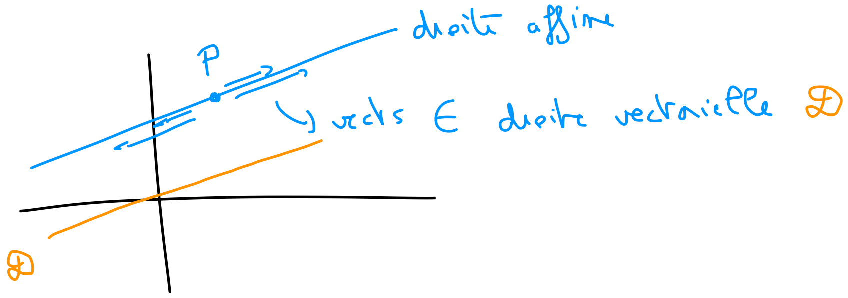
2)



$\mathbb{R}^2$ vectorielle

droites affines
plans ''
⋮

$\longrightarrow$ 1 pt (origine) + esp. vect. correspondant.



$\longrightarrow$ transformations affines $=$ appli. lin + constante.

$\mathbb{R}^3$

Base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$,

$\vec{u} = \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^3}$

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$f(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 2x + 1 \\ 2y + 2 \\ 2z + 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

linéaire ? $\longrightarrow$ $\cancel{f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})}$?
$\cancel{f(\lambda \vec{u}) = \lambda . f(\vec{u})}$

$\downarrow$

pas linéaire à cause des constantes.

Mais c'est une appli affine $\quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\vec{u} = \vec{OM} =$ coords de M $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x+1 \\ 2y+2 \\ 2z+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$= \underbrace{2 . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\text{linéaire}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\text{cste}}$

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{OM} = \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto 2.\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{u}} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2.\vec{u} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

scale

homothétie $\times 2$

translation

Application affine

=

partie linéaire + partie constante.

→ préservent droites, plans, dim

→ image d'un repère

→ etc ....

affine = "vect" + 1 pt

PB ... il n'y a pas de matrices associées

Espace vect

→ Espaces projectifs ← quotienté par $\lambda.\vec{u} \sim \vec{u}$

homographie → matrice

→ éléments classes d'équivalence

↓

Tous les vects multiples les uns des autres

droites vectorielles.

$\lambda \longleftrightarrow$ droite vect $\setminus 0$

$\subseteq$

$**$

Espace affine

appl. affine

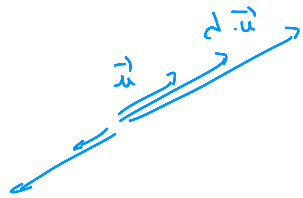
[Pas évident a priori

~~Somme~~ / $\cancel{\lambda . \alpha \sim \alpha}$

~~$\alpha+\beta$~~

↓

vects colinéaires



Lien espace affine ⟷ espace projectif.

Espace projectif

E : espace vectoriel $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n \ldots\ldots)$

↓

sur E on regarde la rel. $\vec{u} \sim \lambda.\vec{u}$ (rel. d'équiv.)

$P(E)$ espace projectif $= E/_\sim$ (quotient de E par $\sim$)

Elts de $P(E)$ $\longrightarrow$ classes d'équivalence

ensembles de vecteurs (tous $\sim$ l'un par rapport à l'autre).

équiv.

$\downarrow$

on regroupe tous les vects tq $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}$

regroupés.

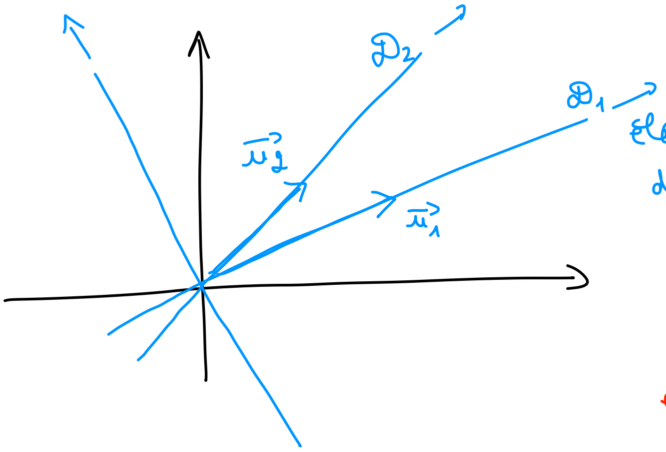
droites vectorielles

$\hookrightarrow$ vects. colinéaires $(\sim)$.

$\underline{\mathbb{R}^2} = E$ — $\underline{\text{esp. vectoriel}}$

$\mathbb{R}^2$ — dim 2 (esp. vectoriel).

$P(\mathbb{R}^2)$ — droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$



éléments de $P(\mathbb{R}^2)$

$\updownarrow$

espace affine !

"dim ?" $\underline{1}$

en tant qu'espace projectif.

"Démontrer" / désigner / distinguer les elts de $P(\mathbb{R}^2)$ $\longrightarrow$ choisir 1 rep. unique

1 vect $\in$ classe

droite

utilisable pour distinguer 2 classes.

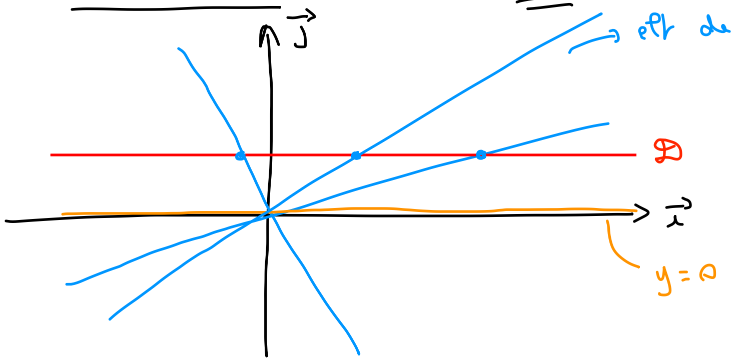
si $\vec{u}_1 \neq \vec{u}_2 \Longrightarrow \mathcal{D}_1 \neq \mathcal{D}_2$

$\hookrightarrow$ espace affine associé .....

droite $\mathcal{D}$ affine (d'éq $y = 1$).

fixée

Construction standard. vect $\mathbb{R}^2$ $P(\mathbb{R}^2)$



elt de $P(\mathbb{R}^2)$

$\hookrightarrow$ représenté par son $\cap$ avec $\mathcal{D}$

$\oplus$ la droite d'éq $y = 0$ vectorielle

$\updownarrow$

c'est 1 classe.

Esp. affine $\longrightarrow$ points

" vect $\longrightarrow$ vecteurs

$\downarrow$ sous-espaces

droite affine | droite vect

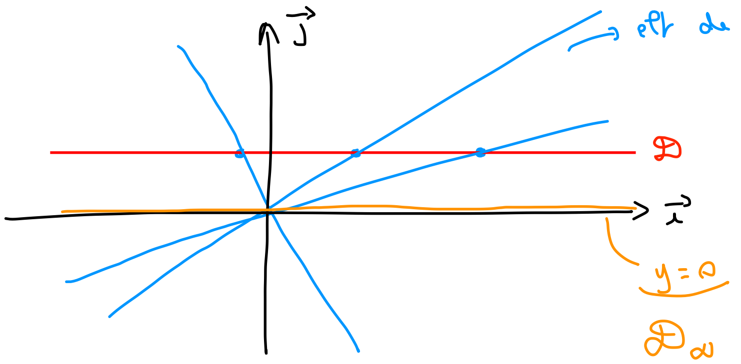
$\mathcal{D}$ ←

~~$\mathcal{D}$~~

droite plan ... — affine — passant par 1 pt P ...

— vect. → passe par 0

dim $\Rightarrow$ 1



$y = 0$

$\mathcal{D}_\infty$

baptisée ainsi

$P(\mathbb{R}^2)$

$\updownarrow$ bijection

dim

pts de $\mathcal{D}$ (1) $\longleftrightarrow$ $\neq \mathcal{D}_\infty$

$\cup$

$\mathcal{D}_\infty$

classe | droite vect | elt de $P(\mathbb{R}^2)$

"codage" de $P(\mathbb{R}^2)$

|

1 elt de ce codage $\overset{bij}{\longleftrightarrow}$ 1 elt de $P(\mathbb{R}^2)$

classe | droite.

$P(\mathbb{R}^2)$

| encode

$\mathcal{D} \cup \mathcal{D}_\infty$

||| droite affine

A faire ....

quand on change de droite $\mathcal{D}$ pour encoder

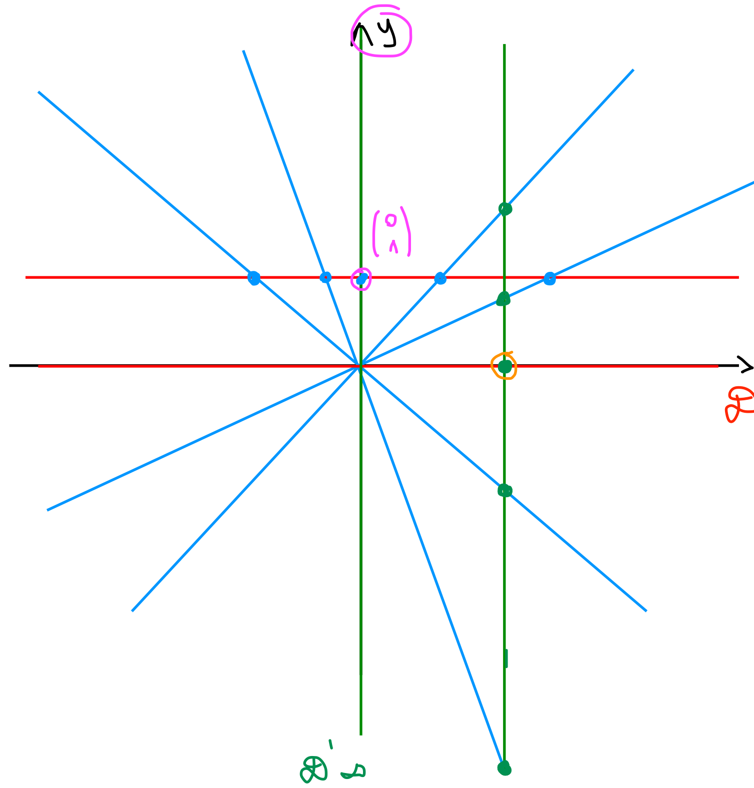
|

stable .....

→ changement de pt à l'infini

→ changement de repère projectif

changer de droite $\mathcal{D}$ ...



$\mathcal{D}'_\infty$

$\mathcal{D}' - x = 2$

élts de $P(\mathbb{R}^2)$

$\mathcal{D} - y = 1$

$\mathcal{D}_\infty - y = 0$

droite affine

$P(\mathbb{R}^2) \longleftrightarrow \mathcal{D} \cup \mathcal{D}_\infty$

1 pt ds $P(\mathbb{R}^2)$

$\vec{Ox}$: $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}_\infty$ ⟵ Ox – pt à l'infini

$\mathcal{D}' \rightarrow \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ ⟵ Ox – 1 pt de $\mathcal{D}'$

infinis échangés

$\vec{Oy}$: $\mathcal{D} \rightarrow \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}'_\infty$

parce qu'on a changé de droite de codage .....

Général

$\mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow P(\mathbb{R}^{n+1})$ — dim n

hyperplan d'éq

$x_{n+1} = 1$ — $\mathcal{H}$

⋮

$x_{n+1} = 0$ — $\mathcal{H}_\infty$

encodé comme

$\mathcal{H} \cup \mathcal{H}_\infty$

hyperplan affine — dim n

esp. projectif

↑

esp. affine ∪ pts à l'∞

↓

code un esp. affine de dim n

⇓

esp. proj. dim n ⟸ vient d'un esp. vect dim n+1 ex $\mathbb{R}^4$ ⟶ $P(\mathbb{R}^4)$ ⟵ $\mathbb{R}^3$

esp. vectoriel — dim 4

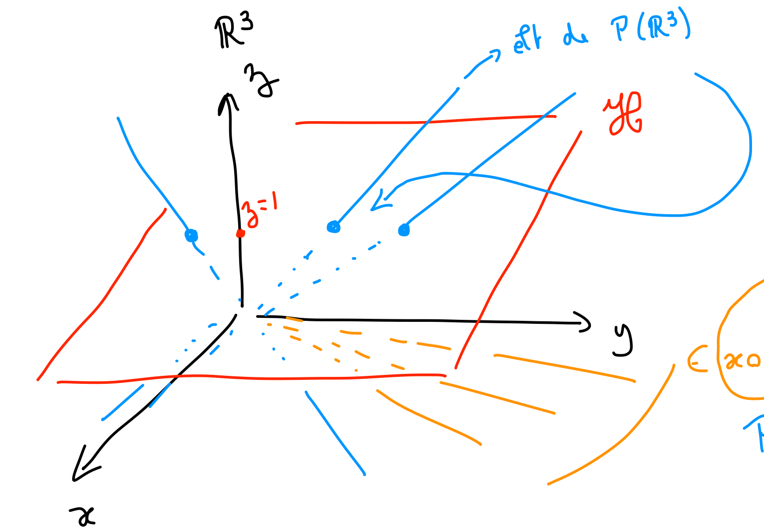
projectif — dim 3

encodé

esp. affine — dim 3

ex : $\mathbb{R}^3$ ⟶ $P(\mathbb{R}^3)$ ⟵ $\mathbb{R}^2$ affine

dim 3 — dim 2 — encodé — dim 2



$z=\infty$ — $\mathcal{H}_\infty$

chacune est 1 elt

$\in$ xOy

projective

"droite à l'∞" (*)

$P(\mathbb{R}^3) \simeq$ pts de $\mathcal{H}$ $\cup$ $\mathcal{H}_\infty$

$\mathbb{R}^2$ affine

pts à l'infini

esp. projectif (ens droites)

dim

$\mathcal{H}$

sert à encoder $\xrightarrow{eq}$ $\boxed{\text{dernière coord} = 1}$ — $z=1$ (plan).

droites du plan xOy — E

dim 2

(*) dim 1 — $P(E)$

ensemble des droites de E $(= xOy)$

esp. vect.

$P(E)$ — $P(xOy)$

dim 2

esp. projectif de dim 1 ⟶ "droite projective"

Voca $P(E)$ dim 1 ⟶ droite projective.

$P(E)$ dim 2 ⟶ plan projectif

⚠

Droite projective — $P(E)$ dim 1

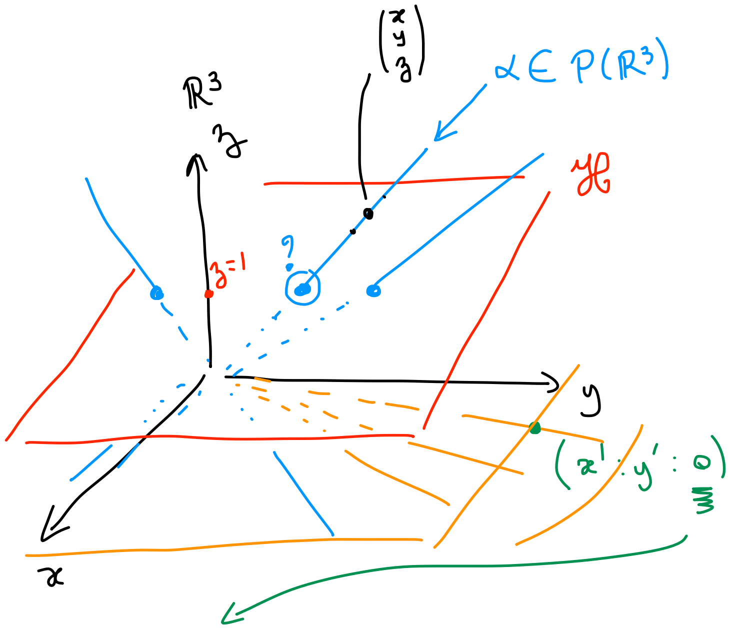
$\downarrow$

$\rightarrow$ E dim 2

ici c'est le cas : $E = xOy$

$\downarrow$

$P(E)$.



lié au choix de $\mathcal{H}$ (le plan du codage).

Coordonnées ......

Pt de la droite de coords (x, y, z)

$\downarrow$

coords du pt ds $\mathcal{H}$ (éq $z = 1$)

le représentant

$$(x : y : z) \xleftarrow{\text{coords. homogènes}} (x/z, y/z, 1)$$

$$\| $$

$$(x/z : y/z : 1)$$

$P(\mathbb{R}^4)$

$$\boxed{\text{espace affine 3D}} \xrightarrow{\text{encodé}} \text{espace projectif} \longleftarrow \text{esp. vect. } \mathbb{R}^4$$

$\downarrow$

$\mathbb{R}^3$ — dim 3

$\mathcal{H} \cup \mathcal{H}_\infty$

$\mathcal{H}$: dim3

$\mathcal{H}_\infty$: pts à l'infini

dim 3

pt affine 3D $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ $P(\mathbb{R}^4)$

$(x : y : z : 1)$ — on a choisi $\mathcal{H}$ ($z = 1$) pour coder ...

appli
affine $\longrightarrow$ homographie

$\downarrow$

matrice 4×4.