→ Vect./val. propres

→ Trigo — prod. scalaire, vect

angles.

espaces vectoriels

P plan vectoriel engendré par $u = (1,0,1)$, $v = (0,1,1)$ | 2 vects

f : symétrie orthogonale / P.

i) f est une application linéaire ?

Plan affine | plan vectoriel

géom " | géom vectorielle

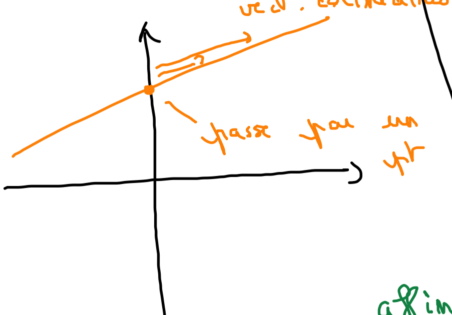
manipule des points — coords 2D, 3D $\longleftrightarrow$ confusion | espaces vectoriels

vecteurs d'origine $\neq \vec{o}$

Repère

2D → $(\vec{O}, \vec{e_1}, \vec{e_2})$

origine



droite affine

Repère $(1\,pt, \vec{e_1} \dots \vec{e_n})$

manipule des vecteurs / directions

d'origine $\vec{O}$

Base

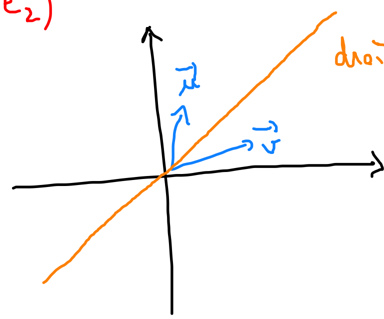
$\vec{u}, \vec{v}$ .....

↳ $\vec{u} + \vec{v}$

↳ $\lambda . \vec{u}$

2D $\longleftrightarrow$ $\mathbb{R}^2$

$(\vec{e_1}, \vec{e_2})$



droite → vecteurs colinéaires

droite vectorielle

affine = " 1 pt + vectoriel "

dim n $\longleftrightarrow$ $\mathbb{R}^n$

Base : $(\vec{e_1} \dots \vec{e_n})$

Pourquoi revenir au (***) vectoriel ?

└ espaces vectoriels → base ↓ coordonnées / matrices → applications linéaires.

→ outils : matrices

| applications linéaires.

~~translation~~ → applications linéaires.

└ pas une appli linéaire.

Géométrie affine ⇝ coordonnées homogènes

| espaces projectifs. ← translation en 3D ← op. affine

| matrice 4x4

↳ transl. de vect $\vec{v}$

$\vec{v}$ →

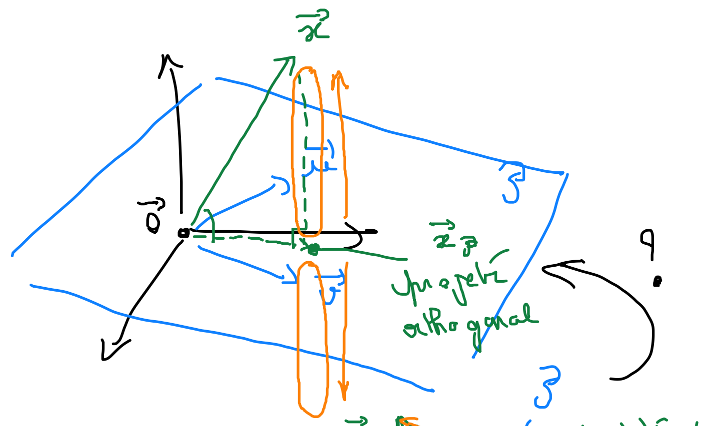
↓ s'applique à des pts | affine...

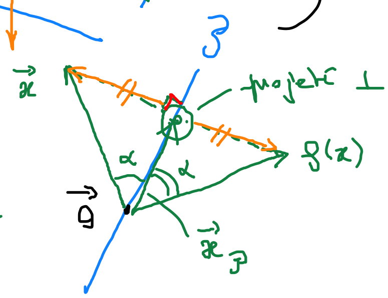
$\mathcal{P}$ plan vectoriel engendré par u, v

→ op. vectorielle

f : sym orthogonale / $\mathcal{P}$

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\vec{x} \longmapsto f(\vec{x}) : \text{vecteur}$$





Méth 2

→ projeté ⊥ de $\vec{x}$ sur $\mathcal{P}$: $\vec{x}_{\mathcal{P}}$

→ on inverse la comp ⊥

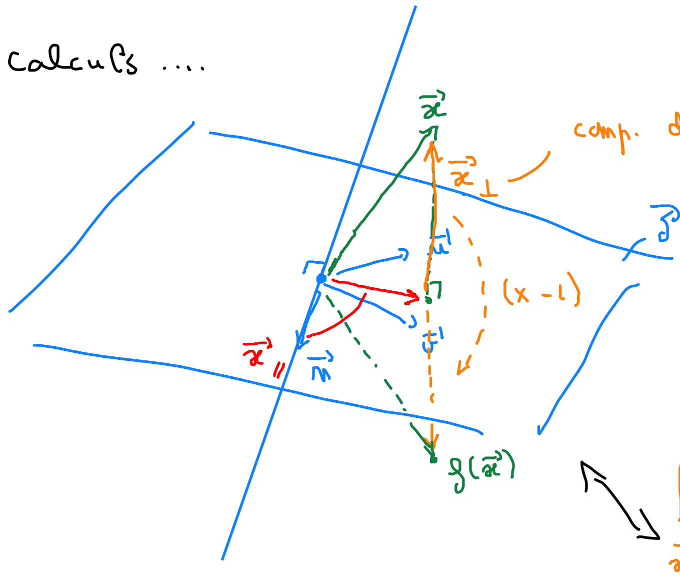
Méth 1

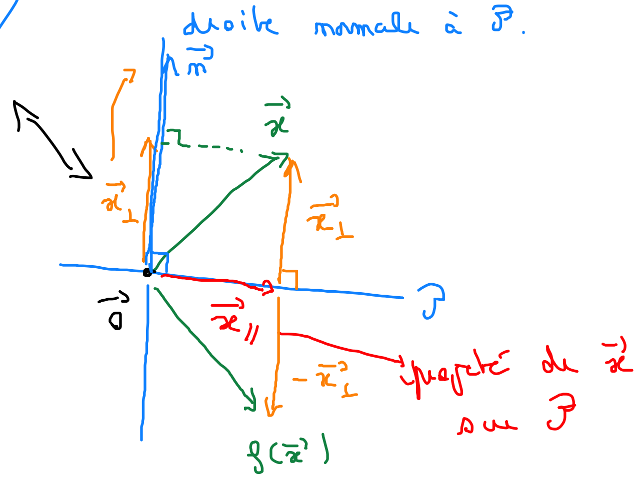
└ angle. (facile en 2D...)

└ 3D moins facile...

Faire les calculs ....

$\vec{n} =$





$\vec{x} = \vec{x}_\perp + \vec{x}_{/\!/}$

$g(\vec{x})$? $\leadsto$ $\vec{x}_\perp$? $\vec{x}_{/\!/}$?

$g(\vec{x}) = \vec{x}_{/\!/} - \vec{x}_\perp$

PB $\vec{x}_\perp$? $\vec{x}_{/\!/}$?

$\hookrightarrow \perp \mathcal{P}$ $\hookrightarrow /\!/ \mathcal{P}$

$\mathcal{P}$ engendré par $(\vec{u}, \vec{v})$

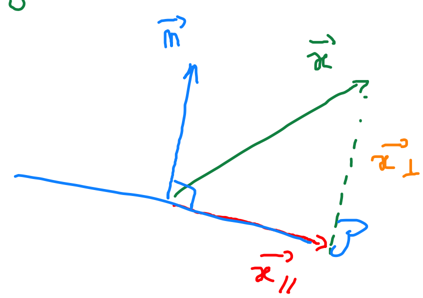
$\updownarrow$

orthogonal à $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$

$\vec{x} \cdot \vec{n} = (\vec{x}_{/\!/} + \vec{x}_\perp) \cdot \vec{n}$

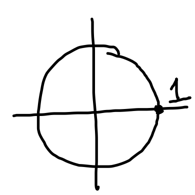
$= \underbrace{\cancel{\vec{x}_{/\!/} \cdot \vec{n}}}_{0} + \vec{x}_\perp \cdot \vec{n}$

car $\vec{x}_{/\!/} \perp \vec{n}$



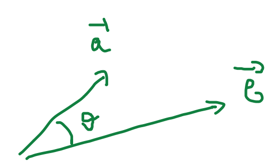
$\vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{x}_\perp \cdot \vec{n}$

colinéaires



$\leadsto \vec{a} \cdot \vec{b}$

$= \|a\| . \|b\| . \cos(\theta)$



$\vec{x}_\perp \cdot \vec{n} = \|\vec{x}_\perp\| . \|\vec{n}\|$

$\hookrightarrow \vec{x}_\perp = \longrightarrow$ longueur

$\longrightarrow$ direction : $\dfrac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$

$\|\cdot\| = 1$

$\vec{x} \cdot \vec{n} = \|\vec{x}_\perp\| . \|\vec{n}\|$

$\Downarrow$

$\|\vec{x}_\perp\| = \dfrac{\vec{x} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|}$

$\vec{x}_\perp$ = long $\times$ $\overrightarrow{\text{direction}}$

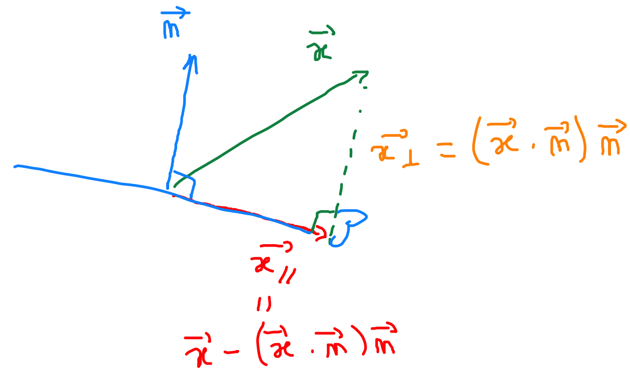
$$= \frac{\vec{x}\cdot\vec{n}}{\underbrace{\|\vec{n}\|}_{1}} \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \quad \frac{\vec n}{\|\vec n\|} = \vec{n}$$

$\vec{n} = \cancel{\vec{u}\wedge\vec{v}}\ \dfrac{\vec{u}\wedge\vec{v}}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}$ (normalisé)

$$\vec{x}_\perp = \underbrace{(\overset{\mathbb{R}}{\vec{x}\cdot\vec{n}})\,\vec{n}}_{\text{vect.}}$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{u}\wedge\vec{v}}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}$$

$\|\vec{n}\| = 1$



$$\vec{x}_{/\!/} = \vec{x} - \vec{x}_\perp$$

$$\vec{x}_{/\!/} = \vec{x} - (\vec{x}\cdot\vec{n})\,\vec{n}$$

$$s(\vec{x}) = \vec{x}_{/\!/} - \vec{x}_\perp$$

$$= \left(\vec{x} - (\vec{x}\cdot\vec{n})\,\vec{n}\right) - (\vec{x}\cdot\vec{n})\,\vec{n}$$

$$\boxed{s(\vec{x}) = \vec{x} - 2(\vec{x}\cdot\vec{n})\,\vec{n}} \quad (*)$$

linéaire

vecteurs (origine 0) $\to$ espaces vectoriels.

s est application linéaire ? $\quad s : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\boxed{s(\lambda\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\, s(\vec{x}) + s(\vec{y})} \iff \begin{cases} s \text{ commute à } + \ /\ \lambda\cdot\vec{u} \\ (1)\ s(\vec{u}+\vec{v}) = s(\vec{u}) + s(\vec{v}) \\ (2)\ s(\lambda\cdot\vec{u}) = \lambda .\, s(\vec{u}) \end{cases}$$

$(*)$ s commute / $+$ (1) ?

$$s(\vec{x}+\vec{y}) = (\vec{x}+\vec{y}) - 2\left((\vec{x}+\vec{y})\cdot\vec{n}\right)\vec{n} \qquad \left(\overset{?}{=} s(\vec{x}) + s(\vec{y})\right)$$

$$= \vec{x} + \vec{y} - 2\underbrace{(\overset{\mathbb{R}}{\vec{x}\cdot\vec{n} + \vec{y}\cdot\vec{n}})\,\vec{n}}_{(\vec{x}\cdot\vec{n})\vec{n} + (\vec{y}\cdot\vec{n})\vec{n}}$$

$$= \underbrace{\left(\vec{x} - 2(\vec{x}\cdot\vec{n})\vec{n}\right)}_{s(\vec{x})} + \underbrace{\left(\vec{y} - 2(\vec{y}\cdot\vec{n})\vec{n}\right)}_{s(\vec{y})} \quad \checkmark$$

f commute / $\cdot$ (2) ? $\quad f(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot f(\vec{x})$. ✓

$\boxed{f \text{ linéaire}}$

$\downarrow$

représentable par une <u>matrice</u>

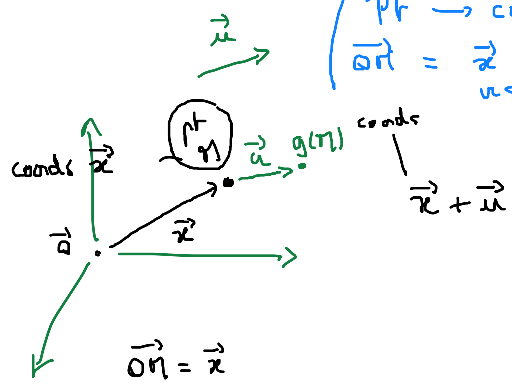
Retour à la translation

$\vec{u}$: vecteur $(\mathbb{R}^3)$

g : translation de vect $\vec{u}$

$$g(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{u}$$

— vect...
Pt $\longrightarrow$ coords
$\vec{OM} = \vec{x}$ vect



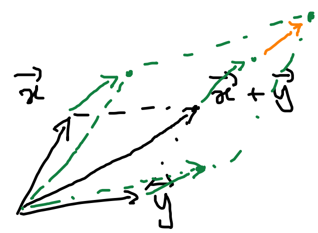
$\vec{OM} = \vec{x}$

g linéaire ?

(1) $\underline{g(\vec{x}+\vec{y})} \overset{?}{=} g(\vec{x}) + g(\vec{y})$

$\quad\quad \| \quad\quad\quad\quad\quad\quad \| \quad\quad \|$

$(\vec{x}+\vec{y})+\vec{u} \quad \neq \quad \underbrace{\vec{x}+\vec{u} \quad\quad \vec{y}+\vec{u}}_{(\vec{x}+\vec{y})+2\vec{u}}$



(2) $g(\lambda \cdot \vec{x}) \overset{?}{=} \lambda \cdot g(\vec{x})$

$\quad\quad \| \quad\quad\quad\quad\quad \|$

$\lambda \vec{x} + \vec{u} \quad \neq \quad \lambda \cdot (\vec{x}+\vec{u})$

⚠ translation

une translation : $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\boxed{\text{pas linéaire}}$ — ⚠ pas de matrice 3×3

espace projectif de dim 3 (4 coords homogènes)

$\downarrow$

translation est une application projective $\longrightarrow$ matrice 4×4.

f : symétrie orthogonale / $\mathcal{P}$

$f(\vec{x}) = \vec{x} - 2(\vec{x}\cdot\vec{n})\,\vec{n}$ ⟶ matrice ?

linéaire

3 x 3 $\mathbb{R}^3$

(x,y,z)

$(x,y,z,1)$

coords homogènes

4 x 4

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & 3\times 3 & & \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\boxed{\text{Matrice de } f \text{ ?}}$

~~La~~ matrice de f ?

↓

$\boxed{\text{dépend de la base}}$

Équation cartésienne / implicite

ex : ds $\mathbb{R}^2$ droite ≠ application

$ax + by + c = 0$

équation pas unique ... (à λ près)

sous-espace / sous-ens

(*) Matrice de $f : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{linéaire}} \mathbb{R}^m$ ds la base $\left|\begin{array}{l} \mathcal{B} \text{ au départ} - \{e_1 \dots e_n\} \\ \mathcal{B}' \text{ à l'arrivée} - \{e'_1 \dots e'_m\} \end{array}\right.$

↓

$m\ \cancel{n}$ $\begin{pmatrix} & j & \\ & \vdots & \\ & & \end{pmatrix}$

$\cancel{m}\ n$ $\quad m \times n$

(*) colonnes → images des vecteurs de base de départ

$f(\dots)$ ∈ esp. départ

↓

n colonnes

$e_j \in \mathbb{R}^n$ base de esp. départ

$f(e_j) \in \mathbb{R}^m$ esp. d'arrivée

↓

m coords

ex : $\mathcal{B}$: base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ $\mathbb{R}^3$

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ — $\mathcal{B}'$ = base canonique $\mathbb{R}^2$ $(\vec{I}, \vec{J})$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \end{pmatrix}$ ⟶ matrice $\begin{pmatrix} \ & \ & \ \end{pmatrix}$

$f(\vec{i})$ $f(\vec{j})$ $f(\vec{k})$

$$f(\vec{i}) = f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$f(\vec{j}) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

$$f(\vec{k}) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Pourquoi une appli. linéaire peut être encodée par une matrice ?

↳ avec les données de la matrice
↳ "reconstruire" f ?

matrice
$\equiv$
$f(e_1) \dots f(e_n)$

images d'une base (n vect) par f

f linéaire

$\underline{f(\vec{x})}$ $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$!

$\underline{f(\vec{x})}$! $\quad e_1 \dots e_n \longrightarrow$ base de $\mathbb{R}^n$

$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{x} = \alpha_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + \alpha_n \cdot \vec{e}_n$$

$\alpha_1 \dots \alpha_n$ existent et uniques

$$f(\vec{x}) = f(\alpha_1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha_n \cdot \vec{e}_n)$$

f linéaire

$$= \alpha_1 \cdot f(\vec{e}_1) + \dots + \alpha_n \cdot f(\vec{e}_n)$$

stockés ds la matrice...

$$f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$
$$f(\alpha \cdot \vec{u}) = \alpha \cdot f(\vec{u}).$$

$\vec{x}$ se décompose en $\vec{x} = \alpha_1 \cdot \vec{e}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{e}_n$

$$\Updownarrow$$

$\vec{x}$ a pour coords. ds la base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n\}$

$\mathcal{B}$ base $\qquad$ $\mathcal{B}'$ base

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$X_{\mathcal{B}}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = X$$

coords

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} f(e_1) & \cdots & f(e_n) \end{pmatrix} = A$$

$$f(\vec{x})$$

$$\|$$

$$A \times X = \begin{pmatrix} f(e_1) & \cdots & f(e_n) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot f(e_1) + \cdots + \alpha_n \cdot f(e_n)$$

$$f(\vec{x}) \;—\; A \times X$$

A $\qquad$ X