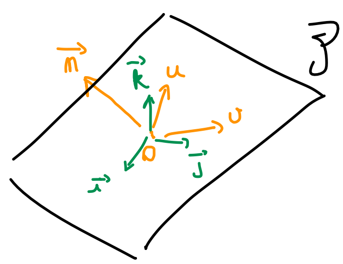
**Suite de l’exercice de la séance précédente**

**Au dernier épisode :**
**-> géométrie**
**-> applications linéaires**
**-> matrices (matrice d’une application)**




$u = (1, 0, 1)$
$v = (0, 1, 1)$

ii) Matrice de la sym. orthogonale.

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
sym. orthogonale / $\mathcal{P}$.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

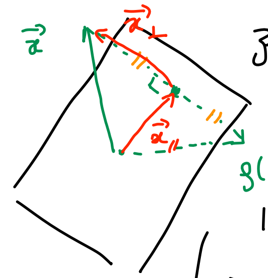
\+ prod en croix
− ''
\+ ''

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{3}$$

$s : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\downarrow$

matrice de $s$ ? $\longleftarrow$ base(s)




$s(\vec{x}) = \underbrace{\vec{x}_{\parallel} - \vec{x}_\perp}$

$\parallel$

$\vec{x} - 2.(\vec{x}.\vec{n})\vec{n}$

$\|\vec{n}\| = 1$

$(*)$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(s) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \ \ & \ \ & \ \ \\ \ & \ & \ \\ \ & \ & \ \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} s(e_1) & s(e_2) & s(e_3) \end{array} \end{array} \Big\} \text{ coords ds } \mathcal{B}'$$

$e_1, e_2, e_3$ ?

$\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ ? — base canonique ?

$\underline{s(\vec{i})}$ ? $\xrightarrow{(*)}$ on sait le calculer ...

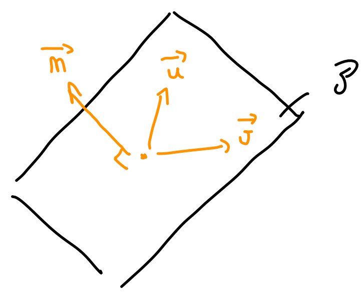
base adaptée à $s$

$\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{n}\}$

$\searrow$ base car libre

$\vec{n} \perp \vec{u}, \vec{v}$

et $\vec{u}, \vec{v}$ non colinéaires ...




$$\begin{cases} s(\vec{u}) = \vec{u} \\ s(\vec{v}) = \vec{v} \\ s(\vec{n}) = -\vec{n} \end{cases}$$

$\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{n}\}$ base de départ $\underline{\text{et}}$ arrivée.

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(s) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} s(\vec{u}) = \vec{u} & s(\vec{v}) = \vec{v} & s(\vec{n}) = -\vec{n} \end{array} \end{array} \Big\} \text{ coords ds } \mathcal{B}$$

ds $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{n}\}$ $\quad 1.\vec{u} + 0.\vec{v} + 0.\vec{n}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$ } coords de $f(\vec{u}), f(\vec{v})$ … ds ….

images des vects de $\mathcal{B}$

$f(\vec{u}) = \vec{u}$ $\quad f(\vec{v}) = \vec{v}$ $\quad f(\vec{m}) = -\vec{m}$

$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

→ quel choix de base d'arrivée ?

$f(\vec{u}) \in \mathbb{R}^3$

$= \vec{u}$ — ds quelle base ? $\mathcal{B}$

$1.\vec{u} + 0.\vec{v} + 0.\vec{m}$

$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$f(\vec{u}) = \vec{u} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ écrit ds la base d'arrivée ? base canonique $\mathcal{C} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

$f(\vec{v}) = \vec{v} \xrightarrow[\mathcal{C}]{\mathcal{B}} 0.\vec{u} + 1.\vec{v} + 0.\vec{m}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ ← coords ds base canonique.

$f(\vec{m}) = -\vec{m} \xrightarrow[\mathcal{C}]{\mathcal{B}} 0.\vec{u} + 0.\vec{v} - 1.\vec{m}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{u} \xrightarrow{\text{coords ds } \mathcal{B}} (1, 0, 0)$ $\quad (1.\vec{u} + 0.\vec{v} + 0.\vec{m})$

$\xrightarrow{\text{coords ds la base canonique !}} (1, 0, 1)$ $\quad (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$(1,0,1) = 1.\vec{i} + 0.\vec{j} + 1.\vec{k}$, $\vec{i} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{j} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

on a cette matrice

$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ → diagonale

$f(\vec{m}) = -\vec{m} \xrightarrow{\text{ds } \mathcal{B}} 0.\vec{u} + 0.\vec{v} - 1.\vec{m}$

$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ?

Diagonale $\longrightarrow$ facile à lire ... $\downarrow$ changement de base (formules ...)

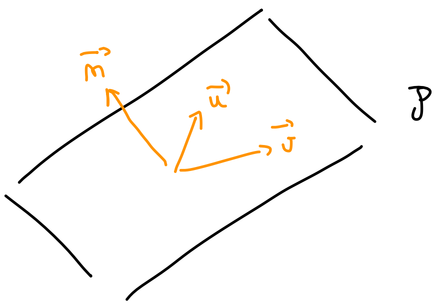
↳ ex 2 : ds la base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{n}\}$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g)$$

coords ds $\mathcal{B}$ — sous-entendu $\mathcal{B}, \mathcal{B}$

$g(\vec{u})$ $g(\vec{v})$ $g(\vec{n})$

Que fait $g$ ?




$g(\vec{u}) \underset{\text{méth. 1}}{=}$ 1ère col. de $A$ (car $A$ est ds la base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{n}\}$)

$$-1.\vec{u} + 0.\vec{v} + 0.\vec{n} = -\vec{u}$$

méth 2

$$g(\vec{u}) = A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ds } \mathcal{B}$$

coords de $\vec{u}$ ds $\mathcal{B}$

$\downarrow$ $-\vec{u}$

$g(\vec{x})$ : matrice $A$, coords $X$ $\Longrightarrow$ $\underbrace{A \times X}_{\text{ds } \mathcal{B}}$

Matrice diagonale

$$\begin{cases} g(\vec{u}) = -\vec{u} \\ g(\vec{v}) = 2.\vec{v} \\ g(\vec{n}) = 2.\vec{n} \end{cases}$$

$\longrightarrow$ interp. géom :

$g \longrightarrow$ sym. / plan $(\vec{v}, \vec{n})$

$\circ$

homothétie $\times 2$ / $\vec{v}, \vec{n}$

facile d'interpréter géométriquement.

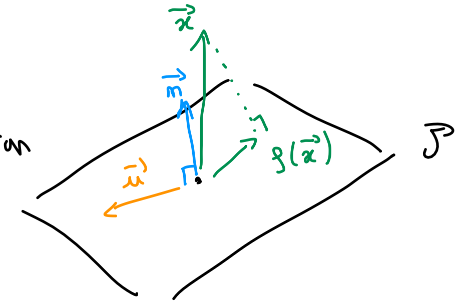
$\vec{u}, \vec{v}, \vec{n}$ sont des $\boxed{\text{vecteurs propres}}$ → val. propre associée !

$g(\vec{u}) = \lambda . \vec{u} \longrightarrow \lambda = -1$

$\phantom{g(}\vec{v} \qquad\quad \vec{v} \longrightarrow \lambda = 2$

$\phantom{g(}\vec{n} \qquad\quad \vec{n} \longrightarrow \lambda = 2$

ex : projection




$f$ : projection $\perp$ sur $\mathcal{P}$.

Vecteurs propres ?

vects de $\mathcal{P}$ : $f(\vec{u}) = \vec{u} \longrightarrow \lambda = 1$ ) dim 2

$\vec{x}$ pas vect. propre ... $f(\vec{n}) = \vec{0} = 0.\vec{n} \longrightarrow \lambda = 0$ ) dim 1

base de vecteurs propres ?

$\mathcal{B}$ ( 2 vects ds $\mathcal{P}$ $\vec{u}, \vec{v}$ , $\vec{n} \neq \vec{0}$ )

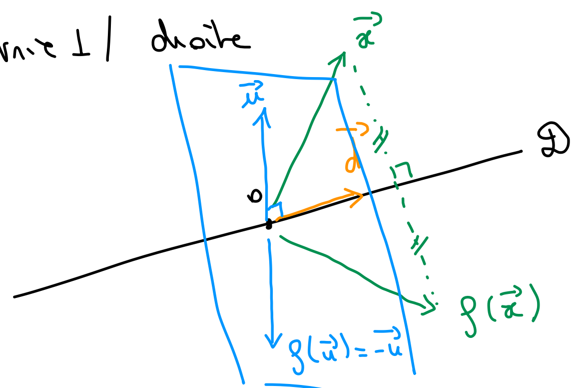
$$\mathcal{M}_{\underbrace{\mathcal{B}}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

départ $\mathcal{B}$ d'arrivée $\mathcal{B}$

$f(\vec{u}) = \vec{u}$, $f(\vec{v}) = \vec{v}$, $f(\vec{n}) = \vec{0}$

$$\boxed{\text{matrice diagonale} \Longleftrightarrow \text{matrice ds une base constituée de vecteurs propres}}$$

ex : symétrie $\perp$ / droite




$\mathcal{P} \perp \mathcal{D}$ (de normale $\vec{d}$)

Vecteurs propres ?

( $\vec{d} \rightsquigarrow f(\vec{d}) = \vec{d}$ ) $\searrow$ dim 1 ($\mathcal{D}$).

$\vec{u} \in$ plan $\perp \mathcal{D}$ ; $f(\vec{u}) = -\vec{u}$ $\searrow$ dim 2

$\lambda = -1$

base de vects propres

$(\vec{d}, \underbrace{\vec{u}, \vec{v}}_{\text{base de } \mathcal{P}}) = \mathcal{B}$

**Vecteur propre**

$\vec{u} \neq \vec{0}$ tq $\exists \underbrace{\lambda}_{\text{val. propre}}$

$f(\vec{u}) = \lambda.\vec{u}$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$f(\vec{d}) = \vec{d}$ ; $f(\vec{u}) = -\vec{u}$ ; $f(\vec{v}) = -\vec{v}$

# Changement de base

$f$ : sym $\perp$ / $\mathcal{P}$.

? on a cette matrice

$$\underset{\{\vec{u},\vec{v},\vec{n}\}}{\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$f(\vec{u}) = \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad f(\vec{v}) = \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad f(\vec{n}) = -\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

formule de changement de base ?

général

**Rappel formules** $\longrightarrow$ Changement de la base de départ ⊕ d'arrivée.

$$\begin{tikzcd} f : \mathbb{R}^n \arrow[r] & \mathbb{R}^m \\ \mathcal{B}_1 \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P"'] & \mathcal{B}_1' \arrow[d, "Q"] \\ \mathcal{B}_2 \arrow[r, "A'"'] & \mathcal{B}_2' \end{tikzcd}$$

$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1'}(f)$

$P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = P$

$Q = P_{\mathcal{B}_1'}^{\mathcal{B}_2'}$

) nouvelles bases

$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2'}(f)$ ? $= A'$

$$A' = Q^{-1} \times A \times P$$

Ici : on a $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$

on veut $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$

$$\begin{tikzcd} f : \mathbb{R}^3 \arrow[r] & \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{B} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P"'] & \mathcal{C} \arrow[d, "Q"] \\ \mathcal{B} \arrow[r, "A'"'] & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

on a

$Q = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$

on veut

$$A' = \overset{?}{Q^{-1}} \times A \times \overset{?}{P}$$

$$\underbrace{P_{\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_n)}^{\mathcal{B}_2 = (e'_1, \dots, e'_n)}}_{} = \underbrace{\begin{pmatrix} & & \\ e'_1 & e'_2 & \cdots & e'_n \end{pmatrix}}_{\text{vects de la nouvelle base } \mathcal{B}_2}$$

coords de $e'_1$ ds base init.

coords ds $\mathcal{B}_1$

matrice de passage

$\neq$

matrice d'une appli. linéaire

→ écrire la nouvelle base dans l'ancienne

→ vects nouvelle base en colonnes

→ écrire les coords dans l'ancienne base

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \overbrace{\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \vec{u} \quad \vec{v} \quad \vec{n} \end{array}}^{Id}$$

$\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{n}\}$

$= P$

coords de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{n}$ ds la base $\vec{u}, \vec{v}, \vec{n}$

$$P = Id = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$$

$$Q = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \vec{u} \quad \vec{v} \quad \vec{n} \end{array} \text{ ds la base canonique}$$

$\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{n}\}$ / nouvelle

$\mathcal{C} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ \ ancienne

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

à calculer

$$\underbrace{A'}_{\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)} = Q^{-1} \times \underbrace{A}_{\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)} \times \overset{Id}{P}$$

→ finir le calcul

↓ (retrouver - t - on cette matrice ?