Parcours GIG

Géométrie et Informatique graphique

Courbures discrètes

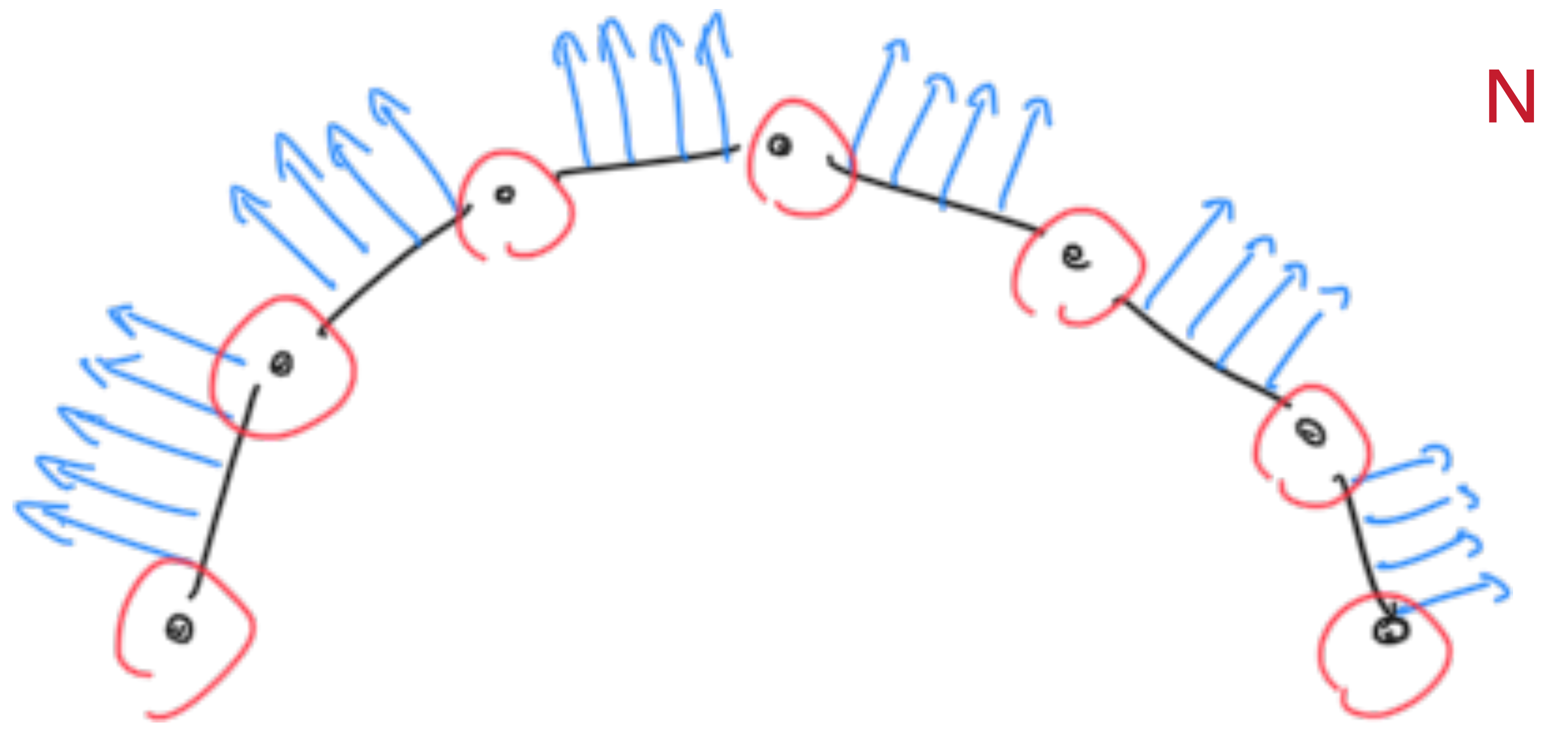
Module « modèles géométriques »

Alexandra Bac

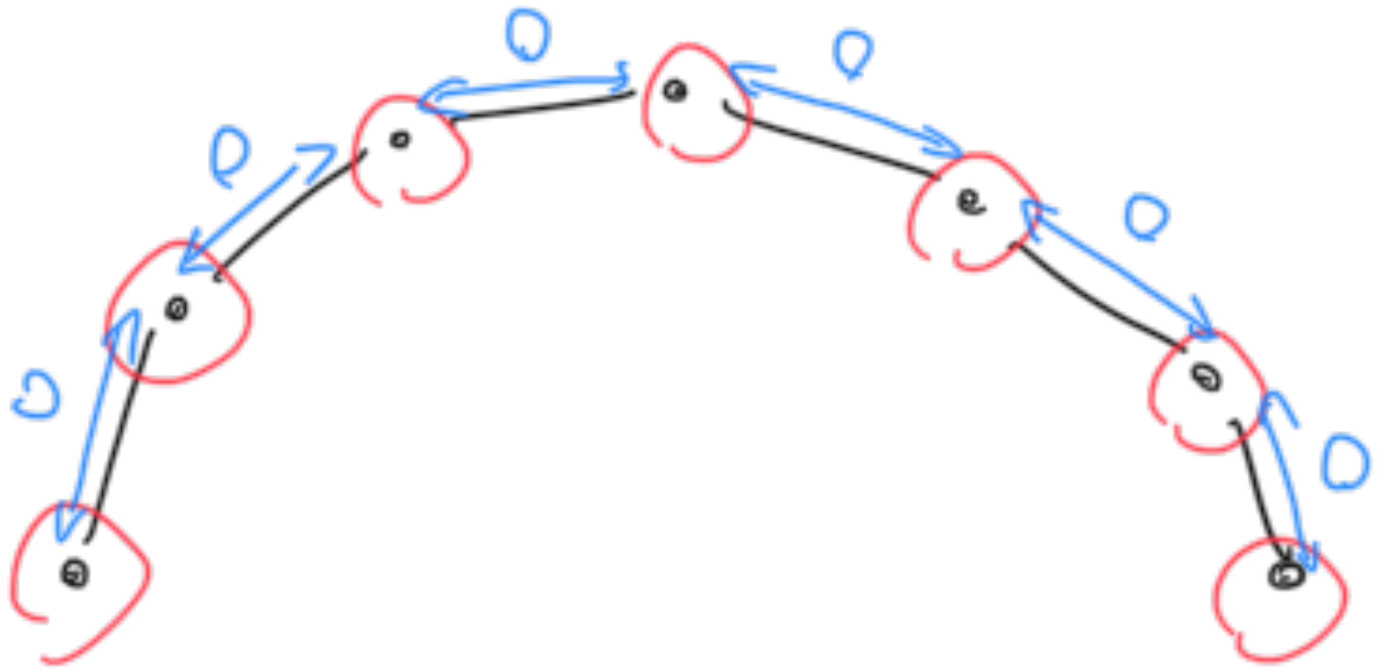
GÉOMÉTRIE DES MAILLAGES

NORMALES/COURBURES D'UN MAILLAGE ?

Non défini

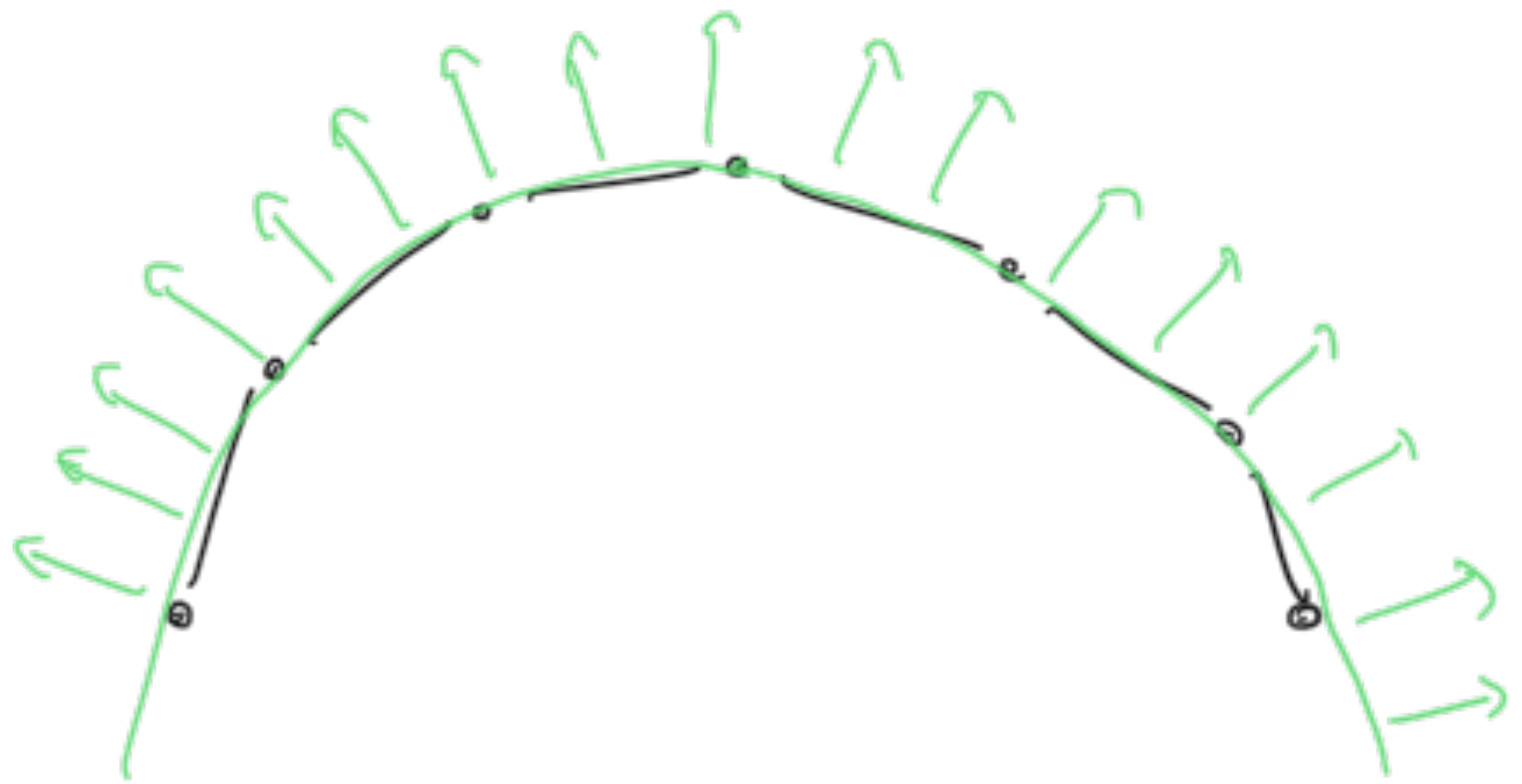


Normales



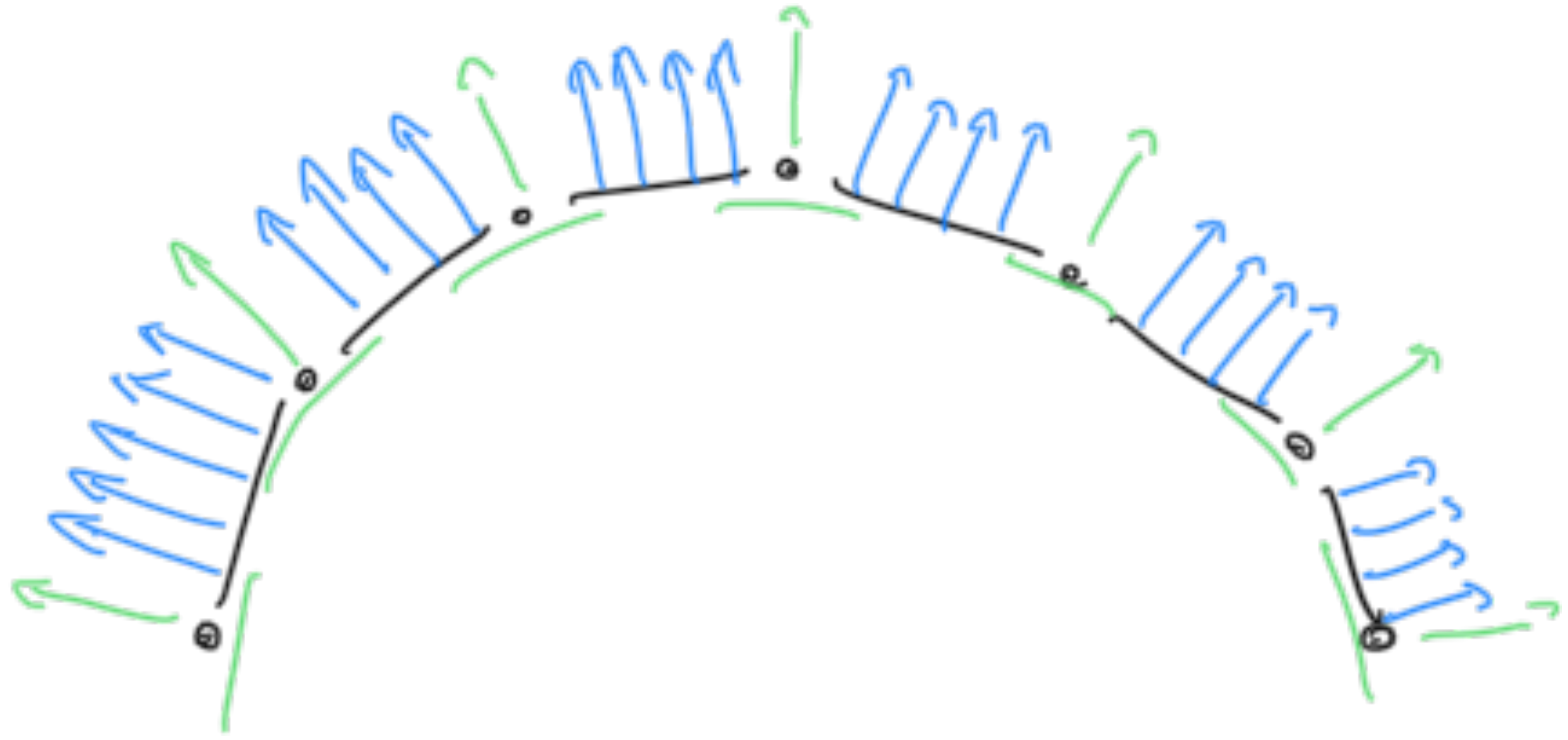
Courbure(s)

NORMALES/COURBURES D'UN MAILLAGE ?



Intuition …

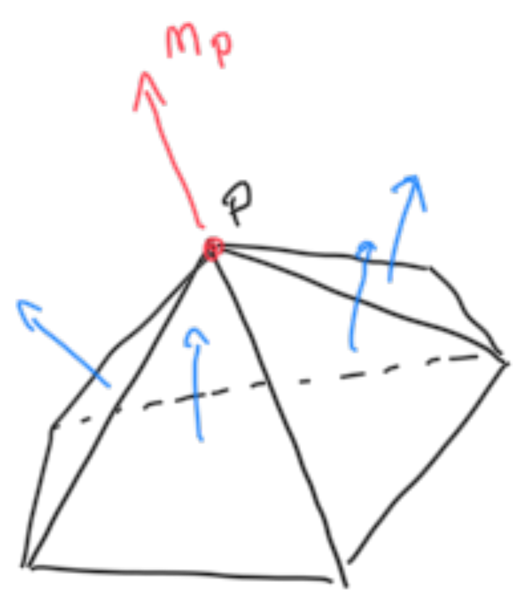
Le maillage est la discrétisation d'une surface continue



Pb : calculer des valeurs approchées cohérentes

→ approximations / heuristiques

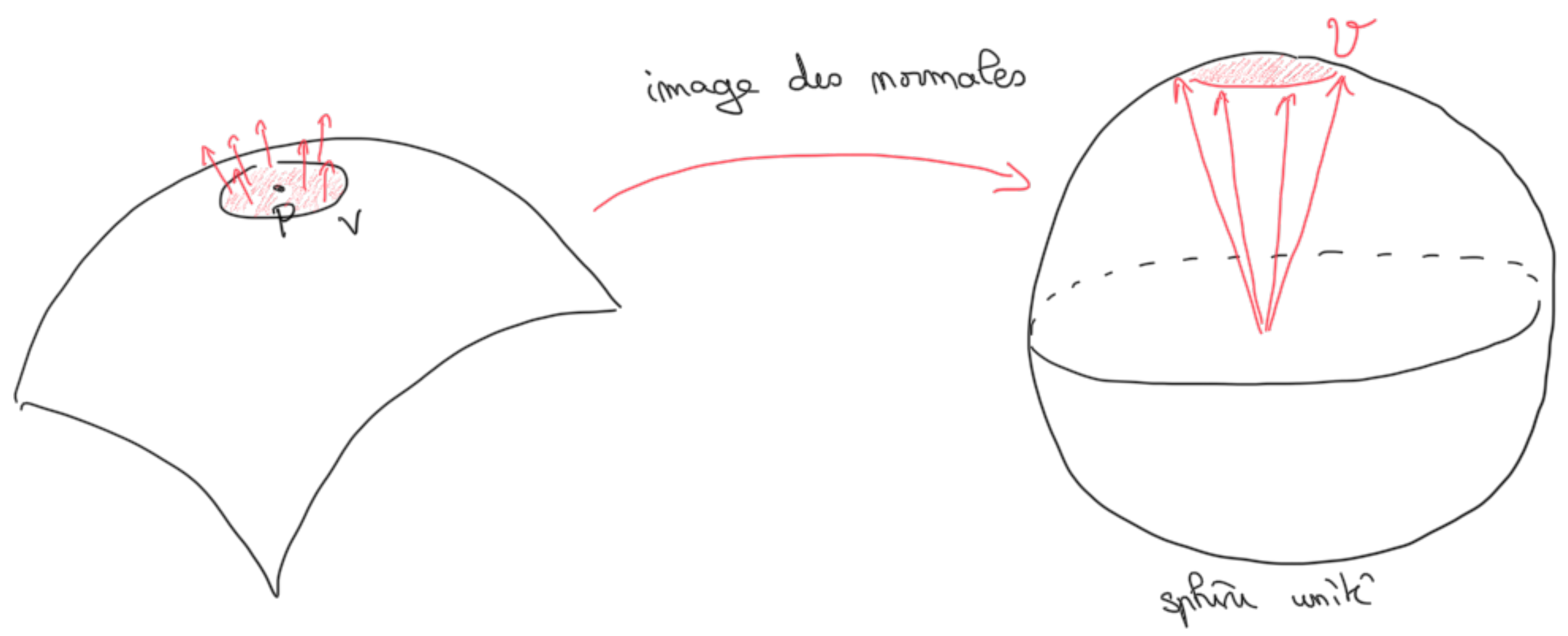
ESTIMATION DES NORMALES



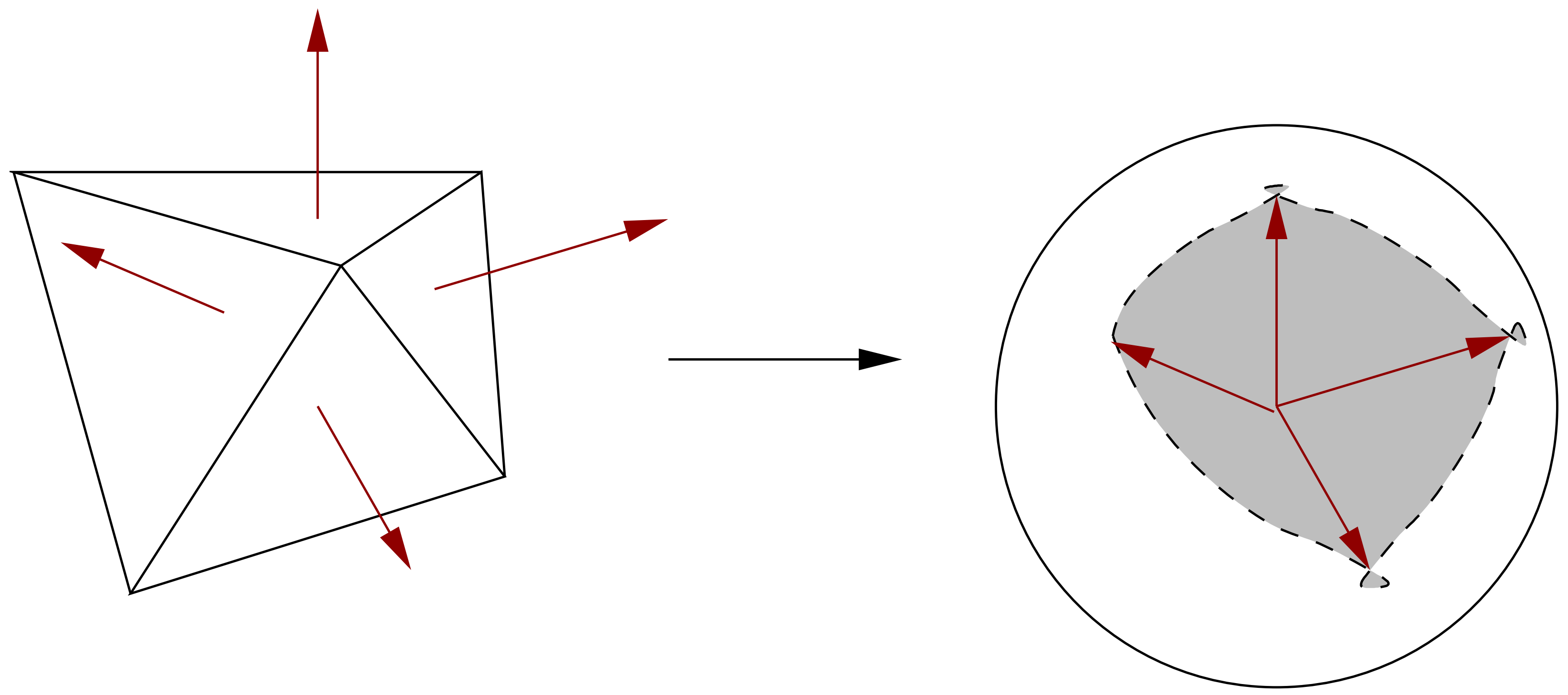
On estime généralement la normale au point p comme :

- Moyenne des normales des faces voisines
- Eventuellement pondérée par l'aire des faces

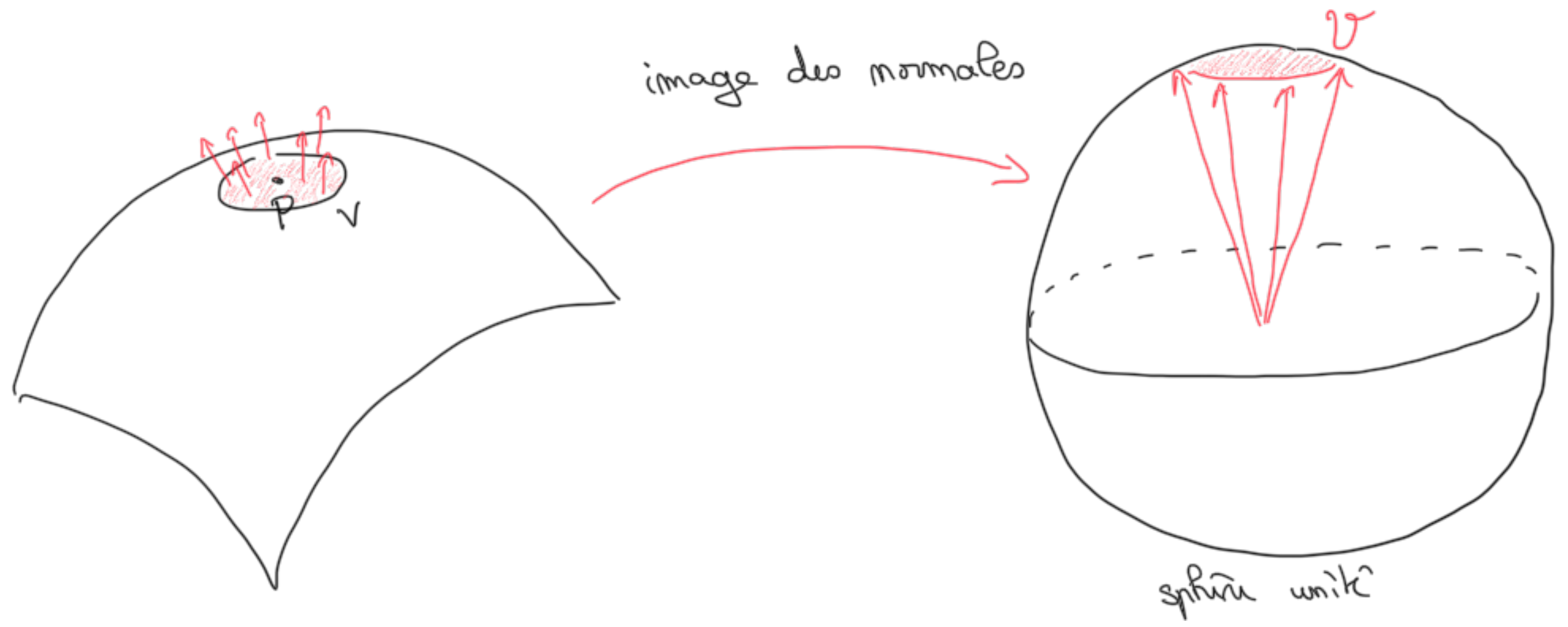
COURBURES : TH. EGREGIUM DE GAUSS ET DEFAUT ANGULAIRE



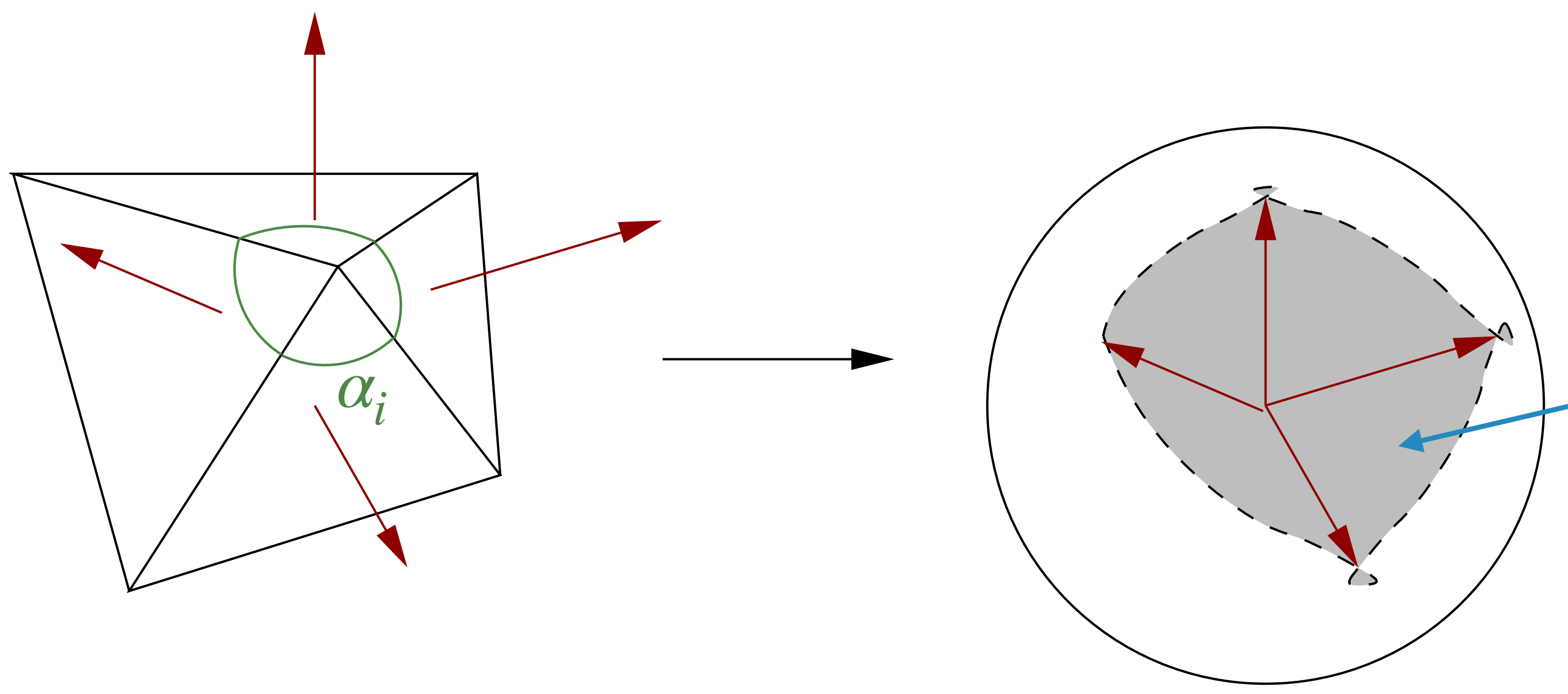
$$\lim_{V\to\{P\}} \frac{\mathrm{Aire}(\mathscr{V})}{\mathrm{Aire}(V)} = \kappa_P$$



COURBURES : TH. EGREGIUM DE GAUSS ET DEFAUT ANGULAIRE



$$\lim_{V\to\{P\}} \frac{\mathrm{Aire}(\mathscr{V})}{\mathrm{Aire}(V)} = \kappa_P$$

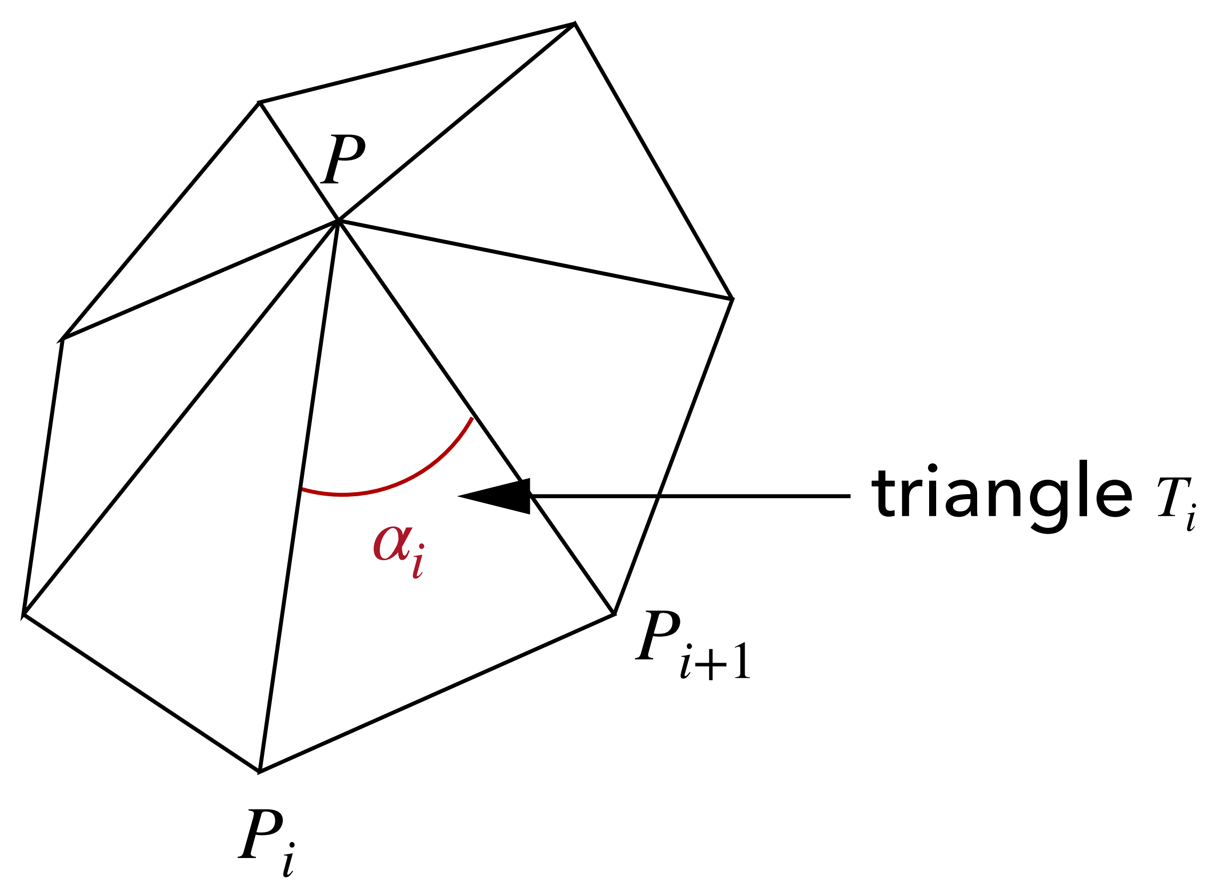


Valeur de cette aire sphérique :

$$2\pi - \sum_i \alpha_i$$

Défaut angulaire

COURBURE GAUSSIENNE « CLASSIQUE » (REGGE)

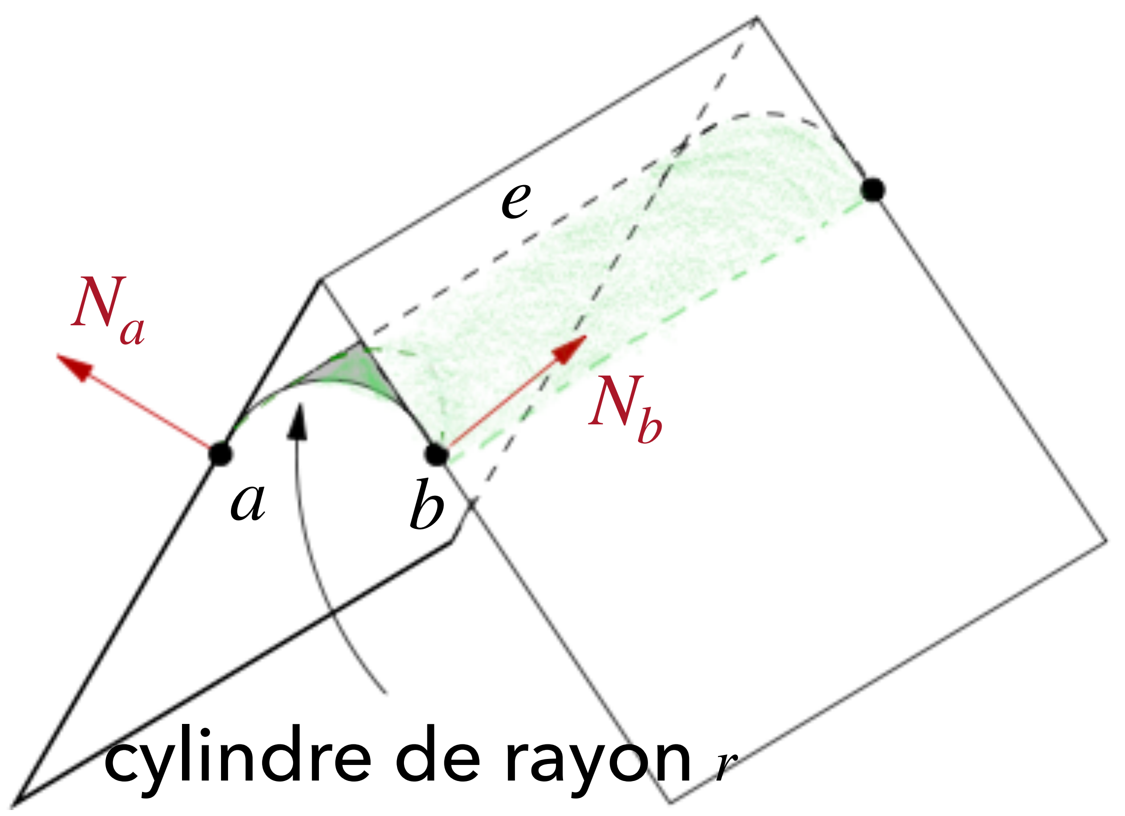


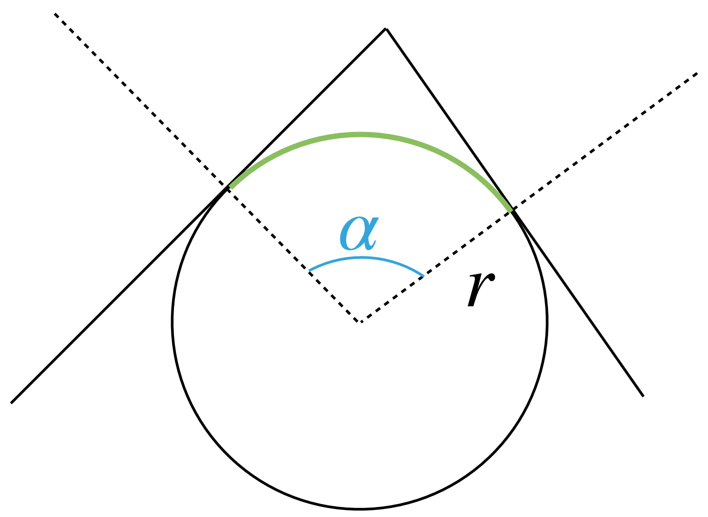
Approximation de la courbure Gaussienne :

$$K_P = \frac{2\pi - \sum_i \alpha_i}{\sum_i \mathrm{Aire}(T_i)}$$ au point P

- C'est la formule que vous avez implémentée au TP1
- Peu précise, dépend du maillage
- Ne converge pas

COURBURE MOYENNE « CLASSIQUE »





- Aire de la portion de cyclindre :

$$l(e) \cdot \alpha \cdot r$$

- Intégrale de la courbure moyenne sur cette portion :

$$\frac{1}{2r} \cdot l(e) \cdot \alpha \cdot r = \frac{1}{2} \cdot l(e) \cdot \alpha$$

Approximation de la courbure moyenne :

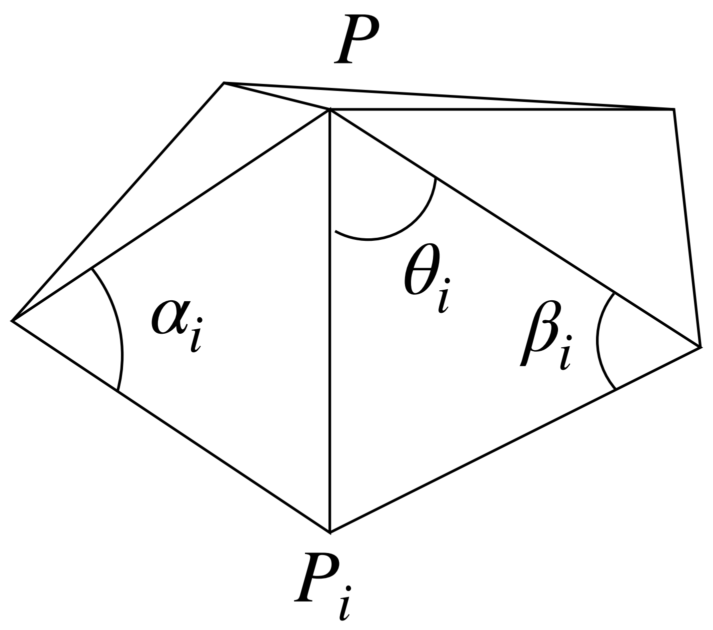
$$H_e = \frac{1}{2} l(e) \cdot \alpha$$ le long de l'arête e

- Peu précise …
- Ne converge pas

APPROXIMATIONS PLUS FINES

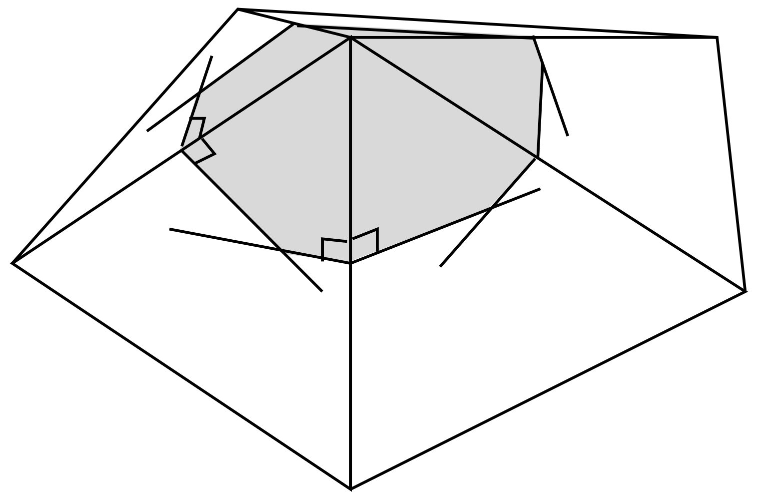
On the angular defect of triangulations and the pointwise approximation of curvatures
V. Borrelli, F. Cazals, J.-M. Morvan

Discrete Differential-Geometry Operators for Triangulated 2-Manifolds
M. Meyer, M. Desbrun, P. Schröder, and A. Barr



$$H_P \cdot N_P = \frac{1}{2\ Aire_{\text{mixte}}} \sum_i (\cot\alpha_i + \cot\beta_i)(P - P_i)$$

$$K(P) = \frac{2\pi - \sum_i \theta_i}{Aire_{\text{mixte}}}$$



La convergences n'est pas garantie :

- dépend de la triangulation
  plus elle est régulière, meilleure est la convergence
  - idéal : régulière, valence 6
- sur une triangulation irrégulière, non garantie
  - au mieux, convergence en norme $\mathscr{L}_1$

AUTRES APPROCHES

On the angular defect of triangulations and the pointwise approximation of curvatures
V. Borrelli, F. Cazals, J.-M. Morvan

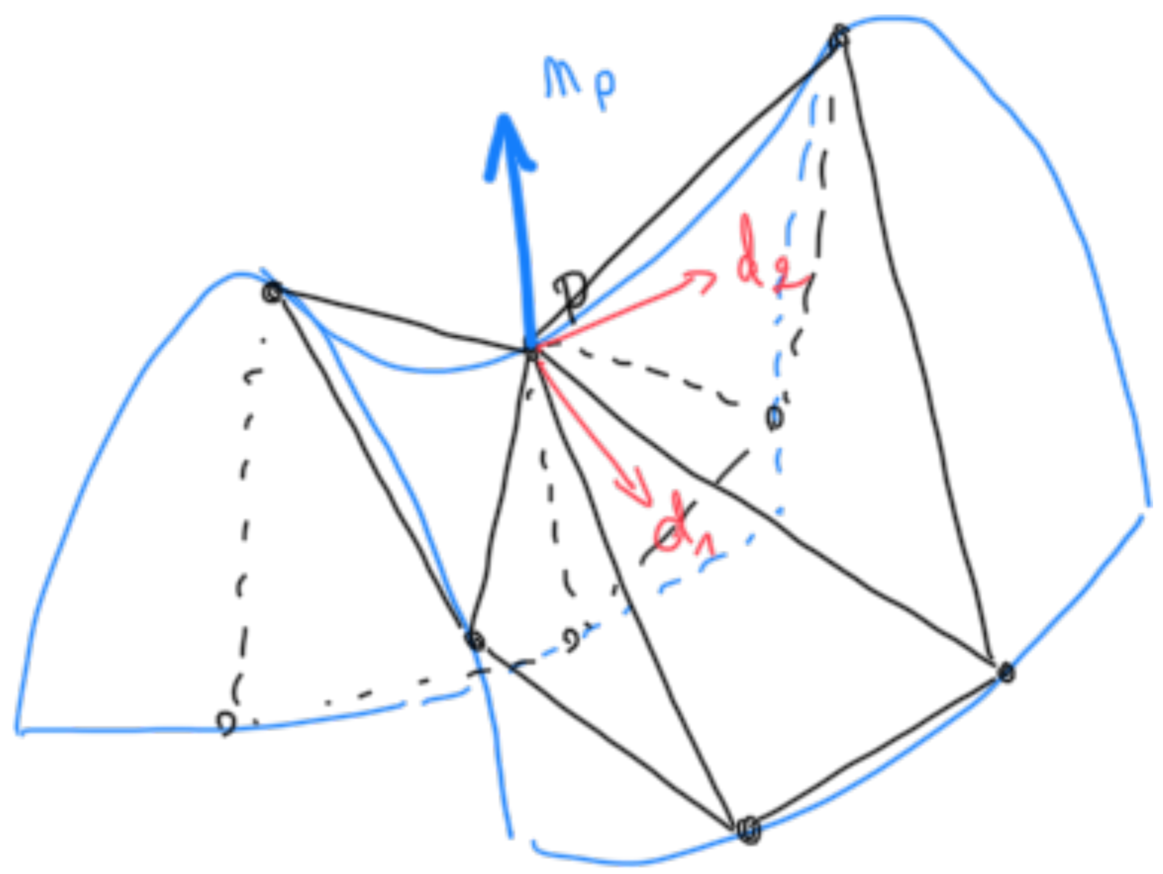
Discrete Differential-Geometry Operators for Triangulated 2-Manifolds
M. Meyer, M. Desbrun, P. Schröder, and A. Barr

Estimating the Tensor of Curvature of a Surface from a Polyhedral Approximation
G. Taubin

$\downarrow$

Estimation de K_P (tenseur de courbure)

CALCUL VIA UNE SURFACE CONTINUE



Ajuster une surface lisse
(paramétrique ou cartésienne)
au voisinage de p

↓

Calculer normale et courbures
de la surface lisse

- Méthode plus lente mais plus stable
- La question est alors de bien approcher localement le maillage